Prof. Dr. G. Schneider, Dr. B. de Rijk,
Nicole Gauß M.Sc., Daniela Maier M.Sc.

Gruppenübung 8

Aufgabe 1 (Differentialgleichungssystemen I)
Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 8 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2 (Differentialgleichungssystemen II)

a) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ diagonalisierbar mit Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ und $\det(A) < 0$. Zeigen Sie, dass das Differentialgleichungssystem $\dot{x} = Ax$ eine nicht-triviale Lösung $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ mit $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$ hat.

b) Die allgemeine Lösung eines Differentialgleichungssystems $\dot{x} = Ax$ mit $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ist

$$x(t) = c_1 e^{7t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-5t} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Bestimmen Sie die Matrix A.

Hinweis: Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von A.

Aufgabe 3 (Quadriken) Sei die quadratische Form $q\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$q(x) = 3x_1^2 - 3x_2^2 - 8x_1x_2 + 22x_1 + 4x_2 + 7.$$

a) Bestimmen Sie eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, einen Vektor $b \in \mathbb{R}^2$ und eine Konstante $c \in \mathbb{R}$, so dass $q(x) = x^\top Ax + b^\top x + c$.

b) Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix $S \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, so dass $q(Sy) = y^\top \Lambda y + \tilde{b}^\top y + c$, wobei $\Lambda \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ eine Diagonalmatrix und $\tilde{b} \in \mathbb{R}^2$ ist.

c) Bestimmen Sie die Gestalt der Quadrik $Q = \{x \in \mathbb{R}^2 : q(x) = 0\}$ anhand der Normalform $\{y \in \mathbb{R}^2 : y^\top \Lambda y + \tilde{b}^\top y + c = 0\}$.

Aufgabe 4 (Differenzierbarkeit, Richtungsableitung, Jacobimatrix)

a) Überprüfen Sie die Funktion $c\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,1)\} \to \mathbb{R}$ mit $c(x,y) = 4\ln\sqrt{x^2+(y-1)^2}$ auf Differenzierbarkeit in $(-1,2)$ und berechnen Sie die Richtungsableitung von c in $(-1,2)$ in Richtung des Vektors $v = \frac{1}{5}\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 4 \end{smallmatrix}\right)$.

b) Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen jeweils die Jacobimatrix bzw. den Gradienten.

i) $h(x,y,z) = \begin{pmatrix} xy^2z^3e^{xy^2z^3} \\ x^2e^y - \sin x \end{pmatrix}$, ii) $q(x,y,z) = \arctan(\cos(x^2y)) + e^z\cosh(x+y)$.

Aufgabe 5 (Differenzierbarkeit, Richtungsableitung)
Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei in (x_0,y_0) differenzierbar und für $u = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$ und $v = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ gelte $\partial_u f(x_0,y_0) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ bzw. $\partial_v f(x_0,y_0) = \sqrt{2}$.

a) Bestimmen Sie $\partial_w f(x_0,y_0)$ für $w = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.

b) Bestimmen Sie die Richtung und den Betrag des steilsten Anstiegs von f im Punkt (x_0,y_0).

Aufgabe 6 [Schriftliche Aufgabe (6 Punkte)]

a) Bestimmen Sie die Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= -x_1 + 2x_2 + x_3 \\ \dot{x_2} &= x_2 + 2x_3 \\ \dot{x_3} &= 4x_2 - x_3 \end{aligned}$$

mit der Anfangsbedingung $(x_1(0), x_2(0), x_3(0)) = (1,-1,2)$.

b) Bestimmen Sie die Normalform der folgenden Quadrik

$$Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + \sqrt{2}x_2 + 2x_3 + \tfrac{1}{8} = 0 \right\},$$

das heißt, bestimmen Sie eine Diagonalmatrix $\Lambda \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, eine orthogonale Matrix $S \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, einen Vektor $b \in \mathbb{R}^3$ und eine Konstante $c \in \mathbb{R}$, so dass $Q = \{Sy \in \mathbb{R}^3 : y^\top \Lambda y + b^\top y + c\}$. Bestimmen Sie außerdem den Typ der Quadrik.

Hinweis: Wenden Sie das gleiche Verfahren wie in Aufgabe 2 an.

c) Bestimmen Sie für die Funktion $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$h(x,y) = x^2e^y - \sin(x)$$

die Richtungsableitung im Punkt $(0,1)$ in Richtung des Vektors $v = \frac{1}{5}\left(\begin{smallmatrix} -4 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$.