Prof. Dr. G. Schneider, Dr. B. de Rijk,
Nicole Gauß M.Sc., Daniela Maier M.Sc.

Vortragsübung 4

Aufgabe 1 *Matrizenmultiplikation*
Gegeben seien die folgenden Matrizen:

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ A_3 = (1, -2, 1),\ A_4 = A_3^\top.$$

Berechnen Sie alle möglichen Produkte $A_i A_j$, mit $i, j \in \{1, \dots, 4\}$.

Aufgabe 2 *Transposition, symmetrische und schiefsymmetrische Matrizen*

a) Zeigen Sie: Ist $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar, so ist auch $A^\top$ invertierbar und es gilt $(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top$.

b) Die Matrix $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sei *schiefsymmetrisch*, d.h. es gilt $T^\top = -T$. Zeigen Sie:

   i) $\det T = 0$, falls n ungerade.

   ii) $x^\top T x = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

c) Eine Matrix $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt *symmetrisch*, wenn $S^\top = S$. Zeigen Sie: Jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ lässt sich eindeutig als Summe einer symmetrischen Matrix S und einer schiefsymmetrischen Matrix T schreiben.

Aufgabe 3 *Lineare Abbildungen und Matrizen*
Gegeben sei der Vektorraum $\mathbb{R}^2$ mit der kanonischen Basis $\mathcal{E}_2 = \{e_1, e_2\}$ und der Basis $B = \{b_1, b_2\}$ mit $b_1 = (1,1)^\top$ und $b_2 = (1,-1)^\top$, sowie der Vektorraum $\mathbb{R}^3$ mit der kanonischen Basis $\mathcal{E}_3 = \{e_1, e_2, e_3\}$ und der Basis $C = \{c_1, c_2, c_3\}$ mit $c_1 = (2, 1, -1)^\top$, $c_2 = (1, 0, 3)^\top$ und $c_3 = (-1, 2, 1)^\top$. Die lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ sei gegeben durch

$$L \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_2 - 3x_3 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Matrixdarstellungen von L bezüglich der Basen $\mathcal{E}_2$ und $\mathcal{E}_3$ und bezüglich der Basen B und C.

Aufgabe 4 *Lösungsmengen linearer Gleichungssystemen*
Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 &= -1 \end{aligned}$$

a) Schreiben Sie das lineare Gleichungssystem in der Form $Ax = b$, mit $A \in \mathbb{R}^{2\times 3}$, $x = (x_1, x_2, x_3)^\top$ und $b \in \mathbb{R}^2$.

b) Bestimmen Sie $\ker(A)$ und $\mathrm{Rang}(A)$.

c) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $x \in \mathbb{R}^3$ des linearen Gleichungssystems $Ax = b$.