Vortragsübung 7

Aufgabe 1 *Differentialgleichungssysteme*
Bestimmen Sie die Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

mit der Anfangsbedingung $y(0) = (y_1(0), y_2(0), y_3(0))^\top = (1, -1, 2)^\top$.

Aufgabe 2 *Jacobimatrix, Richtungsableitung*

a) Bestimmen Sie die Jacobimatrix der Funktion

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} (y-z)^2 \\ xz \end{pmatrix}.$$

b) Bestimmen Sie für die Funktion $g \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit

$$g(x, y, z) = x^3 y^2 z$$

die Richtungsableitung im Punkt $(2, 1, 2)$ in Richtung des Vektors $v = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$.

c) Es seien $v_1 = (1, 1, -1)^\top$, $v_2 = (0, 1, 1)^\top$, $v_3 = (-1, 0, 1)^\top$. Weiter sei $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ im Punkt (x_0, y_0, z_0) differenzierbar. Bestimmen Sie $\nabla h(x_0, y_0, z_0)$ mit Hilfe der Richtungsableitungen

$$\partial_{v_1} h(x_0, y_0, z_0) = 2,\ \partial_{v_2} h(x_0, y_0, z_0) = 1,\ \partial_{v_3} h(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

Aufgabe 3 *Quadriken*
Für $k \in \mathbb{R}$ sei die folgende Familie von Quadriken gegeben:

$$Q_k := \{(x_1, x_2, x_3)^\top \in \mathbb{R}^3 \,|\, q_k(x) := x_1^2 + kx_2^2 + 2x_3^2 + 4x_2x_3 + 4x_1 + 1 = 0\}.$$

a) Bestimmen Sie eine symmetrische Matrix $A_k \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, einen Vektor $b \in \mathbb{R}^3$ und eine Konstante $c \in \mathbb{R}$, so dass $q_k(x) = x^\top A_k x + b^\top x + c$.

b) Bestimmen Sie für $k = -1,\ 2,\ 5$ jeweils eine orthogonale Matrix $S_k \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, so dass $q(S_k y) = y^\top \Lambda_k y + \tilde{b_k}^\top y + c$, wobei $\Lambda_k \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ eine Diagonalmatrix und $\tilde{b_k} \in \mathbb{R}^3$ ist.

c) Bestimmen Sie für $k = -1,\ 2,\ 5$ jeweils die Gestalt der Quadrik Q_k anhand der Normalform $\{y \in \mathbb{R}^3 : y^\top \Lambda_k y + \tilde{b_k}^\top y + c = 0\}$.