Prof. Dr. G. Schneider, Dr. B. de Rijk,
Nicole Gauß M.Sc., Daniela Maier M.Sc.

Vortragsübung 8

Aufgabe 1 *Mehrdimensionale Kettenregel*
Die Funktionen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sind gegeben durch

$$f(x,y) = x^2 + y^2, \qquad g(x,y) = \begin{pmatrix} 2\arctan\left(\frac{y}{x}\right) \\ 2\ln(\sqrt{x^2+y^2}) \end{pmatrix}.$$

Ferner sei $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ erklärt durch $h(x,y) = f(g(x,y))$.

a) Bestimmen Sie $h(2,0)$.

b) Berechnen Sie $\nabla h(2,0)$.

c) Bestimmen Sie die Tangentialebene an die durch $z = h(x,y)$ definierte Fläche im Punkt $(2,0,h(2,0))$.

Aufgabe 2 *Gradient, Divergenz, Rotation*
Sei $A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein zweimal stetig differenzierbares Vektorfeld. Zeigen Sie die folgende Operatoridentität:

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}(A)) = \nabla(\operatorname{div}(A)) - \Delta A,$$

wobei $\Delta A := (\Delta A_1, \Delta A_2, \Delta A_3)^\top$.

Aufgabe 3 *Partielle Differentialgleichungen*

a) Zeigen Sie, dass die Funktion $f\colon \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(t,x) = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},$$

ist.

b) Sei $k > 0$. Bestimmen Sie alle möglichen Lösungen der Form $f(t,x) = e^{-kt} g(x)$ der Wärmeleitungsgleichung, wobei $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar ist.

Aufgabe 4 *Laplacegleichung*
Zeigen Sie: Falls $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die Laplacegleichung

$$\Delta f = 0$$

löst, dann ist auch $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $g(x,y) = f(x^2 - y^2, 2xy)$ eine Lösung der Laplacegleichung.