Prof. Dr. G. Schneider, Dr. B. de Rijk,
Nicole Gauß M.Sc., Daniela Maier M.Sc.

Vortragsübung 10

Aufgabe 1 *Partialbruchzerlegung*
Berechnen Sie das folgende Integral:

$$\int_2^3 \frac{x^5 - x^4 + 7x^3 - 13x^2 + x + 10}{(x-1)^2(x^2+4)} \mathrm{d}x.$$

Aufgabe 2 *Uneigentliche Integrale*
Untersuchen Sie die folgenden Integrale auf Konvergenz.

a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x^2}{x^5 + 125} \mathrm{d}x,$ *b)* $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{x} \mathrm{d}x.$

Aufgabe 3 *Separierbare Differentialgleichung*
Bestimmen Sie diejenige Lösung $y(t)$ von

$$y'(t) = ty(t) + t$$

für die gilt $y(0) = 0$.

Aufgabe 4 *Basis, Lineare Abbildungen und Matrizen*

a) Zeigen Sie, dass die Menge

$$B := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bildet.

b) Gegeben sei der Vektorraum $\mathbb{R}^2$ mit der Basis $C = \{c_1, c_2\}$ mit $c_1 = (1,1)^\top$ und $c_2 = (0,-2)^\top$, sowie der Vektorraum $\mathbb{R}^3$ mit der Basis B. Die lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ sei gegeben durch

$$L \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_2 - x_3 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Matrixdarstellung von L bezüglich der Basen B und C.

Aufgabe 5 *Vektorräume*
Untersuchen Sie, welche der folgenden Mengen Untervektorräume des $\mathbb{R}^2$ sind:

a) $M_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 = y^2\}$

b) $M_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + 3y = 0\}$

Aufgabe 6 *Determinante, Kern, Rang, Inverse*
Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -2 & 10 & -9 \\ 1 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

a) Berechnen Sie die Determinante der Matrix A.

b) Was können Sie aufgrund der Determinante von A über die Invertierbarkeit und den Rang der Matrix A aussagen?

c) Bestimmen Sie $\mathrm{Rang}(A)$ und $\dim(\ker(A))$.

d) Bestimmen Sie die Inverse der Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 7 *Projektionen*

a) Geben Sie eine Orthonormalbasis der Ebene

$$E = \left\{ r \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} : r, s \in \mathbb{R} \right\}$$

an.

b) Bestimmen Sie die orthogonale Projektion von $(0, 3, 5)$ auf die Ebene E.

c) Zeigen Sie, dass die Vektoren $u_1 = (2, 1, -2)^T$, $u_2 = (1, 0, 1)^T$ orthogonal im euklidischen Vektorraum $\mathbb{R}^3$ sind und ergänzen Sie die beiden Vektoren zu einer Orthogonalbasis des $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 8 *Quadriken, Differentialgleichungssysteme*
Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Gestalt der Quadrik

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^2 : x^\top A x + \begin{pmatrix} \frac{14}{\sqrt{5}} & -\frac{52}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} x - 11 = 0\}.$$

b) Skizzieren Sie die Quadrik Q.

c) Bestimmen Sie die allgemeine, reelle Lösung des Differentialgleichungssystems $\dot{x} = Ax$.

Aufgabe 9 *Richtungsableitung*
Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei in (x_0, y_0) differenzierbar und für $u = \binom{-2}{1}$ und $v = \binom{1}{1}$ gelte $\partial_u f(x_0, y_0) = 3$ bzw. $\partial_v f(x_0, y_0) = -1$.

a) Bestimmen Sie $\nabla f(x_0, y_0)$.

b) Bestimmen Sie die Richtung des steilsten Anstiegs von f im Punkt (x_0, y_0).

Aufgabe 10 *Mehrdimensionale Kettenregel*
Die Funktionen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sind gegeben durch

$$f(x, y) = xy, \qquad g(x, y) = \begin{pmatrix} (x-2y)^2 \\ 2x^3 + y^3 \end{pmatrix}.$$

Ferner sei $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ erklärt durch $h(x, y) = f(g(x, y))$. Bestimmen Sie die Tangentialebene an die durch $z = h(x, y)$ definierte Fläche im Punkt $(1, 1, h(1, 1))$).

Aufgabe 11 *Mehrdimensionaler Satz von Taylor*
Sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y, z) = \frac{x}{y+z^2}$. Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiter Ordnung von f zum Entwicklungspunkt $(2, 1, 0)$.

Aufgabe 12 *Extrema*
Bestimmen Sie die kritischen Punkte des Polynoms

$$x^4 - x^2 + 2xy + y^2$$

sowie deren Typ.