FAQs #3

Wieso ist im Fall reeller Koeffizienten mit jeder Lösung auch ihr Realteil und ihr Imaginärteil eine Lösung?

Wir betrachten die homogene Differenzialgleichung

$$a_d y^{(d)}(t) + \cdots + a_1 y^{(1)}(t) + a_0 y(t) = 0 \tag{1}$$

mit konstanten *reellen* Koeffizienten $a_i \in \mathbb{R}$. In der Vorlesung wurde erwähnt, dass für jede Lösung y von (1) auch deren Realteil $\operatorname{Re} y$ und deren Imaginärteil $\operatorname{Im} y$ eine Lösung ist. Warum ist das so? Antwort: weil

$$\begin{aligned} a_d(\operatorname{Re} y)^{(d)}(t) &+ \cdots + a_1(\operatorname{Re} y)^{(1)}(t) + a_0(\operatorname{Re} y)(t) \\ &= a_d \operatorname{Re}(y^{(d)}(t)) \cdots + a_1 \operatorname{Re}(y^{(1)}(t)) + a_0 \operatorname{Re}(y(t)) \\ &= \operatorname{Re}\big(a_d y^{(d)}(t) + \cdots + a_1 y^{(1)}(t) + a_0 y(t)\big) \\ &= \operatorname{Re} 0 = 0. \end{aligned}$$

Im ersten Gleichheitszeichen wurde

$$\big(\operatorname{Re} y\big)^{(l)}(t) = \operatorname{Re}(y^{(l)}(t)) \quad (l \in \mathbb{N} \cup \{0\}, t \in \mathbb{R})$$

benutzt und im zweiten Gleichheitszeichen

$$\operatorname{Re}(az) = a \operatorname{Re}(z) \quad (a \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C}).$$

Für "Imaginärteil" geht es genauso wie für "Realteil".

Wie kriege ich im Fall reeller Koeffizienten die *allgemeine* reelle Lösung?

Wir betrachten wie eben die homogene Differenzialgleichung

$$a_d y^{(d)}(t) + \cdots + a_1 y^{(1)}(t) + a_0 y(t) = 0 \tag{2}$$

mit konstanten *reellen* Koeffizienten $a_i \in \mathbb{R}$. Wir wollen dann *reelle* Funktionen finden, aus denen alle (reellen) Lösungen von (2) zusammengesetzt werden können.

Sie wissen aus der Vorlesung: aus den Funktionen $t \mapsto y_{\lambda,l}(t) := t^l e^{\lambda t}$ – wobei λ die Nullstellen des charakteristischen Polynoms durchläuft und l die Menge $\{0, 1, \ldots, m_\lambda - 1\}$ (m_λ die Vielfachheit der Nullstelle λ) – kann jede Lösung y von (2) (komplex) linear kombiniert werden:

$$y(t) = \sum_{\lambda \in N} c_{\lambda,0} y_{\lambda,0}(t) + c_{\lambda,1} y_{\lambda,1}(t) + \cdots + c_{\lambda,m_\lambda-1} y_{\lambda,m_\lambda-1}(t) \quad (t \in \mathbb{R})$$

für gewisse komplexe Zahlen $c_{\lambda,l} \in \mathbb{C}$ (N bezeichnet die Menge der Nullstellen des charakteristischen Polynoms).

Allerdings sind diese $y_{\lambda,l}$ im allgemeinen nicht reellwertig, weil das charakteristische Polynmom im allgemeinen natürlich auch nichtreelle Nullstellen λ hat.

Sie können aber (im Fall reeller Koeffizienten!) aus dem System der Bausteine $y_{\lambda,l}$ immer ein neues System von Bausteinen gewinnen, die reellwertig *sind*. Wie geht das? Antwort: Sie ersetzen die Bausteine $y_{\lambda,l}$ und $y_{\overline{\lambda},l}$ durch die Funktionen $t \mapsto t^l e^{at} \cos(bt)$ und $t \mapsto t^l e^{at} \sin(bt)$, wobei a den Realteil und b den Imaginärteil von λ bezeichnet: $\lambda = a + ib$ und $\overline{\lambda} = a - ib$. (Beachten Sie, dass mit λ auch $\overline{\lambda}$ eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist, und zwar mit derselben Vielfachheit.)

Diese neuen (reellwertigen!) Funktionen sind wirklich Lösungen von (2), denn sie sind Real- bzw. Imaginärteil der Lösung $y_{\lambda,l}$. Und da Sie aus diesen neuen Funktionen die alten Bausteine $y_{\lambda,l}$ und $y_{\overline{\lambda},l}$ zurückgewinnen können:

$$y_{\lambda,l}(t) = t^l e^{\lambda t} = t^l e^{at}\big(\cos(bt) + i\sin(bt)\big), \; y_{\overline{\lambda},l}(t) = t^l e^{\overline{\lambda} t} = t^l e^{at}\big(\cos(bt) - i\sin(bt)\big),$$

können Sie tatsächlich auch aus diesen *neuen* Funktionen jede beliebige Lösung (komplex) linear kombinieren. Insbesondere können Sie aus diesen neuen Funktionen jede beliebige *reellwertige* Lösung *reell* linear kombinieren, mit anderen Worten: die allgemeine reelle Lösung y von (2) ist eine reelle Linearkombination aus diesen neuen Funktionen:

$$\begin{aligned} y(t) = &\sum_{a+ib=\lambda\in N^+} c_{\lambda,0} \cos(bt) + c_{\lambda,1}\, t\, e^{at} \cos(bt) + \dots + c_{\lambda,m_\lambda-1}\, t^{m_\lambda-1}\, e^{at} \cos(bt) \\ &+ \sum_{a+ib=\lambda\in N^+} d_{\lambda,0} \sin(bt) + d_{\lambda,1}\, t\, e^{at} \sin(bt) + \dots + d_{\lambda,m_\lambda-1}\, t^{m_\lambda-1}\, e^{at} \sin(bt) \quad (t \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

für gewisse reelle Zahlen $c_{\lambda,l}$ und $d_{\lambda,l} \in \mathbb{R}$, wobei $N^+ := \{\lambda \in N : \operatorname{Im}\lambda \geq 0\}$ (statt die Summe über N^+ laufen zu lassen, ginge auch $N^- := \{\lambda \in N : \operatorname{Im}\lambda \leq 0\}$).