FAQs #5

Wie kann es sein, dass aus etwas Falschem alles gefolgert werden kann?

Die Aussage "Aus etwas Falschem kann alles gefolgert werden" hat den folgenden präzisen Sinn: sie bedeutet, dass für eine falsche Aussage A die verknüpfte Aussage $A \Rightarrow B$ wahr ist für jede beliebige Aussage B (egal ob diese wahr ist oder falsch). Aber dass die verknüpfte Aussage $A \Rightarrow B$ (eine Folgerungsaussage) wahr ist, bedeutet *nicht*, dass die gefolgerte Aussage B wahr sein muss. Sie müssen unterscheiden zwischen der Wahrheit der verknüpften Aussage $A \Rightarrow B$ (Richtigkeit der Folgerung(sauassage)) und der Wahrheit der Aussage B (Richtigkeit der gefolgerten Aussage).

Vielleicht machen wir mal ein Beispiel: aus der falschen Aussage

$$A := \text{Stuttgart hat keine Uni}$$

können Sie alles folgern in dem Sinne, dass die Folgerungsaussage

$$\text{Wenn Stuttgart keine Uni hat, dann B}$$

wahr ist für jede beliebige Aussage B. Z.B. für die Aussage

$$B := \text{Die Assistenten der HM sind alle doof}$$

(die nicht wahr ist!).

Injektivität, Surjektivität und Bijektivität

Da einige mit den sehr wichtigen Begriffen der Injektivität, Surjektivität und Bijektivität noch Schwierigkeiten hatten, gehen wir hier noch einmal näher darauf ein. In der Vorlesung haben Sie gelernt: eine Abbildung $f : M \to N$ zwischen zwei Mengen M und N heißt

- *injektiv* genau dann, wenn gilt:

  $$\forall x, y \in M : f(x) = f(y) \Rightarrow x = y,$$

  oder äquivalent:

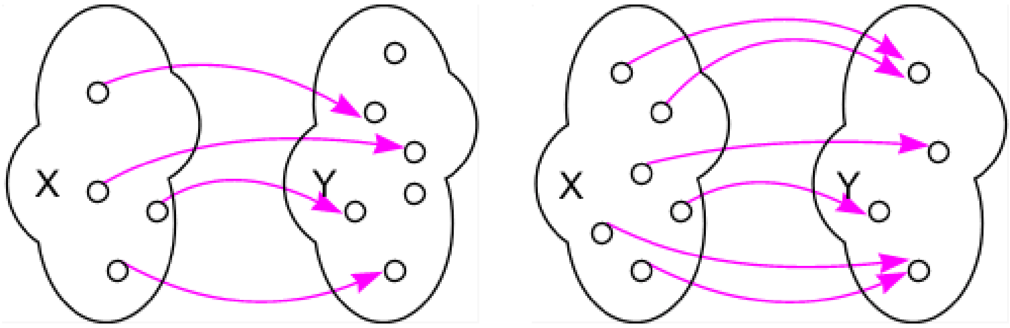
  $$\forall x, y \in M : x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y).$$

  In Worten: f ist genau dann injektiv, wenn jedes Element des Zielbereichs N höchstens einmal (das heißt, keinmal oder genau einmal) angenommen wird (oder äquivalent: wenn verschiedene Elemente des Definitionsbereichs auf verschiedene Elemente des Zielbereichs abgebildet werden).

- *surjektiv* genau dann, wenn gilt:

  $$\forall z \in N \exists x \in M : z = f(x)$$

  oder äquivalent: $f(M) = N$. In Worten: f ist genau dann surjektiv, wenn jedes Element des Zielbereichs angenommen – oder wie man auch sagt: erreicht – wird.



(a) Injektiv: jeder Punkt rechts (im Zielbereich Y), der überhaupt erreicht wird, wird nur einmal erreicht.

(b) Surjektiv: jeder Punkt rechts (im Zielbereich Y) wird erreicht (manche Punkte können dabei durchaus auch mehr als einmal angenommen werden).

Abbildung 1: Veranschaulichung

- *bijektiv* genau dann, wenn f injektiv und surjektiv ist.

Wie kann man sich Injektivität und Surjektivität veranschaulichen?

Vielleicht helfen Ihnen auch folgende Alltagsbeispiele. Schauen wir uns zunächst mal die Abbildung f an, die jedem Menschen $m \in M$ (M bezeichne die Menge aller jemals gelebt habenden Menschen) seinen Geburtstag $g \in N$ zuordnet (N die Menge aller Tage eines Jahres einschließlich dem 29. Februar). Diese Abbildung ist nicht injektiv und sie ist surjektiv (Warum?).

Als weiteres Alltagsbeispiel schauen wir uns die Abbildung f an, die jedem Studenten $s \in M$ der Uni Stuttgart seine Matrikelnummer $n \in N$ zuordnet (hier sei M die Menge aller (derzeitigen) Studenten der Uni Stuttgart und N die Menge aller 7-stelligen Zahlen). Diese Abbildung ist injektiv und sie ist nicht surjektiv (Warum?). Wir können diese Abbildung allerdings leicht surjektiv – und damit bijektiv – machen, indem wir als Zielbereich einfach $N' := f(M) \subset N$ wählen (das heißt, die Menge aller derzeit vergebenen Matrikelnummern).

Wir wollen nun noch ein paar mathematischere Beispiele anschauen:

- die Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(n) := 2n$ ist injektiv aber nicht surjektiv
- die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := x$ (oder $f(x) := x^3$) ist injektiv und surjektiv, also bijektiv
- die Abbildung $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ mit $f(x) := x^2$ (oder $f(x) := |x|$) ist surjektiv aber nicht injektiv (weil z.B. das Element $1 \in [0, \infty)$ mehr als einmal angenommen wird)
- die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := 0$ ist nicht injektiv und nicht surjektiv
- die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := \cos x$ (oder $f(x) := \sin x$) ist periodisch und damit insbesondere nicht injektiv.

Wenn Sie noch etwas mehr üben wollen, können Sie sich nochmal klarmachen (und sauber aufschreiben), warum es keine injektive Abbildung zwischen endlichen Mengen M und N geben kann, wenn M mehr Elemente hat als N, und warum es keine surjektive Abbildung zwischen endlichen Mengen M und N geben kann, wenn M weniger Elemente hat als N.

Ist an der vollständigen Induktion nicht irgendwas faul? Im Induktionsschluss setzt man doch die Aussage $A(n)$, die man ja erst beweisen will, schon als wahr voraus! Das ist doch ein Zirkelschluss – man zeigt doch mit einem Induktionsbeweis eigentlich nur: "wenn $A(n)$ wahr ist, dann ist $A(n)$ wahr", und bildet sich ein, damit gezeigt zu haben, dass $A(n)$ wahr ist!

Das stimmt nicht: man zeigt in einem Induktionsschluss für jedes beliebige $n \in \mathbb{N}$:

wenn $A(n)$ wahr ist, dann ist auch $A(n+1)$ wahr

und eben *nicht* – wie oben unterstellt –

wenn $A(n)$ wahr ist, dann ist $A(n)$ wahr.

(Das ist zwar natürlich richtig, aber daraus folgt nicht, dass $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ wahr ist, das heißt, man kommt damit nicht ans gewünschte Ziel).

In einem Induktionsbeweis zeigt man

(i) dass die Aussage $A(1)$ wahr ist (Induktionsanfang) und

(ii) dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die verknüpfte Aussage $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ wahr ist (Induktionsschluss). (Vorsicht: die verknüpfte Aussage $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ ist zu unterscheiden von ihren Bestandteilen $A(n)$ und $A(n+1)$!)

Wenn man diese beiden Punkte gezeigt hat, dann weiß man, dass die Aussage $A(m)$ wahr ist für alle $m \in \mathbb{N}$ (oder anders gesagt, dass die Aussage $\forall m \in \mathbb{N} : A(m)$ wahr ist). Warum?
Ganz einfach: $A(1)$ ist wahr nach (i). Wegen (ii) ist dann aber auch $A(2)$ wahr. (Sie sollten das genau begründen können. Zur Sicherheit hier eine mögliche genaue Begründung: nach (ii) ist die Aussage $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ wahr für *alle* $n \in \mathbb{N}$, also insbesondere für $n := 1 \in \mathbb{N}$. Das heißt, $A(1) \Rightarrow A(2)$ ist wahr. Da nun aber nach (i) auch $A(1)$ wahr ist, muss auch $A(2)$ wahr sein (Wahrheitstafeldefinition von Implikationen!).) Wir wissen jetzt also schon mal, dass $A(1)$ und $A(2)$ wahr sind. Wegen (ii) ist insbesondere $A(2) \Rightarrow A(3)$ wahr und wegen der eben gezeigten Wahrheit von $A(2)$ ist damit auch $A(3)$ wahr ...
Wir bekommen also mit (i) und (ii) tatsächlich, dass die Aussagen $A(1), A(2), A(3), \ldots$ wahr sind, oder anders gesagt: dass die Aussage $A(m)$ für jedes $m \in \mathbb{N}$ wahr ist. An Induktionsbeweisen ist also doch nichts faul!