Prof. Dr. G. Schneider, Dr. B. de Rijk,
Nicole Gauß M.Sc., Daniela Maier M.Sc.

Gruppenübung 07

Aufgabe 1 (Logik)

a) Bilden Sie die Negationen folgender Aussagen ohne Verwendung des Zeichens $\neg$

   i) Bei jeder Ziehung der Lottozahlen gewinnt jemand eine Million Euro.

   ii) $\forall x \in M \; \exists y \in N : y \geq x$.

   iii) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_0 : |a_n| \leq \varepsilon$.

b) Zeigen Sie mit Hilfe von Wahrheitswertetafeln, dass die folgenden Aussagen immer wahr sind:

   i) $(A \wedge (A \Longrightarrow B)) \implies B$

   ii) $((A \Longrightarrow B) \wedge (A \Longrightarrow \neg B)) \iff \neg A$

   iii) $((A \Longrightarrow B) \wedge (\neg A \Longrightarrow B)) \iff B$

Aufgabe 2 (Beweisprinzipien)

a) Beweisen Sie, dass für beliebige $n, m \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(n \text{ gerade } \vee \; m \text{ gerade}) \iff (n \cdot m) \text{ gerade.}$$

b) Zeigen Sie, dass $\sqrt{3}$ eine irrationale Zahl ist. Wieso funktioniert der Beweis für $\sqrt{4}$ nicht?

Aufgabe 3 (Vollständige Induktion)
Zeigen Sie durch vollständige Induktion:

a) $\forall n \in \mathbb{N} : \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$.

b) $\forall n \in \mathbb{N} : n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ ist ein Vielfaches von 9.

Aufgabe 4 (Binomialkoeffizienten)

a) Zeigen Sie die Pascalsche Regel:

$$\forall m \in \mathbb{N}\ \forall k \in \mathbb{N} \text{ mit } k < m : \binom{m}{k} + \binom{m}{k+1} = \binom{m+1}{k+1}.$$

b) Beweisen Sie durch vollständige Induktion:

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall m \in \mathbb{N} \text{ mit } m \leq n : \sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}.$$

Hinweis: Verwenden Sie Teilaufgabe a).

Aufgabe 5 [**Schriftliche Aufgabe 6 Punkte**]

a) Zeigen Sie mittels einer Wahrheitswertetafel, dass die Regel von de Morgan:

$$\neg(A \vee B) \iff \neg A \wedge \neg B$$

immer wahr ist.

b) Zeigen Sie durch vollständige Induktion:

i) $\forall n \in \mathbb{N} : 11^n - 4^n$ ist ein Vielfaches von 7.

ii) $\forall n \in \mathbb{N} : \displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.