Prof. Dr. G. Schneider, Dr. B. de Rijk,
Nicole Gauß M.Sc., Daniela Maier M.Sc.

Gruppenübung 09

Aufgabe 1 (Folgen und Konvergenz)
Untersuchen Sie die nachstehenden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz und berechnen Sie gegebenfalls ihre Grenzwerte:

$$a)\quad a_n = \frac{n^2+n+1}{n^3+4n^2+5n}, \qquad b)\quad a_n = \frac{2n-\sqrt{n}}{(\sqrt{n}+1)^2},$$

$$c)\quad a_n = \left(\frac{n}{n-2}+\frac{n+2}{n-4}\right)^{2017}, \qquad d)\quad a_n = \sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}.$$

Aufgabe 2 (Folgen und Konvergenz)
Untersuchen Sie die nachstehenden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz und berechnen Sie gegebenfalls ihre Grenzwerte:

$$a)\quad a_n = (-1)^n + \frac{n}{2+n^3}, \qquad b)\quad a_n = n\left(\sqrt{n^4+8n}-\sqrt{n^4+5}\right),$$

$$c)\quad a_n = 1+\left(\frac{1}{1000}\right)^n, \qquad d)\quad a_n = \left(1+\frac{1}{1000}\right)^n.$$

Aufgabe 3 (Beweisaufgabe)
Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sowie $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen reeller Zahlen. Beweisen Sie: Gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für $n \geq n_0$ die Ungleichung $|c_n| \leq |a_n| \cdot |b_n|$ gilt und ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge, dann ist $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

Aufgabe 4 (Supremum, Infimum, Maximum und Minimum)
Untersuchen Sie, ob folgende Teilmengen von $\mathbb{R}$ ein Supremum, Infimum, Maximum oder Minimum besitzen und bestimmen Sie es gegebenfalls.

$$a)\quad M_1 = [0,5), \qquad b)\quad M_2 = (0,6] \cup (8,13),$$

$$c)\quad M_3 = \left\{\frac{n}{1+n^2} : n \in \mathbb{N}\right\}, \qquad d)\quad M_4 = \left\{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq 5\right\}.$$

Aufgabe 5 (Elementare Funktionen)

a) Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\text{i) } \sin(ix) = i\sinh(x), \qquad \text{ii) } \cos(ix) = \cosh(x), \qquad \text{iii) } \tan(ix) = i\tanh(x).$$

b) Seien

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sinh(x) \qquad \text{und} \qquad g\colon [0,\infty) \to \mathbb{R},\ g(x) = \cosh(x).$$

Bestimmen Sie die Wertebereiche von f unf g und berechnen Sie die Umkehrfunktionen f^{-1} and g^{-1} als Funktionen des natürlichen Logarithmus.

Bemerkung: Die Umkehrfunktionen des Sinus und Kosinus Hyperbolicus heißen Areasinus und Areakosinus Hyperbolicus, kurz arsinh und arcosh.

Aufgabe 6 [**Schriftliche Aufgabe 6 Punkte**]

a) Untersuchen Sie die nachstehenden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz und berechnen Sie gegebenfalls ihre Grenzwerte:

$$i) \quad a_n = \frac{3n^3 - 4n + (-1)^n}{(2n - \sqrt{n})^3 - 4}, \quad ii) \quad a_n = \frac{2^n + 3^n}{3^n + n^5}, \quad iii) \quad a_n = \sqrt{4 + n^2} - n.$$

b) Untersuchen Sie, ob die Teilmenge

$$M = \left\{ 1 - (-1)^n \left(1 - \frac{1}{n} \right) : n \in \mathbb{N} \right\},$$

von $\mathbb{R}$ ein Supremum, Infimum, Maximum oder Minimum besitzt und bestimmen Sie es gegebenfalls.

c) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen reeller Zahlen. Beweisen oder widerlegen Sie: Ist $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n = a_n b_n$ eine Nullfolge, dann ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

Bemerkung: Es gibt 2 Bonuspunkte, falls Sie die schriftliche Aufgabe mit LaTeX schreiben (geben Sie ein gedrucktes PDF-Dokument ab, dass unter Verwendung von LaTeX hergestellt ist). Komplett identische Abgaben werden nicht akzeptiert.