Gruppenübung 11

Aufgabe 1 (Regeln von de l'Hôpital)

a) Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte mit den Regeln von de l'Hôpital:

$$\text{i) } \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x} \qquad \text{ii) } \lim_{x\to 2} \frac{4x^2 - 8x}{x^2 - x - 2} \qquad \text{iii) } \lim_{x\to 0} \frac{2\sin(x) - \sin(2x)}{2e^x - 2 - 2x - x^2}.$$

b) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = x - \sin x$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $g(x) = x$. Darf man, wenn man den Grenzwert $\lim_{x\to\infty} f(x)/g(x)$ berechnen will, die Regel von de l'Hôpital anwenden und folgern, dass:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - \cos x}{1} = \text{divergent?}$$

Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2 (Taylorentwicklung)
Gegeben sei die Funktion $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x\sqrt[3]{1 + 2x}$.

a) Berechnen Sie die ersten zwei Ableitungen von f.

b) Bestimmen Sie die Taylorpolynome $T_2(f, x, 0)$ und $T_1(f, x, \frac{7}{2})$.

c) Bestimmen Sie mit welcher Genauigkeit das Taylorpolynom $T_1(f, x, \frac{7}{2})$ die Funktion f im Intervall $[3, 4]$ approximiert, indem Sie das Restglied

$$\sup_{x\in[3,4]} \left| f(x) - T_1(f, x, \tfrac{7}{2}) \right|,$$

abschätzen.

Aufgabe 3 (Mittelwertsatz und Satz von Rolle)

a) Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Rolle, dass die Funktion

$$f \colon (0, \infty) \to \mathbb{R} : \; x \mapsto \ln(x) + 2 - x,$$

höchstens zwei Nullstellen besitzt.

b) Beweisen Sie die Ungleichung $e^x \geq 1 + x$ für alle $x \in [0, \infty)$ mit Hilfe des Mittelwertsatzes.

Aufgabe 4 (Verallgemeinerter Mittelwertsatz)
Berechnen Sie mit Hilfe des verallgemeinerten Mittelwertsatzes der Differentialrechnung den Grenzwert
$$\lim_{x\to x_0} \frac{x^\alpha - x_0^\alpha}{x^\beta - x_0^\beta},$$
für $x_0 > 0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$.

Aufgabe 5 (Monotonie)
Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit f' monoton wachsend und $f(0) = 0$. Zeigen Sie, dass dann die Funktion
$$g\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}, \qquad g(x) = \frac{f(x)}{x},$$
ebenfalls monoton wachsend ist.

Hinweis: Verwenden Sie den Mittelwertsatz.

Aufgabe 6 [**Schriftliche Aufgabe 6 Punkte**]

a) Berechnen Sie den Grenzwert
$$\lim_{x\to 1^-} \ln(x)\ln(1-x),$$
mit den Regeln von de l'Hôpital.

b) Berechnen Sie den Grenzwert
$$\lim_{x\to\infty} \left(\sin\sqrt{x+1} - \sin\sqrt{x-1}\right),$$
mit Hilfe des Mittelwertsatzes.

c) Sei $f(x) = \ln(\sin(x))$. Man kann $\ln(\sin(1.5))$ approximieren mit Hilfe des Taylorpolynoms $T_4(f, x, \frac{\pi}{2})$. Bestimmen Sie $T_4(f, x, \frac{\pi}{2})$ und berechnen Sie den Fehler $|\ln(\sin(1.5)) - T_4(f, 1.5, \frac{\pi}{2})|$ mit einem Rechner. Runden Sie auf zehn Nachkommastellen.

Das MINT-Kolleg Baden-Württemberg möchte Sie bitten an der Online-Befragung des WiGeMath-Projekts teilzunehmen. Sie finden die Umfrage unter dem Link `http://go.upb.de/wigemath` oder über den nebenstehenden QR-code. Unter den Befragungsteilnehmern werden Amazon-Gutscheine verlost (10€ an 10% der Teilnehmer, einmalig 100€). Vielen Dank!