Prof. Dr. G. Schneider, Dr. B. de Rijk,
Nicole Gauß M.Sc., Daniela Maier M.Sc.

Gruppenübung 13

Aufgabe 1 (Absolut konvergente Reihen)
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

a) Ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|^2$ konvergent, dann konvergiert $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

b) Ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergent, dann konvergiert $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|^2$.

c) Ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent, dann konvergiert $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|^2$.

Aufgabe 2 (Taylorreihen)

a) Bestimmen Sie die Taylorreihe von $f(x) = e^{x^2}$ um $x_0 = 0$ und ermitteln Sie ihren Konvergenzradius.

Hinweis: Verwenden Sie die Taylorreihe von $g(x) = e^x$.

b) Bestimmen Sie die Taylorreihe von

$$h(x) = \frac{1}{2+x},$$

um $x_0 = 1$ und ermitteln Sie ihren Konvergenzradius.

Hinweis: Verwenden Sie die geometrische Reihe.

c) Bestimmen Sie die Taylorreihe von

$$k(x) = \frac{x}{(1-x)^2},$$

um $x_0 = 0$ durch gliedweise Differentiation einer geeigneten Potenzreihe. Geben Sie das größtmögliche offene Intervall $(a,b) \subset \mathbb{R}$ an, auf dem die von Ihnen gefundene Reihe k tatsächlich darstellt.

Aufgabe 3 (Konvergenzradius)
Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4 - 4n^3}{n^3 + n^2} x^n$ b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{(n+1)!} x^n$ c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (4 + (-1)^n)^{-3n} x^{5n}$

Aufgabe 4 (Potenzreihen I)
Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergieren die folgenden Reihen?

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{\sqrt{n}} x^n.$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n2^{n+1} - 2^n}$

Aufgabe 5 (Potenzreihen II)
Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergieren die folgenden Reihen?

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{n}\right)^n \left(\frac{x}{1+x}\right)^n$

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3x-2)^n}{5^n (n+1)\sqrt{n+3}}$