Prof. Dr. G. Schneider, Dr. B. de Rijk,
Nicole Gauß M.Sc., Daniela Maier M.Sc.

Vortragsübung 10

Aufgabe 1 *Cauchyfolgen*
Sei durch

$$a_0 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{2 + a_n}{1 + a_n} \quad \text{für}\, n \geq 0,$$

eine rekursive Folge in $\mathbb{R}$ beschrieben. Beweisen Sie folgende Aussagen:

a) Es gilt $a_n \geq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

b) Es gilt $|a_{n+2} - a_{n+1}| \leq \frac{1}{4} |a_{n+1} - a_n|$.

c) Es gilt $|a_{n+1} - a_n| \leq \frac{1}{4^n} |a_1 - a_0| \leq \frac{2}{4^n}$.

d) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist eine Cauchyfolge.

Welchen Grenzwert hat die Folge?

Aufgabe 2 *Häufungspunkte I*
Bestimmen Sie alle Häufungspunkte, sowie den Limesinferior und Limessuperior der reellen Folgen:

$$a_n = \frac{n + (-1)^n (3n + 1)}{n}, \quad b_n = (-1)^n + \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right).$$

Aufgabe 3 *Häufungspunkte II*

a) Finden Sie Beispiele für reelle Folgen mit folgenden Eigenschaften:

   1. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ besitzt 1 als Häufungspunkt, aber nicht als Grenzwert.
   2. $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ besitzt 2 als Häufungspunkt und ist unbeschränkt.
   3. $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ besitzt keinen Häufungspunkt.

   Begründen Sie, warum $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ unbeschränkt sein muss.

b) Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte, reelle Folge mit genau einem Häufungspunkt a. Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent mit Grenzwert a ist.

c*) Gibt es eine reelle Folge, die jede reelle Zahl als Häufungspunkt besitzt?

Aufgabe 4 *Konvergente Majoranten und divergente Minoranten*

a) *Verdichtungssatz von Cauchy:*
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine monoton fallende Nullfolge. Die Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergiert genau dann, wenn die Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ *konvergiert.*

Beweisen Sie mithilfe des obigen Satzes, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

genau dann konvergent ist, wenn $\alpha > 1$ ist.

b) Untersuchen Sie die Reihen

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k)}{k^3}, \quad \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(k)}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)3^k} \sin(\sqrt{\arctan(k^2)}),$$

auf Konvergenz oder Divergenz.

Aufgabe 5 *Leibnizkriterium*

a) Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{k}{k^2 - 1}$$

konvergiert.

b) Beweisen oder widerlegen Sie: Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle, positive Nullfolge, dann konvergiert die alternierende Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n.$$