Vortragsübung 13

Aufgabe 1 *Kurvendiskussion*

Untersuchen Sie die Funktionenfolge

$$f_k(x) = x^2 e^{-kx}, \quad k, x \in \mathbb{R},$$

auf Nullstellen, sowie auf (lokale und globale) Extrem-, und Wendepunkte und bestimmen Sie ihr Verhalten für $x \to \pm\infty$ in Abhängigkeit von k.

Aufgabe 2 *Stetigkeit*

a) Bestimmen Sie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so dass die Funktion

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls}\, x \leq 1, \\ \alpha x - 2, & \text{falls}\, x \in (1, 2], \\ \beta e^x, & \text{falls}\, x > 2, \end{cases}$$

stetig auf ganz $\mathbb{R}$ ist.
b) Untersuchen Sie die Funktion

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad h(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{falls}\, x \neq 0, \\ 0, & \text{falls}\, x = 0, \end{cases}$$

auf Stetigkeit. Ist h differenzierbar?

Aufgabe 3 *Zwischenwertsatz und Satz von Rolle*

Zeigen Sie, dass das Polynom

$$p(x) = x^3 + x + 1$$

auf dem Intervall $[-1, 0]$ genau eine Nullstelle besitzt.
Hinweis: Benutzen Sie den Zwischenwertsatz, um die Existenz von mindestens einer Nullstelle zu zeigen und wenden Sie den Satz von Rolle an, um die Existenz von höchstens einer Nullstelle zu zeigen.

Aufgabe 4 *Punktweise vs. gleichmäßige Konvergenz*

Konvergieren die Funktionenfolgen

$$\begin{aligned} &i) \quad f_n(x) = x + \frac{1}{n}, &&n \in \mathbb{N}, \quad x \in (0,\infty), \\ &ii) \ \ g_n(x) = e^{-nx}, &&n \in \mathbb{N}, \quad x \in [0,1], \end{aligned}$$

punktweise oder sogar gleichmäßig auf den angegebenen Intervallen? Geben Sie falls möglich die Grenzfunktionen an.

Aufgabe 5 *Lipschitz-Stetigkeit*

a) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2,$$

auf jedem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ Lipschitz-stetig ist.

b) Finden Sie eine Funktion $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$, die Lipschitz-stetig, aber nicht differenzierbar ist.