D. Garmatter, J. Hörner
L. Iancu, N.M. Mach

22. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 2

Sommersemester 2015

M. Künzer
M. Stroppel

Präsenzübungen

Aufgabe P 76. *Modell: Sattelfläche als Funktionsgraph (hyperbolisches Paraboloid)*

Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto y^2 - x^2$. Das vorliegende Modell ist ein Ausschnitt des Funktionsgraphen dieser Funktion. Dargestellt ist der Bereich $-1 \leqq x, y \leqq 1$.

(a) Bei welchen der farbigen Linien handelt es sich um achsenparallele Schnitte? Welche entsprechen Niveaulinien?

(b) Die dargestellten Niveaulinien sind Quadriken. Welche Gestalt haben diese jeweils? Kann es eine Niveaulinie von einer weiteren Gestalt geben?

(c) Sei $k \in \mathbb{R}$ und $N_k := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = k\}$ die Niveaumenge von f zum Niveau k. Für welche Werte k ist N_k im Modell dargestellt?

(d) Skizzieren Sie 5 verschiedene Niveaumengen N_k zu Niveaus $k \in [-2, 2]$.

Aufgabe P 77. *Konvergenzverhalten von Integralen*

Untersuchen Sie auf Konvergenz:

(a) $\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}\,x$ **(b)** $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^6+1}}\,\mathrm{d}\,x$

Aufgabe P 78. *Potenzreihen*

(a) Berechnen Sie den Konvergenzradius ρ und die Ableitung von

$$f\colon (-\rho,\rho) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto 3 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} x^{2k+1}$$

(b) Finden Sie eine geschlossene Darstellung für f'.

(c) Finden Sie eine geschlossene Darstellung für f.

Aufgabe P 79. *Stetigkeit*

Zeigen Sie mit Hilfe des ε-δ-Kriteriums, dass

$$f\colon \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto \frac{x^4}{x^2+y^2}$$

sich in $(0,0)$ durch den Funktionswert 0 stetig fortsetzen lässt.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 87. *Konvergenz*

Untersuchen Sie auf Konvergenz:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{x^6+x}\,\mathrm{d}\,x$ **(b)** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{\exp(x^2)}\,\mathrm{d}\,x$ **(c)** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\tan\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2 \mathrm{d}\,x$ **(d)** $\displaystyle\sum_{n=17}^{\infty} \left(\tan\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2$

Aufgabe H 88. *Potenzreihen*

(a) Berechnen Sie den Konvergenzradius ρ und die ersten zwei Ableitungen von

$$f\colon (-\rho,\rho) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k(2k-1)} x^{2k}$$

(b) Finden Sie eine geschlossene Darstellung für f''.

(c) Finden Sie eine geschlossene Darstellung für f.

(d) Finden Sie eine geschlossene Darstellung für $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k+1} x^{2k+1}$.

(∗) Berechnen Sie $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k+1}$.

Aufgabe H 89. *Modell: Parabolische Quadrik als Funktionsgraph*

Für $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ betrachten wir $f_\alpha^\beta\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto \alpha y^2 - \beta x^2$. Für $k \in \mathbb{R}$ sei $N_k(\alpha,\beta)$ die Niveaumenge von f_α^β zum Niveau k. Das in der Präsenzübung benutzte Modell stellt einen Ausschnitt des Funktionsgraphen der Funktion f_1^1 dar. Dargestellt ist der Bereich $-1 \leqq x,y \leqq 1$. Sie finden das Modell auch unter:

www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/HM-Stroppel-Material/3D-Modelle/01

(a) Zeichnen Sie für $(\alpha,\beta) \in \{(1,-3),(2,1)\}$ jeweils 5 nichtleere Niveaumengen $N_k(\alpha,\beta)$ mit $k \in [-2,2]$.

(b) Wie hängt die Gestalt des Graphen der Funktion f_α^β vom Paar (α,β) ab?

(c) Bestimmen Sie alle Gestalten, die die Niveaumengen $N_k(\alpha,\beta)$ annehmen können, und geben Sie zu jeder Gestalt ein dazu passendes Tripel (k,α,β) als Beispiel an.

Aufgabe H 90. *Stetigkeit und Folgen*

Gegeben sei die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x_1,x_2) \mapsto \begin{cases} \dfrac{3x_1^4(x_2-1)}{x_1^8+(x_2-1)^2} & \text{für } (x_1,x_2) \neq (0,1) \\ 0 & \text{für } (x_1,x_2) = (0,1) \end{cases}.$$

(a) Stellen Sie Zähler und Nenner von $\dfrac{3x_1^4(x_2-1)}{x_1^8+(x_2-1)^2}$ in Multiindex-Notation im Sinne von 4.2.10 dar. Geben Sie jeweils die nichtverschwindenden Koeffizienten an.

(b) Finden Sie eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = (0,1)$ sowie $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = 0$.

(c) Gibt es eine Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = (0,1)$ und $\lim\limits_{n\to\infty} f(b_n) \neq 0$?

(d) Ist f im Punkt $(0,1)$ stetig?