## Präsenzübungen

**Aufgabe P 75.** *Lokale Extrema*

Bestimmen Sie jeweils alle kritischen Stellen von $f$. Bestimmen Sie deren Typ; das heißt, entscheiden Sie, welche lokale Maximalstellen, welche lokale Minimalstellen und welche Sattelpunkte sind.

**(a)** $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto x^2 + y^2 - 4x + 6y$

**(b)** $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto x^3 - y^3$

**(c)** $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto -x^2 - y^4$

**Aufgabe P 76.** *Modell: Extrema, auch unter Nebenbedingungen*

Das Modell stellt den Graphen der Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto xy^2$$

im Ausschnitt $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \sqrt{x^2+y^2} \leqq \frac{6}{5}\right\}$ dar.

(Vergleiche *www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/HM-Stroppel-Material/3D-Modelle/06* )

**(a)** Welche der braunen Achsen ist die $x$- und welche die $y$-Achse?

**(b)** Wir betrachten die Funktion $f$ ohne Nebenbedingungen. Besitzt $f$ kritische Stellen? Besitzt $f$ lokale Extrema? An welchen Stellen hilft hierbei die Hesse-Matrix? Besitzt $f$ globale Extrema?

**(c)** Wir betrachten die Funktion $f$ nur auf dem (blauen) Einheitskreis. Welche Punkte liefert die Methode nach Lagrange als Kandidaten für Extrema von $f$ unter dieser Nebenbedingung? Welche davon sind globale Extremstellen? Welche davon sind lokale Extremstellen?

**(d)** Wir betrachten die Funktion $f$ nur auf der (magentafarbenen) Parabel, die durch $y = x^2$ beschrieben wird. Welche Punkte liefert die Methode nach Lagrange als Kandidaten für Extrema von $f$ unter dieser Nebenbedingung? Wie kann man die Parabel parametrisieren? Wie kann man diese Parametrisierung dazu verwenden, um zu entscheiden, welche der Kandidaten tatsächlich lokale Extrema sind?

**(e)** Man löse die vorstehende Teilaufgabe stattdessen für die (lilafarbene) Parabel, die durch $x = y^2$ beschrieben wird.

**Aufgabe P 77.** *Nullstellenmenge, kritische Stellen*

Gegeben ist die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto (y - x^2)(y - 2x^2).$$

**(a)** Skizzieren Sie die Nullstellenmenge und die Vorzeichenverteilung von $f$.

**(b)** Bestimmen Sie die kritischen Stellen von $f$.

**(c)** Bestimmen Sie den Typ jeder kritischen Stelle.

## Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

**Aufgabe H 92.** *Schmiegquadrik und Minimalstelle*

Sei

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto \mathrm{e}^{3y} - 3x\mathrm{e}^y + 3\mathrm{e}^y + x^3 - 3x^2 + 3x.$$

**(a)** Bestimmen Sie $\nabla f(x,y)$ und $\mathrm{H}f(x,y)$.

**(b)** Bestimmen Sie alle kritischen Stellen von $f$ und deren Typ.

**(c)** Bestimmen Sie die Tangentialebene und die Schmiegquadrik an den Graphen von $f$ im Punkt $(2,0)$.

**(d)** Ist der Punkt $(2,0)$ eine globale Minimalstelle von $f$?

**Aufgabe H 93.** *Lokale Extrema und Nullstellenmenge*

Gegeben ist die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto (x^2 + 2y^2 - 2x)^2$$

**(a)** Bestimmen und skizzieren Sie die Nullstellenmenge $N$ und die Vorzeichenverteilung von $f$.

**(b)** Bestimmen Sie $\operatorname{grad} f$ und $\mathrm{H}f$.

**(c)** Bestimmen Sie $\det(\mathrm{H}f(x,y)) - 96f(x,y)$. Für welche $P \in N$ ist $\det(\mathrm{H}f(P)) = 0$?

**(d)** Bestimmen Sie nun alle kritischen Stellen von $f$ und geben Sie deren Typ an.

**Aufgabe H 94.** *Minimierung mit Nebenbedingung*

Seien $a,b,c,d \in \mathbb{R}^+$ Parameter mit $a^2 + b^2 + c^2 = 4$.
Sei $E := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, ax + by + cz = d\right\}$.

**(a)** Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon (x,y,z) \mapsto x^2+y^2+z^2$ hat ein Minimum auf der Ebene $E$. Bestimmen Sie dieses mit der Methode von Lagrange.

**(b)** Bestimmen Sie die Hessesche Normalform von $E$. Bestimmen Sie damit den Abstand des Ursprungs von der Ebene $E$.

**(c)** Bestimmen Sie den Punkt auf $E$ mit minimalem Abstand vom Ursprung unter Verwendung von **(a)**. Bestimmen Sie hiermit abermals den Abstand des Ursprungs von der Ebene $E$.

**Aufgabe H 95.** *Abstand zweier Mengen*

Die Gerade $G$ und die Ellipse $E$ sind gegeben durch

$$G = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x + 3y = 12\right\} \quad \text{und} \quad E = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 4u^2 + 9v^2 = 36\right\}.$$

**(a)** Zeichnen Sie $G$ und $E$ in ein Koordinatensystem.

**(b)** Erstellen Sie das Gleichungssystem nach Lagrange für die Bestimmung der Extrema des Quadrats des Abstands $(x-u)^2 + (y-v)^2$ unter den beiden Nebenbedingungen $(x,y) \in G$ und $(u,v) \in E$.

**(c)** Es gibt ein Punktepaar $((x,y),(u,v)) \in G \times E$ mit minimalem Abstand voneinander. Bestimmen Sie dieses Paar mittels **(b)**. Zeichnen Sie dieses Punktepaar in die Zeichnung aus **(a)** ein.