C. Apprich, F. Gaspoz
L. Ostrowski, J. Magiera
F. Stoll, M. Werth

25. Gruppenübung zur Vorlesung
Höhere Mathematik 2

M. Künzer
M. Stroppel

Sommersemester 2016

Präsenzübungen

Aufgabe P 81. *Modell: Wendelfläche, Potentialtheorie*

Die Wendelfläche ist in gelb gegeben als Graph der Funktion

$$p\colon \mathbb{R}^2 \smallsetminus \left\{\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)\right\} \to \mathbb{R}\colon \left(\begin{smallmatrix}x_1\\x_2\end{smallmatrix}\right) \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } x_1 = 0 \text{ und } x_2 < 0 \\ \arctan(\frac{x_2}{x_1}) + \frac{\pi}{2} & \text{für } x_1 > 0 \\ \pi & \text{für } x_1 = 0 \text{ und } x_2 > 0 \\ \arctan(\frac{x_2}{x_1}) + \frac{3\pi}{2} & \text{für } x_1 < 0. \end{cases}$$

(Vergleiche *www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/HM-Stroppel-Material/3D-Modelle/07*)

Ebenfalls im Modell enthalten ist, als die grüne Fläche, der Graph der Funktion

$$q\colon \left\{\left(\begin{smallmatrix}x_1\\x_2\end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x_1 < 0\right\} \to \mathbb{R}\colon \left(\begin{smallmatrix}x_1\\x_2\end{smallmatrix}\right) \mapsto \arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right) + \frac{\pi}{2}.$$

Dargestellt ist jeweils nur der Bereich über der Menge $\left\{\left(\begin{smallmatrix}x_1\\x_2\end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x_1^2 + x_2^2 \leqq \pi^2\right\}$.
Weiter finden sich auf diesen Flächen Projektionen eines Kreises, einer Geraden, eines Dreiecks und eines Kreisflächenausschnitts. Der Kreis ist dabei $K = \left\{\left(\begin{smallmatrix}x_1\\x_2\end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x_1^2 + x_2^2 = 4\right\}$. Die Gerade ist dabei $G = \left\{\left(\begin{smallmatrix}x_1\\x_2\end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x_1 = -\sqrt{3}x_2\right\}$. Das Dreieck hat die Eckpunkte $\left(\begin{smallmatrix}-3\\0\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}-1\\-1\end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix}-2\\-2\end{smallmatrix}\right)$.
Der Kreisflächenausschnitt hat die äußeren Eckpunkte $\begin{pmatrix}3\cos(\frac{\pi}{6})\\3\sin(\frac{\pi}{6})\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}3\cos(\frac{\pi}{3})\\3\sin(\frac{\pi}{3})\end{pmatrix}$, sowie die inneren Eckpunkte $\begin{pmatrix}\cos(\frac{\pi}{6})\\\sin(\frac{\pi}{6})\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}\cos(\frac{\pi}{3})\\\sin(\frac{\pi}{3})\end{pmatrix}$, die Kreise haben dabei den Mittelpunkt im Ursprung.

(a) Wo verläuft die x_1-Achse? Wo verläuft die x_2-Achse?

(b) Welche Werte nimmt die Funktion p auf G an? (Den Ursprung selbst muss man ausnehmen, da dort p nicht definiert ist.)

(c) Parametrisieren Sie die Kreislinie K, das Dreieck D und den Rand R des Kreisflächenausschnitts.

(d) Sei $g\colon \mathbb{R}^2 \smallsetminus \left\{\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)\right\} \to \mathbb{R}^2\colon \left(\begin{smallmatrix}x_1\\x_2\end{smallmatrix}\right) \mapsto \frac{1}{x_1^2+x_2^2}\left(\begin{smallmatrix}-x_2\\x_1\end{smallmatrix}\right)$.
Berechnen Sie $\int_K g(x) \bullet \mathrm{d}\,x$ und $\int_R g(x) \bullet \mathrm{d}\,x$.

(e) Berechnen Sie $\operatorname{rot} g$. Ist p ein Potential von g? Wie kann man dies im Modell erkennen? Ist p ein Potential von g auf einem geeignet eingeschränkten Definitionsbereich?

(f) Hat g ein Potential? Ist g ein Gradientenfeld?

(g) Kann man zu der Berechnung der Integrale in **(d)** die Funktion p verwenden?

(h) Kann man zur Berechnung von $\int_D g(x)\bullet\mathrm{d}\,x$ auch q verwenden? Geht diese Berechnung schneller als eine Berechnung unter Verwendung der Definition?

(i) Parametrisieren Sie die die Kurve

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = p(x_1, x_2),\ \pi^2/4 \leqq x_1^2 + x_2^2 \leqq \pi^2,\ x_1^2 + x_2^2 = x_3^2\} .$$

mit Anfangspunkt $(\pi/2, 0, \pi/2)$ und Endpunkt $(0, \pi, \pi)$.
Wo verläuft die Kurve S im Modell?

(j) Sei

$$h\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} \begin{pmatrix}-x_2\\x_1\\x_3\end{pmatrix} .$$

Berechnen Sie $\int_S h(x) \bullet \mathrm{d}\,x$.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 100. *Parametrisierung, Potential, Kurvenintegral*

Sei $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon (x_1, x_2)^\intercal \mapsto (\mathrm{e}^{x_1} + \frac{x_2}{3}, \frac{x_1}{3} + 1)^\intercal$.

(a) Bestimmen Sie die Rotation von g. Hat g ein Potential?
Falls ja, geben Sie ein Potential U an. Ist U eine harmonische Funktion?

(b) Wir betrachten folgende Kurven von $(0, -1)$ nach $(0, 1)$.
Sei $K = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1,\ x_1 \geqq 0\}$.
Sei $L = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid |x_1| + |x_2| = 1,\ x_1 \leqq 0\}$.
Sei $M = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = x_2^2 - 1,\ x_1 \leqq 0\}$.
Skizzieren und parametrisieren Sie diese Kurven.

(c) Berechnen Sie die Kurvenintegrale von g längs der Kurven aus **(b)** mittels der Parametrisierungen aus **(b)**.

(d) Verwenden Sie das Potential U, um die Kurvenintegrale aus **(c)** erneut zu berechnen.

Aufgabe H 101. *Kurvenintegrale*

Gegeben seien die Vektorfelder

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon (x_1, x_2)^\intercal \mapsto (x_1^2, x_2^2)^\intercal$$
$$g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon (x_1, x_2, x_3)^\intercal \mapsto (\mathrm{e}^{x_1} + x_2^2, \mathrm{e}^{x_2} + x_3^2, \mathrm{e}^{x_3} + x_1^2)^\intercal$$
$$h\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4\colon (x_1, x_2, x_3, x_4)^\intercal \mapsto (\mathrm{e}^{x_1} + x_2^2, \mathrm{e}^{x_2} + x_3^2, \mathrm{e}^{x_3} + x_1^2, 0)^\intercal .$$

Sei die Kurve K_1 parametrisiert durch $C_1\colon [1, 2] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto (1, \mathrm{e}^t)^\intercal$. Sei die Kurve K_2 parametrisiert durch $C_2\colon [0, 1] \to \mathbb{R}^3\colon t \mapsto (t, t^2, t^3)^\intercal$. Sei die Kurve K_3 parametrisiert durch $C_3\colon [0, 1] \to \mathbb{R}^4\colon t \mapsto (t, t^2, t^3, \mathrm{e}^{3t}\cos(t))^\intercal$. Berechnen Sie die folgenden Kurvenintegrale.

(a) $\displaystyle\int_{K_1} f(x) \bullet \mathrm{d}\,x$ **(b)** $\displaystyle\int_{K_2} g(x) \bullet \mathrm{d}\,x$ **(c)** $\displaystyle\int_{K_3} h(x) \bullet \mathrm{d}\,x$

(d) Welches dieser Integrale lässt sich auch ohne Parametrisierung berechnen?
Führen Sie auch diese Berechnung durch.

Aufgabe H 102. *Parametrisierung, Kurvenintegral*

Gegeben seien die Menge $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid (x_1 - 1)^2 + x_2^2 = x_3^2\}$,
die Ebene $E = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = 2\}$ und das Vektorfeld

$$g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -3x_2 + 4x_3 - 6 \\ 4x_1^2 + 3x_2 + 4x_2^2 + 8 \\ -4x_1^2 - 3x_2 - 4x_2^2 + 8x_3 + 1 \end{pmatrix} .$$

(a) Parametrisieren Sie die Kurve $K = M \cap E$.
Sei ferner K^* die Kurve K, nur rückwärts durchlaufen. Parametrisieren Sie K^*.

(b) Berechnen Sie $\displaystyle\oint_K g(x) \bullet \mathrm{d}\,x$. Berechnen Sie $\displaystyle\oint_{K^*} g(x) \bullet \mathrm{d}\,x$.

Aufgabe H 103. *Potential*

Berechnen Sie jeweils das Potential U von f, das $U(0, 0, 0) = 17$ erfüllt.

(a) $$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon (x, y, z)^\intercal \mapsto \begin{pmatrix} -y\sin(xy)\mathrm{e}^{yz} \\ (z\cos(xy) - x\sin(xy))\,\mathrm{e}^{yz} + z \\ y\cos(xy)\mathrm{e}^{yz} + y + 1 \end{pmatrix}$$

(b) $$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon (x, y, z)^\intercal \mapsto \mathrm{e}^{xyz} \cdot \begin{pmatrix} \cos(x + y + z) + yz\sin(x + y + z) \\ \cos(x + y + z) + xz\sin(x + y + z) \\ \cos(x + y + z) + xy\sin(x + y + z) \end{pmatrix}$$