L. Allerhand
A. Armiti, J. Hörner
A. Kerschl, M. Werth
C. Winkel, C. Zeiler

11. Gruppenübung zur Vorlesung
Höhere Mathematik 1

M. Künzer
M. Stroppel

Wintersemester 2014/15

Präsenzübungen

Aufgabe P 38. *Punktmengen als Quadrik*

Zeigen Sie, dass die folgenden Punktmengen jeweils Teil einer Quadrik sind, d.h. geben Sie jeweils eine quadratische Form $q(x)$, eine Linearform $f(x)$ und eine Konstante c so an, dass alle $x \in M_k$ die Gleichung $q(x) + 2f(x) + c = 0$ erfüllen.

(a) $M_1 := \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x_2 = 1/x_1 \right\}$

(b) $M_2 := \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, (x_1, x_2) \text{ hat vom Punkt } (3,4) \text{ den Abstand } 2 \right\}$

(c) $M_3 := \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x_1 = 3 + 4\cos(t), x_2 = 7 + 3\sin(t)\,, \quad t \in [0, 2\pi) \right\}$

Aufgabe P 39. *Hauptachsentransformation*

Bestimmen Sie für die folgenden Quadriken jeweils eine euklidische Normalform und ein Koordinatensystem, bezüglich dem die Quadrik diese Normalform hat. Skizzieren Sie das neue Koordinatensystem und die Quadrik im Ausgangskoordinatensystem.

(a) $\mathcal{Q}_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 + 2x_2 = 0\}$,

(b) $\mathcal{Q}_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 9x_1^2 + 24x_1x_2 + 16x_2^2 - 25 = 0\}$.

Aufgabe P 40. *Modell: Hyperbolisches Paraboloid (Sattelfläche)*

Die Sattelfläche ist die Quadrik $Q = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 - x_2^2 + x_3 = 0\}$; im Modell dargestellt ist der Ausschnitt $-1 \leqq x_1, x_2 \leqq 1$. Erörtern Sie folgende Fragestellungen:

(a) Wir betrachten die Paare aus schwarzen und blauen Linien. Sind diese aus Geradenstücken zusammengesetzt? Können Sie dies ohne Rechnung am Modell feststellen?

(b) Die schwarz ($x_3 = 0$) und blau ($|x_1 - x_2| = \frac{1}{4}$) markierten Teilmengen erfüllen die angegebenen zusätzlichen Gleichungen (zusätzlich zur Quadrikgleichung). Entscheiden Sie an Hand dieser Gleichungen, ob diese Schnitte aus Geraden zusammengesetzt sind. Parametrisieren Sie die auftretenden Geraden.

(c) Welche Gleichungen erfüllen die grünen Linien? Welche Form haben diese Linien?

(d) Welche der folgenden Konfigurationen können als Schnitt der Sattelfläche mit einer passenden Ebene entstehen?

- Ein Punkt,
- Parabel,
- leere Menge,
- schneidendes Geradenpaar,
- Ellipse,
- Hyperbel,
- genau eine Gerade,
- paralleles Geradenpaar.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 43. *Quadratische Form*

Gegeben sei die quadratische Form $q_{a,b}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon x \mapsto a(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2bx_1x_2$.

(a) Für welche Werte $a, b \in \mathbb{R}$ ist die quadratische Form $q_{a,b}$ positiv definit, negativ definit beziehungsweise indefinit?

(b) Sei nun $a = 1$. Wir betrachten die Quadrik $\mathcal{Q}_b : q_{1,b}(x) - 1 = 0$. Geben Sie die Matrixbeschreibung dieser Quadrik an.

(c) Geben Sie in Abhängigkeit von b die euklidische Normalform von $\mathcal{Q}_b$ an, sowie ein kartesisches Koordinatensystem, in welchem diese euklidische Normalform angenommen wird.

(d) Geben Sie in Abhängigkeit von b die affine Normalform von $\mathcal{Q}_b$ an.

Aufgabe H 44. *Quadrikgleichung erstellen*

Bestimmen Sie eine Gleichung der Quadrik, die die Gerade $\left\{x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_1 = x_2 = 0\right\}$, den Kreis $\left\{x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 = 0, x_3 = 0\right\}$ sowie die Punkte $(1, -1, -1)$ und $(1, 2, -1/2)$ enthält. Welche Gestalt hat diese Quadrik?

Aufgabe H 45. *Hauptachsentransformation*

Gegeben sei die Quadrik $\mathcal{Q}\colon 4x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_3 - 4x_2x_3 + 8x_1 - 4x_2 + 8x_3 = 0.$

(a) Geben Sie die Matrixdarstellung von $\mathcal{Q}$ an.

(b) Ist der quadratische Teil der Quadrikgleichung von $\mathcal{Q}$ positiv definit?

(c) Geben Sie die erweiterte Matrix von $\mathcal{Q}$ an. Welchen Typ hat die Quadrik $\mathcal{Q}$?

(d) Bringen Sie $\mathcal{Q}$ auf euklidische Normalform und geben Sie ein kartesisches Koordinatensystem an, bezüglich dessen $\mathcal{Q}$ diese Normalform besitzt.

Aufgabe H 46. *Modell: Hyperbolisches Paraboloid (Sattelfläche)*

Gegeben sind die Ebenen $E_t = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_3 = t\right\}$ für $t \in \mathbb{R}$ und die Quadrik Q, die Sie als Modell in den Übungen schon in der Hand hatten, mit der Gleichung $x_1^2 - x_2^2 + x_3 = 0$; im Modell dargestellt ist der Ausschnitt $-1 \leqq x_1, x_2 \leqq 1$. Sie finden das Modell auch unter:

www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/HM-Stroppel-Material/3D-Modelle/01

(a) Entscheiden Sie, für welche $t \in \mathbb{R}$ der Schnitt von Q und E_t die Form zweier sich schneidender Geraden, einer Ellipse bzw. einer Hyperbel hat.

(b) Das gelbe Linienpaar auf Q erfüllt die zusätzliche Gleichung $|x_1 + x_2| = \frac{1}{4}$. Ist es ein Geradenpaar? Parametrisieren Sie gegebenenfalls die beiden Geraden.

(c) Welche der folgenden farbigen Teilmengen von Q entsteht als Schnitt von Q mit einer der folgenden Ebenen? Zu welcher Farbe bzw. Ebene gibt es keine Entsprechung?

• Grün	• Schwarz	• $x_3 = 0$	• $x_3 = -0{,}6$	• $x_1 = 0{,}2$
• Gelb	• Magenta	• $x_3 = 0{,}5$	• $x_2 = -0{,}6$	• $x_2 - 2x_3 = 1/8$