L. Allerhand
A. Armiti, J. Hörner
A. Kerschl, M. Werth
C. Winkel, C. Zeiler

12. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 1

M. Künzer
M. Stroppel

Wintersemester 2014/15

Präsenzübungen

Aufgabe P 41. *Euklidische Normalform von Quadriken*

Gegeben sei die Quadrik

$$\mathcal{Q} := \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_3 + 1 = 0 \right\} .$$

(a) Bestimmen Sie den Typ von $\mathcal{Q}$.

(b) Bestimmen Sie eine euklidische Normalform und die Gestalt von $\mathcal{Q}$.

(c) Geben Sie ein Koordinatensystem an, in dem $\mathcal{Q}$ diese Normalform hat. Ist dieses Koordinatensystem eindeutig bestimmt? Geben Sie die zugehörigen Koordinatentransformationen an.

Aufgabe P 42. *Modell: Kegelschnitte*

Sei $\mathcal{Q}$ der Doppelkegel, der gegeben ist durch die Gleichung $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$; im Modell dargestellt ist der Bereich $-\frac{7}{2} \leqq x_1, x_2, x_3 \leqq \frac{7}{2}$. Außerdem sind dargestellt die Ebenen mit den Gleichungen $x_1 + 2\,x_3 = 3$ (gelb), $x_1 - x_3 = 1$ (blau) und $x_1 = 1$ (grün).

(a) Welche Schnittkurven liefert der Doppelkegel jeweils in den drei Ebenen?

(b) Welche der folgenden Konfigurationen entstehen als Schnitt des Doppelkegels mit einer passenden Ebene?

- ein Punkt,
- genau eine Gerade,
- ein Paar schneidender Geraden,
- ein Kreis,
- die leere Menge,
- ein Paar paralleler Geraden.

(c) Lösen Sie die Gleichung der gelben Ebene nach x_1 auf und setzen Sie diese in die Gleichung von $\mathcal{Q}$ ein. Bestimmen Sie die Gestalt der daraus entstandenen ebenen Quadrik. Finden Sie diese Quadrik im Modell wieder?

Aufgabe P 43. *Alte Klausuraufgabe zu Quadriken*

Bestimmen Sie die euklidische Normalform der Quadrik

$$\mathcal{Q} := \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 5x_1^2 - 8x_1x_2 + 5x_2^2 + 6x_1 - 12x_2 - 9 = 0 \right\}$$

und ermitteln Sie die zugehörige Koordinatentransformation. Bestimmen Sie anhand der Normalform die Gestalt der Quadrik und fertigen Sie eine Skizze der Quadrik in Standardkoordinaten an.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 47. *Ebene Quadriken*

Gegeben sei die Quadrik $\mathcal{Q} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + 10x_1x_2 + x_2^2 + 12x_1 + 12x_2 + 14 = 0\}$.

(a) Bestimmen Sie eine euklidische Normalform von $\mathcal{Q}$.

(b) Geben Sie das Koordinatensystem an, bezüglich dessen $\mathcal{Q}$ diese Normalform hat.

(c) Skizzieren Sie das Koordinatensystem und die Quadrik im Ausgangskoordinatensystem.

(d) Sei $\mathcal{Q}'$ die Vereinigungsmenge der beiden Asymptoten von $\mathcal{Q}$. Geben Sie im Ausgangskoordinatensystem eine Quadrikgleichung für $\mathcal{Q}'$ an.

Aufgabe H 48. *Quadrikgleichung transformieren*

Wir betrachten die Quadrik $\mathcal{Q} := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + 4x_2 + 3x_3 = 0\}$ und das kartesische Koordinatensystem $\mathbb{F} := ((0,0,0)^\intercal; (1,0,0)^\intercal, \frac{1}{5}(0,4,3)^\intercal, \frac{1}{5}(0,3,-4)^\intercal)$.

(a) Bestimmen Sie eine Gleichung von $\mathcal{Q}$ bezüglich $\mathbb{F}$.

(b) Bestimmen Sie die euklidische Normalform, die Gestalt und den Typ von $\mathcal{Q}$.

(c) Zeichnen Sie in das Ausgangskoordinatensystem die Schnitte von $\mathcal{Q}$ mit der Ebene $x_1 = 0$, der Ebene $x_2 = 0$ und der Ebene $x_3 = 0$.

Aufgabe H 49. *Quadriken im $\mathbb{R}^3$*

Gegeben sei die Quadrik $\mathcal{Q} := \left\{x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_1^2 + 4x_2^2 - 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 6x_1 - 12x_2 + 7 = 0\right\}$.

(a) Bestimmen Sie den Typ von $\mathcal{Q}$ mittels der erweiterten Matrix.

(b) Bestimmen Sie die euklidische Normalform und die Gestalt von $\mathcal{Q}$.

(c) Bestimmen Sie ein Koordinatensystem $\mathbb{F}$, bezüglich dessen $\mathcal{Q}$ diese Normalform hat.

(d) Bestimmen Sie ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$ und ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$.

Aufgabe H 50. *Modell: Kegelschnitte*

Sei $\mathcal{Q}$ der durch die Gleichung $x_1^2+x_2^2-x_3^2 = 0$ gegebene Doppelkegel; im Modell dargestellt ist der Bereich $-\frac{7}{2} \leqq x_1, x_2, x_3 \leqq \frac{7}{2}$. Außerdem sei in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$ eine Ebene E_α gegeben durch $x_1 + \alpha x_3 = 1$ im Standardkoordinatensystem.

(a) Welche Ebenen erhalten Sie für $\alpha \in \{-1, 0, 2\}$?
Wie hängen diese Ebenen mit dem Modell zusammen?

(b) Die Basis $B_\alpha\colon b_1 := \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}(1,0,\alpha)^\intercal, b_2 := (0,1,0)^\intercal, b_3 := \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}(-\alpha,0,1)^\intercal$ von $\mathbb{R}^3$ liefert das kartesische Koordinatensystem $\mathbb{F}_\alpha = (\frac{1}{1+\alpha^2}(1,0,\alpha)^\intercal; B_\alpha)$. Geben Sie die Ebene E_α in Hessescher Normalform bezüglich des Koordinatensystems $\mathbb{F}_\alpha$ an. Prüfen Sie, ob $\mathbb{F}'_\alpha := (\frac{1}{1+\alpha^2}(1,0,\alpha)^\intercal; b_2, b_3)$ ein kartesisches Koordinatensystem von E_α ist.

(c) Geben Sie eine Quadrikgleichung für den Doppelkegel $\mathcal{Q}$ bezüglich des Koordinatensystems $\mathbb{F}_\alpha$ an.

(d) Geben Sie eine Gleichung für die Schnittquadrik $E_\alpha \cap \mathcal{Q}$ bezüglich $\mathbb{F}'_\alpha$ an. Bestimmen Sie die Gestalt dieser Schnittquadrik in Abhängigkeit von α.

www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/HM-Stroppel-Material/3D-Modelle/02