A. Armiti, M. Fetzer,
L. Margolis, J. Magiera,
T. Pfrommer,
G. Santin, C. Zeiler

12. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 1

M. Künzer
M. Stroppel

Wintersemester 2015/16

Präsenzübungen

Aufgabe P 35. *Ebene Quadriken*

Im $\mathbb{R}^2$ seien bezüglich des Standardkoordinatensystems $\mathbb{E}$ folgende Quadriken gegeben.

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}_1 &= \{(x_1,x_2)^\intercal \in \mathbb{R}^2 \mid 2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 + 4x_2 - 10 = 0\}\\ \mathcal{Q}_2 &= \{(x_1,x_2)^\intercal \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 - 4\sqrt{2}x_2 + 2 = 0\}\end{aligned}$$

Führen Sie folgende Schritte für $j = 1$ und $j = 2$ durch.
Geben Sie von $\mathcal{Q}_j$ die Matrixbeschreibung an. Bestimmen Sie die euklidische Normalform und die Gestalt von $\mathcal{Q}_j$. Geben Sie ein kartesisches Koordinatensystem $\mathbb{F}_j$ an, in welchem diese euklidische Normalform angenommen wird. Geben Sie ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}_j}$ und ${}_{\mathbb{F}_j}\kappa_{\mathbb{E}}$ an. Skizzieren Sie $\mathcal{Q}_j$ in das Standardkoordinatensystem.

Aufgabe P 36. *Modell: Kegelschnitte*

Sei $\mathcal{Q}$ der Doppelkegel, der gegeben ist durch die Gleichung $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$; im Modell dargestellt ist der Bereich $-\frac{7}{2} \leqq x_1, x_2, x_3 \leqq \frac{7}{2}$. Außerdem sind dargestellt die Ebenen mit den Gleichungen $x_1 + 2\,x_3 = 3$ (gelb), $x_1 - x_3 = 1$ (blau) und $x_1 = 1$ (grün).

(a) Welche Schnittkurven liefert der Doppelkegel jeweils in den drei Ebenen?

(b) Welche der folgenden Konfigurationen entstehen als Schnitt des Doppelkegels mit einer passenden Ebene?

- ein Punkt
- genau eine Gerade
- ein Paar schneidender Geraden
- ein Kreis
- die leere Menge
- ein Paar paralleler Geraden

Aufgabe P 37. *Modell: Hyperbolisches Paraboloid (Sattelfläche)*

Die Sattelfläche ist die Quadrik $Q = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 - x_2^2 + x_3 = 0\}$; im Modell dargestellt ist der Ausschnitt $-1 \leqq x_1, x_2 \leqq 1$.

(a) Wir betrachten die Paare aus schwarzen und blauen Linien. Sind diese aus Geradenstücken zusammengesetzt? Können Sie dies ohne Rechnung am Modell feststellen?

(b) Welche Gleichungen erfüllen die grünen Linien? Welche Form haben diese Linien?

(c) Die schwarz ($x_3 = 0$) und gelb ($|x_1 + x_2| = \frac{1}{4}$) markierten Teilmengen erfüllen die angegebenen zusätzlichen Gleichungen (zusätzlich zur Quadrikgleichung). Entscheiden Sie anhand dieser Gleichungen, ob diese Schnitte aus Geraden zusammengesetzt sind. Parametrisieren Sie die auftretenden Geraden.

(d) Welche der folgenden Konfigurationen können als Schnitt der Sattelfläche mit einer passenden Ebene entstehen?

- ein Punkt
- Parabel
- leere Menge
- schneidendes Geradenpaar
- Ellipse
- Hyperbel
- genau eine Gerade
- paralleles Geradenpaar

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 49. *Räumliche Quadrik*

Bestimmen Sie die euklidische Normalform und die Gestalt der Quadrik

$$\mathcal{Q} = \left\{ (x_1, x_2, x_3)^\intercal \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, -3x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 - 8x_1x_2 + 4x_1x_3 - 12x_2x_3 - 6x_1 + 24x_2 - 18 = 0 \right\}.$$

Geben Sie ein kartesisches Koordinatensystem $\mathbb{F}$ an, in dem $\mathcal{Q}$ diese euklidische Normalform annimmt. Geben Sie ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$ und ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$ an.

Aufgabe H 50. *Modell: Hyperbolisches Paraboloid (Sattelfläche)*

Gegeben sind die Ebenen $E_t = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_3 = t \right\}$ für $t \in \mathbb{R}$ und die Quadrik Q, die Sie als Modell in den Übungen schon in der Hand hatten, mit der Gleichung $x_1^2 - x_2^2 + x_3 = 0$; im Modell dargestellt ist der Ausschnitt $-1 \leqq x_1, x_2 \leqq 1$. Sie finden das Modell auch unter:

www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/HM-Stroppel-Material/3D-Modelle/01

(a) Entscheiden Sie, für welche $t \in \mathbb{R}$ der Schnitt von Q und E_t die Form zweier sich schneidender Geraden, einer Ellipse bzw. einer Hyperbel hat.

(b) Das blaue Linienpaar auf Q erfüllt die zusätzliche Gleichung $|x_1 - x_2| = \frac{1}{4}$. Ist es ein Geradenpaar? Parametrisieren Sie gegebenenfalls die beiden Geraden.

(c) Welche der folgenden farbigen Teilmengen von Q entstehen als Schnitt von Q mit einer der folgenden Ebenen? Zu welcher Farbe bzw. Ebene gibt es keine Entsprechung?

• Schwarz	• Rot (Hyperbel)	• $x_3 = 0$	• $x_3 = -0{,}6$	• $x_1 = 0{,}2$
• Gelb	• Blau (Parabel)	• $x_3 = 0{,}5$	• $x_2 = -0{,}6$	• $x_2 - 2x_3 = 1/8$

Aufgabe H 51. *Modell: Kegelschnitte*

Sei $\mathcal{Q}$ der durch die Gleichung $-x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 = 0$ gegebene Doppelkegel; im Modell dargestellt ist der Bereich $-\frac{7}{2} \leqq x_1, x_2, x_3 \leqq \frac{7}{2}$. Außerdem sei in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$ eine Ebene E_α gegeben durch $x_1 + \alpha x_3 = 1$ im Standardkoordinatensystem.

(a) Welche Ebenen erhalten Sie für $\alpha \in \{-1, -1/2, 0\}$?
Wie hängen diese Ebenen mit denen des Modells zusammen?

(b) Die Basis B_α: $b_1 := \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}(1, 0, \alpha)^\intercal, b_2 := (0, 1, 0)^\intercal, b_3 := \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}(\alpha, 0, -1)^\intercal$ von $\mathbb{R}^3$ liefert das kartesische Koordinatensystem $\mathbb{F}_\alpha = (\frac{1}{1+\alpha^2}(1, 0, \alpha)^\intercal; B_\alpha)$. Ist B_α ein Rechtssystem? Geben Sie die Ebene E_α in Hessescher Normalform bezüglich des Koordinatensystems $\mathbb{F}_\alpha$ an. Prüfen Sie, ob $\mathbb{F}'_\alpha := (\frac{1}{1+\alpha^2}(1, 0, \alpha)^\intercal; b_2, b_3)$ ein kartesisches Koordinatensystem von E_α ist.

(c) Geben Sie eine Quadrikgleichung für den Doppelkegel $\mathcal{Q}$ bezüglich des Koordinatensystems $\mathbb{F}_\alpha$ an.

(d) Geben Sie eine Gleichung für die Schnittquadrik $E_\alpha \cap \mathcal{Q}$ bezüglich $\mathbb{F}'_\alpha$ an. Bestimmen Sie die Gestalt dieser Schnittquadrik in Abhängigkeit von α.

www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/HM-Stroppel-Material/3D-Modelle/02