Höhere Mathematik I

Winter 2007/08

Aufgabe P 1. *Binomialkoeffizienten*

Berechnen Sie ohne Taschenrechner:

(a) $x_1 = \binom{11}{5}$

(b) $x_2 = \binom{11}{5} - \binom{10}{4} - \binom{10}{5}$

Hinweis: Nutzen Sie dabei die Eigenschaften der Binomialkoeffizienten geschickt aus.

Aufgabe P 2. *vollständige Induktion*

Beweisen Sie folgende Summenformeln mit Hilfe der vollständigen Induktion:

(a) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\,(k+1)} = \frac{n}{n+1}$

(b) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2\,(n+1)^2}{4}$

Aufgabe P 3. *Mengen*

(a) Skizzieren Sie die Mengen

$$M_1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \; x^2 + y^2 = 1\}\ ,$$
$$M_2 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \; x^2 + y^2 = 16\}\ ,$$
$$M_3 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \; (x-1)^2 + (y+3)^2 = 16\}\ .$$

Diskutieren Sie dabei in ihrer Gruppe, welche Auswirkungen die Änderungen bei jedem Schritt in der Skizze haben.

(b) Skizzieren Sie nun die Mengen

$$M_4 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \; x \leqq 2\}\ ,$$
$$M_5 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \; y \leqq -1\}\ ,$$
$$M_6 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \; (x-1)^2 + (y+3)^2 \leqq 16\}\ .$$

und die Schnittmenge von M_4, M_5 und M_6.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 1. *Binomischer Lehrsatz*
Zeigen Sie, dass die folgende Summenformel für alle Zahlen $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Hinweis: Sie können dabei den Binomischen Lehrsatz verwenden, den Sie in der Vorlesung gelernt haben.

Aufgabe H 2. *vollständige Induktion, Pascalsches Dreieck*
Zeigen Sie mit Hilfe des Prinzips der vollständigen Induktion, dass die folgende Summenformel für alle $m, n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{m+k}{k} = \binom{m+n+1}{n}$$

Stellen Sie das Ergebnis für $m = 2$, $n = 3$ im Pascalschen Dreieck dar.

Hinweis: Nutzen Sie hier ebenfalls die Eigenschaften der Binomialkoeffizienten geschickt aus.

Aufgabe H 3. *Mengen*

(a) Skizzieren Sie die Mengen

$$M_1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2\,(x-1)^2 + 3\} ,$$
$$M_2 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - 2\,(y-1)^2 = 3\} .$$

Machen Sie sich wieder klar, welche Auswirkungen die Änderungen in den Gleichungen haben.

(b) Skizzieren Sie nun die Mengen

$$M_3 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - 2\,(y-1)^2 \geqq 3\} ,$$
$$M_4 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + (y-3)^2 \leqq 25\} .$$

und die Schnittmenge von M_3 und M_4.

Höhere Mathematik I

Winter 2007/08

Aufgabe P 4. *Komplexe Zahlen*

Gegeben sind die komplexen Zahlen $z_1 = 1 + 2\,i$, $z_2 = 6 - 2\,i$, $z_3 = (2 + \sqrt{3})\,i - 5$ und $z_4 = 3 + 6\,i$. Berechnen Sie die folgenden Terme und geben Sie die Ergebnisse sowohl in klassischer Schreibweise $(a + b\,i)$ als auch als Paar (a, b) an (jeweils mit $a, b \in \mathbb{R}$).

(a) $z_5 = z_2 + z_3$

(b) $z_6 = z_2 \cdot z_1$

(c) $z_7 = \dfrac{z_1}{z_4}$

Skizzieren Sie alle beteiligten Zahlen in der Zahlenebene.

Aufgabe P 5. *Mengen*

Bestimmen Sie folgende Teilmengen von $\mathbb{C}$ und skizzieren Sie diese:

$$M_1 := \{z \in \mathbb{C} \mid\ |z - i| < 2\}\ ,$$
$$M_2 := \{z \in \mathbb{C} \mid\ \mathrm{Re}\,(1/z) \geqq 1\}$$

Aufgabe P 6. *Eigenschaften von Abbildungen*

Untersuchen Sie, ob die folgenden Abbildungen surjektiv, injektiv oder bijektiv sind:

$$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x\,,$$
$$f_2 : \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\} \to \mathbb{R} :\ x \mapsto \frac{1}{1 + x^2}\,,$$
$$f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x\sqrt{1 + x^2}\,,$$
$$f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x \sin(x)$$

Aufgabe P 7. $\mathbb{C}$ *kein geordneter Körper*

Zeigen Sie, dass es keine Anordnung $<$ auf $\mathbb{C}$ gibt, die sich mit der Addition und der Multiplikation des Körpers verträgt: d. h. so, dass für beliebige $a, b, c \in \mathbb{C}$ gilt:

- $a < b \implies a + c < b + c$
- $\big(0 < a \wedge 0 < b\big) \implies 0 < a \cdot b$

Hinweis: Überlegen Sie, was aus $0 < i$ (bzw. $i < 0$) folgen würde.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 4. *Komplexe Zahlen*

Berechnen Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $x + y\,i$ mit $x, y \in \mathbb{R}$:

(a) $(-1+3\,i)^2 + (2+i)(1+2\,i)$

(b) $\dfrac{3(1+i)^2}{(1-i)^2} - \dfrac{2(1-i)^3}{(1+i)^3}$

(c) $(1-i) + \operatorname{Re}\left(|3+4\,i|\right)$

(d) $\operatorname{Im}\big((2+i) + \operatorname{Re}\left((2-3\,i)^6\right)\big)$

Aufgabe H 5. *Mengen*

Bestimmen Sie folgende Teilmengen von $\mathbb{C}$ und skizzieren Sie diese:

$$\begin{aligned} M_1 &:= \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Im} z < 1\} \,, \\ M_2 &:= \{z \in \mathbb{C} \mid |z+1| \geqq 2 \wedge |\operatorname{Im} z| \leqq 1\} \,. \end{aligned}$$

Aufgabe H 6. *Eigenschaften von Abbildungen*

(a) Untersuchen Sie, ob die folgenden Abbildungen surjektiv, injektiv oder bijektiv sind:

$$\begin{aligned} f_1 &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto e^{-x^2+1} \,, \\ f_2 &: \mathbb{R} \to [-1\,,\infty) : x \mapsto |x| - 1 \,, \\ f_3 &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \min\left\{x^2,\, x\right\} \,. \end{aligned}$$

(b) Für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ sind die folgenden Abbildungen injektiv?

$$\begin{aligned} f_4 &: [0,a] \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2 - 5x + 7 \,, \\ f_5 &: \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{2x^2 - 3x + a}{x - 2} \,, \\ f_6 &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3 + ax \,. \end{aligned}$$

Aufgabe H 7. *Polynomdivision*

Gegeben sind die beiden Polynome

$$\begin{aligned} p_1(x) &= x^3 + 2x^2 - x - 2 \quad \text{und} \\ p_2(x) &= x^3 - 1 \,. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie alle reellen Lösungen für die beiden Gleichungen $p_1(x) = 0$ und $p_2(x) = 0$.

Hinweis: Wenn Sie erst einmal eine Lösung x_0 gefunden haben, ist es sinnvoll, den Quotienten $q_j(x) := p_j(x)/(x - x_0)$ zu berechnen und Lösungen von $q_j(x) = 0$ zu suchen.

Aufgabe P 8. *Polarkoordinaten komplexer Zahlen*

Berechnen Sie Polarkoordinatendarstellung der folgenden komplexen Zahlen:

(a) $2+2\sqrt{3}\,i$

(b) $3+3\,i$

(c) $-10\,i$

Aufgabe P 9. *Mengen*

Gegeben sind folgende Mengen:

$$\begin{aligned} M_1 &= \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z-2| \geqq 2 \right\} , \\ M_2 &= \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |\mathrm{Im}\, z| + |\mathrm{Re}\, z| \leqq 1 \right\} , \\ M_3 &= \mathbf{C}_{\mathbb{C}}(M_1 \cup M_2) \\ M_4 &= \mathbf{C}_{\mathbb{C}}(M_1) \cap \mathbf{C}_{\mathbb{C}}(M_2) \end{aligned}$$

Zeichnen Sie die Mengen M_1, M_2 und M_3.

Warum brauchen Sie die Menge M_4 nicht mehr zu zeichnen? Kennen Sie einen allgemeinen Grund für die Beziehung zwischen den beiden Mengen M_3 und M_4 ?

Aufgabe P 10. *Linearfaktoren*

Zerlegen Sie die folgenden Polynome in Linearfaktoren:

(a) $p_1(X) = 5\,X^4 + 5\,X^3 - 50\,X^2 + 40\,X$

(b) $p_2(X) = X^3 - 1$

(c) $p_3(X) = X^3 - (5+4\,i)\,X^2 + (5+13\,i)\,X + 2 - 10\,i$

Hinweis: In **(c)** hat eine der Lösungen den Realteil eins.

Aufgabe P 11. *Vektorraum der Polynome*

(a) Verifizieren Sie, dass $\mathrm{Pol}\,\mathbb{R}$ ein (unendlichdimensionaler) $\mathbb{R}$-Vektorraum ist.

(b) Untersuchen Sie, ob

$$\langle f \,|\, g \rangle_{[-1,1]} := \int_{-1}^{1} f(x)\, g(x) \,\mathrm{d}\, x$$

ein Skalarprodukt $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle_{[-1,1]}$ auf $\mathrm{Pol}\,\mathbb{R}$ definiert (im Sinne von 2.6.2 der Vorlesung).

(c) Finden Sie ein quadratisches Polynom p_2, das bezüglich $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle_{[-1,1]}$ *orthogonal* zu den durch $p_0(X) = 1$ und $p_1(X) = X$ gegebenen Polynomen ist, dass also gilt:

$$\langle p_2 \,|\, p_0 \rangle_{[-1,1]} = 0 = \langle p_2 \,|\, p_1 \rangle_{[-1,1]} \ .$$

Hinweis: Mit p_0, p_1 und p_2 beginnt die Folge der sogenannten *Legendre-Polynome*.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 8. *Komplexe Zahlen*

Berechnen Sie Polarkoordinatendarstellung der folgenden komplexen Zahlen:

(a) $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\,i\,,$

(b) $z_2 = 1 + \sqrt{3}\,i$

(c) $z_3 = z_1 \cdot z_2$

Hinweis: Nutzen Sie zur Berechnung von z_3 schon die Ergebnisse von z_1 und z_2.

Aufgabe H 9. *Mittelwerte*

Für $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^+$ wird das *harmonische Mittel* definiert als $\overline{x}_{\text{harm}} = \dfrac{n}{\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{1}{x_j}}$.

(a) Zeigen Sie, dass für $n = 2$

$$\overline{x}_{\text{harm}} = \frac{\overline{x}^2_{\text{geom}}}{\overline{x}_{\text{arithm}}}$$

gilt, wobei $\overline{x}_{\text{geom}}$ das geometrische und $\overline{x}_{\text{arithm}}$ das arithmetische Mittel bezeichnet.

(b) Ein Fahrzeug fährt eine Stunde lang mit der Geschwindigkeit $v_1 = 50$ km/h und eine Stunde lang mit der Geschwindigkeit $v_2 = 100$ km/h. Berechnen Sie die Durchschnittsgeschwindigkeit $\tilde{v}$.

(c) Ein anderes Fahrzeug fährt 100 km weit mit $v_1 = 50$ km/h und 100 km weit mit $v_2 = 100$ km/h. Berechnen Sie auch hier die Durchschnittsgeschwindigkeit $\tilde{\tilde{v}}$.

(d) Um welche Mittelwerte von v_1 und v_2 handelt es sich bei $\tilde{v}$ bzw. $\tilde{\tilde{v}}$?

Aufgabe H 10. *Untervektorraum*

Im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^3$ betrachten wir die Vektoren $v_1 = (1, 0, 0)$ und $v_2 = (0, 1, 0)$. Die Menge

$$\mathrm{L}\,(v_1, v_2) := \left\{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \;\middle|\; \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\right\}$$

heißt *lineare Hülle* oder *Aufspann* der Menge $\{v_1, v_2\}$.

Zeigen Sie, dass $\mathrm{L}\,(v_1, v_2)$ ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$ ist.

Zusatz: Ist $\mathrm{L}\,(v_1, v_2)$ auch ein Untervektorraum des $\mathbb{C}$-Vektorraums $\mathbb{C}^3$?

Aufgabe H 11. *Linearfaktoren*

(a) Zerlegen Sie die folgenden Polynome in Linearfaktoren:

$$p_1(X) = X^3 + 8\,X^2 + 22\,X + 20\,, \quad p_2(X) = X^3 - 27\,i \quad \text{und} \quad p_3(X) = X^4 - 2\,X^2 + 4\,.$$

(b) Wie müssen die Parameter a und b aus $\mathbb{C}$ gewählt werden, damit $1 + i$ und $2 + 3\,i$ Nullstellen des Polynoms $p(X) = 2\,X^2 + a\,X + b$ sind?

Aufgabe P 12. *Geraden und Ebenen*

Durch die Punkte $A = (-1, 1, 1)$, $B = (-1, 3, 0)$ und $C = (0, 1, -2)$ wird eine Ebene E_1 im $\mathbb{R}^3$ festgelegt. Außerdem sind noch die Punkte $P_1 = (1, 0, -2)$, $P_2 = (0, -2, 2)$ und $P_3 = (1, -2, 2)$ gegeben.

(a) Berechnen Sie die Parameterdarstellung von E_1.

(b) Existiert eine Gerade g_1, die parallel zu E_1 durch die Punkte P_1 und P_2 verläuft.

(c) Existiert eine Gerade g_2, die parallel zu E_1 durch die Punkte P_1 und P_3 verläuft.

Aufgabe P 13. *Lineare Unabhängigkeit*

Gegeben sind die Vektoren $v_1 = (0,\, 1,\, 0)$, $v_2 = (0,\, 0,\, 1)$, $v_3 = (1,\, 0,\, 0)$, $v_4 = (1,\, 1,\, 1)$, $v_5 = (4,\, 5,\, 0)$, $v_6 = (3,\, 0,\, 0)$ und $v_7 = (0,\, 2,\, \lambda)$.

(a) Sind die Vektoren $v_2,\, v_4$ und v_6 linear unabhängig?

(b) Sind die Vektoren $v_1,\, v_2,\, v_3$ und v_4 linear unabhängig?

(c) Sind die Vektoren $v_1,\, v_3$ und v_5 linear unabhängig?

(d) Sind die Vektoren v_4 und v_5 linear unabhängig?

(e) Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren $v_5,\, v_6$ und v_7 linear unabhängig.

Geben Sie jeweils eine geeignete Basis des $\mathbb{R}^3$ an.

Aufgabe P 14. *Interpolation mit Lagrange-Polynomen*

Für $X_1, \ldots, X_n$ werden die sogenannten *Lagrange-Polynome* als

$$q_k(X) := \prod_{\substack{j=1\ldots n \\ j \neq k}} \frac{X - X_j}{X_k - X_j}, \qquad 1 \leqq k \leqq n,$$

definiert. Im Folgenden Sei nun $n = 4$ und $X_l = l$ für $1 \leqq l \leqq 4$.

(a) Zeigen Sie, dass im Vektorraum $\operatorname{Pol}_4 \mathbb{R}$ die Polynome q_1, q_2, q_3 und q_4 linear unabhängig sind und skizzieren Sie diese.

(b) Das kubische Polynom p interpoliert die Punkte $(1, -1)$, $(2, 0)$, $(3, 2)$ und $(4, 1)$. Stellen Sie das Gleichungssystem für die Koordinaten von p bzgl. der Monombasis $\{1, X, X^2, X^3\}$ auf.

(c) Stellen Sie p als Linearkombination der q_k dar.

Aufgabe P 15. *Polynomraum*

Wir betrachten den Vektorraum $\operatorname{Pol}_2 \mathbb{R} := \left\{ \sum_{j=0}^{2} \alpha_j X^j \;\middle|\; \alpha_j \in \mathbb{R} \right\}$ der reellen Polynome vom Grad höchstens 2 mit den Basen $B = \{X^2, X - 1, X + 1\}$ und $C = \{1, X, X^2\}$.

Geben Sie für das Polynom $p(X) := X^2 + 2X + 1$ die Koordinatentupel ${}_Bp$ bezüglich B und ${}_Cp$ bezüglich C an.

Überprüfen Sie die von ihnen gefundenen Koordinaten durch Probe (Einsetzen).

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 12. *Dreiecksungleichung*

Beweisen Sie folgende Dreiecksungleichung:

Für alle x, $y \in \mathbb{R}^n$ gilt $\big||x| - |y|\big| \leqq |x| + |y|$.

Aufgabe H 13. *Geraden und Ebenen*

Gegeben sind die Punkte $P_1 = (1,1,1)$, $P_2 = (2,1,-3)$, $P_3 = (0,-4,1)$, $P_4 = (-2,-4,9)$, $P_5 = (-2,-4,0)$ und $P_6 = (1,1,\alpha)$.

(a) Berechnen Sie eine Parameterdarstellung der Ebene E_1, die die Punkte P_1, P_2 und P_3 beinhaltet.

(b) Liegt der Punkt P_4 auf der Ebene E_1?

(c) Bestimmen Sie α so, dass die Gerade g durch die Punkte P_5 und P_6 geht und parallel zu der Ebenen E_1 ist.

Aufgabe H 14. *2π-periodische Funktionen*

(a) Zeigen Sie, dass im Vektorraum der 2π-periodischen Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ die Funktionen $f_1(X) = 1$, $f_2(X) = \sin(X)$, $f_3(X) = \cos(X)$, $f_4(X) = \sin(2X)$ und $f_5(X) = \cos(2X)$ linear unabhängig sind.

(b) Stellen Sie die Funktionen

$$g_1(X) = 3\sin(X)\cos(X), \qquad g_2(X) = (1+\cos(X))^2$$

als Linearkombinationen von f_1 bis f_5 dar.

Hinweis: Die Additionstheoreme 1.8.3 sind hier nützlich, vielleicht auch die Relation $\cos^2(X) + \sin^2(X) = 1$.

Aufgabe H 15. *Auffüllen einer Basis*

Wir betrachten den Untervektorraum

$$U := \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 0\} \subseteqq \mathbb{R}^4.$$

Zeigen Sie, dass $v_1 = (1,0,1,1)$ und $v_2 = (0,1,1,0)$ linear unabhängig sind und in U liegen. Geben Sie eine Basis von U an, welche v_1 und v_2 enthält. Welche Dimension hat U?

Höhere Mathematik I

Winter 2007/08

Aufgabe P 16. *Vektorprodukt*

Gegeben sind die folgenden Vektoren

$$a = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 18 \\ 16 \\ 26 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad d = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie:

(a) $a \times b$ und $a \times d$

(b) $(a+b) \times c$

(c) $\langle a+b, a \times b \rangle$

Aufgabe P 17. *Winkel, Hesse-Normalform*

Bestimmen Sie für das Dreieck T mit den Eckpunkten $(2,2,1)$, $(1,2,2)$, $(1,1,1)$

(a) alle Innenwinkel,

(b) den Flächeninhalt,

(c) die Hesse-Normalform der Ebene E_1, die T enthält,

(d) ein Rechtssystem $\{b_1, b_2, b_3\}$, wobei b_1 der Normalenvektor der Ebene E_1 mit positiven x_1-Wert sein soll und $b_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)^{\mathsf{T}}$ ist.

Aufgabe P 18. *Abstand zwischen windschiefen Geraden*

Zeigen Sie, dass die beiden Geraden

$$g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

windschief sind (d. h. sie sind nicht parallel und sie schneiden sich nicht), berechnen Sie deren Abstand sowie die Punkte $P \in g_1$ und $Q \in g_2$ mit dem kürzesten Abstand.

Aufgabe P 19. *Lineares Gleichungssystem*

Es soll nach folgender Tabelle (Nährstoffanteile (in %)) ein Obstsalat zusammengestellt werden, der insgesamt 9 g Eiweiß, 5 g Fett und 194 g Kohlenhydrate enthält.

	Eiweiß	Fett	Kohlenhydrate
Äpfel	0,3	0,6	15
Bananen	1,1	0,2	22
Orangen	1,0	0,2	12

Stellen Sie hierfür ein lineares Gleichungssystem auf.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 16. *Lineares Gleichungssystem*

Es wird der Radius r und der Mittelpunkt $M = (x_m, y_m)$ eines Kreises gesucht, der durch die drei Punkte $A = (-2, 4)$, $B = (-3, 0)$ und $C = (0, 0)$ festgelegt ist. Berechnen Sie die Unbekannten r, x_m und y_m mit Hilfe eines linearen Gleichungssystems.

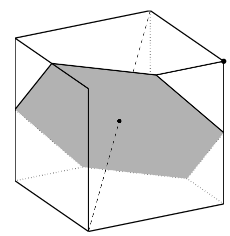
(a) Stellen Sie die allgemeine Kreisgleichung auf.

(b) Ersetzen Sie die Unbekannten r, x_m und y_m geschickt durch α_1, α_2 und α_3, damit keine Quadrate mehr auftauchen.

(c) Lösen Sie das entstandene lineare Gleichungssystem und berechnen Sie daraus wieder r, x_m und y_m.

Aufgabe H 17. *Flächenberechnung*

Ein Würfel mit Kantenlänge 1 wird von einer Ebene E durch den Mittelpunkt senkrecht zur Raumdiagonale geschnitten.



(a) Bestimmen Sie den Winkel zwischen der Ebenen E und einer Würfelfläche.

(b) Bestimmen Sie die Fläche des entstehenden Sechsecks.

(c) Bestimmen Sie den Abstand der Ebenen E zum Punkt P.

Hinweis: Legen Sie den Würfel in ein geeignetes Koordinatensystem.

Aufgabe H 18. *Linearität des Vektorproduktes*

Zeigen Sie, dass das Vektorprodukt in jedem der beiden Argument linear ist, d. h. es gilt

$$(\alpha a + \beta b) \times (\gamma c + \delta d) = \alpha\gamma(a \times c) + \alpha\delta(a \times d) + \beta\gamma(b \times c) + \beta\delta(b \times d)$$

für beliebige $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ und $a, b, c, d \in \mathbb{R}^3$.

Aufgabe H 19. *Grassmann- und Lagrange-Identität*

Beweisen Sie für beliebige $a, b, c, d \in \mathbb{R}^3$

(a) die Grassmann-Identität:

$$(a \times b) \times c = \langle a, c\rangle\, b - \langle b, c\rangle\, a\,,$$

(b) die Lagrange-Identität:

$$\langle (a \times b), (c \times d)\rangle = \langle a, c\rangle\langle b, d\rangle - \langle a, d\rangle\langle b, c\rangle\,.$$

Hinweis: Die Linearität (vgl. H18) kann helfen, die Rechnungen zu vereinfachen.

Höhere Mathematik I

Aufgabe P 20. *Multiplikation von Matrizen*
Berechnen Sie für

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 6 \\ 40 & 50 & 60 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad y = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

folgende Summen und Produkte (sofern das möglich ist):

(a) $A^{\mathsf{T}} y$ **(b)** $A y^{\mathsf{T}}$ **(c)** $B^{\mathsf{T}} B$ **(d)** $A + B$ **(e)** $A + B^{\mathsf{T}}$ **(f)** $y^{\mathsf{T}} y$

Aufgabe P 21. *Bestimmung einer Matrix*
Gesucht ist eine Matrix A so, dass die (lineare) Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon u \mapsto Au$ die Vektoren

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad u_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

jeweils auf

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

abbildet. Bestimmen Sie die Einträge der Matrix A mit Hilfe linearer Gleichungssysteme.

Aufgabe P 22. *Lineare Abbildungen*
Untersuchen Sie, ob die folgenden Abbildungen linear sind (dabei bezeichnet $C^\infty(\mathbb{R})$ den Vektorraum aller beliebig oft stetig differenzierbaren Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$, und u jeweils solch eine Funktion). Geben Sie jeweils einen Beweis oder mindestens ein Gegenbeispiel an.

(a)
$$f_1\colon C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})\colon u \mapsto 2u + 3$$

(b)
$$f_2\colon C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})\colon u \mapsto u'$$

(c)
$$f_3\colon C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})\colon u \mapsto u^2$$

(d)
$$f_4\colon C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})\colon u \mapsto u'' - u$$

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 20. *Matrizenmultiplikation*
Berechnen Sie für die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 4 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \\ 7 & -5 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

alle Matrizenprodukte aus je zwei Faktoren, soweit diese Produkte definiert sind.

Aufgabe H 21. *Gauß-Algorithmus*

(a) Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & -3 \\ -2 & -2 & 1 & -3 & 0 \\ -2 & -1 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Bestimmen sie alle Lösungen des linearen Gleichungssystems mit Hilfe des Gauß-Algorithmus.

(b) Bestimmen Sie die $t \in \mathbb{R}$, für welche das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} t & 1 & (t-1)^2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(i) genau eine Lösung **(ii)** keine Lösung **(iii)** mehrere Lösungen

besitzt. Geben Sie in den Fällen (i) und (iii) alle Lösungen an.

Aufgabe H 22. *Lineare Abbildungen*
Untersuchen Sie, ob die folgenden Abbildungen $\mathbb{K}$-linear sind. Geben Sie jeweils einen Beweis oder mindestens ein Gegenbeispiel an.

(a)
$$f_1 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3x + 2y \\ x + 2y \end{pmatrix}$$

(b)
$$f_2 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3x + 2y \\ x + 2 \end{pmatrix}$$

(c)
$$f_3 \colon \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{R} \colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x + \sqrt{2}\, y \qquad \text{(für } \mathbb{K} = \mathbb{Q}\text{)}$$

(d)
$$f_4 \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C} \colon z \mapsto \overline{z}$$

Dr. A. App
Dr. M. Pfeil

7. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik I

Prof. Dr. M. Stroppel

Winter 2007/08

Aufgabe P 23. *Rang einer Matrix*

Bestimmen Sie den Rang der folgenden Matrix A_c in Abhängigkeit vom Parameter $c \in \mathbb{R}$.

$$A_c = \begin{pmatrix} c(c-1) & 0 & 0 & c(c-1) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2c \\ c(c-1) & 0 & 2c & c \end{pmatrix}$$

Es sei nun $\alpha_c \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4 \colon v \mapsto A_c v$. Bestimmen Sie jeweils eine Basis für den Kern dieser linearen Abbildung für $c = 0$, $c = 1$ und $c = 2$.

Aufgabe P 24. *Beschreibung linearer Abbildungen durch Matrizen*

(a) Beschreiben Sie die lineare Abbildung $\delta \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, die jeden Vektor auf den um $\frac{\pi}{4}$ gegen den Uhrzeigersinn gedrehten Vektor gleicher Länge abbildet durch ihre Matrix ${}_C\delta_C$ bezüglich der Basis $C \colon c_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $c_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(b) Gegeben ist die Ebene

$$E_1 \colon \frac{1}{3}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \bullet \vec{x}\right) = 0.$$

Spiegeln an dieser Ebene ist eine lineare Abbildung, wir nennen sie φ. Geben Sie die Matrizen ${}_\mathcal{B}\varphi_\mathcal{B}$ und ${}_\mathcal{E}\varphi_\mathcal{E}$ an für die Basis $\mathcal{B} \colon b_1 := \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $b_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und die Standardbasis $\mathcal{E}$ des $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe P 25. *Rang von Matrizenprodukten*

Gegeben seien die linearen Abbildungen $\alpha \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\beta \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ und $\gamma \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ durch ihre Abbildungsmatrizen (jeweils bezüglich der Standardbasis)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

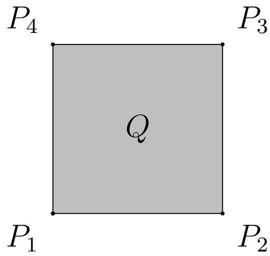
(a) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrizen zu den Abbildungen $\beta \circ \alpha$, $\gamma \circ \beta$ und $\gamma \circ \beta \circ \alpha$.

(b) Bestimmen Sie jeweils zu allen Abbildungsmatrizen den Rang.

(c) Warum kann der Rang der Abbildungsmatrix von $\gamma \circ \beta \circ \alpha$ nie größer als 2 sein?

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 23. *Lineare Abbildung*



Das abgebildete Quadrat $Q \subsetneq \mathbb{R}^2$ besitzt die Eckpunkte $P_1 = (-1,-1)$, $P_2 = (1,-1)$, $P_3 = (1,1)$ und $P_4 = (-1,1)$.
Bestimmen Sie alle Matrizen A, für die die lineare Abbildung

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \colon u \mapsto Au$$

die Ecken des Quadrats auf sich selbst abbildet.

Aufgabe H 24. *Kern und Bild*

Zeigen Sie, daß $\mathrm{Kern}(\alpha)$ und $\mathrm{Bild}(\alpha)$ einer linearen Abbildung $\alpha\colon V \to W$ Untervektorräume von V bzw. W sind.

Aufgabe H 25. *Inverse Matrizen*

(a) Gegeben sei die Matrix $A := \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ existiert eine Matrix $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \setminus \{\mathbf{0}\}$ derart, dass $AC = \mathbf{0}$ gilt?

Bestimmen Sie jeweils alle solchen Matrizen $C \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und berechnen Sie dann auch CA.

(b) Gegeben sei die Matrix $A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

Was muss für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ gelten, damit es möglich ist, die inverse Matrix A^{-1} zu A zu bestimmen (also eine Matrix $A^{-1} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $AA^{-1} = E_2 = A^{-1}A$) ?

Geben Sie die Inverse in diesen Fällen an.

Höhere Mathematik I

Winter 2007/08

Aufgabe P 26. *Inverse Matrizen*

Gegeben sind die folgenden reellen Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Für welche Matrizen gibt es eine Rechtsinverse, eine Linksinverse, eine Inverse?

(b) Berechnen Sie in den Fällen, wo es möglich ist, die Inverse.

Aufgabe P 27. *Pseudoinverse*

Gegeben sei die Matrix

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie $\mathrm{Rg}(A_t)$.

(b) Für welche Werte von t ist A_t invertierbar? Berechnen Sie hierfür die Inverse A_t^{-1}.

(c) Berechnen Sie A^+A_0 und A_0A^+ mit

$$A^+ = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Was fällt auf?

Hinweis: A^+ ist die sogenannte *Pseudoinverse* von A_0.

Aufgabe P 28. *Determinanten*

Gegeben sind die folgenden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -2 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & 14 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -30 & 10 & 0 \\ -20 & 10 & -5 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie $\det A$ mit Hilfe der Regel von Sarrus.

(b) Berechnen Sie $\det B$, indem Sie nach einer Zeile oder Spalte entwickeln.

(c) Berechnen Sie $\det C$, indem Sie die Matrix C zuerst auf Dreiecksgestalt umformen.

(d) Berechnen Sie $\det D$ und $\det F$ auf möglichst einfache Weise.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 26. *Inverse Matrizen*
Bestimmen Sie A^{-1} und B^{-1} für die folgenden Matrizen A und B:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & i & 1 & 1 \\ 0 & 0 & i+1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ i & i & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{4\times 4}.$$

Berechnen Sie zur Probe AA^{-1}, $A^{-1}A$, BB^{-1} und $B^{-1}B$.

Aufgabe H 27. *Basiswechsel*
Es ist die lineare Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \mapsto (2x + 2y, -y, y + 2z)$$

bezüglich der Standardbasis E gegeben. Weiter betrachten wir die Basis

$$B : b_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

(a) Stellen Sie die Matrizen ${}_E\varphi_E$, ${}_E\mathrm{id}_B$ und ${}_B\mathrm{id}_E$ auf.

(b) Berechnen Sie die Matrix ${}_B\varphi_B$.

Aufgabe H 28. *Spatvolumen und -oberfläche*
Die lineare Abbildung $\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ bildet die Standardbasisvektoren e_1, e_2, e_3 jeweils ab auf die Vektoren

$$b_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad b_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix ${}_E\alpha_E$.

(b) Berechnen Sie die Oberfläche des Spats, der von b_1, b_2, b_3 aufgespannt wird.

(c) Bestimmen Sie das Volumen dieses Spats mit Hilfe des Spatprodukts (vgl. 3.11.2 der Vorlesung).

(d) Berechnen Sie $\det({}_E\alpha_E)$.

Was fällt Ihnen bei den letzten zwei Ergebnissen auf? Verallgemeinern Sie Ihre Beobachtungen, und begründen Sie die allgemeinen Behauptungen mit Aussagen aus der Vorlesung.

Dr. A. App
Dr. M. Pfeil

9. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik I

Prof. Dr. M. Stroppel

Winter 2007/08

Aufgabe P 29. *Schmidtsches Orthonormierungsverfahren*

Gegeben sind die folgenden linear unabhängigen Vektoren v_1 bis v_4:

$$v_1 = (2,\,2,\,1,\,0)^\intercal, \quad v_2 = (-3,\,-5,\,-2,\,0)^\intercal, \quad v_3 = (1,\,5,\,-3,\,0)^\intercal, \quad v_4 = (5,\,-1,\,-8,\,1)^\intercal.$$

(a) Konstruieren Sie mit Hilfe des Schmidtschen Orthonormierungsverfahrens eine Orthonormalbasis $F\colon f_1, f_2, f_3, f_4$ so, dass gilt: $\mathrm{L}(f_1) = \mathrm{L}(v_1)$, $\mathrm{L}(f_1, f_2) = \mathrm{L}(v_1, v_2)$ und $\mathrm{L}(f_1, f_2, f_3) = \mathrm{L}(v_1, v_2, v_3)$.

(b) Warum gilt auch $\mathrm{L}(f_1, f_2, f_3, f_4) = \mathrm{L}(v_1, v_2, v_3, v_4)$?

(c) Begründen Sie, warum die Matrix $A := \left({}_E f_1 \;\; {}_E f_2 \;\; {}_E f_3 \;\; {}_E f_4\right)$ orthogonal ist.

Aufgabe P 30. *Drehung*

Gegeben seien die affinen Abbildungen $\alpha : u \mapsto Au$, $\beta : v \mapsto Av + s$ und $\gamma : w \mapsto Aw + t$ von $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}^3$ mit

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad s = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad t = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestätigen Sie, dass α, β und γ Bewegungen sind. Handelt es sich um eigentliche oder uneigentliche Bewegungen?

(b) Zeigen Sie, dass α eine Drehung ist, indem Sie die Drehachse (die Menge aller Fixpunkte x mit $x = \alpha(x)$) und den Drehwinkel bestimmen.

Hinweis: Finden Sie zur Berechnung des Drehwinkels einen Vektor y, der orthogonal zur Drehachse ist, und berechnen Sie den Winkel zwischen y und $\alpha(y)$.

(c) Handelt es sich auch bei β und γ um Drehungen? Versuchen Sie auch hier, die Drehachse zu bestimmen.

Aufgabe P 31. *Scherung*

Eine Scherung ist eine affine Abbildung der Ebene $\mathbb{R}^2$ auf sich selbst mit folgenden Zusatzeigenschaften: Es gibt eine Gerade (genannt Scherungsachse), die punktweise festbleibt, und alle Punkte außerhalb dieser Geraden werden parallel zur Scherungsachse verschoben.

Gegeben ist nun eine Scherung α mit der der Geraden $y = x + 1$ als Scherungsachse bei der der Punkt $P = (1, 1)$ auf den Punkt $P' = \alpha(P) = (3, 3)$ abgebildet wird. Außerdem ist $Q = (2, 1)$.

(a) Bestimmen Sie $\alpha(Q)$ zeichnerisch durch eine geometrische Konstruktion.

(b) Beschreiben Sie den linearen Anteil und den Translationsanteil von α (bezüglich des Standardkoordinatensystems).

(c) Prüfen Sie ihr Ergebnis aus (a) rechnerisch nach.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 29. *Determinante*

Zeigen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion, dass für die Determinante der Matrix A_n, mit

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_n \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_2 \\ c_n & c_{n-1} & \cdots & c_2 & 1 \end{pmatrix},$$

$\det A_n = 1 - b_2c_2 - \cdots - b_nc_n$ gilt.

Aufgabe H 30. *Affine Abbildung*

Gegeben sind die affinen Abbildungen

$$\alpha_1\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon v \mapsto A_1v + t_1 \quad \text{und} \quad \alpha_2\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon v \mapsto A_2v + t_2$$

mit den Matrizen und Vektoren:

$$A_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\frac{\sqrt{2}}{2} & -1 & 1-\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & \sqrt{2} & -1 \\ 1-\frac{\sqrt{2}}{2} & 1 & 1+\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ t_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\ t_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Ist die affine Abbildung α_1 oder α_2 eine Bewegung?

(b) Bestimmen Sie den linearen Anteil und Translationsanteil der Komposition $\beta = \alpha_2 \circ \alpha_1$. Ist diese affine Abbildung eine Bewegung?

(c) Bestimmen Sie die affinen Abbildungen α_1^{-1} und α_2^{-1}.

Aufgabe H 31. *orthogonale Matrizen*

Es seien A und B aus $\mathbb{R}^{n\times n}$ zwei orthogonale Matrizen. Zeigen Sie, dass die Matrizen AB und A^{-1} ebenfalls orthogonal sind.

Aufgabe P 32. *Affine Abbildungen*

Es sind die affinen Abbildungen $\alpha\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon v \mapsto Av + t$ und $\beta\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon v \mapsto Bv + r$ durch

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad t := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad r := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gegeben. Weiter ist

$$g := \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

eine Gerade.

(a) Bestimmen Sie $\alpha(g)$ und $\beta(g)$. Sind das Geraden?

(b) Berechnen Sie den linearen Anteil und den Translationsanteil von $\alpha \circ \beta$ und $\beta \circ \alpha$.

Aufgabe P 33. *affine Koordinatentransformation*

Im $\mathbb{R}^3$ sind die Punkte $P_0 := (5, -2, 1)$, $P_1 := (6, 1, 4)$, $P_2 := (3, -1, 3)$, $P_3 := (5, -1, 2)$ gegeben.

Bestimmen Sie ein Koordinatensystem $\mathbb{F}$ so, dass ${}_{\mathbb{F}}P_0 = \vec{0}, {}_{\mathbb{F}}P_1 = e_1, {}_{\mathbb{F}}P_2 = e_2, {}_{\mathbb{F}}P_3 = e_3$. Dabei ist $\mathbb{E} = (\vec{0}; e_1, e_2, e_3)$ das Standardkoordinatensystem.

Geben Sie die Koordinatentransformationen ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$ und ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$ an.

Berechnen Sie die Koordinaten ${}_{\mathbb{E}}P_4$ des Punktes P_4 aus ${}_{\mathbb{F}}P_4 = (2, 1, -3)$.

Aufgabe P 34. *Koordinatenwechsel*

Es sei $\mathbb{E} = (\vec{0}; e_1, e_2, e_3)$ das Standardkoordinatensystem in $\mathbb{R}^3$. Durch den Punkt $P := (-1, \frac{1}{2}, 4)$ und die Vektoren $f_1 := (1, 2, 0)^\intercal, f_2 := (-2, -3, 1)^\intercal, f_3 := (3, -1, 1)^\intercal$ ist ein weiteres affines Koordinatensystem $\mathbb{F} := (P; f_1, f_2, f_3)$ bestimmt.

(a) Ist $\mathbb{F}$ ein kartesisches Koordinatensystem?

(b) Berechnen Sie mit Hilfe des Ansatzes

$${}_{\mathbb{F}}X = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \iff X = P + y_1 f_1 + y_2 f_2 + y_3 f_3$$

die Koordinaten ${}_{\mathbb{F}}\vec{0}$, ${}_{\mathbb{F}}e_1$, ${}_{\mathbb{F}}e_2$, ${}_{\mathbb{F}}e_3$.

(c) Bestimmen Sie die Koordinatentransformation ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$.

(d) Bestimmen Sie die Koordinatentransformation ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$.
Überprüfen Sie damit Ihr Ergebnis für ${}_{\mathbb{F}}\vec{0}$, ${}_{\mathbb{F}}e_1$, ${}_{\mathbb{F}}e_2$, ${}_{\mathbb{F}}e_3$.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 32. *Scherung*

Die Scherung α ist im Standardkoordinatensystem $\mathbb{E}$ gegeben durch

$$\alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon x \mapsto \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Wir betrachten das affine Koordinatensystem $\mathbb{G} = (A; a_1, a_2)$ mit $A = (0,\, 1)$, $a_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,\, 2)^\intercal$ und $a_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2,\, 1)^\intercal$.

(a) Bestimmen Sie die Scherungsachse.
Hinweis: Die Punkte auf der Scherungsachse sind Fixpunkte.

(b) Ist das affine Koordinatensystem $\mathbb{G}$ auch ein kartesisches Koordinatensystem?

(c) Bestimmen Sie die Beschreibung ${}_{\mathbb{G}}\alpha_{\mathbb{G}}$ der Scherung α bezüglich des affinen Koordinatensystems $\mathbb{G}$.

(d) Bestimmen Sie die Koordinatentranformationen ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{G}}$ und ${}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{E}}$.

Aufgabe H 33. *Drehung in der Ebene*

Die affine Abbildung ${}_{\mathbb{E}}\alpha_{\mathbb{E}}$ sei eine Drehung mit Drehwinkel $\frac{\pi}{4}$ gegen den Uhrzeigersinn und Drehzentrum $P = (-2,\, 3)$. Mit Hilfe der Vektoren

$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,\, 1)^\intercal, \quad b_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,\, 1)^\intercal, \quad d_1 = \frac{1}{5}(3,\, 4)^\intercal \quad \text{und} \quad d_2 = \frac{1}{5}(-4,\, 3)^\intercal$$

sind die kartesischen Koordinatensysteme $\mathbb{B} = (P;\ b_1,\ b_2)$ und $\mathbb{D} = (P;\ d_1,\ d_2)$ gegeben.

(a) Bestimmen Sie den linearen Anteil und Translationsanteil der Beschreibung ${}_{\mathbb{E}}\alpha_{\mathbb{E}}$, dieser Drehung im Standardkoordinatensystem $\mathbb{E}$.

(b) Berechnen Sie ${}_{\mathbb{B}}\alpha_{\mathbb{D}}$ und die Koordinatentransformationen ${}_{\mathbb{D}}\kappa_{\mathbb{E}}$, ${}_{\mathbb{B}}\kappa_{\mathbb{D}}$ und ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{B}}$.

Aufgabe H 34. *Koordinatenwechsel*

Gegeben sind die Punkte $P := (1, -2, -1)$, $F_1 := (0, -1, 1)$, $F_2 := (0, 0, 1)$ und $F_3 := (-1, -3, 2)$ sowie $Q := (-1, 0, 1)$, $G_1 := (0, 0, 0)$, $G_2 := (-1, 1, 3)$ und $G_3 := (-2, 1, 3)$.

(a) Zeigen Sie, dass durch die Punkte P und F_j bzw. die Punkte Q und G_j jeweils ein affines Koordinatensystem $\mathbb{F} = \left(P; \overrightarrow{PF_1}, \overrightarrow{PF_2}, \overrightarrow{PF_3}\right)$ bzw. $\mathbb{G} := \left(Q; \overrightarrow{QG_1}, \overrightarrow{QG_2}, \overrightarrow{QG_3}\right)$ gegeben ist. Sind dies auch kartesische Koordinatensysteme?

(b) Sei nun noch das Standardkoordinatensystem $\mathbb{E}$ gegeben. Berechnen Sie die Koordinatentransformationen ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$, ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$, ${}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{E}}$, ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{G}}$, ${}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{F}}$ und ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{G}}$.

Dr. A. App
Dr. M. Pfeil

11. Gruppenübung zur Vorlesung

Prof. Dr. M. Stroppel

Höhere Mathematik I

Winter 2007/08

Aufgabe P 35. *Eigenwerte und Eigenräume*

Gegeben sind die folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} -11 & -7 \\ 14 & 10 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie alle reellen Eigenwerte der Matrizen A, B, C sowie die zugehörigen Eigenräume.

(b) Bestimmen Sie alle komplexen Eigenwerte der Matrizen A, B, C sowie die zugehörigen Eigenräume.

Aufgabe P 36. *Eigenwerte und Eigenvektoren*

Gegeben seien die Matrix und die Vektoren

$$A = \begin{pmatrix} 12 & 4 & 0 & -9 \\ 2 & 10 & 0 & -3 \\ 2 & 2 & 1 & -6 \\ 2 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Untersuchen Sie, welche der Vektoren v_1 bis v_3 Eigenvektoren von A sind.

(b) Berechnen Sie alle Eigenwerte von A und geben Sie jeweils einen zugehörigen Eigenvektor an.

(c) Welche algebraische und geometrische Vielfachheit besitzen die Eigenwerte jeweils?

Aufgabe P 37. *Involutionen*

Gegeben sei ein $\mathbb{R}$-Vektorraum V und eine lineare Abbildung $\varphi : V \to V$ mit der Eigenschaft, dass $\varphi \circ \varphi = \mathrm{id}_V$. (Eine Abbildung mit dieser Eigenschaft heißt Involution.)
Welche Eigenwerte kann φ besitzen?

Zusatz: Zeigen Sie, dass jeder vom Nullvektor verschiedene Vektor ein Eigenvektor von φ oder die Summe von zwei Eigenvektoren von φ ist.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 35. *Eigenwerte und Eigenvektoren*

Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$$

hat die Eigenwerte $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ und $\lambda_3 = 2$ und die dazugehörenden Eigenvektoren $v_1 = (1,\, 0,\, -1)^\intercal$, $v_2 = (1,\, 1,\, 1)^\intercal$ und $v_3 = (-1,\, 2,\, -1)^\intercal$.

(a) Bestimmen Sie die Matrix A.

(b) Bestimmen Sie x so, dass $Ax = (0,\, 1,\, 0)^\intercal$ gilt, ohne dass Sie die Matrix invertieren. Schreiben Sie $(0,\, 1,\, 0)^\intercal$ dazu als Linearkombination der Eigenvektoren.

Aufgabe H 36. *Eigenwerte und Matrixpotenzen*

Es sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ eine Matrix und n eine natürliche Zahl.

(a) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion: Ist λ ein Eigenwert von A zum Eigenvektor v, dann ist λ^n ein Eigenwert von A^n zum Eigenvektor v.

(b) Widerlegen Sie die folgende Behauptung: Ist λ ein Eigenwert von A^n, dann ist $\sqrt[n]{\lambda}$ ein Eigenwert von A.

Hinweis: In „kleinen“ Räumen lassen sich für kleine n schöne Gegenbeispiele finden.

Aufgabe H 37.

Gegeben sei die Abbildung $\varphi\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3\colon x \mapsto Ax$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2}i & 0 \\ -\sqrt{2}i & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume von A.

(b) Wählen Sie den Eigenwert λ_1 von A mit algebraischer Vielfachheit zwei und einen zugehörigen Eigenvektor f_1. Konstruieren Sie eine Basis $F\colon f_1, f_2, f_3$ (f_3 ist der Eigenvektor zum Eigenwert λ_2 mit algebraischer Vielfachheit eins), indem Sie einen Vektor f_2 so wählen, dass $(A - \lambda_1 E_3)f_2 = f_1$. Bestimmen Sie die Matrixdarstellung ${}_F\varphi_F$.

Dr. A. App
Dr. M. Pfeil

12. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik I

Prof. Dr. M. Stroppel

Winter 2007/08

Aufgabe P 38. *Diagonalisierung*

Gegeben sind die symmetrischen Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1+4\alpha & 2\alpha & 0 \\ 2\alpha & 1+\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1-\alpha \end{pmatrix}, \qquad \alpha > 0\,.$$

Diagonalisieren Sie A und B. Geben Sie jeweils die Transformationsmatrix und die Diagonalmatrix an.

Aufgabe P 39. *Quadratische Form*

Gegeben ist die quadratische Form $q(x) = x^{\mathsf{T}} A x$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ -5 & 3 & -3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Schreiben Sie q als Polynom.

(b) Finden Sie eine symmetrische Matrix $\tilde{A}$ so, dass $q(x) = x^{\mathsf{T}} \tilde{A} x$ gilt.

(c) Begründen Sie, warum zu jeder quadratischen Matrix B die Matrix $\frac{1}{2}(B + B^{\mathsf{T}})$ symmetrisch ist, und dass B und $\frac{1}{2}(B + B^{\mathsf{T}})$ dieselbe quadratische Form $r(x) = x^{\mathsf{T}} B\, x$ beschreiben.

Aufgabe P 40. *Skizzieren von Quadriken*

Gegeben sind die folgenden Quadriken:

$$Q_1 = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^{\mathsf{T}} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{9}{2} \end{pmatrix} x - \frac{1}{2} = 0 \right\}$$

$$Q_2 = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^{\mathsf{T}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} x + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}} x + \frac{3}{2} = 0 \right\}$$

$$Q_3 = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^{\mathsf{T}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x + 2 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}} x - 6 = 0 \right\}$$

$$Q_4 = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^{\mathsf{T}} \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} x + 2 \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}} x = 0 \right\}$$

Skizzieren Sie jeweils die Quadriken.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 38. *Konjugierte Matrizen*

Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} -10 & -2 & 24 \\ 20 & 3 & -40 \\ -4 & -1 & 10 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die zu A konjugierte Matrix $B = T^{-1}AT$.

(b) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren von B.

(c) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren von A.
Hinweis: Verwenden Sie Satz 5.2.2 aus der Vorlesung.

Aufgabe H 39.

Bringen Sie Matrix A

$$A = \frac{1}{64}\begin{pmatrix} 7 & 3\sqrt{3} & 0 \\ 3\sqrt{3} & 13 & 0 \\ 0 & 0 & -128 \end{pmatrix}.$$

auf Diagonalgestalt D. Dabei sollen die Diagonaleinträge der Matrix D absteigend sortiert sein, also $d_{11} \geqq d_{22} \geqq d_{33}$ gelten.

Die zur Diagonalisierung vorgenommene Basistransformation entspricht einer Drehung um die x_3-Achse. Bestimmen Sie deren Drehwinkel φ.

Es sei nun die Quadrik

$$Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^\intercal A\, x = 0 \right\}$$

gegeben. Skizzieren Sie die Schnittkurven mit den vier Ebenen jeweils parallel zur x_1x_2-Ebene und im Abstand $-\frac{1}{\sqrt{2}}$, 0, $\frac{1}{\sqrt{2}}$ bzw. $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ vom Ursprung. Die Skizze sollte sauber von Hand gezeichnet sein.

Hinweis: Es ist einfacher, vom gedrehten Koordinatensystem auszugehen.

Aufgabe H 40. *Quadrik*

Gegeben ist die Quadrik $Q := \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 3\,x_1^2 - 2\,x_2^2 - x_3^2 - 1 = 0 \right\}$.

(a) Geben Sie den quadratischen, den linearen und den konstanten Teil der Quadrik an.

(b) Geben Sie die Matrixbeschreibung der Quadrik Q an.

(c) Entscheiden Sie, ob Q eine kegelige, eine parabolische oder eine Mittelpunktsquadrik ist.

(d) Skizzieren Sie die Quadrik.
Hinweis: Gehen Sie analog zur Vorlesung vor und schneiden Sie die Quadrik mit Ebenen, die senkrecht zu Koordinatenachsen liegen.

Dr. A. App
Dr. M. Pfeil

13. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik I

Prof. Dr. M. Stroppel

Winter 2007/08

Aufgabe P 41. *Grobeinteilung der Quadriken*
Für welche $c \in \mathbb{R}$ ist die Quadrik

$$Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1^2 + x_2^2 + c\,x_3^2 + 4\,c\,x_2\,x_3 + 2\,c\,(c-1)\,x_3 + c\,(c-1) = 0 \right\}$$

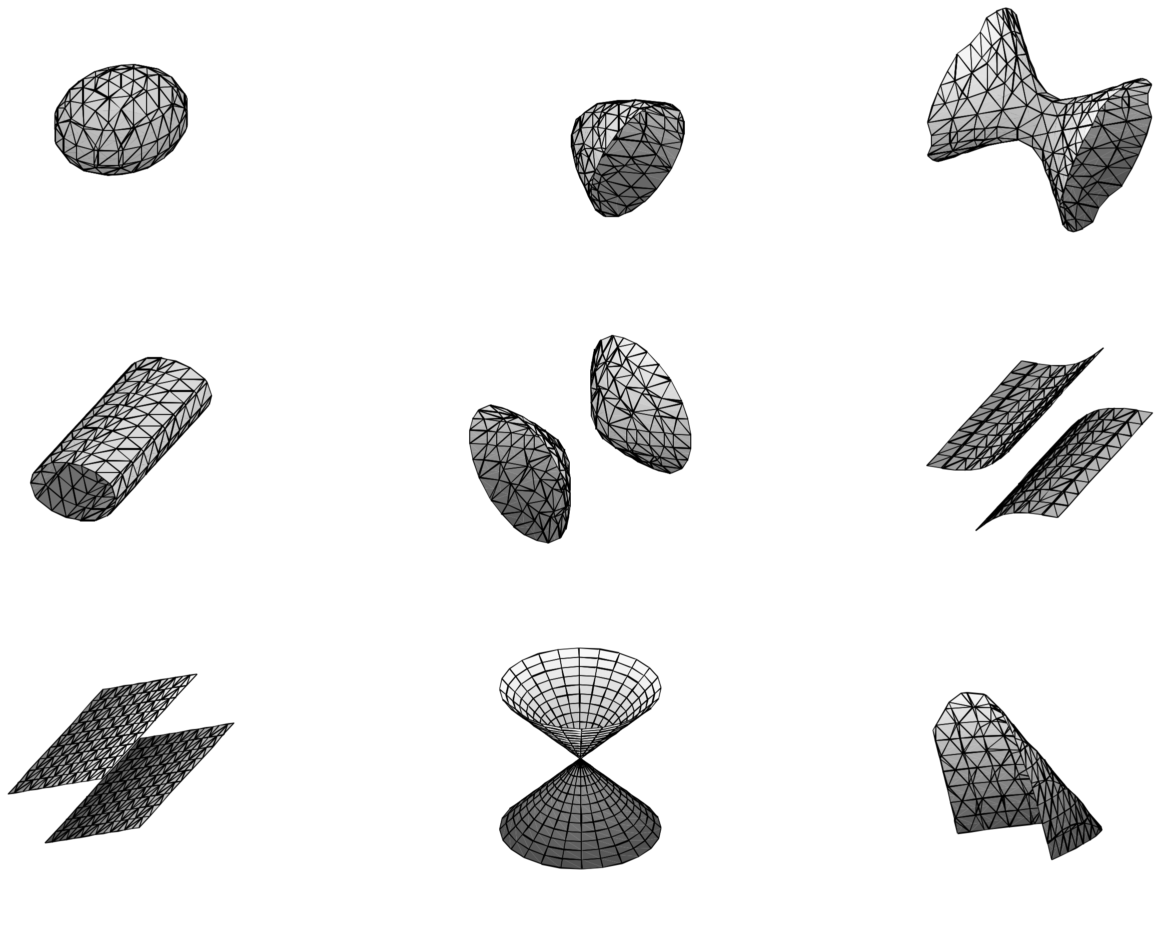
eine kegelige Quadrik, eine Mittelpunktsquadrik oder eine parabolische Quadrik?

Aufgabe P 42. *euklidische Normalform*
Bestimmen Sie die euklidische Normalform der folgenden Quadrik:

$$Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x_1^2 + x_1\,x_2 + 3\,x_2\,x_1 + 4\,x_2^2 + \frac{26}{5}\,x_1 + \frac{12}{5}\,x_2 - 7 = 0 \right\} .$$

Geben Sie für jeden Transformationsschritt und für die Gesamttransformation jeweils das neu gewählte Koordinatensystem und die Koordinatentransformation an. Skizzieren Sie die Quadrik.

Aufgabe P 43. *Klassifikation der Quadriken im Raum*
Um welche Quadriken könnte es sich bei den folgenden Bildern handeln? Geben Sie jeweils den Typ der Quadrik und eine mögliche euklidische Normalform an.



Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 41. *Definitheit einer quadratischen Form*

Gegeben ist die quadratische Form $q(x) = x^\mathsf{T} A x$ mit

$$A = \begin{pmatrix} c^2 - 4 + 3c & c^2 - 4 - 3c \\ c^2 - 4 - 3c & c^2 - 4 + 3c \end{pmatrix} .$$

Untersuchen Sie, für welche Werte von $c \in \mathbb{R}$ die quadratische Form positiv definit, negativ definit bzw. indefinit ist.

Aufgabe H 42. *Typ einer Quadrik*

Bestimmen Sie für die Quadrik

$$Q_\alpha = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1^2 - 2x_2^2 + \alpha x_3^2 + 4x_1x_2 + 2\sqrt{5}\, x_1 + 4\sqrt{5}\, x_2 + \alpha = 0 \right\}$$

in Abhängigkeit von dem reellen Parameter α die Matrixform und den Typ.

Aufgabe H 43. *euklidische Normalform*

Bestimmen Sie für die Quadrik

$$Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1^2 + x_2^2 + 4\, x_3^2 + 6\, x_1\, x_2 + 12\, x_1\, x_3 + 4\, x_2\, x_3 + 8\, x_1 + 4\, x_2 - 2\, x_3 + 10 = 0 \right\}$$

die euklidische Normalform und den Typ. Geben Sie für jeden Transformationsschritt und für die Gesamttransformation jeweils das neu gewählte Koordinatensystem und die Koordinatentransformation an.

Dr. A. App
Dr. M. Pfeil

14. Gruppenübung zur Vorlesung

Prof. Dr. M. Stroppel

Höhere Mathematik I

Winter 2007/08

Aufgabe P 44. *Monotonie und Beschränktheit*

Untersuchen Sie die Folgen auf Monotonie und Beschränktheit. Geben Sie im Falle der Beschränktheit konkrete obere und untere Schranken an.
Können Sie eine Aussage darüber machen, ob die Folgen konvergieren?

(a) $\big(n + \sin(2\,\pi\,n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$

(b) $\big(n\,\sin(\frac{\pi}{2}\,n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$

(c) $\big(\frac{1}{n}\,\sin(n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$

(d) $\big(\sin(\frac{1}{n})\big)_{n\in\mathbb{N}}$

(e) $\big(\sin(\pi\,n - \frac{1}{n})\big)_{n\in\mathbb{N}}$

Aufgabe P 45. *Häufungspunkte*

Berechnen Sie die Häufungspunkte, $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n$ und $\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n$ der folgenden Folgen.
Untersuchen Sie die Folgen ebenfalls auf Konvergenz.

(a) $a_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$

(b) $a_n = 5 \cdot (-1)^n$

(c) $a_n = \begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^n & \text{für } n \text{ gerade} \\ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases}$

(d) $a_n = \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$

Aufgabe P 46. *rekursive Folgen*

Berechnen Sie die ersten fünf Folgenglieder der rekursiv definierten Folge

$$a_{n+1} = a_n + 8\,(n-1) \qquad \text{mit } a_1 = 1\,.$$

Zeigen Sie mit Induktion, dass für diese Folge auch

$$a_n = 4n^2 - 12n + 9$$

gilt.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 44. *Häufungspunkte*

Geben Sie alle Häufungspunkte der folgenden Folgen an:

(a) $\left(\cos\left(\frac{n\pi}{6}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$

(b) $\left(\frac{3n+1}{(-1)^n(1-n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

(c) $\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

(d) $\left(n - 2^{[\log_2(n)]}\right)_{n\in\mathbb{N}}$,
wobei „$[\ldots]$“ (*Gauß-Klammer*) das Abrunden beschreibt, d. h. $[x]$ ist die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich x ist. Zur Erinnerung: $\log_2(x)$ ist definiert durch $2^{\log_2(x)} = x$.

Aufgabe H 45. *Konvergenz*

Untersuchen Sie die Folgen auf Konvergenz. Falls die Folge nicht konvergiert geben Sie – falls vorhanden – deren Häufungspunkte an. Bei Konvergenz geben sie deren Grenzwert an.

$$a_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\frac{n+2}{2n} \qquad b_n = \frac{4n^4-3n+1}{n^5} \qquad c_n = \frac{4n^4-3n+1}{n^4}$$

$$d_n = \frac{4n^4-3n+1}{n^3} \qquad e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(2-\frac{1}{n}\right) \qquad g_n = \sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}$$

Hinweis: Die dritte binomische Formel kann bei der letzten Folge sehr hilfreich sein.

Aufgabe H 46. *rekursive Folge von Matrizen, Fibonacci-Zahlen*

Wir starten mit der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir definieren die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch: „ a_j ist der Eintrag rechts oben in der Matrix A^j “.

Weiter ist die Folge der Fibonacci-Zahlen rekursiv definiert durch

$$f_1 := 1, \quad f_2 := 1, \quad \forall n \geqq 2\colon\ f_{n+1} := f_n + f_{n-1}\,.$$

(a) Zeigen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion, dass die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleich sind.

(b) Zeigen Sie, dass für jede Diagonalmatrix D und jede invertierbare Matrix T gilt:

$$\forall\ k\in\mathbb{N}\colon \quad (T^{-1}D\,T)^k = T^{-1}D^k\,T$$

(c) Benutzen Sie die beiden vorigen Aufgabenteile, um eine explizite (nicht-rekursive) Beschreibung der Fibonacci-Zahlen zu geben.
Hinweis: Lassen Sie sich nicht von ein paar Wurzeln schrecken.

Aufgabe P 47. *Cauchy-Folgen*

Zeigen Sie, dass die Folgen

$$a_n = \frac{1}{2n+1} \qquad \text{und} \qquad b_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

Cauchy-Folgen sind. Geben Sie zu jedem $\varepsilon > 0$ ein n_ε so an, dass das Cauchy-Kriterium erfüllt ist.

Hinweis: Es ist hilfreich, wenn sie sich den Verlauf der Folgen, wie zum Beispiel Monotonie und Beschränktheit, näher betrachten.

Aufgabe P 48. *Konvergenz und (bestimmte) Divergenz*

Gegeben sind die Folgen

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (2\,n)_{n\in\mathbb{N}} \qquad (b_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

$$(c_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{2\,n^3 + 2\,n^2 + n}{n^2+1}\right)_{n\in\mathbb{N}} \qquad (d_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{2\}} = \left(\frac{2\,n^4}{-2\,n^2+8}\right)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{2\}}$$

$$(e_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{-6\,n^2 + 42\,n - 72}{-3\,(n+1)}\right)_{n\in\mathbb{N}} \qquad (f_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(n^2\right)_{n\in\mathbb{N}} \qquad (g_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{(-1)^n n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(a) Untersuchen Sie diese Folgen auf Konvergenz, Divergenz und bestimmte Divergenz.

(b) Führen Sie diese Untersuchung ebenfalls durch für die Folgen

$$(a_n\,b_n)_{n\in\mathbb{N}} \qquad (a_n\,g_n)_{n\in\mathbb{N}} \qquad (d_n\,b_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{2\}} \qquad (f_n\,g_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

$$(a_n - c_n)_{n\in\mathbb{N}} \qquad (a_n - d_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{2\}} \qquad (a_n - e_n)_{n\in\mathbb{N}} \qquad \left(\frac{b_n}{g_n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \qquad \left(\frac{g_n}{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

Begründen Sie mit Hilfe dieser Erkenntnisse, warum es nicht möglich ist, Ausdrücken wie „ $0 \cdot \infty$ “, „ $\infty - \infty$ “, „ $\frac{\infty}{\infty}$ “ oder „ $\frac{0}{0}$ “ einen vernünftigen Wert zuzuordnen.

Aufgabe P 49.

Finden Sie jeweils Beispiele von Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen so, dass (a_n) nicht konvergiert und (b_n) gegen Null konvergiert, während die Produktfolge $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$

(a) unbeschränkt ist,

(b) gegen ein beliebiges $c \in \mathbb{R}$ konvergiert,

(c) beschränkt ist, aber trotzdem nicht konvergiert.

Hausübungen (Abgabe in der ersten Gruppenübung im Sommersemester):

Aufgabe H 47. *Cauchy-Folgen*

Geben Sie für alle Folgen an, ob sie beschränkt oder monoton sind. Welche der Folgen sind Cauchy-Folgen?

$$a_n = \frac{n^2+2}{n^2+1} \qquad b_n = (-1)^n \frac{e^n}{4^n+5} \qquad c_n = n - \frac{1}{n}$$

Bestimmen Sie für die Cauchy-Folgen ein möglichst kleines $n_{0.01}$, so, dass gilt:

$$\forall\, k,\ell \in \mathbb{N} \colon \ (k,\ell > n_{0.01} \Longrightarrow |a_k - a_\ell| < 0.01) \ .$$

Aufgabe H 48. *Babylonisches Wurzelziehen*

Für $\alpha \geqq 0$ wird die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ rekursiv definiert durch

$$a_0 = \alpha + 1, \qquad\qquad a_n = \frac{a_{n-1} + \frac{\alpha}{a_{n-1}}}{2} \ .$$

(a) Verifizieren Sie, dass alle Folgenglieder positiv sind.

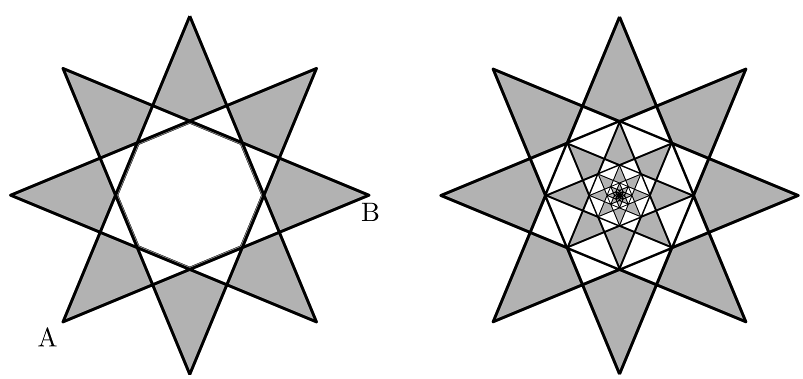
(b) Untersuchen Sie, ob für alle $n \geqq 0$ die Ungleichung $a_n \geqq \sqrt{\alpha}$ gilt.

(c) Zeigen Sie, dass die Folge (a_n) monoton fällt.

(d) Berechnen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Aufgabe H 49. *geometrische Reihe*

Einem regelmäßigen achteckigen Weihnachtsstern (Oktagramm) werden wiederholt verkleinerte konzentrische Sterne einbeschrieben. Dabei wird der jeweilige Nachfolger in das innere Achteck (Oktagon) des Vorgängers eingepasst.



Die Punkte A und B haben beim äußersten Stern den Abstand 1. In welchem Verhältnis stehen die Längen ℓ_n dieser Grundseiten aufeinanderfolgender Sterne zueinander? Berechnen Sie die Gesamtlänge der schwarzen Randlinien sowie die Summe der grau eingefärbten Flächen bei der Grenzfigur.