Dr. B. Ackermann
M. Borgart,
Dr. I Rybak, M. Kutter,
J. Veenman

1. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 1

Prof. Dr. M. Stroppel
Prof. Dr. A. Sändig

Wintersemester 2010/11

Präsenzübungen

Aufgabe P 1. *Binomialkoeffizienten*

Berechnen Sie ohne Taschenrechner:

(a) $x_1 = \binom{10}{7}$

(b) $x_2 = \binom{8}{5} + \binom{8}{6} - \binom{8}{8}$

Hinweis: Nutzen Sie dabei die Eigenschaften der Binomialkoeffizienten geschickt aus.

Aufgabe P 2. *Vollständige Induktion*

Beweisen Sie folgende Summenformeln mit Hilfe der vollständigen Induktion:

(a) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\,(k+1)} = \frac{n}{n+1}$

(b) $\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1$

Aufgabe P 3.

Gegeben sei die Menge $\mathbb{R}^2 = \left\{(x,y) \,\middle|\, x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\right\}$.

(a) Skizzieren Sie die folgenden Mengen

$$\begin{aligned} M_1 :&= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + (y+1)^2 = 1\right\} , \\ M_2 :&= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, (x-1)^2 + y^2 > 1\right\} , \\ M_3 :&= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, (x-2)^2 + y^2 \leqq 4\right\} . \end{aligned}$$

(b) Skizzieren Sie die Schnittmenge von M_2 und M_3, welche wie folgt definiert ist:

$$M_2 \cap M_3 := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, (x-1)^2 + y^2 > 1 \wedge (x-2)^2 + y^2 \leqq 4\right\} .$$

Aufgabe P 4.

Drei Logiker sitzen auf Stühlen hintereinander. Der hinterste sieht die beiden vorderen, der mittlere sieht nur den vordersten, der vorderste sieht niemanden. Alle drei wissen, dass sie jeweils einen Hut aus der Garderobe eines Theaters aufgesetzt bekommen haben, und sie wissen, dass diese Garderobe fünf Hüte zur Verfügung hat: zwei rote und drei schwarze. Nun wird der hinterste Logiker gefragt, ob er seine Hutfarbe kenne. Er sagt "Nein". Dann wird der mittlere das gleiche gefragt. Auch er sagt "Nein". Schließlich wird der vorderste gefragt. Was antwortet er?

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 1. *Binomialkoeffizienten*

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $\binom{n}{k}\binom{k}{j} = \binom{n}{j}\binom{n-j}{k-j}$

(b) $\binom{n}{k}\binom{n-k}{j} = \binom{n}{j}\binom{n-j}{k}$

(c) $\forall\, n \in \mathbb{N}\colon\ \sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j} = 0$

Aufgabe H 2. *Summen*

Entscheiden Sie, welche der folgenden Ausdrücke gleich sind.

(a) $\sum_{l=0}^{n} \frac{\left(1+(-1)^{l+1}\right)}{2} a_{2l+1} - \sum_{l=1}^{n} a_{2l}$

(b) $\sum_{k=5}^{n+5} a_{2k-9}$

(c) $\sum_{k=1}^{2n+1} \cos(\pi + \pi k) a_k$

(d) $\sum_{k=1}^{n+1} a_{2k-1}$

Aufgabe H 3.

(a) Skizzieren Sie die folgenden Mengen:

$$\begin{aligned} M_1 &:= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, |x| < 2\right\} , \\ M_2 &:= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, y < 2x - 1\right\} , \\ M_3 &:= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, (x-1)^2 + (y+1)^2 \leqq 4\right\} . \end{aligned}$$

(b) Skizzieren Sie nun die Menge

$$M_4 := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, (x-2)^2 + (y-1)^2 \leqq 1 \vee (x-2)^2 + (y+1)^2 \leqq 1\right\} ,$$

und die Schnittmenge von M_2 und M_3.

Dr. B. Ackermann,
M. Borgart,
Dr. I. Rybak, M. Kutter,
J. Veenman

2. Gruppenübung zur Vorlesung
Höhere Mathematik 1

Prof. Dr. M. Stroppel
Prof. Dr. A. Sändig

Wintersemester 2010/11

Präsenzübungen

Aufgabe P 5.

(a) Überlegen Sie sich, wie viele Zahlenkombinationen bei einem Wurf mit 2 Würfeln möglich sind.

(b) Zeigen Sie allgemein: Wenn Sie zweimal eine Zahl zwischen 1 und n ziehen (wobei jede Zahl auch zweimal gezogen werden darf), dann ist die Anzahl der möglichen Zahlenkombinationen gegeben durch

$$\binom{n+1}{2}.$$

Aufgabe P 6. *Ungleichungen*

Bestimmen Sie die Menge aller reellen Zahlen, die die folgenden Ungleichungen erfüllen:

(a) $x \leqq x^2$

(b) $|x+1| < |x-3|$

(c) $\left|\dfrac{1}{x}\right| + \dfrac{3}{2x} \geqq 5$

Aufgabe P 7. *Vollständige Induktion*

Beweisen Sie folgende Formeln mit Hilfe der vollständigen Induktion:

(a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $11^{n+1} + 12^{2n-1}$ durch 133 teilbar.

(b) $2^n > 2n+1, \quad n \geqq 3, \quad n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe P 8.

Beweisen Sie: $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

Hinweis: Schauen Sie mal ins Skript.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 4.

Bestimmen Sie die Menge aller reellen Zahlen, die die folgenden Ungleichungen erfüllen:

(a) $x+3 > x^2(x+3)$

(b) $|x^2+3x-4|+1 < |x+4|+|x-1|$

(c) $\dfrac{|x-1|}{|x-2|} \leqq 1$

Aufgabe H 5. *Ungleichungen, Vollständige Induktion*

Beweisen Sie folgende Formeln für $n \in \mathbb{N}_0$ mit Hilfe der vollständigen Induktion:

(a) $2^n > n^2, \quad n > 4$

(b) $\dfrac{1}{\sqrt{1}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}, \quad n > 1$

(c) $\cos(x)\cos(2x)\cos(4x)\ldots\cos(2^n x) = \dfrac{\sin(2^{n+1}x)}{2^{n+1}\sin(x)}$

Dabei dürfen Sie die folgende Gleichung, die für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt, ohne Beweis benutzen: $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x)$.

Aufgabe H 6. *Betrag*

Bestimmen Sie alle Lösungen der folgenden Gleichungen:

(a) $x^2 - 6|x| + 5 = 0$

(b) $||3-2x|-1| = |2x|$

(c) $\left|x^2 - x\right| + |x-a| = 0, \qquad a \in \mathbb{R}$

Präsenzübungen

Aufgabe P 9.

(a) Gegeben seien die Mengen

$$M_1 = \{0, 1, 2\}, \quad M_2 = \{0, 1, 2, 3\}, \quad M_3 = \{1, 2, 3\}.$$

Existieren injektive, surjektive oder bijektive Abbildungen von M_1 nach M_2, von M_1 nach M_3 oder von M_2 nach M_3?

(b) Existiert eine injektive, eine surjektive bzw. eine bijektive Abbildung vom Intervall $I_1 := [0, 1] \subsetneqq \mathbb{R}$ ins Intervall $I_2 := [0, 2] \subsetneqq \mathbb{R}$?

(c) Untersuchen Sie, ob die folgenden Abbildungen surjektiv, injektiv oder bijektiv sind:

$$f_1 \colon \mathbb{R} \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{R} \colon x \mapsto \frac{1}{x}, \qquad f_2 \colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q} \colon n \mapsto \frac{n}{2}$$

Aufgabe P 10. *Aussagen und komplexe Zahlen*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr sind:

(a) $\forall z \in \mathbb{C}\, \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2 \colon z = a + bi$

(b) $\forall z \in \mathbb{C} \colon z = \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z$

(c) $\exists z \in \mathbb{C} \colon z = \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z$

(d) $\forall z \in \mathbb{C} \colon z = \operatorname{Re} z + (\operatorname{Im} z)i$

Aufgabe P 11. *Komplexe Zahlen*

Gegeben sind die komplexen Zahlen $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 2 - 3\,i$, $z_3 = -i$ und $z_4 = (1 + \sqrt{2})\,i - 1$. Berechnen Sie die folgenden Terme und geben Sie die Ergebnisse sowohl in klassischer Schreibweise ($a + b\,i$) als auch als Paar (a, b) an (jeweils mit $a, b \in \mathbb{R}$).

(a) $z_5 = z_1 + z_4$

(b) $z_6 = z_1 \cdot z_2$

(c) $z_7 = \overline{z_2}$

(d) $z_8 = \dfrac{z_1}{z_3}$

(e) $z_{9,10} = \sqrt{z_3}$

Skizzieren Sie $z_1, \ldots, z_{10}$ in der Zahlenebene.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 7. *Eigenschaften von Abbildungen*

Untersuchen Sie, ob folgenden Abbildungen surjektiv, injektiv oder bijektiv sind:

(a) $f_1 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+ \colon x \mapsto |x|$

(b) $f_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \colon x \mapsto e^x$

(c) $f_3 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \colon x \mapsto \sin x$

(d) $f_4 \colon \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R} \colon x \mapsto \cos x$

(e) $f_5 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \colon\ x \mapsto x^4 + 1$

Aufgabe H 8. *Komplexe Zahlen, Wurzelziehen im Komplexen*

Geben Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an:

(a) $z_1 = (2+3i)\overline{(3-2i)}$

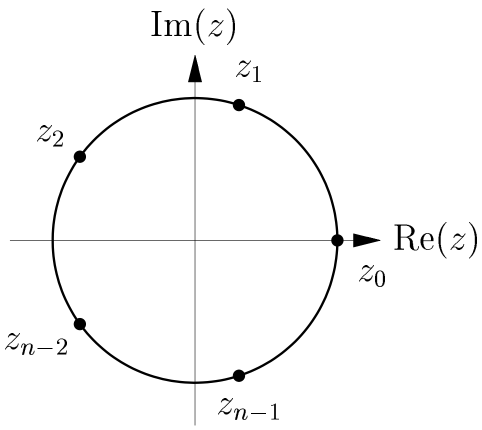
(b) $z_2 = \dfrac{4-3i}{4+3i}$

(c) $z_3 = (1+i)^{10}$

(d) Bestimmen Sie alle Wurzeln $z_{4,5,6} = \sqrt[3]{i}$. Geben Sie das Ergebnis in der Form $a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

Aufgabe H 9. *Komplexe Einheitswurzeln*

Zeigen Sie, dass die n–ten komplexen Einheitswurzeln $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$ eine abelsche Gruppe bzgl. der Multiplikation bilden.



Präsenzübungen

Aufgabe P 12.

Gegeben sind die Mengen

$$M_1 = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z+i| + |iz-1| \leqq 4 \right\} \quad \text{und} \quad M_2 = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; 2\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z < -1 \right\}$$

in der komplexen Zahlenebene. Skizzieren Sie M_1, M_2, $M_1 \cap M_2$ und $M_1 \setminus M_2$.

Aufgabe P 13.

Es seien die folgenden Vektoren gegeben:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind:

- **(a)** Die Menge $\mathrm{L}(v_2)$ ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$.
- **(b)** Die Vektoren v_1 und v_2 sind linear unabhängig.
- **(c)** Die Vektoren v_1 und v_2 bilden eine Basis von $\mathbb{R}^2$.
- **(d)** Es gilt: $\mathrm{L}(v_1, v_2, v_3) = \mathbb{R}^2$.
- **(e)** Die Vektoren v_1, v_2 und v_3 sind ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^2$.
- **(f)** Die Vektoren v_1, v_2 und v_3 bilden ein Basis von $\mathbb{R}^2$.
- **(g)** Es gilt: $\langle w_1 \,|\, w_2 \rangle = 1$.
- **(h)** Es gilt: $\mathrm{L}(w_1, w_2) = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 5x + y - 4z = 0 \right\}$.

Aufgabe P 14. *Geraden und Ebenen*

Gegeben seien die Punkte $A = (-1,-2)$, $B = (7,3)$, $C = (2,\alpha)$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$ und die Gerade $g = \left\{ (0,4) + \lambda\,(6,-7) \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$.

- **(a)** Für welche α liegen A, B und C nicht auf einer Geraden?
- **(b)** Schneidet g die Gerade, die durch A und B festgelegt wird? Berechnen Sie gegebenenfalls den Schnittpunkt.
- **(c)** Für welche α ist die Gerade durch A und C parallel zu g?

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 10. *Komplexe Zahlen*

(a) Skizzieren Sie die folgenden Mengen in der Gaußschen Zahlenebene:

$$M_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z - \mathrm{i}| = 2|z + \mathrm{i}|\} \quad \text{und} \quad M_2 = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\left(\tfrac{1}{z}\right) = 1\}.$$

(b) Bestimmen Sie jeweils alle komplexen Lösungen der folgenden Gleichungen:

(i) $z^3 - z^2 - z - 2 = 0$

(ii) $z^2 + z\bar{z} = 2$

Aufgabe H 11. *Vektorrechnung*

Gegeben ist ein regelmäßiges Sechseck mit den Eckpunkten $P_1, \ldots, P_6$, die in mathematisch positiver Richtung (also gegen den Uhrzeigersinn) durchlaufen werden. Vom Zentrum des Sechsecks aus wirken Kräfte $\overrightarrow{F_1}, \ldots, \overrightarrow{F_6}$, wobei die Kraft $\overrightarrow{F_k}$ zum Eckpunkt P_k gerichtet ist für $k = 1, \ldots, 6$. Die Beträge der Kräfte sind gegeben durch $|\overrightarrow{F_1}| = 1$, $|\overrightarrow{F_2}| = 3$, $|\overrightarrow{F_3}| = 5$, $|\overrightarrow{F_4}| = 7$, $|\overrightarrow{F_5}| = 9$ und $|\overrightarrow{F_6}| = 11$. Skizzieren Sie ein solches Sechseck mit den dazugehörigen Kräften! Berechnen Sie den Betrag und die Richtung der resultierenden Kraft.

Aufgabe H 12. *Geraden und Ebenen*

Gegeben sind die Punkte $P_1 = (1, 1, 1)$, $P_2 = (2, 1, -3)$, $P_3 = (0, -4, 1)$, $P_4 = (-2, -4, 9)$, $P_5 = (-2, -4, 0)$ und $P_6 = (1, 1, \alpha)$.

(a) Berechnen Sie eine Parameterdarstellung der Ebene E_1, die die Punkte P_1, P_2 und P_3 beinhaltet.

(b) Liegt der Punkt P_4 auf der Ebene E_1?

(c) Bestimmen Sie α so, dass die Gerade g durch die Punkte P_5 und P_6 parallel zu der Ebene E_1 verläuft.

Präsenzübungen

Aufgabe P 15. *Ebenen, Hessenormalform*

Es seien die Vektoren $u = (1,0,1)^\intercal$ und $v_k = (0,-1,k)^\intercal$ mit $k \in \mathbb{R}$, sowie die Punkte mit den Ortsvektoren $P = (0,5,2)^\intercal$ und $Q = (1,2,3)^\intercal$ im Raum $\mathbb{R}^3$ gegeben.

(a) Bestimmen Sie k so, dass die Geraden

$$g := \left\{P + tu \,\middle|\, t \in \mathbb{R}\right\} \quad \text{und} \quad \ell_k := \left\{Q + sv_k \,\middle|\, s \in \mathbb{R}\right\}$$

sich in genau einem Punkt Z schneiden. Geben Sie diesen Punkt Z an.

(b) Die Geraden g, ℓ_0 liegen auf einer Ebene E. Bestimmen Sie die Gleichung dieser Ebene in Hesse-Normalform.

Aufgabe P 16. *Vektorraum der Polynome*

Es sei $P_2(\mathbb{R})$ die Menge aller reellen Polynome p mit $p''' = 0$.

(a) Zeigen Sie: $P_2(\mathbb{R})$ ist ein Vektorraum.

(b) Geben Sie eine möglichst einfache Basis für $P_2(\mathbb{R})$ an.

(c) Zeigen Sie, dass die Polynome $p_1(x) = x^2 + x + 2$, $p_2(x) = 3x^2 + 2x + 6$ und $p_3(x) = x - 1$ linear unabhängig sind.

(d) Stellen Sie das Polynom $q(x) = x$ als Linearkombination von p_1, p_2 und p_3 dar.

Aufgabe P 17. *Skalarprodukt im $\mathbb{R}^2$*

Überprüfen Sie, ob es sich bei den folgenden Abbildungen um ein Skalarprodukt handelt:

(a) $\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle_1 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$: $\langle x\,|\,y\rangle_1 = 2x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_1y_2 + x_2y_1$

(b) $\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle_2 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$: $\langle x\,|\,y\rangle_2 = x_1y_1 + x_2y_2 + x_1y_2 + x_2y_1$

Finden Sie jeweils 2 Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, so dass $\langle x|y\rangle_j = 0$ für $j = 1,2$ ist.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 13. *Kosinussatz, Vektorprodukt*

(a) Geben Sie einen elementargeometrischen Beweis des Kosinussatzes an: Für zwei Vektoren $v = (v_1, v_2)^\top, w = (w_1, w_2)^\top \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$|v - w|^2 = |v|^2 + |w|^2 - 2|v||w|\cos(\alpha),$$

wobei α der Winkel ist, den die beiden Vektoren einschließen.

(b) Für welche Vektoren $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$a \times (b \times c) = (a \times b) \times c?$$

Aufgabe H 14. *Orthogonalität, Winkel*

Gegeben sei das Dreieck $\triangle ABC$ mit Ecken $A = (2, -1, 3)$, $B = (1, 1, 1)$ und $C = (0, 0, 5)$. Berechnen Sie die Innenwinkel des Dreiecks, die Länge der Seiten, die Höhe des Dreiecks ausgehend vom Punkt A und die Fläche des Dreiecks.

Aufgabe H 15. *Geraden und Ebenen, Vektorprodukt*

Gegeben sei in $\mathbb{R}^3$ das gleichseitige Tetraeder mit den Ecken

$$A = (-2, 0, 0), \quad B = (2, 0, 0), \quad C = (c_1, c_2, 0),\ c_2 > 0, \quad \text{und} \quad D = (d_1, d_2, d_3),\ d_3 > 0.$$

(a) Berechnen Sie die fehlenden Koordinaten von C und D.

(b) Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung der Geraden g durch A und D sowie den Abstand des Punktes B zur Geraden g.

(c) Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung und die Hesse-Normalform der Ebene durch die Punkte A, B, D. Unter welchem Winkel schneiden sich diese Ebene und die Ebene durch die Punkte A, B, C?

(d) Berechnen Sie die Oberfläche des Tetraeders mit Hilfe des Vektorprodukts.

Präsenzübungen

Aufgabe P 18. *Vektorprodukt*
Gegeben sind die folgenden Vektoren

$$a = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad c = \begin{pmatrix} 18 \\ 16 \\ 26 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie:

(a) $(a + b) \times c$,

(b) $\langle a + b \,|\, a \times b \rangle$.

Aufgabe P 19. *Matrizenaddition und -multiplikation*
Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie an, welche der Matrizenprodukte und Summen

$$AB, \quad BA, \quad CE, \quad EC, \quad E^{\mathsf{T}}C, \quad A + B^{\mathsf{T}}, \quad B + D, \quad C + D$$

existieren und berechnen Sie diese.

Aufgabe P 20. *Lineare Gleichungssysteme*
Wir betrachten die folgenden Gleichungen über dem Körper $\mathbb{R}$.

(a)
$$\begin{aligned} 2x_1 - x_3 + 3x_2 &= 0 \\ x_1 + x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 3x_2 &= 0 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} 1x_1 + 3x_2 &= -1 \\ -2x_1 + x_2 &= 4 \\ 7x_2 + 0x_1 &= 2 \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 5 &= 0 \\ x_1 - 4 &= 0 \\ 3x_2 + x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Sind die Gleichungssysteme jeweils homogen oder inhomogen?
Stellen Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix auf.
Lösen Sie die Gleichungssysteme.
Führen Sie eine Probe durch.

Aufgabe P 21. *Ingenieure beim Glücksspiel*
André Citroën, Rudolf Diesel und Henry Ford spielen ein Würfelspiel, bei dem jeder mit einem Würfel genau einmal würfeln darf. Rudolf Diesel würfelt nur eine halb so hohe Augenzahl wie Henry Ford und André Citroën zusammen. Dahingegen würfelt Henry Ford eine genauso hohe Augenzahl wie die anderen beiden gemeinsam. Wenn André Citroën, Rudolf Diesel und Henry Ford zusammengenommen genau die bei einem Würfel höchstmögliche Augenzahl würfeln, welche Augenzahl würfeln dann die einzelnen Ingenieure?

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 16. *Matrizenmultiplikationen*

Gegeben seien die Matrizen

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3\sqrt{5}}{10} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3\sqrt{5}}{10} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{5}}{10} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{5}}{10} & \frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{3}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie:

(a) $Q^\mathsf{T} Q$,

(b) $Q^\mathsf{T} A$,

(c) $Q^\mathsf{T} A\, S$,

(d) $SQ^\mathsf{T} A\, S\, Q^\mathsf{T} A - S\, S^\mathsf{T} A^\mathsf{T} Q\, Q^\mathsf{T} A$.

Hinweis: Für beliebige Matrizen M und N, für die das Produkt MN definiert ist, gilt: $(MN)^\mathsf{T} = N^\mathsf{T} M^\mathsf{T}$.

Aufgabe H 17. *Lineare Gleichungssysteme*

Geben Sie für die folgenden Gleichungssysteme jeweils die Koeffizientenmatrix und die rechte Seite an und bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathcal{L}$. Machen Sie eine Probe.

(a)
$$\begin{array}{rcrcrcr} -2x_1 & - & 6x_2 & + & 2x_3 & = & 2 \\ -x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & 1 \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & -4 \\ 2x_1 & - & 2x_3 & - & 4x_2 & = & 10 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & 4x_3 & = & 15 \end{array}$$

(c)
$$\begin{array}{rcrcr} (1+i)z_1 & + & 2z_2 & = & 4 \\ (1-i)z_2 & + & 2z_1 & = & 2 \end{array}$$

Aufgabe H 18. *Lineare Gleichungssysteme*

Jeden Montag um halb sieben liefert Bauer Klaus Kartoffeln, Zwiebeln und Tomaten an die 3 Gemüsehändler in der Nordbahnhofstraße. Diese Woche sind es folgende Mengen (in kg):

	Kartoffeln	Zwiebeln	Tomaten
Händler 1	200	100	120
Händler 2	150	50	80
Händler 3	280	150	120

Der erste Händler bezahlt 600 Euro, der zweite 415 Euro und der dritte 750 Euro. Wieviel kostet also jeweils 1 kg Kartoffeln, Zwiebeln oder Tomaten? Die Preise sind natürlich für alle Händler gleich.

Dr. B. Ackermann,
M. Borgart,
Dr. I. Rybak, M. Kutter,
J. Veenman

7. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 1

Prof. Dr. M. Stroppel
Prof. Dr. A. Sändig

Wintersemester 2010/11

Präsenzübungen

Aufgabe P 22. *Lineare Abbildungen*

Geben Sie eine lineare Abbildung $\alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ so an, dass

$$\alpha\left(1, -\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -4\right) \quad \text{und} \quad \alpha\left(0, \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 9\right).$$

Ist es möglich zusätzlich zu fordern, dass $\alpha\big(1,0\big) = \big(\frac{1}{3}, -7, 42\big)$? Besteht die Möglichkeit $\alpha\big(1,0\big) = \big(1,0,5\big)$ zu fordern? Begründen Sie Ihre Antworten.

Aufgabe P 23.

Gegeben sind die Abbildungen

$$\begin{aligned}
g_1 &\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon (x,y,z)^\intercal \mapsto (x+2y-4z, -y+2z, -x+y-2z)^\intercal \\
g_2 &\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon (x,y,z)^\intercal \mapsto (x^2, xyz, z+3x-29y)^\intercal \\
g_3 &\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3\colon \quad (x,y)^\intercal \mapsto (5x+2y, 4y, 3y+4x)^\intercal
\end{aligned}$$

(a) Welche dieser Abbildungen sind linear?

Geben Sie die Matrixdarstellung der linearen Abbildungen bezüglich der Standardbasis an.

(b) Bestimmen Sie jeweils den Kern der gegebenen Abbildungen, falls sie linear sind. Welche Dimension haben jeweils Kern und Bild der linearen Abbildungen?

(c) Welche der linearen Abbildungen sind injektiv, surjektiv, bijektiv?

(d) Begründen Sie, warum die Abbildung $g_1 \circ g_3$ linear ist. Geben Sie auch dafür die Matrixdarstellung ${}_E(g_1 \circ g_3)_E$ bezüglich der Standardbasis E an.
Bestimmen Sie den Kern und das Bild von $g_1 \circ g_3$.

Aufgabe P 24.

Bestimmen Sie den Rang der folgenden Matrizen:

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4} \qquad B := \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$$

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 19. *Lineare Abbildungen*

Es sei $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine lineare Abbildung mit

$$\varphi(1,1,0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \varphi(1,0,2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \varphi(0,0,1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Außerdem seien

$$B = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\} \quad \text{und} \quad C = \{(1,1,0),(1,0,2),(0,0,1)\}$$

jeweils eine Basis des $\mathbb{R}^3$.

(a) Berechnen Sie die Bilder der Basisvektoren von B unter der Abbildung φ.

(b) Geben Sie die Matrizen ${}_B\varphi_B$ und ${}_B\varphi_C$ an, die obige Abbildung in den jeweiligen Basen beschreiben.

(c) Bestimmen Sie $\mathrm{Kern}(\varphi)$ und $\mathrm{Bild}(\varphi)$.

Aufgabe H 20. *Gauss/LGS*

Gegeben sei das LGS

$$\begin{pmatrix} 10 & -4 & 1 & -3 & -2 \\ -2 & 1 & -3 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -2 & -3 \\ -2 & -4 & 4 & 1 & -1 \\ 7 & -4 & 3 & 1 & -2 \\ 6 & -4 & 3 & -2 & -3 \\ -1 & 8 & -7 & -2 & 3 \\ -5 & 4 & 3 & -3 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ -6 \\ -2 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}$$

(a) Transformieren Sie das LGS auf ein LGS der Gestalt $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$ wobei $\tilde{A}$, $\tilde{x}$ und $\tilde{b}$ definiert sind wie in Satz 3.7.2.

(b) Begründen Sie, warum das LGS lösbar ist.

Aufgabe H 21. *Lineares Gleichungssystem*

Gegeben ist das reelle, lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & \alpha & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ \beta \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Für welche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ besitzt das System eine eindeutige Lösung? Berechnen Sie diese Lösung.

(b) Für welche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ besitzt das System unendlich viele Lösungen? Berechnen Sie die Lösungsmenge.

(c) Für welche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ besitzt das System keine Lösungen?

Präsenzübungen

Aufgabe P 25. *Basiswechsel*

Gegeben ist der Vektorraum $\mathbb{R}^3$ mit der Basis $B\colon (1,0,-1)^\intercal, (1,1,0)^\intercal, (0,1,-1)^\intercal$ sowie mit der Standardbasis E.

(a) Bestimmen Sie die Matrixdarstellung ${}_E\mathrm{id}_B$, die Koordinaten eines Vektors bezüglich B in Koordinaten bezüglich E umrechnet.

(b) Bestimmen Sie die Matrixdarstellung ${}_B\mathrm{id}_E$, die Koordinaten eines Vektors bezüglich E in Koordinaten bezüglich B umrechnet.

Aufgabe P 26. *Inverse*

Gegeben sind die folgenden Matrizen:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie, falls möglich, Rechts- sowie Linksinverse der gegebenen Matrizen.
Hinweis: Stellen Sie Gleichungssysteme für die Spalten respektive Zeilen der gesuchten Matrizen auf und lösen Sie diese simultan.

Aufgabe P 27. *Reguläre Matrizen*

Bestimmen Sie jeweils die Determinante und den Rang der reellen Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 0 \\ -4 & -5 & 1 \\ -3 & -5 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Welche dieser Matrizen sind regulär? Berechnen Sie – sofern möglich – die Inversen. Bestimmen Sie weiterhin die Determinante der Inversen sowie die Determinanten von AB und BA.

Aufgabe P 28. *Blockmatrizen*

Seien $A, B, C, D, E, F, G, H \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Wir setzen diese Matrizen zu größeren Blockmatrizen in folgender Weise zusammen:

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4} \quad \text{und} \quad N = \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

Zeigen Sie, dass

$$M + N = \begin{pmatrix} A+E & B+F \\ C+G & D+H \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad MN = \begin{pmatrix} AE+BG & AF+BH \\ CE+DG & CF+DH \end{pmatrix}.$$

Gelten diese Regeln auch, wenn man statt 2×2-Matrizen $n\times n$-Matrizen einsetzt?

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 22. *Inverse*

Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Inverse A^{-1}.

(b) Lösen Sie die linearen Gleichungssysteme $Ax = b_i$ für die Vektoren

$$b_1 = (1, -1, 0, 1)^\intercal, \quad b_2 = (2, -2, 3, 1)^\intercal, \quad b_3 = (4, -1, 1, 1)^\intercal, \quad b_4 = (0, 2, -5, 1)^\intercal.$$

Hinweis: Benutzen Sie die oben berechnete Inverse.

Aufgabe H 23. *Volumen*

Gegeben ist die Pyramide ABCD mit den Ecken $A = (3, 0, 0)$, $B = (0, 5, 0)$, $C = (0, 0, 3)$, $D = (0, -2, 0)$.

(a) Bestimmen Sie die Höhe h der Pyramide über der Grundfläche mit den Eckpunkten A, B und C.

(b) Berechnen Sie das Volumen V der Pyramide mit Hilfe von Teil (a).
Benutzen Sie dazu die Formel

$$V = \frac{1}{3} G \cdot h$$

mit G = Inhalt der Grundfläche, h = Höhe über dieser Grundfläche.

Aufgabe H 24. *Inverse Blockmatrizen*

(a) Seien $M, N \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertierbar. Das Produkt MN ist dann auch invertierbar. Zeigen Sie, dass die Inverse durch $(MN)^{-1} = N^{-1} M^{-1}$ gegeben ist.

(b) Sei wieder $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und I die Einheitsmatrix in $\mathbb{R}^{n \times n}$. Zeigen Sie, dass

$$\begin{pmatrix} I & M \\ 0 & I \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} I & -M \\ 0 & I \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} I & 0 \\ M & I \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ -M & I \end{pmatrix}.$$

Dabei ist mit 0 die Nullmatrix in $\mathbb{R}^{n \times n}$ gemeint.

(c) Es seien nun $A, B, C, D \in \mathbb{R}^{n \times n}$, wobei A, D sowie $(A - BD^{-1}C)$ invertierbar vorausgesetzt werden. Rechnen Sie nach, dass

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & BD^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A - BD^{-1}C & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ D^{-1}C & I \end{pmatrix}.$$

(d) Benutzen Sie nun die Ergebnisse aus den Teilaufgaben (a)-(c), um

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1}$$

zu berechnen. Was ergibt sich im Fall $n = 1$?

Präsenzübungen

Aufgabe P 29. *Schmidtsches Orthonormierungsverfahren*

In $\mathbb{R}^3$ sind die Vektoren $v_1 = (1,0,-1)^\intercal$, $v_2 = (1,1,-1)^\intercal$ und $v_3 = (-1,2,-2)^\intercal$ gegeben.

(a) Konstruieren Sie (mit Hilfe des Schmidtschen Orthonormierungsverfahrens) eine Orthonormalbasis $F\colon f_1, f_2, f_3$ von $\mathbb{R}^3$ derart, dass $\mathrm{L}(f_1) = \mathrm{L}(v_1)$, $\mathrm{L}(f_1, f_2) = \mathrm{L}(v_1, v_2)$ und $\mathrm{L}(f_1, f_2, f_3) = \mathrm{L}(v_1, v_2, v_3)$.

(b) Lässt sich mit Hilfe dieses Verfahrens auch eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ konstruieren, wenn $\widetilde{v_3} = (-1,2,1)^\intercal$ statt v_3 verwendet werden soll?

Aufgabe P 30. *Affine Abbildungen und Isometrien*

Gegeben ist die affine Abbildung

$$\alpha\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon v \mapsto \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & 1 & 1 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(a) Was ist der lineare Anteil, was ist der Translationsanteil von α?

(b) Untersuchen Sie, ob α eine Affinität ist und ob es sich dabei um eine Isometrie handelt.

(c) Bestimmen Sie, falls α eine eigentliche Isometrie darstellt, eine Drehung δ und eine Translation τ so, dass $\alpha = \tau \circ \delta$. Welchen Drehwinkel hat δ in diesem Fall?

(d) Finden Sie alle Fixpunkte der Abbildung δ (also alle Vektoren v mit $\delta(v) = v$).

Aufgabe P 31. *Komposition und Inverse von isometrischen Abbildungen*

Es seien $\alpha\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n\colon x \mapsto Ax + s$ und $\beta\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n\colon x \mapsto Bx + t$ zwei isometrische Abbildungen. Zeigen Sie, dass die Komposition $\beta \circ \alpha$ ebenfalls eine Isometrie ist. Ist jede Isometrie invertierbar? Sind die Inversen von Isometrien wieder Isometrien?

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 25. *Determinante, Entwicklungssatz*

Berechnen Sie die Determinante der Matrix A, die gegeben ist durch

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe H 26. *Orthonormalbasis, affine Abbildungen*

(a) In $\mathbb{R}^3$ sind die Vektoren $v_1 = (2, 4, -4)^\intercal$, $v_2 = (11, 13, -4)^\intercal$, $v_3 = (-2, -13, 4)^\intercal$ gegeben. Zeigen Sie, dass $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist und wandeln Sie B mit Hilfe des Schmidtschen Orthonormierungsverfahrens in eine Orthonormalbasis um.

(b) Gegeben sei die affine Abbildung

$$\alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}$$

mit Fixpunktgerade $y = x + 1$ und $\alpha((1, 1)^\intercal) = (2, 3)^\intercal$.
Bestimmen Sie die Matrix A und den Translationsanteil $t = (t_1, t_2)^\intercal$ von α.

Aufgabe H 27. *Eigentlich und uneigentlich orthogonale Matrizen*

Gegeben seien die Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, B_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, B_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix},$$

sowie die Abbildungen

$$\alpha_1 : v \mapsto A_1 v, \quad \alpha_2 : v \mapsto A_2 v, \quad \beta_1 : w \mapsto B_1 w, \quad \beta_2 : w \mapsto B_2 w.$$

(a) Welche der obigen Abbildungen sind Isometrien? Welche von diesen sind eigentlich und welche uneigentlich?

(b) Eigentlich orthogonale Matrizen beschreiben Drehungen. Bestimmen Sie für alle eigentlich orthogonalen Matrizen aus der Menge $\{A_1, A_2, B_1, B_2\}$ den Drehwinkel und gegebenenfalls die Drehachse.

(c) Jede uneigentlich orthogonale Matrix beschreibt eine Komposition aus einer Drehung und einer Spiegelung. Geben Sie für alle uneigentlich orthogonalen Matrizen aus der Menge $\{A_1, A_2, B_1, B_2\}$ eine solche Drehung sowie Spiegelung an. Bestimmen Sie zu diesen den Drehwinkel und gegebenenfalls die Drehachse, sowie die Spiegelungsachse bzw. -ebene.

Dr. B. Ackermann,
M. Borgart,
Dr. I. Rybak, M. Kutter,
J. Veenman

10. Gruppenübung zur Vorlesung
Höhere Mathematik 1

Prof. Dr. M. Stroppel
Prof. Dr. A. Sändig

Wintersemester 2010/11

Präsenzübungen

Aufgabe P 32. *Koordinatentransformation*
Im affinen Raum $\mathbb{R}^2$ sind die Punkte

$$P = (1, -1)^\intercal \qquad \text{und} \qquad Q = (-2, 0)^\intercal$$

sowie die Vektoren

$$f_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad f_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad g_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad g_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Bestimmen Sie die Koordinatentransformation ${}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{F}}$, welche Koordinaten bezüglich $\mathbb{F} = (P; f_1, f_2)$ in solche bezüglich $\mathbb{G} = (Q; g_1, g_2)$ umwandelt. Bestimmen Sie die Umkehrung dieser Transformation.

Aufgabe P 33. *Spiegelung an einer Geraden*
Gegeben ist im $\mathbb{R}^2$ eine Gerade, die beschrieben wird durch die Gleichung

$$x_1 - 2x_2 + 2 = 0.$$

Finden Sie eine Matrix A und einen Vektor t so, dass die Spiegelung an der Geraden beschrieben wird durch die affine Abbildung $x \mapsto Ax + t$. Handelt es sich um eine Isometrie? Ist diese eigentlich?

Aufgabe P 34. *Scherung*
Eine Scherung ist eine affine Abbildung der Ebene $\mathbb{R}^2$ auf sich selbst mit den folgenden zusätzlichen Eigenschaften:

- Eine Gerade (genannt *Scherungsachse*) bleibt punktweise fest.
- Jeder Punkt außerhalb dieser Geraden wird parallel zur Scherungsachse verschoben.

Gegeben ist nun eine Scherung α mit der x-Achse als Scherungsachse bei der der Punkt $P := (1, 1)$ auf den Punkt $P' = \alpha(P) := (2, 1)$ abgebildet wird. Außerdem ist $Q := (1, 2)$.

(a) Bestimmen Sie $\alpha(Q)$ durch eine geometrische Konstruktion.

(b) Stellen Sie die zu α gehörige Matrix ${}_{\mathbb{E}}\alpha_{\mathbb{E}}$ auf, wobei $\mathbb{E}$ das Standardkoordinatensystem bezeichnet.

(c) Prüfen Sie ihr Ergebnis aus (a) rechnerisch nach.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 28. *Cofaktor-Matrix und Hauptinvarianten*

Gegeben sei eine quadratische Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Wir bezeichnen mit $\mathrm{Cof}\,(A)$ die Cofaktor-Matrix von A (siehe Def. 3.13.1.) und setzen $\iota(A) := \frac{1}{2}\big((\mathrm{Sp}\,(A))^2 - \mathrm{Sp}\,(A^2)\big)$. Zeigen Sie:

(a) Es gilt

$$\iota(A) = \mathrm{Sp}\,(\mathrm{Cof}\,(A)).$$

(b) $\iota(A)$ ist eine Invariante von A, d.h. für jede invertierbare Matrix $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ gilt

$$\iota(BAB^{-1}) = \iota(A).$$

Aufgabe H 29.

Gegeben sind das Standard-Koordinatensystem $\mathbb{E}$ und das affine Koordinatensystem

$$\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

im $\mathbb{R}^4$ sowie die lineare Abbildung $\alpha : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4 : v \mapsto Av$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie die Koordinatentransformationen ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$ und ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$ sowie die Beschreibung der Abbildung α bzgl. des Koordinatensystems $\mathbb{F}$ an.

Aufgabe H 30. *Spiegelung*

Gegeben ist im $\mathbb{R}^3$ die Ebene, die beschrieben wird durch die Gleichung

$$3x_1 - 3x_2 + x_3 = 0.$$

Finden Sie eine Matrix A und einen Vektor t so, dass die Spiegelung an der Ebene beschrieben wird durch die affine Abbildung $x \mapsto Ax + t$.

M. Borgart
M. Kutter
Dr. I. Rybak
J. Veenman

11. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 1

Prof. Dr. M. Stroppel
Prof. Dr. A. Sändig

Wintersemester 2010/11

Präsenzübungen

Aufgabe P 35.

Gegeben ist die Matrix A und die Vektoren v_1, v_2, $v_3 \in \mathbb{R}^3$ durch

$$A := \begin{pmatrix} -3 & 7 & -3 \\ -4 & 7 & -2 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Welche der Vektoren v_1, v_2, v_3 sind Eigenvektoren? Geben Sie die zugehörigen Eigenwerte an.

(b) Ist die Matrix A diagonalisierbar?

Aufgabe P 36.

Berechnen Sie alle Eigenwerte und Eigenräume der folgenden Matrizen.

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Geben sie die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten der Eigenwerte an. Sind A und B reell diagonalisierbar? Sind A und B komplex diagonalisierbar?

Aufgabe P 37.

Gegeben seien die Matrizen A, $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ durch

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie die charakteristischen Polynome $\chi_A(\lambda)$ und $\chi_B(\lambda)$.

(b) Bestimmen Sie die reellen sowie die komplexen Eigenwerte und Eigenvektoren.

(c) Geben Sie in den diagonalisierbaren Fällen jeweils eine Transformationsmatrix T an, die auf Diagonalgestalt transformiert.

(d) Verwenden Sie diese Transformationsmatrix und die zugehörige Diagonalmatrix, um explizit B^{100} zu berechnen.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 31.

Im $\mathbb{R}^3$ gegeben seien ein Rechtssystem Q mit Orthonormalbasis $\{v_1, v_2, v_3\}$ sowie die Winkel α, β, γ.

(a) Geben Sie die Matrizen R_α, R_β und R_γ an, die eine Drehung des Rechtssystems Q um die Achse v_1, v_2 bzw. v_3 um den jeweiligen Winkel beschreiben.

(b) Geben Sie mindestens zwei mögliche Matrixdarstellungen für eine beliebige Drehung von Q um die Ursprung an. Berechnen Sie für eine dieser Darstellungen die Determinante und die Inverse.

(c) Betrachten Sie den Vektor $v = (1, 1, 1)^\mathsf{T}$. Nehmen Sie an, dass $\alpha = \frac{\pi}{6}$, $\beta = \frac{\pi}{4}$, $\gamma = \frac{\pi}{3}$ und berechnen Sie die neuen Koordinaten von v um den Ursprung gedrehten Rechtssystem mit Hilfe von Teil (b).

Aufgabe H 32. *Diagonalisierbarkeit*

Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 4 & -6 & -2 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und zugehörigen Eigenräume von den Matrizen A, B und C.

(b) Geben Sie in den diagonalisierbaren Fällen jeweils eine Transformationsmatrix T an, die die entsprechende Matrix in Diagonalgestalt transformiert. Bestimmen Sie die dazugehörige Diagonalmatrix D.

(c) Berechnen Sie alle Eigenwerte der Matrizen A^2, A^{10}, B^2 und C^{100}.

Aufgabe H 33. *Eigenwerte, Eigenräume*

Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 12 & -11 & 6 & 6 \\ 15 & -10 & 2 & 7 \\ 4 & -1 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

.

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A.

(b) Geben Sie die zugehörigen Eigenräume an.

(c) Geben sie zu allen Eigenwerten jeweils die algebraische und geometrische Vielfachheit an. Existiert eine Basis des $\mathbb{C}^4$ aus Eigenvektoren von A?

M. Borgart
M. Kutter
Dr. I. Rybak
J. Veenman

12. Gruppenübung zur Vorlesung
Höhere Mathematik 1

Prof. Dr. M. Stroppel
Prof. Dr. A. Sändig

Präsenzübungen

Aufgabe P 38. *Symmetrische Matrizen*
Welche der folgenden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ 1+i & 1 \end{pmatrix}$$

sind symmetrisch, welche sind hermitesch?

Aufgabe P 39. *Quadrik*
Gegeben ist die Menge

$$Q := \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; (x_1 - x_2)^2 - (x_1 + x_2)^2 + 2x_3 = 0 \right\} .$$

(a) Begründen Sie, dass es sich bei Q um eine Quadrik handelt, indem Sie den quadratischen, den linearen und den konstanten Teil der Quadrik angeben.

(b) Geben Sie die Matrixbeschreibung der Quadrik und die zugehörige erweiterte Matrix an.

(c) Entscheiden Sie, ob der quadratische Teil der Quadrik positiv definit, negativ definit, indefinit oder keines davon ist.

(d) Untersuchen Sie, welchen Typ die Quadrik hat, d.h. ob sie eine kegelige, eine parabolische oder eine Mittelpunktsquadrik ist.

(e) Was erhält man, wenn man Q mit
- einer Ebene parallel zur x_1–x_2-Ebene,
- einer Ebene parallel zur x_2–x_3-Ebene,
- einer Ebene parallel zur x_1–x_3-Ebene,
- einer Ebene parallel zu $E_1 = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1 + x_2 = 0 \right\}$ sowie
- einer Ebene parallel zu $E_2 = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1 - x_2 = 0 \right\}$

schneidet? Skizzieren Sie die Schnittfiguren für Ebenen mit verschiedenen Abständen vom Ursprung (insbesondere auch für Abstand 0).

(f) Verstehen Sie die Geometrie der Quadrik Q anhand einer dreidimensionalen Skizze, die Sie mit Hilfe der ebenen Schnittfiguren anfertigen.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 34. *Quadriken*

Gegeben sind die folgenden Quadriken

$$Q_1 := \left\{ (x_1, x_2)^\intercal \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x_1^2 + 4x_2^2 - 2x_1 - 3 = 0 \right\},$$

$$Q_2 := \left\{ (x_1, x_2, x_3)^\intercal \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, -x_1^2 - x_2^2 + 2x_3 + 4 = 0 \right\}.$$

(a) Geben Sie für jede Quadrik die Matrixbeschreibung an.

(b) Entscheiden Sie, ob Q_i, $i = 1, 2$ eine kegelige, eine parabolische oder eine Mittelpunktsquadrik ist.

(c) Skizzieren Sie die Quadrik Q_1.

(d) Schneiden Sie die Quadrik Q_2 mit den Ebenen $x_3 = 0$, $x_3 = -2$, $x_3 = -4$, $x_2 = 0$. Geben Sie jeweils eine Gleichung für den Schnitt, die Gestalt des Schnitts an, und skizzieren Sie den Schnitt.

(e) Skizzieren Sie nun die Quadrik Q_2.

Aufgabe H 35. *Quadratische Form*

Für welche Werte von $a, b \in \mathbb{R}$ ist die quadratische Form

$$q(x) = a(x_1^2 + x_2^2) + bx_1x_2$$

positiv definit, negativ definit beziehungsweise indefinit?

Aufgabe H 36. *Symmetrische Matrizen, Positiv/Negativ definite Matrizen*

Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrische Matrizen. Wir sagen, dass $A \succ 0$, wenn A positiv definit ist, und $A \succ B$, wenn $A - B \succ 0$. Welche der folgenden Aussagen sind richtig? Begründen Sie Ihre Antworten.

(a) Es sei $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine beliebige Matrix. $A \succ 0$, genau dann, wenn $T^T A T \succ 0$.

(b) Es gilt $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \succ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(c) Es seien $\lambda_{\mathsf{max}}(A)$ bzw. $\lambda_{\mathsf{max}}(B)$ die größten Eigenwerte von A bzw. B. Aus $A \succ B$ folgt $\lambda_{\mathsf{max}}(A + B) > \lambda_{\mathsf{max}}(A) + \lambda_{\mathsf{max}}(B)$.

(d) Wir betrachten eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, die Blockstruktur besitzt, d.h. $A = \begin{pmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{pmatrix}$. Dann gilt:

- $A \succ 0$ genau dann, wenn $Q \succ 0$ und $R - S^T Q^{-1} S \succ 0$.
- $A \succ 0$ genau dann, wenn $R \succ 0$ und $Q - S R^{-1} S^T \succ 0$.

Hinweis: Sehen Sie sich die Aufgabe $H24$ an.

M. Borgart
M. Kutter
Dr. I. Rybak
J. Veenman

13. Gruppenübung zur Vorlesung
Höhere Mathematik 1

Prof. Dr. M. Stroppel
Prof. Dr. A. Sändig

Wintersemester 2010/11

Präsenzübungen

Aufgabe P 40.

Gegeben sei die Quadrik

$$Q := \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 5x_1^2 + 8x_1x_2 + 5x_2^2 - 20\sqrt{2}x_1 - 16\sqrt{2}x_2 + 31 = 0 \right\}.$$

(a) Geben Sie die Matrixbeschreibung der Quadrik an.

(b) Bestimmen Sie eine euklidische Normalform der Quadrik.

(c) Bestimmen Sie anhand der Normalform die Gestalt der Quadrik.

(d) Geben Sie die zugehörigen Koordinatentransformationen ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$, ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{G}}$, ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{G}}$ und ${}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{E}}$ an.

(e) Skizzieren Sie die Quadrik in dem Koordinatensystem $\mathbb{G}$, in dem sie Normalform hat, und bezüglich des ursprünglichen Koordinatensystems $\mathbb{E}$. Zeichnen Sie in der letzten Skizze auch das Koordinatensystem $\mathbb{G}$ ein.

Aufgabe P 41.

Gegeben Sei die Quadrik

$$Q := \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_3 + 1 = 0 \right\}.$$

(a) Bestimmen Sie eine euklidische Normalform von Q und die Gestalt von Q.

(b) Geben Sie ein Koordinatensystem an, in dem Q diese Normalform hat. Ist dies Koordinatensystem eindeutig bestimmt? Geben Sie die zugehörigen Koordinatentransformationen an.

(c) Geben Sie eine affine Abbildung an, die die Gleichung von Q in eine der Formen aus der Vorlesung, 6.3.6 / 6.3.7, transformiert.

Aufgabe P 42.

Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist die Quadrik

$$Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1^2 + x_2^2 + \alpha\, x_3^2 + 4\,\alpha\, x_2\, x_3 + 2\,\alpha\,(\alpha - 1)\, x_3 + \alpha\,(\alpha - 1) = 0 \right\}$$

eine kegelige Quadrik, eine Mittelpunktsquadrik oder eine parabolische Quadrik?

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 37.
Bestimmen Sie eine euklidische Normalform der Quadrik

$$Q := \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 3x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2 + 12x_1 - 4x_2 + 2 = 0 \right\}$$

und ermitteln Sie die zugehörigen Koordinatentransformationen. Bestimmen Sie anhand der Normalform die Gestalt der Quadrik und fertigen Sie eine Skizze der Quadrik in Standardkoordinaten an. Zeichnen Sie in Ihre Skizze auch das Koordinatensystem ein, bezüglich dessen die Quadrik Normalform hat.

Aufgabe H 38.
Gegeben sei die Quadrik

$$Q := \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 2x_1^2 + 8x_2^2 - 4x_3^2 - 8x_1x_2 + 12x_1 - 24x_2 + 14 = 0 \right\} .$$

Geben Sie die Matrixbeschreibung der Quadrik an. Bestimmen Sie eine euklidische Normalform der Quadrik und geben Sie die zugehörigen Koordinatentransformationen an. Bestimmen Sie weiter anhand der Normalform die Gestalt der Quadrik.

Aufgabe H 39.
Betrachten Sie die von einem Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ abhängige Quadrik

$$Q := \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_1^2 - 2x_2^2 + \alpha x_3^2 + 4x_1x_2 + 2\sqrt{5}\,x_1 + 4\sqrt{5}\,x_2 + \alpha = 0 \right\}.$$

(a) Schreiben Sie die Quadrik Q in Matrixform.

(b) Bestimmen Sie eine euklidische Normalform von Q und geben Sie die Gestalt der Quadrik in Abhängigkeit von α an.

M. Borgart
M. Kutter
Dr. I. Rybak
J. Veenman

14. Gruppenübung zur Vorlesung
Höhere Mathematik 1

Prof. Dr. M. Stroppel
Prof. Dr. A. Sändig

Wintersemester 2010/11

Präsenzübungen

Aufgabe P 43.

Gegeben sind die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch

$$a_n = 5^n, \qquad b_n = \cos\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi n\right), \qquad c_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n,$$

$$d_n = \frac{1}{n^2-2}, \qquad e_n = (-1)^n + \frac{1}{2}.$$

(a) Bestimmen Sie, ob die Folgen beschränkt sind und finden Sie gegebenenfalls eine obere und untere Schranke.

(b) Bestimmen Sie, ob die Folgen (streng) monoton wachsend bzw. fallend sind.

(c) Bestimmen Sie alle Häufungspunkte der Folgen.

(d) Geben Sie für jeden Häufungspunkt eine Teilfolge an, die gegen diesen konvergiert.

Aufgabe P 44. *Häufungspunkte*

Berechnen Sie die Häufungspunkte, $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n$ und $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$ der folgenden Folgen.
Untersuchen Sie die Folgen ebenfalls auf Konvergenz.

(a) $a_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$

(b) $a_n = 5 \cdot (-1)^n$

(c) $a_n = \begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^n & \text{für } n \text{ gerade} \\ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases}$

(d) $a_n = \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$

Aufgabe P 45.

Untersuchen Sie die nachstehenden Folgen auf Monotonie, Beschränktheit und Konvergenz. Geben Sie zu jeder konvergenten Folge den Grenzwert an.

(a) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$

(b) $a_n = \dfrac{2n-1}{(n-1)^2} \sin\dfrac{n\pi}{2}$

(c) $a_n = \sqrt{1 - \cos\frac{1}{n}}$

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Hinweis: Die Abgaben zu diesen Aufgaben werden in der ersten Übung des kommenden Semesters eingesammelt und zählen zum HM2-Schein.

Aufgabe H 40. *Monotonie und Beschränkheit*

Untersuchen Sie die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jeweils auf Monotonie und Beschränkheit. Finden Sie gegebenenfalls eine obere und untere Schranke.

(a) $a_n = \dfrac{n+1}{2n+1}$

(b) $a_n = n \sin\left(\pi\left(n - \dfrac{1}{2}\right)\right)$

(c) $a_n = 1 + \left(-\dfrac{3}{4}\right)^n$

(d) $a_n = \cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\cos\left(\dfrac{\pi n}{2}\right)$

Aufgabe H 41. *Konvergenz*

Untersuchen Sie die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jeweils auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenfalls den Grenzwert

(a) $a_n = -\dfrac{n-1}{n+1}$

(b) $a_n = (-1)^n \dfrac{n-1}{n+1}$

(c) $a_n = \dfrac{2\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{n^2+1}$

(d) $a_n = \sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\cos(\pi n)$

Aufgabe H 42. *Babylonisches Wurzelziehen*

Wir untersuchen einen Algorithmus zum Berechnen der Quadratwurzel einer Zahl $x \geqq 1$, der schon in den Gesetzestafeln des Hammurabi im Jahre 1950 v.Chr stand. Wir definieren rekursiv eine Folge reeller Zahlen w_i mit

$$w_0 = x \quad w_{n+1} = \frac{1}{2}\left(w_n + \frac{x}{w_n}\right).$$

(a) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Zahlen w_n positiv sind und $w_n^2 \geqq w_{n+1}^2 \geqq x$ gilt, also jedes w_{n+1} die Wurzel mindestens so gut annähert wie w_n.

(b) Berechnen Sie $\sqrt{3}$ auf 4 Stellen hinter dem Komma durch Verwendung des obigen Algorithmus, d.h. es ist ein w_n mit $w_n - \sqrt{3} < 0.5 \cdot 10^{-4}$ zu berechnen. Zur Abschätzung der Genauigkeit kann man folgende Ungleichung verwenden:

$$w_n - \sqrt{3} = \frac{w_n^2 - 3}{w_n + \sqrt{3}} \leqq \frac{w_n^2 - 3}{w_n + 1},$$

da $1 \leqq \sqrt{3}$.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 43.

Bestimmen Sie eine euklidische Normalform der Quadrik

$$Q := \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 3x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2 + 12x_1 - 4x_2 + 2 = 0 \right\}$$

und ermitteln Sie die zugehörigen Koordinatentransformationen. Bestimmen Sie anhand der Normalform die Gestalt der Quadrik und fertigen Sie eine Skizze der Quadrik in Standardkoordinaten an. Zeichnen Sie in Ihre Skizze auch das Koordinatensystem ein, bezüglich dessen die Quadrik Normalform hat.