J. Hörner
B. Kabil
B. Krinn

1. Gruppenübung zur Vorlesung
Höhere Mathematik 1
Wintersemester 2011/2012

Dr. M. Künzer
Prof. Dr. M. Stroppel

Präsenzübungen

Aufgabe P 1. *Elementares Rechnen*

Berechnen Sie ohne Taschenrechner:

(a) $x_1 = 2097,8 : 17$, **(b)** $x_2 = \frac{1}{6} \cdot \frac{15}{\frac{5}{2}}$, **(c)** $x_3 = \binom{10}{7}$,

(d) $x_4 = \sqrt{48^2 + 14^2}$, **(e)** $x_5 = 488 \cdot 512$, **(f)** $x_6 = 19^3$.

Aufgabe P 2. *Vollständige Induktion*

Beweisen Sie folgende Summenformeln mit vollständiger Induktion:

(a) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\,(k+1)} = \frac{n}{n+1}$, **(b)** $\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1$.

Aufgabe P 3. *Summen*

Welche der folgenden Ausdrücke liefern für $n \in \mathbb{N}$ und für alle reellen Zahlen a_j stets dasselbe Resultat?

(a) $\sum_{k=0}^{n} a_{2k+1}$,

(b) $\sum_{k=4}^{n+4} a_{2k-7}$

(c) $\sum_{k=1}^{2n+1} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_{2k}$,

(d) $\sum_{l=1}^{2n+1} \frac{\left(1-(-1)^l\right)}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2l\pi\right) a_l$

(e) $\sum_{l=0}^{2n} (-1)^{l^2+l} \frac{a_{2n-(l-1)}}{2} + \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^{k+1} \frac{a_k}{2}$.

Aufgabe P 4. *Strahlensätze*

Zwei Schatzsucher finden folgenden Text, mit dem ein Pirat die Lage seines vergrabenen Schatzes auf einer Insel beschrieben hat: „Gehe von der alten Eiche am Westufer 65 Schritte in Richtung Brunnen, dann 25 Schritte nach Norden. Von hier gehe exakt die Hälfte der Strecke auf den Leuchtturm zu, dann 30 Schritte nach Westen."
„Na toll!", meint der erste Schatzsucher. „Woher sollen wir wissen, wie lang die Schritte des Piraten waren?" „Ich habe die Insel erkundet!", entgegnet der zweite Schatzsucher. „Die Eiche, der Brunnen und der Leuchtturm stehen noch. Von der Eiche zum Brunnen und von der Eiche zum Leuchtturm habe ich jeweils 390 Schritte gebraucht. Der Leuchtturm steht 300 Schritte nördlich des Brunnens. Ich weiß wo der Schatz liegt!"
Wo müssen die beiden Schatzsucher graben?

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Hausübungen Teil 1, empfohlener Bearbeitungszeitraum: 25.-31. Oktober

Aufgabe H 1. *Vollständige Induktion*

Beweisen Sie folgende Aussagen mit vollständiger Induktion:

(a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $(n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3$ durch 9 teilbar.

(b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $11^{n+1} + 12^{2n-1}$ durch 133 teilbar.

Hinweis: Eine Summe ist durch eine Zahl teilbar, wenn jeder Summand durch die Zahl teilbar ist (aber natürlich nicht nur dann). Versuchen Sie daher eine Aufteilung in Summanden zu finden, von denen Sie wissen, dass sie durch die entsprechende Zahl teilbar sind.

Aufgabe H 2. *Binomialkoeffizienten*

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $\binom{n}{k}\binom{k}{j} = \binom{n}{j}\binom{n-j}{k-j}$, **(b)** $\binom{n}{k}\binom{n-k}{j} = \binom{n}{j}\binom{n-j}{k}$

(c) $\forall\, n \in \mathbb{N}\colon \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} = 0$

Hinweis: Für diese Aussagen ist keine vollständige Induktion notwendig. Es genügt, die Definition der Binomialkoeffizienten und den Binomischen Lehrsatz anzuwenden.

Aufgabe H 3. *Vollständige Induktion, Pascalsches Dreieck*

Zeigen Sie mit Hilfe des Prinzips der vollständigen Induktion über n, dass die folgende Summenformel für alle $m, n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{m+k}{m} = \binom{m+n+1}{m+1}$$

Stellen Sie das Ergebnis für $m = 3$, $n = 1$ im Pascalschen Dreieck dar.
Hinweis: Nutzen Sie die Eigenschaften der Binomialkoeffizienten aus.

Hausübungen Teil 2, empfohlener Bearbeitungszeitraum: 2.-7. November

Aufgabe H 4. *Mengen*

(a) Skizzieren Sie die folgenden Mengen

$$M_1 := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, |x| + |y| = 1\right\}, \quad M_2 := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, |x| + |y| < 1\right\}.$$

(b) Skizzieren Sie nun die Mengen

$$M_3 := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, (x-2)^2 + (y-1)^2 \leqq 1 \vee (x-2)^2 + (y+1)^2 \leqq 1\right\},$$
$$M_4 := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, |y| > 1\right\}.$$

und die Schnittmenge von M_3 und M_4.

Aufgabe H 5. *Ungleichungen, Vollständige Induktion*

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion:

$$5^n \geqq n^5, \quad n \in \mathbb{N}, n \geqq 5$$

Geben Sie insbesondere an, an welcher Stelle Ihres Beweises die Bedingung $n \geqq 5$ benötigt wird, d.h. warum als Induktionsanfang nicht $n = 1$ verwendet werden kann.
(Zusatz für besonders engagierte Studenten: $k^n \geqq n^k, \quad n \in \mathbb{N}, n \geqq k > 2$)

Aufgabe H 6. *komplexe Zahlen*

Berechnen Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $x + y\,\mathrm{i}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$:

(a) $(2 - 3\,\mathrm{i})(3 + 2\,\mathrm{i}) + \dfrac{(1+\mathrm{i})^2}{(1-\mathrm{i})^2}$

(b) $(1 + \sqrt{3}\,\mathrm{i})^3 + (1 - \sqrt{3}\,\mathrm{i})^3$

(c) $(1 + \mathrm{i})^{10}$

(d) $\mathrm{Im}(2 - 4\,\mathrm{i}) + \mathrm{Re}(|5 + 2\,\mathrm{i}|)$

Aufgabe H 7. *komplexe Gleichungen*

Geben Sie alle komplexen Lösungen $z_k \in \mathbb{C}$ der folgenden Gleichungen an:

(a) $z^2 + 2z + 2 = 0$

(b) $(z - \mathrm{i})^3 = -\mathrm{i}$

(c) $z\bar{z} - 5z = -10\mathrm{i}$

Präsenzübungen

Aufgabe P 5. *Ungleichungen*
Bestimmen Sie folgende Teilmengen von $\mathbb{R}$:

(a) $\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x \leqq x^2\right\}$,

(b) $\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, |x+1| < |x-3|\right\}$.

Aufgabe P 6. *Polarkoordinaten*
Zeichnen Sie die folgenden Zahlen in die komplexe Ebene ein. Berechnen Sie die Polarkoordinatendarstellung der komplexen Zahlen. Verwenden Sie keine Näherungen, sondern geben Sie die Argumente exakt an.

$$\begin{aligned} z_1 &= 2 + \mathrm{i}\,2\sqrt{3}, \\ z_2 &= \frac{\sqrt{2}}{2} - \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ z_3 &= 1 + \mathrm{i}\,\sqrt{3} \quad . \end{aligned}$$

Aufgabe P 7. *Geometrie, Skalarprodukt, Projektion*
Seien $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^2$ und $a_4, a_5, a_6 \in \mathbb{R}^5$, die gegeben sind durch

$$a_1 = (-1, 1), \; a_2 = (1, 2), \; a_3 = (4, 2),$$

$$a_4 = (1, 2, 3, 4, 5), \; a_5 = (-3, 6, -2, 1, 0), \; a_6 = (0, 1, 2, 0, -4).$$

Zeichnen Sie die Vektoren $a_1, a_2 + a_3$ und $\frac{\langle a_2 \,|\, a_3 \rangle}{|a_3|^2} a_3$ in ein geeignetes Koordinatensystem. Messen Sie die Länge des Vektors a_1 und berechnen Sie folgende Terme:

(a) $\langle a_1 \,|\, a_2 \rangle$, $\langle a_2 \,|\, a_3 \rangle$, $\sqrt{\langle a_1 \,|\, a_1 \rangle}$,

(b) $a_4 + a_5 + a_6$,

(c) $\langle a_4 \,|\, a_5 \rangle \, a_6$.

Aufgabe P 8. *Rechnen mit Vektoren*
Seien $n \in \mathbb{N}$ und $a, b, c \in \mathbb{R}^n$. Ferner gelte:

$$a = 3b, \quad c = 5a + b, \quad |a| = \sqrt{3}.$$

Vereinfachen Sie

(a) $\langle a \,|\, b \rangle$,

(b) $\langle a \,|\, c \rangle$,

(c) $\langle a \,|\, 3(b + c) \rangle$,

(d) $\langle \langle b \,|\, c \rangle \cdot (a + b) \,|\, (\langle b \,|\, c \rangle + \langle a \,|\, c \rangle) \cdot (a + b) \rangle$.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 8. *Komplexer Einheitskreis*

Der Einheitskreis um den Ursprung in der komplexen Ebene wird mit $\mathbb{S}$ bezeichnet, d.h. $\mathbb{S} = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z| = 1 \right\}$. Seien $z, w, v \in \mathbb{S}$. Skizzieren Sie $\mathbb{S}$ und beweisen Sie:

(a) $z^{-1} = \bar{z}$ und $z^{-1} \in \mathbb{S}$,

(b) $z \cdot w \in \mathbb{S}$,

(c) $\frac{z}{w} \in \mathbb{S}$,

(d) $\frac{z^5}{w^8} \cdot v^6 \in \mathbb{S}$.

Aufgabe H 9. *Ungleichungen*

Bestimmen Sie folgende Teilmengen von $\mathbb{R}$:

(a) $\left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x + 3 > x^2(x+3) \right\}$,

(b) $\left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, |x^2 + 3x - 4| + 1 < |x+4| + |x-1| \right\}$,

(c) $\left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \dfrac{|x-1|}{|x-2|} \leqq 1 \right\}$.

Aufgabe H 10. *Injektivität, Surjektivität und Bijektivität*

Überprüfen Sie, ob die folgenden Abbildungen injektiv, surjektiv oder bijektiv sind und begründen Sie Ihre Antwort:

(a) $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}\colon z \mapsto z^3$,

(b) $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}\colon z \mapsto |z|$,

(c) $h\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}\colon z \mapsto \mathrm{i} \cdot z$.

Aufgabe H 11. *Skalarprodukt*

Sei V der Raum aller Polynome auf $[0,1]$ mit Grad maximal 2, d.h.

$$V = \left\{ p\colon [0,1] \to \mathbb{R}\colon x \mapsto ax^2 + bx + c \,\middle|\, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Dieser Raum kann mit dem Skalarprodukt

$$\langle p \,|\, q \rangle = \int_0^1 p(x) q(x) \,\mathrm{d}\, x$$

für $p, q \in V$ versehen werden. Gegeben seien nun folgende Polynome:

$$p_1(x) := x^2 + x, \quad p_2(x) := x - \frac{7}{10}, \quad p_3(x) := x^2 + x + 1.$$

(a) Bestimmen Sie die Skalarprodukte $\langle p_1 \,|\, p_2 \rangle$, $\langle p_1 \,|\, p_3 \rangle$ und $\langle p_2 \,|\, p_3 \rangle$.

(b) Geben Sie ein Polynom der Form $ax^2 + bx$ aus V für $a \neq 0$, $b \neq 0$ an, dessen Norm gleich 1 ist.

Präsenzübungen

Aufgabe P 9. *Untervektorraum, Basis, Erzeugendensystem*

Es seien die folgenden Vektoren des $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ gegeben:

$$v_1 = (1,1)\,,\ v_2 = (0,2)\,,\ v_3 = (5,4)\,,\ w_1 = (1,-1,1)\,,\ w_2 = (1,3,2)\,.$$

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind:

(a) Die Menge $\mathrm{L}(v_2)$ ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$.

(b) Die Vektoren v_1 und v_2 sind linear unabhängig.

(c) Die Vektoren v_1 und v_2 bilden eine Basis von $\mathbb{R}^2$.

(d) Es gilt: $\mathrm{L}(v_1, v_2, v_3) = \mathbb{R}^2$.

(e) Die Vektoren v_1, v_2 und v_3 sind ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^2$.

(f) Die Vektoren v_1, v_2 und v_3 bilden eine Basis von $\mathbb{R}^2$.

(g) Es gilt: $\langle w_1 \,|\, w_2 \rangle = 1$.

(h) Es gilt: $\mathrm{L}(w_1, w_2) = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 5x + y - 4z = 0 \right\}$.

Aufgabe P 10. *Geraden*

Gegeben seien die Punkte $A = (-1,-2)$, $B = (7,3)$, $C = (2,\alpha)$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$ und die Gerade $g = \left\{ (0,4) + \lambda\,(6,-7) \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$.

(a) Für welche α liegen A, B und C nicht auf einer Geraden?

(b) Schneidet g die Gerade, die durch A und B festgelegt wird? Berechnen Sie gegebenenfalls den Schnittpunkt.

(c) Für welche α ist die Gerade durch A und C parallel zu g?

Aufgabe P 11. *Unterschiedliche Basen des Vektorraums der Polynome*

Wir betrachten den Vektorraum $\mathrm{Pol}_2\,\mathbb{R} := \left\{ \sum_{j=0}^{2} \alpha_j X^j \,\middle|\, \alpha_j \in \mathbb{R} \right\}$ der reellen Polynome vom Grad höchstens 2 mit den Basen $B\colon 1, X, X^2$ und $C\colon X^2, X-1, X+1$.

Geben Sie für die Polynome $p(X) := X^2 + 2X$, $q(X) := X^2 + 2X + 1$ sowie $p+q$ die Koordinatentupel ${}_Bp$, ${}_Bq$, ${}_B(p+q)$ bezüglich B und die Koordinatentupel ${}_Cp$, ${}_Cq$, ${}_C(p+q)$ bezüglich C an.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 12. *Lineare Unabhängigkeit, Basis, Erzeugendensystem*

Gegeben seien die Vektoren $v_1 = (3, 0, 3, 6)$, $v_2 = (2, -1, 1, 2)$, $v_3 = (-1, 1, 0, 0)$, $v_4 = (0, 1, 2, \pi)$ und $v_5 = (2, 1, 4, 4 + \pi) \in \mathbb{R}^4$.
Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind und begründen Sie Ihre Antwort (gegebenenfalls mit einer Rechnung).

(a) Die Vektoren v_1 und v_2 sind linear unabhängig.

(b) Die Vektoren v_1 und v_2 bilden eine Basis von $\mathrm{L}(v_1, v_2, v_3)$

(c) Die Vektoren v_1, v_2, v_4, v_5 bilden eine Basis von $\mathbb{R}^4$.

(d) Die Vektoren v_2, v_3, v_4, v_5 sind linear unabhängig.

(e) Die Vektoren v_1, v_2, v_4 bilden ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^3$.

(f) Der Vektorraum $\mathrm{L}(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ hat Dimension 3.

Aufgabe H 13. *Ebene, Hessesche Normalform*

Gegeben sind die Punkte $A = (5, 1, 0)$, $B = (1, 5, 2)$ und $C = (-1, 1, 6)$

(a) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC gleichschenklig ist. Zeigen Sie außerdem sowohl mit Hilfe des Skalarprodukts als auch mit Hilfe des Vektorprodukts, dass das Dreieck rechtwinklig ist.

(b) Der Punkt D bilde mit A, B und C ein Quadrat mit dem Mittelpunkt M. Bestimmen Sie D und M.

(c) Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung und eine Koordinatengleichung der Ebene E, die A, B und C enthält. Prüfen Sie bei beiden Darstellungen, ob die Punkte D und M auf der Ebene liegen.

(d) Geben Sie die Ebene E in Hessescher Normalform an. Welchen Abstand hat die Ebene zum Ursprung?

Aufgabe H 14. *Bernstein-Polynome*

Wir betrachten den Vektorraum $\mathrm{Pol}_4 \mathbb{R} := \left\{ \sum_{j=0}^{4} \alpha_j X^j \,\middle|\, \alpha_j \in \mathbb{R} \right\}$ der reellen Polynome vom Grad höchstens 4.
Zeigen Sie, dass die durch

$$b_k(X) := \binom{4}{k} (1 - X)^{4-k} X^k$$

definierten *Bernstein-Polynome* b_0, b_1, b_2, b_3, b_4 eine Basis des Vektorraumes $\mathrm{Pol}_4 \mathbb{R}$ bilden.
Geben Sie für die Polynome p, q, r mit $p(X) = 1$, $q(X) = X^2$ und $r(X) = X^4$ die Koordinatentupel ${}_Bp$, ${}_Bq$ und ${}_Br$ bezüglich der Basis B: b_0, b_1, b_2, b_3, b_4 an.

J. Hörner
B. Kabil
B. Krinn

4. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 1

Dr. M. Künzer
Prof. Dr. M. Stroppel

Wintersemester 2011/2012

Präsenzübungen

Aufgabe P 12. *Vektorprodukt*

Gegeben sind die folgenden Vektoren des $\mathbb{R}^3$:

$$a = (8, 3, 4)\,, \quad b = (1, 5, 9) \quad \text{und} \quad c = (18, 16, 26)\,.$$

Berechnen Sie $a \times b$, $(a+b) \times c$, $\langle a + b \,|\, a \times b \rangle$ und $\sqrt{\langle a \times b \,|\, -b \times a \rangle}$.
Berechnen Sie außerdem den Flächeninhalt des von a und b aufgespannten Parallelogramms.

Aufgabe P 13. *Matrizenaddition und -multiplikation*

Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\,, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\,, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\,, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\,, \quad E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \mathrm{i} \\ 4 & \mathrm{i} & 3 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie an, welche der Matrizenprodukte und Summen

$$AB, \quad BA, \quad CE, \quad EC, \quad E^{\mathsf{T}}C, \quad A + B^{\mathsf{T}}, \quad B + D, \quad C + D$$

existieren und berechnen Sie diese. Gilt $(C+D)^2 = C^2 + 2CD + D^2$? Für welche Matrizen $F \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gilt $FC = CF$?

Aufgabe P 14. *Matrixpotenz*

Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie A^2, A^3 und A^4 und versuchen Sie eine Darstellung für $A^n\,, n \in \mathbb{N}$ zu finden. Gilt diese auch für $n = 0$?

Aufgabe P 15. *Lineares Gleichungssystem*

André Citroën, Rudolf Diesel und Henry Ford spielen ein Würfelspiel, bei dem jeder genau einmal würfeln darf. Rudolf Diesel würfelt nur eine halb so hohe Augenzahl wie Henry Ford und André Citroën zusammen. Dahingegen würfelt Henry Ford eine genauso hohe Augenzahl wie die anderen beiden gemeinsam. Wenn André Citroën, Rudolf Diesel und Henry Ford zusammengenommen genau die bei einem Würfel höchstmögliche Augenzahl würfeln, welche Augenzahl würfeln dann die einzelnen Ingenieure?
Formulieren Sie den Sachverhalt als lineares Gleichungssystem. Geben Sie insbesondere an, welche Größen durch Ihre Variablen beschrieben werden.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 15. *Vektoren, Skalarprodukt, Vektorprodukt*

(a) Beweisen Sie für drei Vektoren $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ den folgenden Entwicklungssatz durch elementare Rechnung:

$$a \times (b \times c) = \langle a \,|\, c\rangle \, b - \langle a \,|\, b\rangle \, c.$$

(b) Seien $a \in \mathbb{R}^3$ und $c \in \mathbb{R}^3$ linear unabhängige Vektoren. Für welche Vektoren $b \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$a \times (b \times c) = (a \times b) \times c?$$

Aufgabe H 16. *Matrizenmultiplikationen*

Gegeben seien die Matrizen

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3\sqrt{5}}{10} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3\sqrt{5}}{10} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{5}}{10} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{5}}{10} & \frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{3}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $Q^\intercal Q$, $Q^\intercal A$, $Q^\intercal A\,S$ und $SQ^\intercal A\,S\,Q^\intercal A - S\,S^\intercal A^\intercal Q\,Q^\intercal A$.
Hinweis: Für beliebige Matrizen M und N, für die das Produkt MN definiert ist, gilt: $(MN)^\intercal = N^\intercal M^\intercal$.

Aufgabe H 17. *Lineares Gleichungssystem*

Jeden Montag um halb sieben liefert Bauer Klaus Kartoffeln, Zwiebeln und Tomaten an die 3 Gemüsehändler in der Nordbahnhofstraße. Diese Woche hat er hat 630 kg Kartoffeln, 220 kg Zwiebeln und 340 kg Tomaten dabei. Beim ersten Händler verkauft er 200 kg Kartoffeln, 20 kg Zwiebeln und 120 kg Tomaten und erhält dafür 264 Euro. Der zweite Händler nimmt 150 kg Kartoffeln, 50 kg Zwiebeln und 50 kg Tomaten ab. Dem dritten Händler kann er die restlichen Kartoffeln und Zwiebeln verkaufen, allerdings kann dieser nur 140 kg Tomaten nehmen. Der dritte Händler zahlt 352 Euro. Da Klaus die restlichen Tomaten auch noch loswerden möchte, fährt er nochmal zum zweiten Händler zurück, der ihm tatsächlich die restlichen Tomaten abnimmt, so dass Klaus insgesamt 806 Euro eingenommen hat.
Wieviel kostet bei Bauer Klaus also jeweils 1 kg Kartoffeln, Zwiebeln oder Tomaten? (Die Preise sind natürlich für alle Händler gleich.)
Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem auf. Geben Sie an, welche Größen durch Ihre Variablen beschrieben werden und berechnen Sie die Preise.

Präsenzübungen

Aufgabe P 16. *Gleichungssysteme, Koeffizientenmatrix*

Wir betrachten die folgenden linearen Gleichungssysteme in $\mathbb{R}^3$.

(a) $$\begin{array}{rcl} 2x_1 - x_3 + 3x_2 &=& 0 \\ x_1 + x_3 &=& 0 \\ 3x_1 + 3x_2 &=& 0 \end{array}$$

(b) $$\begin{array}{rcl} 3x_1 + 6x_2 + 4x_3 &=& 25 \\ x_1 + x_3 + 2x_2 &=& 7 \end{array}$$

(c) $$\begin{array}{rcl} 2x_1 + x_2 &=& -5 \\ x_1 + 0x_2 &=& 4 \\ 3x_2 + x_2 &=& 0 \end{array}$$

Sind die Gleichungssysteme jeweils homogen oder inhomogen? Stellen Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix auf und bestimmen Sie jeweils alle Lösungen mit dem Gauß-Algorithmus.

Aufgabe P 17. *Abbildungen linear?*

Gegeben sind die Abbildungen

$$\begin{array}{rcrcl} g_1\colon & \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 & : & (x,y)^\intercal & \mapsto & (2x+y, x+2y)^\intercal \\ g_2\colon & \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 & : & (x,y,z)^\intercal & \mapsto & (x+y, y+z, z+x)^\intercal \\ g_3\colon & \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 & : & (x,y,z)^\intercal & \mapsto & (x+z, y+x)^\intercal \\ g_4\colon & \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} & : & (x,y,z)^\intercal & \mapsto & (2xy-z)^\intercal \\ g_5\colon & \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 & : & (x)^\intercal & \mapsto & (x, 2x, 4x^2)^\intercal \end{array}$$

Welche dieser Abbildungen sind linear? Geben Sie die Matrixdarstellung der linearen Abbildungen bezüglich der Standardbasis an. Sind die Abbildungen $g_1 \circ g_3$ und $g_4 \circ g_5$ linear? Wenn ja, geben Sie deren Matrixdarstellung bezüglich der Standardbasis an.

Aufgabe P 18. *Spiegelung*

Gegeben ist die Abbildung

$$s\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

sowie $v_1 = (1,-2)^\intercal$, $v_2 = (2,3)^\intercal$, $v_3 = (-1,\alpha)^\intercal$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
Geben Sie an, ob die Abbildung s linear ist.
Bestimmen Sie die Bilder $s(v_1), s(v_2), s(v_1+v_2), s(v_2+v_3)$.
Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $|s(v_3)| = \sqrt{2}$ und für welche Vektoren $w \in \mathbb{R}^2$ ist $s(w) = w$? Interpretieren Sie die Abbildung s geometrisch.

Aufgabe P 19. *Matrixdarstellung einer linearen Abbildung*

Gegeben ist die Abbildung $\alpha : \{e_1, e_2, e_3\} \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\alpha(e_1) := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha(e_2) := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \alpha(e_3) := \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Setzen Sie α auf $\mathbb{R}^3$ linear fort, geben Sie die Matrixdarstellung der Fortsetzung in der Standardbasis an und bestimmen Sie das Bild von $e_1 + 2e_2 + 3e_3$.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 18. *Lineare Gleichungssysteme*

Geben Sie für die folgenden Gleichungssysteme über dem jeweils angegebenen Körper K die Koeffizientenmatrix und die rechte Seite an. Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathcal{L}$ mit Hilfe des Gauß-Algorithmus. Machen Sie eine Probe.

(a) $$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & - & 6x_2 & + & 2x_3 & = & -4 \\ x_1 & - & 2x_3 & + & 4x_2 & = & 2 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & - & 5x_3 & = & 6 \end{array}, \qquad K = \mathbb{R}$$

(b) $$\begin{array}{rcrcrcr} 2z_1 & + & 4z_2 & + & 2z_3 & = & 2 \\ 2z_1 & + & 5z_2 & + & 4z_3 & = & 3 \\ z_1 & + & 2z_2 & + & z_3 & = & 1 \\ 2z_1 & + & 6z_2 & + & 6z_3 & = & 4 \end{array}, \qquad K = \mathbb{C}$$

(c) $$\begin{array}{rcrcr} (1+\mathrm{i})z_1 & + & 2z_2 & = & 4 \\ (1-\mathrm{i})z_2 & - & 2z_1 & = & -1 \end{array}, \qquad K = \mathbb{C}$$

Aufgabe H 19. *Gauß-Algorithmus*

(a) Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 10 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & -4 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} -3 \\ 21 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Bestimmen sie alle reellen Lösungen des linearen Gleichungssystems mit Hilfe des Gauß-Algorithmus.

(b) Gibt es $\alpha \in \mathbb{R}$, für welche das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1+\alpha & \alpha+2 & 2\alpha+3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

(i) genau eine Lösung **(ii)** keine Lösung **(iii)** mehrere Lösungen

besitzt? Bestimmen sie jeweils alle reellen Lösungen mit Hilfe des Gauß-Algorithmus.

Aufgabe H 20. *Drehung*

Die Drehung in der Ebene $\mathbb{R}^2$ ist durch eine lineare Abbildung $d\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben.

(a) Geben Sie die Matrixdarstellung einer Drehung im Uhrzeigersinn um den Winkel φ in der Standardbasis an.

(b) Verwenden Sie die Darstellung aus (a), um das Bild der Geraden

$$x = t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

bei einer Drehung um $\pi/6$ im Uhrzeigersinn zu ermitteln.

Präsenzübungen

Aufgabe P 20. *Rang und Kern*

Bestimmen Sie den Rang der folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}.$$

Geben Sie eine Basis des Kerns und eine Basis des Bildes der jeweils zugehörigen linearen Abbildung an.

Aufgabe P 21. *Inverse*

Gegeben sind die folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie, falls möglich, Rechts- sowie Linksinverse der gegebenen Matrizen.

Aufgabe P 22. *Basiswechsel*

Gegeben ist der Vektorraum $\mathbb{R}^3$ mit der Basis $B\colon (1,0,-1)^\intercal, (1,1,0)^\intercal, (0,1,-1)^\intercal$ sowie mit der Standardbasis E.

(a) Bestimmen Sie die Matrixdarstellung ${}_E\mathrm{id}_B$, die Koordinaten bezüglich B in Koordinaten bezüglich E umrechnet.

(b) Bestimmen Sie die Matrixdarstellung ${}_B\mathrm{id}_E$, die Koordinaten bezüglich E in Koordinaten bezüglich B umrechnet.

(c) Sei x in $\mathbb{R}^3$ mit ${}_Ex = (1,1,-1)^\intercal$ gegeben. Berechnen Sie ${}_Bx$.
Sei y in $\mathbb{R}^3$ mit ${}_By = (1,1,-1)^\intercal$ gegeben. Berechnen Sie ${}_Ey$.

Aufgabe P 23. *Transponierte und Inverse*

Gegeben sei die Matrix $A := \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 1 \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}$.

Was muss für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ gelten, damit $A^\intercal A = E_2$ ist? Berechnen Sie für diesen Fall $AA^\intercal$.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 21. *Matrixdarstellungen*

Gegeben sind die lineare Abbildung

$$\alpha\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+z \\ y-2z \\ x-y \\ y \end{pmatrix},$$

die Vektoren

$$\begin{aligned} v_1 &= (1,1,0)^\intercal \in \mathbb{R}^3\,,\ v_2 = (0,1,1)^\intercal \in \mathbb{R}^3\,, \\ w_1 &= (1,1,0,0)^\intercal \in \mathbb{R}^4\,,\ w_2 = (0,2,1,0)^\intercal \in \mathbb{R}^4\,, w_3 = (0,0,0,1)^\intercal \in \mathbb{R}^4\,, \end{aligned}$$

und die Vektorräume $V = \mathrm{L}(v_1, v_2)$, $W = \mathrm{L}(w_1, w_2, w_3)$.

(a) Geben Sie die Matrixdarstellung von α bzgl. der Standardbasen an.

(b) Zeigen Sie: $B : v_1, v_2$ ist eine Basis von V und $C : w_1, w_2, w_3$ eine Basis von W .

(c) Zeigen Sie, dass das Bild des Unterraums V in W liegt, d.h. $\alpha(V) \subsetneqq W$.

(d) Geben Sie die Matrixdarstellung der Einschränkung $\alpha' : V \to W : v \mapsto \alpha(v)$ bezüglich der Basen B und C an.

Aufgabe H 22. *Rang und Kern*

Gegeben sei die von $t \in \mathbb{R}$ abhängige Matrix

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & \sin^2(t) & t^2-2 \\ -e^{-t} & e^{-t}\cos^2(t) & te^{-t} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

die die lineare Abbildung $\alpha_t\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon x \mapsto A_t\, x$ beschreibt.
Bestimmen Sie den Rang von A_t in Abhängigkeit von $t \in \mathbb{R}$.
Bestimmen Sie das Bild und den Kern von α_t in Abhängigkeit von t.

Aufgabe H 23. *Inverse*

Gegeben ist die invertierbare Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Inverse A^{-1} und lösen Sie damit die linearen Gleichungssysteme $Ax = b_j$ für die Vektoren $b_1 = (6,2,6)^\intercal$, $b_2 = (6,1,-12)^\intercal$, $b_3 = (2,3,4)^\intercal$.

Präsenzübungen

Aufgabe P 24. *Leibniz-Regel für Determinanten*

Sei $A := (a_{ij})_{1 \leqq i,j \leqq 3} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Leiten Sie mit Hilfe der Leibniz-Formel

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_3} \left(\operatorname{sig}(\sigma) \prod_{k=1}^{3} a_{\sigma(k),k} \right)$$

die Regel von Sarrus her.

Aufgabe P 25. *Rechnen mit Determinanten*

Berechnen Sie die Determinanten der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i}+1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \\ -3 & 2 & 8 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -4 & -1 \\ -3 & 2 & 8 & 3 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie auch die Determinanten von A^2 und $BB^\intercal$ an.

Aufgabe P 26. *Determinante*

Gegeben ist die Abbildung

$$s\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \det \begin{pmatrix} x_1 & 1 & 0 & 1 \\ x_2 & 0 & 1 & 1 \\ x_3 & 1 & 0 & 0 \\ x_4 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie, dass die Abbildung linear ist, geben Sie die Matrixdarstellung an und bestimmen Sie Kern und Bild.

Aufgabe P 27. *Schmidtsches Orthonormierungsverfahren*

In $\mathbb{R}^3$ sind die Vektoren $v_1 = (1,0,-1)^\intercal$, $v_2 = (1,1,-1)^\intercal$ und $v_3 = (-1,3,-2)^\intercal$ gegeben.

(a) Konstruieren Sie (mit Hilfe des Schmidtschen Orthonormierungsverfahrens) eine Orthonormalbasis $F\colon f_1, f_2, f_3$ von $\mathbb{R}^3$ derart, dass $\mathrm{L}(f_1) = \mathrm{L}(v_1)$, $\mathrm{L}(f_1, f_2) = \mathrm{L}(v_1, v_2)$ und $\mathrm{L}(f_1, f_2, f_3) = \mathrm{L}(v_1, v_2, v_3)$.

(b) Konstruieren Sie eine Orthonormalbasis $G\colon g_1, g_2, g_3$ von $\mathbb{R}^3$ derart, dass $\mathrm{L}(g_1) = \mathrm{L}(v_1)$, $\mathrm{L}(g_1, g_2) = \mathrm{L}(v_1, v_3)$ und $\mathrm{L}(g_1, g_2, g_3) = \mathrm{L}(v_1, v_2, v_3)$.

(c) Geben Sie die Matrix für den Basiswechsel ${}_F\mathrm{id}_G$ an und bestimmen Sie deren Determinante.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 24. *Entwicklung einer Determinante*
Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 & -4 \\ 1 & 0 & 3 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Begründen Sie, warum A invertierbar ist, und berechnen Sie auch $\det(2A^{-1})$.

Aufgabe H 25. *Rechenregeln für Determinanten*
Gegeben ist die Abbildung

$$f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \colon x \mapsto \det \begin{pmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \\ 1 & 1 & x & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Ist die Abbildung f linear?

(b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt $f(x) = 0$?

Aufgabe H 26. *Schmidtsches Orthonormierungsverfahren*
In $\mathbb{R}^4$ sind die Vektoren $b_1 = (1,1,0,1)^\intercal$, $b_2 = (1,-2,0,0)^\intercal$ und $b_3 = (1,0,-1,2)^\intercal$ gegeben.
Konstruieren Sie (mit Hilfe des Schmidtschen Orthonormierungsverfahrens) eine Orthonormalbasis $F \colon f_1, f_2, f_3$ von $U = \mathrm{L}(b_1, b_2, b_3)$.

Aufgabe H 27. *Orthonormalbasis für Polynome*
Wir betrachten den Vektorraum $\mathrm{Pol}_3\,\mathbb{R} := \left\{ \sum_{j=0}^{3} \alpha_j X^j \,\middle|\, \alpha_j \in \mathbb{R} \right\}$ der reellen Polynome vom Grad höchstens 3 und das Skalarprodukt

$$\langle p \,|\, q \rangle := \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} p(x) q(x) \,\mathrm{d}\,x .$$

Bestimmen Sie aus der Basis $B : 1, X, X^2, X^3$ eine Orthonormalbasis F für den Vektorraum und geben Sie die Koordinaten ${}_F r$ des Polynoms $r(X) = 3X^2 + X + 1$ an.

Präsenzübungen

Aufgabe P 28. *Affine Abbildungen und Isometrien*
Gegeben ist die affine Abbildung

$$\alpha\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon v \mapsto \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & 1 & 1 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(a) Was ist der lineare Anteil, was ist der Translationsanteil von α?

(b) Ist α eine Affinität? Ist α eine (eigentliche) Isometrie?

(c) Bestimmen Sie eine Drehung δ und eine Translation τ so, dass $\alpha = \tau \circ \delta$. Warum ist diese Aufteilung möglich? Welchen Drehwinkel hat δ in diesem Fall?

(d) Bestimmen Sie die Drehachse der Abbildung δ.

Aufgabe P 29. *Spiegelung an einer Geraden*
Gegeben ist im $\mathbb{R}^2$ eine Gerade, die durch die Gleichung

$$x_1 - 2x_2 + 2 = 0$$

beschrieben wird. Bestimmen Sie eine Matrix A und einen Vektor t so, dass die Spiegelung an der Geraden durch die affine Abbildung $x \mapsto Ax + t$ beschrieben wird. Handelt es sich um eine Isometrie? Ist diese eigentlich?

Aufgabe P 30. *Koordinatentransformation*
Im affinen Raum $\mathbb{R}^2$ sind die Punkte

$$P = (1, -1)^\intercal \qquad \text{und} \qquad Q = (-2, 0)^\intercal$$

sowie die Vektoren

$$f_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad f_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad g_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad g_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Bestimmen Sie die Koordinatentransformation ${}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{F}}$, welche Koordinaten bezüglich $\mathbb{F} = (P; f_1, f_2)$ in solche bezüglich $\mathbb{G} = (Q; g_1, g_2)$ umwandelt. Bestimmen Sie die Umkehrung dieser Transformation.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 28. *Affine Abbildung*

Gegeben ist eine affine Abbildung

$$\alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon x \mapsto Ax + t\,,$$

mit $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und $t \in \mathbb{R}^2$.

Die Abbildung bildet die Gerade $g : y = -x + 4$ punktweise auf sich selbst ab (Fixpunktgerade). Des weiteren ist $\alpha((1,2)^\intercal) = (3,4)^\intercal$.

(a) Bestimmen Sie den linearen Anteil von α. Handelt es sich bei α um eine (eigentliche) Isometrie?

(b) Bestimmen Sie den Translationsanteil von α.

(c) Bestimmen Sie die Umkehrabbildung α^{-1}.

Aufgabe H 29. *Spiegelung*

Gegeben ist im $\mathbb{R}^3$ die Ebene, die durch die Gleichung

$$x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 19$$

beschrieben wird.

(a) Bestimmen Sie eine Matrix A und einen Vektor t so, dass die Spiegelung an der Ebene durch die affine Abbildung $\alpha\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon x \mapsto Ax + t$ beschrieben wird.

(b) Machen Sie die Probe, indem Sie $\alpha \circ \alpha$ berechnen.

Aufgabe H 30. *Koordinatentransformation*

Gegeben sind das Standard-Koordinatensystem $\mathbb{E}$ und das affine Koordinatensystem

$$\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$$

im $\mathbb{R}^3$ sowie die lineare Abbildung $\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : v \mapsto Av$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix} .$$

(a) Geben Sie die Koordinatentransformationen ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$ und ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$ an.

(b) Geben Sie die Beschreibung der Abbildung α bzgl. des Koordinatensystems $\mathbb{F}$ an.

J. Hörner
B. Kabil
B. Krinn

9. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 1

Dr. M. Künzer
Prof. Dr. M. Stroppel

Wintersemester 2011/2012

Präsenzübungen

Aufgabe P 31. *Eigenwerte und Eigenräume*

Gegeben sind folgende Matrizen aus $\mathbb{C}^{2\times 2}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} & \mathrm{i} \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und jeweils einen zugehörigen Eigenvektor der Matrizen A und B. Machen Sie eine Probe.

(b) Bestimmen Sie alle Eigenräume der Matrizen A und B.

Aufgabe P 32. *Test auf Eigenvektor*

Gegeben seien die Matrix und die Vektoren

$$A = \begin{pmatrix} 12 & 4 & 0 & -9 \\ 2 & 10 & 0 & -3 \\ 2 & 2 & 1 & -6 \\ 2 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Untersuchen Sie, welche der Vektoren v_1, v_2, v_3 Eigenvektoren von A sind.

(b) Berechnen Sie alle Eigenwerte von A und geben Sie jeweils einen zugehörigen Eigenvektor an.

(c) Welche algebraische und geometrische Vielfachheit besitzen die Eigenwerte jeweils?

Aufgabe P 33. *Diagonalisierbarkeit*

(a) Gegeben sind eine lineare Abbildung α und zwei linear unabhängige Vektoren v, w mit Koordinaten bezüglich der Standardbasis ${}_E v = (v_1, v_2)^\intercal$ und ${}_E w = (w_1, w_2)^\intercal$. Bezüglich der Basis $B : v, w$ hat die Matrixdarstellung von α Diagonalgestalt, d.h.

$${}_B\alpha_B = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Koordinaten ${}_E(\alpha(v))$ und ${}_E(\alpha(w))$. Welcher Zusammenhang besteht zwischen ${}_E v$, ${}_E w$ und der Matrixdarstellung ${}_E\alpha_E$ von α?

(b) Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

und die lineare Abbildung $\alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \colon v \mapsto Av$. Gibt es eine Basis $B : b_1, b_2$ des $\mathbb{R}^2$ so, dass ${}_B\alpha_B$ eine Diagonalmatrix ist?

(c) Sei $\varphi\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2 \colon v \mapsto Av$ mit A wie im Teil **(b)**. Bestimmen Sie eine Basis $C : c_1, c_2$ des $\mathbb{C}^2$ so, dass ${}_C\varphi_C$ eine Diagonalmatrix ist.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 31. *Eigenwerte und Eigenvektoren*

Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenräume der folgenden Matrizen.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ \mathrm{i} & -3+\mathrm{i} & 1-\mathrm{i} \\ 1 & 0 & 2+2\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Geben Sie auch jeweils die algebraische und geometrische Vielfachheit der Eigenwerte an.

Aufgabe H 32. *Parameterabhängige Eigenwerte und Eigenvektoren*

Gegeben sei die von den Parametern $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ abhängige Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -a & ab & a+b \\ 0 & b & ab \\ 0 & ab & b \end{pmatrix} .$$

(a) Für welche Paare (a, b) ist 0 ein Eigenwert von A?

(b) Bestimmen Sie a so, dass A die Eigenwerte 0 und 1 hat. Für welche b gibt es einen weiteren Eigenwert?

(c) Gibt es a und b so, dass A einen nicht-reellen Eigenwert hat?

(d) Bestimmen Sie die Eigenräume der Matrix A in Abhängigkeit von a und b.

Aufgabe H 33. *Charakteristisches Polynom*

Gegeben ist eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ für ein $n \in \mathbb{N}$, die die paarweise unterschiedlichen Eigenwerte $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ mit jeweils zugehörigen Eigenvektoren $v_1, v_2, \ldots, v_n \in \mathbb{C}^n$ hat.

(a) Geben Sie das charakteristische Polynom $\chi_A(\lambda)$ an.

(b) Sind v_i und v_j für $i \neq j$ linear unabhängig?

(c) Ist jeder Eigenvektor von A auch Eigenvektor von A^2? Ist jeder Eigenvektor von A^2 auch Eigenvektor von A?

(d) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix A^2 sowie das zugehörige charakteristische Polynom $\chi_{A^2}(\lambda)$.

J. Hörner
B. Kabil
B. Krinn

10. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 1

Dr. M. Künzer
Prof. Dr. M. Stroppel

Wintersemester 2011/2012

Präsenzübungen

Aufgabe P 34. *Diagonalisierung*

Diagonalisieren Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} .$$

Geben Sie insbesondere die Diagonalmatrix $D = T^{-1}AT$ an. Ist die Matrix T orthogonal?

Aufgabe P 35. *schiefsymmetrische Matrizen*

(a) Zeigen Sie, dass die Matrix $A + A^{\mathsf{T}}$ für beliebige quadratische Matrizen A symmetrisch ist.

(b) Eine Matrix M heisst schiefsymmetrisch, wenn $M = -M^{\mathsf{T}}$ gilt. Zeigen Sie, dass die Matrix $A - A^{\mathsf{T}}$ für beliebige quadratische Matrizen A schiefsymmetrisch ist.

(c) Stellen Sie eine beliebige quadratische Matrix A als Summe aus einer symmetrischen und einer schiefsymmetrischen Matrix dar.

Aufgabe P 36. *konjugierte Matrizen*

Die Matrix $B \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ sei konjugiert zu einer Matrix A, die 1 und 3 als Eigenwerte besitzt und für die $\det(A) = 12$ gilt.

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von B.

(b) Bestimmen Sie $\operatorname{Rg} A, \operatorname{Rg} B$, $\operatorname{Sp} A, \operatorname{Sp} B, \chi_A(\lambda)$ und $\chi_B(\lambda)$.

Aufgabe P 37. *quadratische Form*

Gegeben ist die Abbildung $q \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \colon (x_1, x_2, x_3) \mapsto 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + \sqrt{2}x_1x_2$ und die weiteren Abbildungen

$$\begin{aligned}
q_s \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \colon \quad & (x_1, x_2, x_3) \mapsto q(x_1, 2x_2, 3x_3) \\
q_a \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \colon \quad & (x_1, x_2, x_3) \mapsto q(x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_3 + x_1) \\
q_\ell \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \colon \quad & (x_1, x_2, x_3) \mapsto q(x_1 + 1, 2x_2 + 2, 3x_3 + 3)
\end{aligned}$$

Bestimmen Sie, welche der Abbildungen eine quadratische Form sind und geben Sie für diese die Matrixdarstellungen an.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 34. *symmetrische Matrizen*

Gegeben sind die symmetrischen Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix S so, dass $S^\intercal AS$ eine Diagonalmatrix ist.

(b) Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix T so, dass $T^\intercal BT$ eine Diagonalmatrix ist.

(c) Sei $n \geqq 1$. Zeigen Sie, dass T auch B^n diagonalisiert, d.h. dass auch $T^\intercal B^n T$ eine Diagonalmatrix ist. Geben Sie die Eigenwerte von B^n an.

Aufgabe H 35. *Eigenwerte und Eigenvektoren*

Die symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ hat die Eigenwerte

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = 2, \quad \lambda_4 = -2$$

und die zugehörigen Eigenvektoren

$$v_1 = (1,1,1,1)^\intercal, \quad v_2 = (-1,1,1,-1)^\intercal, \quad v_3 = (-1,0,0,1)^\intercal, \quad v_4 = (0,1,-1,0)^\intercal.$$

(a) Geben Sie eine orthogonale Matrix T an, die A diagonalisiert.

(b) Bestimmen Sie die Matrix A.

(c) Berechnen Sie die Inverse von A, ohne den Gauß-Algorithmus anzuwenden. Berechnen Sie A^5.

(d) Bestimmen Sie die Lösung x des Gleichungssystems $Ax = (-1,3,1,1)^\intercal$.

Aufgabe H 36. *Zeilensummen*

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $A = (a_{jk}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Matrix, die die Bedingung

$$\exists s \in \mathbb{R}\colon \forall j \in \{1,\dots,n\}\colon \sum_{k=1}^{n} a_{jk} = s$$

erfüllt, d.h. alle Zeilen der Matrix A haben die gleiche Summe.

(a) Bestimmen Sie einen Eigenwert und einen dazugehörigen Eigenvektor von A.

(b) Geben Sie für $n = 3$ eine Matrix A an, deren Einträge natürliche Zahlen sind, bei denen keine Zahl doppelt auftritt und die einen Eigenwert 33 hat.

Hinweis: Für **(b)** kann ein „Magisches Quadrat“ als Ausgangspunkt hilfreich sein.

Präsenzübungen

Aufgabe P 38. *Typ einer Quadrik*

Gegeben ist die Quadrik

$$Q = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid (x_1 - x_2)^2 - (x_1 + x_2)^2 + 2x_3 = 0\} .$$

(a) Geben Sie den quadratischen, linearen und konstanten Teil der Quadrik Q an.

(b) Geben Sie die Matrixbeschreibung und die zugehörige erweiterte Matrix der Quadrik an.

(c) Welchen Typ hat die Quadrik?

Aufgabe P 39. *Quadriken und euklidische Normalform*

Gegeben sind die Quadriken

$$\begin{aligned}
Q_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 + 1 = 0\} \\
Q_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 2y = 0\} \\
Q_3 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 + 2x + 1 = 0\} \\
Q_4 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy + 2x - y - 3 = 0\}
\end{aligned}$$

(a) Skizzieren Sie die Quadriken.

(b) Bestimmen Sie die euklidische Normalform der Quadriken und zeichnen Sie ein Koordinatensystem, bezüglich dem die Quadriken euklidische Normalform besitzen, in die Skizzen ein.

Aufgabe P 40. *quadratische Formen und Definitheit*

Gegeben sind die quadratischen Formen $q_A(x) = x^\mathsf{T} Ax$, $q_B(y) = y^\mathsf{T} By$ und $q_C(z) = z^\mathsf{T} Cz$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 5 \\ -3 & -1 & -4 & 2 \\ 4 & -4 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} .$$

(a) Berechnen Sie $q_A(b_k)$ für die Vektoren $b_1 = (1, 0, 0, 0)^\mathsf{T}, b_2 = (0, 1, 0, 0)^\mathsf{T}, b_3 = (0, 0, 1, 0)^\mathsf{T}, b_4 = (0, 0, 0, 1)^\mathsf{T}$. Ist die quadratische Form q_A positiv definit oder negativ definit? Welcher Zusammenhang besteht zwischen den berechneten Werten und den Einträgen von A?

(b) Zeigen Sie, dass q_B indefinit ist, indem Sie y_1 und y_2 angeben für die $q_B(y_1) > 0$ und $q_B(y_2) < 0$ ist. Bestätigen Sie nochmals die Indefinitheit von q_B mit Hilfe der Eigenwerte.

(c) Zeigen Sie, dass q_C negativ definit ist.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 37. *quadratische Formen und Definitheit*

Gegeben seien $a, b \in \mathbb{R}$ und die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & 2b \\ 0 & a \end{pmatrix} .$$

(a) Schreiben Sie $q_{a,b}(x) \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \colon x \mapsto x^\intercal A x$ als Polynom.

(b) Geben Sie die Matrixdarstellung der quadratischen Form $q_{a,b}$ an.

(c) Zeigen Sie, dass die quadratische Form $q_{1,2}$ indefinit ist.

(d) Für welche Werte a, b ist $q_{a,b}$ positiv definit, für welche a, b ist sie negativ definit und für welche a, b ist sie indefinit?

Aufgabe H 38. *Ebene Schnitte einer Quadrik*

Gegeben ist die Quadrik

$$Q \quad = \quad \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid\ x^2 + y^2 + z^2 + 6xy - 2yz = 0\}$$

(a) Bestimmen Sie die euklidische Normalform der Quadrik und geben Sie an, welche Gestalt sie hat.

(b) Skizzieren Sie die ebenen Schnitte der Quadrik mit den Koordinatenebenen $x = 0, y = 0$ und $z = 0$, sowie mit den Ebenen $x = 1, y = 1$ und $z = 1$.

(c) Skizzieren Sie die Quadrik Q. Heben Sie die Schnitte aus **(b)** hervor.

Aufgabe H 39. *Euklidische Normalform*

Gegeben ist die Quadrik

$$Q \quad = \quad \{x \in \mathbb{R}^4 \mid\ 2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4) = 1\}$$

(a) Geben Sie die Matrixdarstellung der Quadrik an.

(b) Ist der quadratische Anteil der Quadrik positiv definit?

(c) Geben Sie den Typ der Quadrik an.

(d) Bringen Sie die Quadrik auf euklidische Normalform und geben Sie eine Basis an, bezüglich der die Quadrik euklidische Normalform besitzt.

Präsenzübungen

Aufgabe P 41. *Klausuraufgabe Frühjahr 2010*

Bestimmen Sie die euklidische Normalform der Quadrik

$$Q := \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 5x_1^2 - 8x_1x_2 + 5x_2^2 + 6x_1 - 12x_2 - 9 = 0 \right\}$$

und ermitteln Sie die zugehörige Koordinatentransformation. Bestimmen Sie anhand der Normalform die Gestalt der Quadrik und fertigen Sie eine Skizze der Quadrik in Standardkoordinaten an.

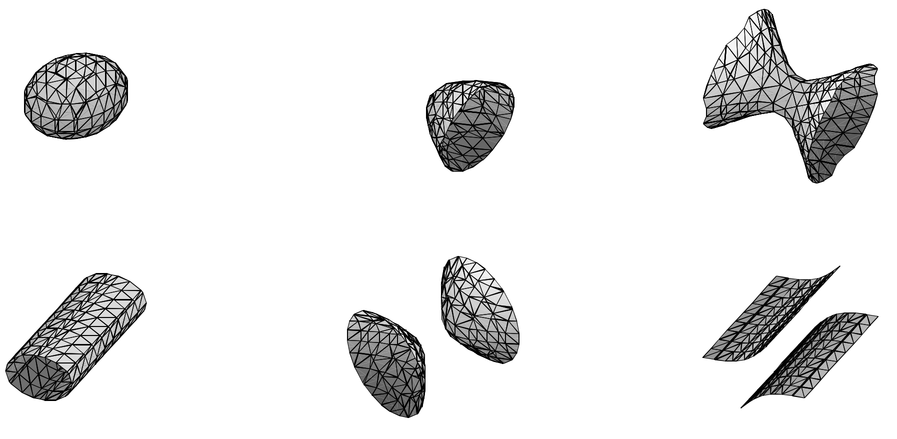
Aufgabe P 42. *Monotonie und Beschränktheit*

Untersuchen Sie die Folgen auf Monotonie und Beschränktheit. Geben Sie, falls möglich, eine obere und eine untere Schranke an.

(a) $\left(5\right)_{n\in\mathbb{N}}$ **(b)** $\left(5\cdot n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ **(c)** $\left(5\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ **(d)** $\left(5^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$
(e) $\left(5^{-n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ **(f)** $\left(5^{\frac{1}{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ **(g)** $\left(\frac{1}{n}\sin(2\,\pi\,n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ **(h)** $\left(\sin(2\,\pi\,n - \frac{1}{n})\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Aufgabe P 43. *Quadriken erkennen*

Um welche Quadriken könnte es sich bei den folgenden Bildern handeln? Geben Sie jeweils die Gestalt der Quadrik und eine affine Normalform an.



Aufgabe P 44. *Grobeinteilung von Quadriken*

Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist die Quadrik

$$Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1^2 + x_2^2 + \alpha\, x_3^2 + 4\,\alpha\, x_2\, x_3 + 2\,\alpha\,(\alpha-1)\, x_3 + \alpha\,(\alpha-1) = 0 \right\}$$

eine kegelige Quadrik, eine Mittelpunktsquadrik oder eine parabolische Quadrik?

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 40. *Parameterabhängige Quadrik*

Bestimmen Sie für die Quadrik

$$Q_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1x_2 + \alpha x_3^2 + 2(\alpha+1)x_3 = 0\}$$

in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$ die Matrixform und den Typ.
Bestimmen Sie außerdem die euklidische Normalform und Gestalt von Q_1 und geben Sie das kartesische Koordinatensystem an, in dem die Quadrik euklidische Normalform besitzt.

Aufgabe H 41. *Monotonie und Beschränktheit*

Untersuchen Sie die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jeweils auf Monotonie und Beschränktheit. Geben Sie, falls möglich, eine obere und eine untere Schranke an.

(a) $a_n = \dfrac{3n}{2n+4}$

(b) $a_n = 3 + \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$

(c) $a_n = (-1)^n(2n+1)$

(d) $a_n = 8\cos\left(\dfrac{-\pi n}{3}\right)$

Aufgabe H 42. *Rekursive Folge*

Eine reelle Folge $\big(a_n\big)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist für $q \in \mathbb{R}$ rekursiv definiert durch

$$a_0 := 1 \quad \text{und} \quad a_{n+1} := qa_n + 1 \quad \text{für } n \in \mathbb{N}_0\,.$$

(a) Geben Sie a_n in nicht-rekursiver Form an, d.h. bestimmen Sie a_n so, dass Sie zur Beschreibung nicht auf vorhergehende Folgenglieder zurückgreifen müssen.

(b) Untersuchen Sie die Folge jeweils für $q \in \{-1/2, 0, 1, 2\}$ auf Monotonie und Beschränktheit, geben Sie dabei jeweils obere beziehungsweise untere Schranken an, falls solche existieren.

Präsenzübungen

Aufgabe P 45. *Umgebungen*

Mit $U_\varepsilon(a) \subseteqq \mathbb{R}$ wird die ε-Umgebung um den Punkt a bezeichnet.

(a) Skizzieren Sie $U_2(2)$ und $U_1(4)$.

(b) Bestimmen Sie $U_2(2) \cap U_1(4)$ und skizzieren Sie diese Menge.

(c) Bestimmen Sie a und ε so, dass $U_\varepsilon(a) = U_2(2) \cup U_1(4)$.

Aufgabe P 46. *Konvergenz*

Untersuchen Sie die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzw. $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Monotonie, Beschränktheit und Konvergenz. Geben Sie für konvergente Folgen den Grenzwert g an.

(a) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$

(b) $b_n = \dfrac{2n-1}{(n-1)^2} \sin \dfrac{n\pi}{2}$

(c) $c_n = \sin \frac{1}{n^2}$

Bestimmen Sie in **(c)** für jedes $\varepsilon > 0$ ein n_ε mit

$$\forall n > n_\varepsilon \colon |g - c_n| < \varepsilon \,.$$

Aufgabe P 47. *Häufungspunkte*

Bestimmen Sie die Häufungspunkte, $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n$ und $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$ der folgenden Folgen:

(a) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n^3}$, **(b)** $a_n = 5(-1)^n$, **(c)** $a_n = \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) - \frac{1}{n}$, **(d)** $a_n = n^{(-1)^n}$.

Aufgabe P 48. *Produktfolge*

Finden Sie jeweils Beispiele von Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen so, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht konvergiert, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen Null konvergiert und die Produktfolge $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$

(a) unbeschränkt ist,

(b) gegen ein $c \in \mathbb{R}$ konvergiert,

(c) beschränkt ist, aber nicht konvergiert.

Hausübungen (Abgabe in der ersten Gruppenübung des Sommersemesters 2012):

Aufgabe H 43. *Umgebungen*

Mit $U_\varepsilon(a) \subseteqq \mathbb{R}$ wird die ε-Umgebung um den Punkt a bezeichnet.

(a) Bestimmen Sie alle $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, für die $U_\varepsilon(3/2) \subseteqq (1,2)$ ist.

(b) Sei $x \in (1,2)$. Bestimmen Sie ein (von x abhängiges) $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, für das $U_\varepsilon(x) \subseteqq (1,2)$ ist.

(c) Seien $a, b \in \mathbb{R}^+$ mit $a < b$ und $x \in (a,b)$. Bestimmen Sie ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, für das $U_\varepsilon(x) \subseteqq (a,b)$ ist.

Aufgabe H 44. *Konvergenz*

Untersuchen Sie die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz. Bestimmen Sie für konvergente Folgen den Grenzwert und geben Sie bei divergenten Folgen an, ob diese bestimmt divergieren.

(a) $a_n = \frac{7n^7}{n^7+n^6+n^5+n^4+n^3+n^2+n}$

(b) $a_n = \left(\frac{7n^7}{n^7+n^6+n^5+n^4+n^3+n^2+n}\right)^4$

(c) $a_n = \sqrt{n(n+1)}$

(d) $a_n = \sqrt{n(n+1)} - n$

(e) $a_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{2n}$

Aufgabe H 45. *Verallgemeinerte Fibonacci-Folge*

Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei definiert durch

$$f_1 := 1\,, \quad f_2 := 1\,, \quad f_3 := 2\,, \quad f_{n+1} := 6f_n - 11f_{n-1} + 6f_{n-2}\,.$$

Außerdem ist

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & 6 \end{pmatrix}$$

(a) Zeigen Sie, dass für alle $n \geqq 1$ die Gleichung

$$A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_{n+2} \\ f_{n+3} \end{pmatrix}$$

gilt.

(b) Bestimmen Sie eine Matrix T so, dass $T^{-1}AT$ Diagonalform besitzt.

(c) Verwenden Sie die Diagonalform und die Gleichung aus **(a)** um die explizite (nicht rekursive) Darstellung der Folgenglieder anzugeben.