O. Alaya, S. Demirel
M. Fetzer, B. Krinn
M. Wied

1. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 1

Dr. M. Künzer
Prof. Dr. M. Stroppel

Wintersemester 2012/2013

Präsenzübungen

Aufgabe P 1. *Funktionsgraphen*

(a) Bringen Sie die folgenden Funktionsterme auf die Form $a(x+b)^2+c$ und skizzieren Sie die Graphen der Funktionen $p(x)=x^2+5x+2$ und $q(x)=3x^2+9x+12$.

(b) Skizzieren Sie die Graphen der folgenden Funktionen. Geben Sie den Definitions– und Wertebereich dieser Funktionen an. Skizzieren Sie die Graphen der Umkehrfunktionen. Geben Sie den Definitions– und Wertebereich der Umkehrfunktionen an.

- $f\colon [0,\infty)\to\mathbb{R}\colon x\mapsto x^2$
- $h\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}\colon x\mapsto \mathrm{e}^x+1$

Aufgabe P 2. *Induktion*

Zeigen Sie mit vollständiger Induktion:

(a) $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{n}{n+1}$ **(b)** $\sum\limits_{k=n}^{2n} k = 3\sum\limits_{k=1}^{n} k$

(c) Für jede natürliche Zahl n ist die Summe der ersten n ungeraden Zahlen das Quadrat einer natürlichen Zahl.

Aufgabe P 3. *Summen*

Welche der folgenden Ausdrücke liefern für $n\in\mathbb{N}$ und für alle reellen Zahlen a_j stets dasselbe Resultat?

(a) $\sum\limits_{k=0}^{n} a_{2k+1}$, **(b)** $\sum\limits_{k=4}^{n+4} a_{2k-7}$, **(c)** $\sum\limits_{k=1}^{2n+1} a_k - \sum\limits_{k=1}^{n} a_{2k}$,

(d) $\sum\limits_{l=1}^{2n+1}\frac{\left(1-(-1)^l\right)}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}+2l\pi\right)a_l$, **(e)** $\sum\limits_{l=0}^{2n}\frac{(-1)^{l^2+l}a_{2n-(l-1)}}{2}+\sum\limits_{k=1}^{2n+1}(-1)^{k+1}\frac{a_k}{2}$

Aufgabe P 4. *Induktion*

Finden Sie den Fehler im Induktionsbeweis zur Behauptung, dass alle Menschen in einem Raum gleich groß seien. Beweis via Induktion:

IA Eine Person ist gleich groß wie sie selbst.

IH Es gelte für $k\in\mathbb{N}$ Menschen in einem Raum, dass diese gleich groß seien.

IS Betrachten wir nun einen Raum mit $k+1$ Personen. Schicken wir eine beliebige Person aus dem Raum, so sind nur k Leute innerhalb, und die Induktionshypothese greift. Rufen wir diese Person zurück und schicken eine andere Person hinaus, so sind wieder nur k Leute in dem Raum, und die Induktionshypothese greift. Weil auch die Personen, die hinausgeschickt wurden, demnach gleich groß wie die restlichen sind, sind alle $k+1$ Menschen im Raum gleich groß. Q.E.D.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 1. *Funktionsgraphen*

(a) Skizzieren Sie die Graphen der folgenden Funktionen.

- $f_1 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \colon x \mapsto \cos(x)$
- $f_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \colon x \mapsto \cos(x+1) - 2$
- $f_3 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \colon x \mapsto \cos(2x) + \sin(x)$

(b) Skizzieren Sie die Graphen der folgenden Funktionen. Geben Sie den Definitions– und Wertebereich dieser Funktionen an. Skizzieren Sie die Graphen der Umkehrfunktionen. Geben Sie den Definitions– und Wertebereich der Umkehrfunktionen an.

- $f \colon \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R} \colon x \mapsto \tan(x)$
- $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \colon x \mapsto x^3 + 3x^2 + 3x + 2$
- $h \colon [0, \infty) \to \mathbb{R} \colon x \mapsto \cosh(x) := \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$

Bestimmen Sie eine Abbildungsvorschrift für die Umkehrfunktion von g.

Aufgabe H 2. *Induktion*

Zeigen Sie mit vollständiger Induktion:

(a) Für jede natürliche Zahl n gilt: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1$

(b) Für alle natürlichen Zahlen $k > 1$ und alle positiven reellen Zahlen $x_1, \ldots, x_k$ gilt:

$$(1 + x_1)(1 + x_2) \cdots (1 + x_k) > 1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_k \,.$$

Aufgabe H 3. *Induktion*

(a) Zeigen Sie: Für jede natürliche Zahl n ist $\frac{n}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{6}$ eine ganze Zahl.

(b) Die Fibonacci-Zahlen sind rekursiv definiert durch

$$f_1 := 1,\ f_2 := 1 \quad \text{und} \quad f_{n+1} := f_n + f_{n-1} \quad \text{für} \quad n \geqq 2.$$

Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass für $n \geqq 2$ gilt:

$$f_{n+1} f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^n.$$

O. Alaya, S. Demirel
M. Fetzer, B. Krinn
M. Wied

2. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 1

Dr. M. Künzer
Prof. Dr. M. Stroppel

Wintersemester 2012/2013

Präsenzübungen

Aufgabe P 5. *Komplexe Zahlen*

Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen der folgenden Gleichungen in der Form $z = a + b\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

(a) $z = (3 + 5\mathrm{i})(1 + 2\mathrm{i})$

(b) $z = \dfrac{1 + \mathrm{i}}{4 + 7\mathrm{i}}$

(c) $z^4 = 1$

(d) $z^2 + z + 1 = 0$

Aufgabe P 6. *Abbildungen*

Geben Sie an, welche Eigenschaft eine Abbildung $f\colon M \to N$ erfüllen muss, um nicht injektiv beziehungsweise nicht surjektiv zu sein. Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität.

(a) Es seien A die Menge der (anwesenden) Teilnehmer Ihrer Übungsgruppe, die zwischen 1991 und 1995 geboren sind und B die Menge $\{1991, 1992, 1993, 1994, 1995\}$. Weiterhin sei $f\colon A \to B$ die Abbildung, die jedem Teilnehmer sein Geburtsjahr zuordnet.

(b) $g\colon \mathbb{C} \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{C}\colon z \mapsto \dfrac{1}{z}$

Aufgabe P 7. *Ungleichungen*

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden reellen Ungleichungen und skizzieren Sie diese.

(a) $x + \frac{1}{x} > 2$

(b) $|x + y| \leqq 1$

Aufgabe P 8. *Komplexe Zahlenebene*

Gegeben seien die Abbildungen

$$f_1\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}\colon z \mapsto \mathrm{i}z \quad \text{und} \quad f_2\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}\colon z \mapsto z^2$$

sowie die Mengen

$$\begin{aligned} M_1 &= \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z| = 1 \right\}, \\ M_2 &= \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z| = 2 \wedge \operatorname{Re}(z) \geqq 0 \right\} \quad \text{und} \\ M_3 &= \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \operatorname{Re}(z) = 1 \right\}. \end{aligned}$$

Skizzieren Sie die Mengen M_1, M_2 und M_3 sowie $f_1(M_1)$, $f_1(M_2)$, $f_1(M_3)$ und $f_2(M_1)$, $f_2(M_2)$, $f_2(M_3)$.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 4. *Komplexe Zahlen*

Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen der folgenden Gleichungen.

(a) $\frac{1}{2}z^2 + (1+\mathrm{i})z + (1+\mathrm{i}) = 0$

(b) $z^3 + 4z^2 + z - 26 = 0$

(c) $z^5 + z^3 - 30z = 0$

(d) $\frac{1}{z^2} = \mathrm{i}$

Aufgabe H 5. *Abbildungen*

Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität.

(a) $f_1 \colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \colon x \mapsto x^2 + 1$

(b) $f_2 \colon \mathbb{C} \to \mathbb{R} \colon z \mapsto z + \overline{z}$

(c) $f_3 \colon \mathbb{C} \smallsetminus \{1\} \to \mathbb{C} \colon z \mapsto \frac{z}{2z-2}$

Aufgabe H 6. *Ungleichungen*

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden reellen Ungleichungen und skizzieren Sie diese.

(a) $|2x - 4| > \frac{1}{2}x + 1$

(b) $x + y \leqq 1$

(c) $|x| + |y| \leqq 1$

(d) $|x + y| + |x - y| \leqq 2$

Aufgabe H 7. *Komplexe Zahlenebene*

Gegeben seien die Abbildungen

$$f_1 \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C} \colon z \mapsto (3+4\mathrm{i})z \quad \text{und} \quad f_2 \colon \mathbb{C} \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{C} \smallsetminus \{0\} \colon z \mapsto z^{-1}$$

sowie die Mengen

$$\begin{aligned} M_1 &= \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z| = \frac{1}{2} \right\}, \\ M_2 &= \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \mathrm{Re}(z) = 1 \right\} \quad \text{und} \\ M_3 &= \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2} \right\} \smallsetminus \{0\}. \end{aligned}$$

Skizzieren Sie die Mengen M_1, M_2 und M_3 sowie $f_1(M_1)$, $f_1(M_2)$, $f_1(M_3)$ und $f_2(M_1)$, $f_2(M_2)$, $f_2(M_3)$.

O. Alaya, S. Demirel
M. Fetzer, B. Krinn
M. Wied

3. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 1

Dr. M. Künzer
Prof. Dr. M. Stroppel

Wintersemester 2012/2013

Präsenzübungen

Aufgabe P 9. *Polarkoordinaten*

(a) Stellen Sie die folgenden komplexen Zahlen in Polarkoordinaten dar.

- $z = 1 + \mathrm{i}$
- $z = \sqrt{3} - \mathrm{i}$

(b) Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke:

- $(1 + \mathrm{i})^9$
- $(\sqrt{3} - \mathrm{i})^6$

Aufgabe P 10. *Mengen in $\mathbb{C}$*

Skizzieren Sie die folgenden Mengen in der komplexen Zahlenebene.

(a) $A = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \frac{\pi}{6} \leqq \arg(z) \leqq \frac{\pi}{3} \right\}$

(b) $B = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z| \leqq 3 \right\}$

(c) $C = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) > 1 \right\}$

(d) $D = B \cup (A \cap C)$

Aufgabe P 11. *Bild- und Urbildmengen*

Seien $f : X \to Y$ eine Abbildung und $A, B \subseteqq X$ und $U, V \subseteqq Y$. Mit $f^{-1}(U)$ bezeichnen wir die Menge $\{x \in X \mid f(x) \in U\}$. Entscheiden Sie, ob die folgenden Rechenregeln korrekt oder falsch sind.

(a) $f(A \cup B) \subseteqq f(A) \cup f(B)$

(b) $f(A \cup B) \supseteqq f(A) \cup f(B)$

(c) $f^{-1}(U) \subseteqq f^{-1}(V)$ für $U \subseteqq V$

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 8. *Potenzen komplexer Zahlen*

Sei $\alpha := 1 + \mathrm{i}$. Bestimmen Sie folgende Teilmengen von $\mathbb{Z}$.

(a) $\{k \in \mathbb{Z} \mid \operatorname{Re}(\alpha^k) = 0\}$

(b) $\{k \in \mathbb{Z} \mid \operatorname{Im}(\alpha^k) = 0\}$

(c) $\{k \in \mathbb{Z} \mid \operatorname{Re}(\alpha^k) = 1\}$

Aufgabe H 9. *Mengen in $\mathbb{C}$*

Skizzieren Sie die folgenden Mengen in der komplexen Zahlenebene.

(a) $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z^2 + 2z) > 1\}$

(b) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1| < |z + 1 + 2\mathrm{i}|\}$

(c) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| + z + \overline{z} - 2\operatorname{Im}(z) \leqq 4\}$

Aufgabe H 10. *Mengenoperationen*

(a) Skizzieren Sie die folgenden Mengen in der komplexen Zahlenebene.

- $A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \geqq \frac{1}{2}\}$
- $B = \{z \in \mathbb{C} \mid \frac{\pi}{6} \leqq \arg(z) \leqq \frac{4\pi}{3}\}$
- $C = \{z \in \mathbb{C} \mid \max\{|\operatorname{Re}(z)|, |\operatorname{Im}(z)|\} \leqq 1\}$

(b) Skizzieren Sie die Mengen

- $(B \cap A) \cup (A \cup B)$
- $\complement_{\mathbb{C}}(\complement_{\mathbb{C}}(A \cup B) \cap C) \cup (B \cap A)$
- $(\complement_{\mathbb{C}}(A) \cap \complement_{\mathbb{C}}(B) \cap \complement_{\mathbb{C}}(\complement_{\mathbb{C}}(A) \cap \complement_{\mathbb{C}}(B))) \cup \complement_{\mathbb{C}}(A)$

Hinweis: Vereinfachen Sie zunächst die Ausdrücke. Die Regeln von De Morgan können hilfreich sein.

Aufgabe H 11. *Bild- und Urbildmengen*

Seien $f : X \to Y$ eine Abbildung und $A, B \subseteqq X$ und $U, V \subseteqq Y$. Mit $f^{-1}(U)$ bezeichnen wir die Menge $\{x \in X \mid f(x) \in U\}$. Entscheiden Sie, ob die folgenden Rechenregeln korrekt oder falsch sind.

(a) $f(A \cap B) \subseteqq f(A) \cap f(B)$

(b) $f(A \cap B) \supseteqq f(A) \cap f(B)$

(c) $f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)$

(d) $f^{-1}(f(A)) = A$

Präsenzübungen

Aufgabe P 12. *komplexe Wurzeln*

(a) Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen der Gleichungen $z^3 = -1$ und $z^6 = 64\mathrm{i}$. Geben Sie die Lösung der ersten Gleichung in der Form $a + b\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

(b) Bestimmen Sie für die Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}\colon z \mapsto z^3 + 27$ die Menge $f^{-1}(\{0\})$.

Aufgabe P 13. *Vektorräume*

Es seien die folgenden Vektoren aus $\mathbb{R}^2$ gegeben:

$$v_1 = (1,1)\,, \quad v_2 = (0,2)\,, \quad v_3 = (5,4)\,.$$

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind:

(a) Die Menge $\mathrm{L}\,(v_2)$ ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$.

(b) Die Vektoren v_1 und v_2 sind linear unabhängig.

(c) Die Vektoren v_1 und v_2 bilden eine Basis von $\mathbb{R}^2$.

(d) Die Vektoren v_1, v_2 und v_3 sind ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^2$.

(e) Die Vektoren v_1, v_2 und v_3 bilden eine Basis von $\mathbb{R}^2$.

(f) Es gilt: $|v_2| = 2$ und der Winkel zwischen v_1 und v_3 beträgt $\frac{\pi}{6}$.

(g) Es gilt: $\mathrm{L}\,(v_3) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 4x - 5y = 0\right\}$.

Aufgabe P 14. *Ebenen*

Die Punkte $A = (2,3,0)$, $B = (4,0,-2)$ und $C = (1,1,-3)$ liegen in einer Ebene E. Liegen die Punkte $P = (-7,2,-5)$ und $Q = (-2,2,-4)$ auch in E?

Aufgabe P 15. *Funktionenräume*

Gegeben seien die folgenden Funktionen aus dem Vektorraum $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ (siehe **2.6.3**):

$$f_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto 1 \quad f_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \cos(x) \quad f_3\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \cos(2x)$$

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

(a) Die Funktionen f_1, f_2 und f_3 sind linear unabhängig.

(b) Die Funktionen f_1, f_2 und f_3 bilden eine Basis des Untervektorraums $\mathrm{L}\,(f_1, f_2, f_3)$.

(c) Die Funktion $q\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto (\sin(x))^2$ erfüllt $q \in \mathrm{L}\,(f_1, f_2, f_3)$.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 12. *komplexe Wurzeln*

(a) Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen der folgenden Gleichungen.
(i) $z^6 = -64$ **(ii)** $z^4 = -625$ **(iii)** $z^3 = -2 + 2\,\mathrm{i}$

(b) Bestimmen Sie für die Funktionen
$f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}\colon z \mapsto z^5 + 32$, $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}\colon z \mapsto z^5 - 4z^3 + 5z$ und
$h\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}\colon z \mapsto z^2$
die Mengen $f^{-1}(\{16 - 16\sqrt{3}\,\mathrm{i}\})$ sowie $g^{-1}(\{0\})$ und $h^{-1}\left(\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) = -1\}\right)$.

Aufgabe H 13. *Vektorräume*

Es seien die folgenden Vektoren aus $\mathbb{R}^3$ gegeben:

$$v_1 = (1,1,1),\ v_2 = (0,2,2),\ v_3 = (-3,-1,-1),\ v_4 = (5,4,1).$$

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind:

(a) Die Menge $\mathrm{L}(v_1, v_2)$ ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$.

(b) Die Vektoren v_1, v_2 und v_3 sind linear unabhängig.

(c) Die Vektoren v_1, v_2 und v_4 sind linear unabhängig.

(d) Es gilt: $\mathrm{L}(v_1, v_2, v_3, v_4) = \mathbb{R}^3$.

(e) Die Vektoren v_1, v_2 und v_3 sind ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^3$.

(f) Die Vektoren v_2, v_3 und v_4 bilden eine Basis von $\mathbb{R}^3$.

(g) Es gilt: $\mathrm{L}(v_1, v_2, v_3) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, -y + z = 0\right\}$.

Aufgabe H 14. *Ebenen*

(a) Liegen die beiden folgenden Geraden in einer Ebene?

$$g = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad h = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(b) Gegeben seien die Punkte: $A = (2,3,2)$, $B = (3,0,-2)$, $C = (1,4,-3)$ und $D = (-2,9,-9)$. Ist das Viereck $ABCD$ eben?

Aufgabe H 15. *Funktionenräume*

Gegeben seien die folgenden Funktionen aus dem Vektorraum $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ (siehe **2.6.3**):
$f_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto 1$ $f_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \cos(x)$
$f_3\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \cos(2x)$ $f_4\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \sin(2x)$
Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

(a) Die Funktionen f_1, f_2, f_3 und f_4 sind linear unabhängig.

(b) Die Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \cos(x)(1 + \sin(x))$ erfüllt $g \in \mathrm{L}(f_1, f_2, f_3, f_4)$.

(c) Die Funktion $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \sin(x)$ erfüllt $h \in \mathrm{L}(f_1, f_2, f_3, f_4)$.

Präsenzübungen

Aufgabe P 16. *Darstellungen von Ebenen*

Gegeben sind die Punkte $P = (1, \frac{1}{2}, 2)$, $\quad Q = (-1, 2, 1)$, $\quad$ und $\quad R = (3, -1, -6)$.

(a) Bestimmen Sie das Kreuzprodukt der beiden Vektoren, die P mit Q und P mit R verbinden.

(b) Bestimmen Sie die Hesse-Normalform der Ebene E durch die Punkte P, Q und R.

(c) Geben Sie die Ebene durch den Punkt $S = (-2, 4, 7)$ parallel zu E sowohl in Hesse-Normalform als auch in Parameterform an.

Aufgabe P 17. *Koordinaten*

(a) Gegeben seien die beiden Basen $F:\ (0,1),(1,0)$ und $G:\ (1,1),(1,-1)$ von $\mathbb{R}^2$ sowie die Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^2$ mit

$$_F a = (2,1) \quad \text{und} \quad _F b = (-1,3).$$

Geben Sie die Koordinaten der Vektoren bezüglich der Standardbasis und bezüglich der Basis G an.

(b) Gegeben seien die folgenden Funktionen aus dem reellen Vektorraum $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$:

$$f_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto 1 \quad f_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \cos(x) \quad f_3\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \cos(2x)$$

Geben Sie die Koordinaten der Funktion $q\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto (\sin(x))^2$ bezüglich der Basis f_1, f_2, f_3 von $\mathrm{L}(f_1, f_2, f_3)$ an.

Hinweis: Auf Blatt 4 haben Sie gezeigt, dass $q \in \mathrm{L}(f_1, f_2, f_3)$ gilt.

Aufgabe P 18. *Lineare Gleichungssysteme*

Entscheiden Sie, ob die Mengen

$$M_1 := (1,1,1) + \mathbb{R}\,(2,0,-1) \quad \text{und} \quad M_2 := (0,1,1) + \mathbb{R}\,(2,1,5)$$

in der Lösungsmenge des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ -4x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

liegen, und bestimmen Sie eine Basis der Lösungsmenge.

Aufgabe P 19. *Kreuzprodukt*

(a) Seien $a = (3,\ 0,\ -4)$, $\ b = (2,\ 2,\ -1)$, $\ c = (0,\ 1,\ 0) \in \mathbb{R}^3$. Berechnen Sie: $a \times b$, $a \times c$, $\quad b \times c$, $\quad a \times (2b + 10c + \cos(\frac{10}{\sqrt{\pi}})a)$, $\quad \langle a \times b \,|\, c \rangle$.

(b) Entscheiden Sie, ob die folgenden Rechenregeln für beliebige Vektoren $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ und beliebige reelle Zahlen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ korrekt oder falsch sind.
$a \times (\alpha b + \beta c) = \alpha(a \times b) + \beta(a \times c)$, $\qquad a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 16. *Darstellungen von Ebenen*

Es seien der Punkt $P = (1, 0, 1)$ und die Gerade $g = (1, 0, -1) + \mathbb{R}\,(0, 1, 1)$ gegeben.

(a) Bestimmen Sie die Hesse-Normalform der Ebene durch P und g.

(b) Bestimmen Sie die Hesse-Normalform der Ebene durch P senkrecht zu g.

(c) Bestimmen Sie die senkrechte Projektion von P auf die Gerade g.

(d) Bestimmen Sie die Hesse-Normalform der Ebene durch g mit maximalem Abstand zu P.

Aufgabe H 17. *Koordinaten*

(a) Gegeben seien die beiden Basen $F : (0, \mathrm{i}), (1, 0)$ und $G : (\mathrm{i}, \mathrm{i}), (1, -1)$ von $\mathbb{C}^2$ als Vektorraum über $\mathbb{C}$ sowie die Vektoren $a, b, c \in \mathbb{C}^2$ mit

$$_Ga = (2, 1), \qquad _Gb = (3, 3\mathrm{i}) \quad \text{und} \quad _Gc = (-1 + \mathrm{i}, 0).$$

Geben Sie die Koordinaten der Vektoren bezüglich der Standardbasis und bezüglich der Basis F an.

(b) Gegeben seien die folgenden Funktionen aus dem reellen Vektorraum $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$:

$f_1 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \colon x \mapsto 1$ $\qquad f_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \colon x \mapsto \cos(x)$

$f_3 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \colon x \mapsto \cos(2x)$ $\qquad f_4 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \colon x \mapsto \sin(2x)$

Geben Sie die Koordinaten der Funktionen

$$g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \colon x \mapsto \cos(x)(1 + \sin(x)) \quad \text{und} \quad h \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \colon x \mapsto (2\cos(x) + \sin(x))^2$$

bezüglich der Basis $F : f_1, f_2, f_3, f_4$ von $\mathrm{L}\,(f_1, f_2, f_3, f_4)$ an.

Aufgabe H 18. *Lineare Gleichungssysteme*

Entscheiden Sie ob die Mengen

$$\begin{array}{ll} M_1 := (1, 0, 1, 0) + \mathbb{R}\,(2, 0, 0, 0) & M_2 := \mathbb{R}\,(2, 1, 6, 7) \\ M_3 := \{x \in \mathbb{R}^4 |\, x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0\} & M_4 := \mathbb{R}\,(1, 2, 6, 8) \end{array}$$

in der Lösungsmenge des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 4x_1 + 5x_2 - x_3 - x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

liegen und bestimmen Sie eine Basis der Lösungsmenge.

Aufgabe H 19. *Kreuzprodukt*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Rechenregeln für beliebige Vektoren $a, b, c, d \in \mathbb{R}^3$ korrekt oder falsch sind.

(a) $a \times (b \times c) - \langle a \,|\, c \rangle\, b + \langle a \,|\, b \rangle\, c = 0$

(b) $\langle a \times b \,|\, c \rangle = \langle a \,|\, b \times c \rangle - \langle a \,|\, c \times c \rangle$

(c) $a \times (b \times c) - b \times (c \times a) = 0$

(d) $\langle a \times b \,|\, c \times d \rangle = \langle a \,|\, c \rangle \langle b \,|\, d \rangle - \langle b \,|\, c \rangle \langle a \,|\, d \rangle + \langle a \,|\, a \times d \rangle$

Präsenzübungen

Aufgabe P 20. *Matrizenmultiplikation*

Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie alle möglichen Produkte aus je zwei dieser Matrizen.

Aufgabe P 21. *Rechenregeln*

Seien $X, Y \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Entscheiden Sie, ob die folgenden Regeln zutreffend sind.

- $(X+Y)^\intercal = X^\intercal + Y^\intercal$
- $(X+Y)^2 = X^2 + 2XY + Y^2$

Aufgabe P 22. *Skalarprodukt*

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ eine Matrix in $\mathbb{R}^{2\times 2}$. Entscheiden Sie, ob

$$\big\langle (x_1, x_2) \,|\, (y_1, y_2) \big\rangle_A := (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

ein Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^2$ im Sinne von **2.6.2** ist.

Aufgabe P 23. *Matrix-Exponentialfunktion*

Für $n \in \mathbb{N}$ ist die Matrix-Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ definiert durch

$$\exp(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \,,$$

wobei $A^0 := E_n$ ist. Berechnen Sie $\exp(A)$ für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 20. *Matrizenmultiplikation*
Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 5-\mathrm{i} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 3\mathrm{i} & \mathrm{i} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Welche der Produkte $AC, CA, CA^\intercal, BA, CAB, AC^\intercal A^\intercal, (CB)^\intercal$ sind definiert? Berechnen Sie diese Produkte.

Aufgabe H 21. *Rechenregeln*
Seien $X, Y \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Entscheiden Sie, ob die folgenden Regeln zutreffend sind.
(a) $XY - YX = 0 \Rightarrow XY = E_2$, **(b)** $X^2 = E_2 \Rightarrow X = \pm E_2$,
(c) $XX^\intercal = 0 \Rightarrow X = 0$, **(d)** $XY = 0 \iff YX = 0$.

Aufgabe H 22. *Skalarprodukt*

(a) Es seien $x, y \in \mathbb{R}^n$, also $x = (x_1, ..., x_n)$ und $y = (y_1, ..., y_n)$ mit $x_j, y_j \in \mathbb{R}$. Entscheiden Sie, für welche $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n)$ mit $\lambda_j \in \mathbb{R}$

$$\langle x \,|\, y \rangle_\lambda = \lambda_1 x_1 y_1 + ... + \lambda_n x_n y_n$$

ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ im Sinne von **2.6.2** definiert.

(b) Sei $B := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Definiert

$$\langle (x_1, x_2) \,|\, (y_1, y_2) \rangle_B := (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

für (x_1, x_2), $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ im Sinne von **2.6.2**?

Aufgabe H 23. *Matrix-Exponentialfunktion*
In der Präsenzübung wurde die Matrix-Exponentialfunktion definiert. Gegeben seien die reellen Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & b_1 & b_2 \\ 0 & 0 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie $\exp(A + B)$.

(b) Berechnen Sie $\exp(A)\exp(B)$.

(c) Finden Sie zwei verschiedene Matrizen $A \neq 0$ und $B \neq 0$ in der oben angegebenen Form so, dass $\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B)$ gilt.

(d) Finden Sie A, B in der oben angegebenen Form so, dass $\exp(A+B) \neq \exp(A)\exp(B)$ gilt.

Präsenzübungen

Aufgabe P 24. *Dimensionsformel*

Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \varphi \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3 \colon x \mapsto Ax\,.$$

(a) Bestimmen Sie den Rang von A.

(b) Bestimmen Sie die Dimension des Bilds und des Kerns von φ.

(c) Bestimmen Sie eine Basis des Kerns und eine Basis des Bilds von φ.

Aufgabe P 25. *Lineare Abbildung*

Gegeben sei die lineare Abbildung $\varphi \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\varphi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \varphi \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

(a) Geben Sie die Matrixdarstellung von φ bezüglich der Standardbasis an.

(b) Bestimmen Sie das Bild von $x = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ unter φ.

Aufgabe P 26. *Lineare Abbildung*

Es sei $E \colon x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0$ eine Ebene in $\mathbb{R}^3$ und sei $\sigma \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die Spiegelung an dieser Ebene. Wählen Sie eine geeignete Basis und bestimmen Sie die Matrixbeschreibung von σ bezüglich dieser Basis.

Aufgabe P 27. *Agrarökonomie*

Wieviele Hähne, Hennen und Küken kann man für 100 Münzen kaufen, wenn man insgesamt 100 Vögel haben will, und ein Hahn 5 Münzen, eine Henne 3 Münzen und drei Küken 1 Münze kosten? Die 100 Münzen sollen hierbei vollständig verbraucht werden. Geben Sie alle (sinnvollen) Lösungen an.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 24. *Polynome*

Es sei der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad kleiner vier gegeben durch

$$\operatorname{Pol}_3 \mathbb{R} = \left\{ p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;\middle|\; p(X) = \sum_{j=0}^{3} a_j X^j,\ a_j \in \mathbb{R} \right\}.$$

(a) Prüfen Sie nach, dass $B:\ 1,\ 1+X,\ 1+X+X^2,\ 1+X+X^2+X^3$ eine Basis von $\operatorname{Pol}_3 \mathbb{R}$ ist.

(b) Es sei $d\colon \operatorname{Pol}_3 \mathbb{R} \to \operatorname{Pol}_3 \mathbb{R}$ die Abbildung, die einem Polynom seine Ableitung zuordnet. Geben Sie die Matrix ${}_B d_B$ an.

(c) Bestimmen Sie den Kern der Abbildung $D\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4\colon v \mapsto {}_B d_B\, v$. Bestimmen Sie die Dimension des Bildes von D.

Aufgabe H 25. *Lineare Gleichungssysteme*

(a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems über $\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} x_1 + (1+\mathrm{i})x_2 &= 1 - \mathrm{i} \\ \mathrm{i}x_1 + 2x_2 &= 1 \end{aligned}$$

(b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems.

$$\begin{aligned} -\frac{3}{2}x_1 - 2x_2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 - 2x_5 + 3x_6 &= -1 \\ -x_1 - \frac{4}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_4 + \frac{2}{3}x_5 + 2x_6 &= \frac{13}{3} \\ -\frac{3}{4}x_1 - x_2 + \frac{1}{4}x_3 - \frac{1}{4}x_4 - \frac{2}{3}x_5 + \frac{7}{12}x_6 &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Ist die Lösungsmenge ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^6$?

Aufgabe H 26. *Lineare Abbildung*

Es sei $g = \mathbb{R}(1,3,0)^\intercal$ eine Gerade in $\mathbb{R}^3$ und $\delta\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die Drehung an dieser Geraden, die $(1,3,1)^\intercal$ auf $\left(\frac{-3}{\sqrt{10}} + 1, \frac{1}{\sqrt{10}} + 3, 0\right)^\intercal$ abbildet.

(a) Bestimmen Sie den Drehwinkel der Abbildung δ und das Bild von $(-3,1,0)^\intercal$ unter der Abbildung δ.

(b) Wählen Sie eine Orthonormalbasis B, die einen Richtungsvektor von g und den Vektor $(0,0,1)^\intercal$ enthält, und bestimmen Sie die Matrixbeschreibung ${}_B\delta_B$ bezüglich dieser Basis.

(c) Bestimmen Sie die Koordinatenvektoren bezüglich B der Standardbasisvektoren.

(d) Bestimmen Sie die Bilder der Vektoren der Standardbasis unter δ.

(e) Bestimmen Sie die Matrixbeschreibung ${}_E\delta_E$ bezüglich der Standardbasis E.

Präsenzübungen

Aufgabe P 28. *Determinante*
Berechnen Sie

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \det\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 5 & 7 & 1 \\ 4 & 8 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe P 29. *Invertieren*
Berechnen Sie

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Aufgabe P 30. *Basiswechsel*
Wir betrachten wie in Aufgabe $\mathbf{P\ 26}$ die Spiegelung σ an der Ebene mit der Gleichung $x_1+2x_2+2x_3=0$. Berechnen Sie für Ihre Basis B aus $\mathbf{P\ 26}$ die Basiswechselmatrizen ${}_B\mathrm{id}_E$ und ${}_E\mathrm{id}_B$ und die Matrixbeschreibung ${}_E\sigma_E$ der Spiegelung bezüglich der Standardbasis E.

Aufgabe P 31. *Geometrische Interpretation*
Es sei P die Pyramide, die von den Vektoren

$$v_1 = (1,1,1)^\intercal$$
$$v_2 = (-1,0,4)^\intercal$$
$$v_3 = (2,6,0)^\intercal$$

aufgespannt wird. Berechnen Sie die Oberfläche von P.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 27. *Lösbarkeit von LGS*

Berechnen Sie die Determinante der Matrix A und bestimmen Sie in Abhängigkeit von $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ alle Lösungen des linearen Gleichungssystems $Ax = b$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & -2 & -3 \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} \beta \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe H 28. *Invertieren*

(a) Für welche Werte von a, b, c, d, e, f und g hat die Matrix

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & g \end{pmatrix}$$

eine Inverse? Berechnen Sie in diesem Fall die Inverse.

(b) Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe H 29. *Inverse*

Für welche Werte des reellen Parameters a ist die Matrix

$$A_a = \begin{pmatrix} a & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

invertierbar? Bestimmen Sie die Inverse von A_a, falls sie existiert.

Aufgabe H 30. *Geometrische Interpretation*

Es sei P die Pyramide, die von den Vektoren

$$v_1 = (1, 1, 1)^\intercal$$
$$v_2 = (-1, 0, 4)^\intercal$$
$$v_3 = (2, 6, 0)^\intercal$$

aufgespannt wird. Berechnen Sie das Volumen von P. Welche Hesse-Normalform hat die Ebene, die parallel zur von v_1 und v_2 aufgespannten Ebene ist und die Pyramide so teilt, dass das Volumen des Pyramidenstumpfs ein Drittel des Volumens von P ist?

O. Alaya, S. Demirel
M. Fetzer, B. Krinn
M. Wied

9. Gruppenübung zur Vorlesung
Höhere Mathematik 1

Dr. M. Künzer
Prof. Dr. M. Stroppel

Wintersemester 2012/2013

Präsenzübungen

Aufgabe P 32. *Schmidtsches Orthonormalisierungsverfahren*

Bestimmen Sie nach dem Schmidtschen Verfahren Orthonormalbasen der folgenden Untervektorräume:

(a)
$$\mathrm{L}\left((1,2,3)^\intercal,(4,5,6)^\intercal,(7,8,9)^\intercal\right) \subsetneq \mathbb{R}^3$$

(b)
$$\mathrm{L}\left((2,1,0,0)^\intercal,(0,-1,4,2)^\intercal,(1,0,2,-2)^\intercal\right) \subsetneq \mathbb{R}^4$$

Aufgabe P 33. *Eigentlich und uneigentlich orthogonale Matrizen*

Gegeben seien die Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix},$$

sowie die Abbildungen

$$\alpha_1\colon v \mapsto A_1 v, \quad \alpha_2\colon v \mapsto A_2 v \quad .$$

(a) Welche der obigen Abbildungen sind Isometrien? Welche von diesen sind eigentlich und welche uneigentlich?

(b) Eigentlich orthogonale Matrizen beschreiben Drehungen. Bestimmen Sie für alle eigentlich orthogonalen Matrizen aus der Menge $\{A_1, A_2\}$ den Drehwinkel.

(c) Jede uneigentlich orthogonale Matrix beschreibt eine Spiegelung. Geben Sie für alle uneigentlich orthogonalen Matrizen aus der Menge $\{A_1, A_2\}$ die Spiegelungsachse an.

Aufgabe P 34. *Determinanten*

Sei $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$ mit Matrizen A, B, C und $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Des Weiteren sei D invertierbar.

(a) Berechnen Sie ML mit $L = \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ -D^{-1}C & E_n \end{pmatrix}$.

(b) Benutzen Sie die Determinante von ML zur Berechnung der Determinante von M.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 31. *Schmidtsches Orthonormalisierungsverfahren*

Bestimmen Sie mit dem Schmidtschen Verfahren eine Orthonormalbasis der folgenden Untervektorräume:

(a) $\mathrm{L}\left((1,0,0,0,0)^\mathsf{T},(1,0,1,0,0)^\mathsf{T},(1,1,1,0,2)^\mathsf{T},(2,1,0,2,3)^\mathsf{T}\right) \subsetneqq \mathbb{R}^5$

(b) $\mathrm{L}\left((1,1,-1,0,1)^\mathsf{T},(1,1,0,1,0)^\mathsf{T},(0,1,1,-1,-1)^\mathsf{T},(0,0,1,0,3)^\mathsf{T}\right) \subsetneqq \mathbb{R}^5$

Aufgabe H 32. *Eigentlich und uneigentlich orthogonale Matrizen*

Gegeben seien die Matrizen

$$B_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, B_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix},$$

sowie die Abbildungen

$$\beta_1 \colon w \mapsto B_1 w, \quad \beta_2 \colon w \mapsto B_2 w.$$

(a) Welche der obigen Abbildungen sind Isometrien? Welche von diesen sind eigentlich und welche uneigentlich?

(b) Eigentlich orthogonale Matrizen beschreiben Drehungen. Bestimmen Sie für alle eigentlich orthogonalen Matrizen aus der Menge $\{B_1, B_2\}$ den Drehwinkel und gegebenenfalls die Drehachse.

(c) Jede uneigentlich orthogonale Matrix beschreibt eine Komposition aus einer Drehung und einer Spiegelung. Geben Sie für alle uneigentlich orthogonalen Matrizen aus der Menge $\{B_1, B_2\}$ eine solche Drehung sowie Spiegelung an. Bestimmen Sie zu diesen den Drehwinkel und gegebenenfalls die Drehachse, sowie die Spiegelungsebene.

Aufgabe H 33. *Inverse Blockmatrizen*

(a) Seien $M, N \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar. Das Produkt MN ist dann auch invertierbar. Zeigen Sie, dass die Inverse durch $(MN)^{-1} = N^{-1}M^{-1}$ gegeben ist.

(b) Es seien nun $A, B, C, D \in \mathbb{R}^{n\times n}$, wobei A, D sowie $(A - BD^{-1}C)$ invertierbar vorausgesetzt werden. Rechnen Sie nach, dass

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_n & BD^{-1} \\ 0 & E_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A - BD^{-1}C & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ D^{-1}C & E_n \end{pmatrix}.$$

(c) Benutzen Sie nun die Ergebnisse aus den Teilaufgaben (a)-(b), um

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1}$$

zu berechnen. Was ergibt sich im Fall $n = 1$?

Präsenzübungen

Aufgabe P 35. *Eigenwerte, Eigenräume*

Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenräume der folgenden Matrizen.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrix A^5.

Aufgabe P 36. *Eigenwerte, Eigenräume*

Finden Sie eine 2×2-Matrix, die die Eigenwerte 2 und 3 hat und zu diesen die Eigenräume

$$V(2) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \qquad V(3) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

hat.

Aufgabe P 37. *Koordinatentransformation*

Gegeben seien in der Ebene die Koordinatensysteme

$$\begin{aligned} \mathbb{F} &= \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) \quad \text{und} \\ \mathbb{G} &= \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

sowie die Punkte $(1,1)^\intercal$, $(2,3)^\intercal$ und $(-2,-5)^\intercal$. Skizzieren Sie beide Koordinatensysteme und die drei Punkte. Berechnen Sie die Koordinaten der drei Punkte in den beiden Koordinatensystemen und die Abbildung ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{G}}$.

Aufgabe P 38. *Affine Abbildung*

Es sei $E\colon x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1$ eine Ebene in $\mathbb{R}^3$ und sei $\sigma\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die Spiegelung an dieser Ebene. Wählen Sie ein geeignetes Koordinatensystem und beschreiben Sie σ bezüglich dieses Systems. Geben Sie die Koordinatentransformation von Ihrem System in das Standardkoordinatensystem an.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 34. *Eigenwerte, Eigenräume*

(a) Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 6 \end{pmatrix} .$$

Bestimmen Sie alle Eigenwerte der Matrizen A, A^2 und A^{100} sowie die Eigenräume von A.

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenräume der Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 27 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Aufgabe H 35. *Eigenwerte, Eigenräume*

Finden Sie eine 3×3-Matrix, die die Eigenwerte $1, 2$ und 3 und zu diesen die Eigenräume

$$V(1) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right), \qquad V(2) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right), \qquad V(3) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

hat.

Aufgabe H 36. *Affine Abbildung, Koordinatentransformation*

Gegeben sind im Standardkoordinatensystem $\mathbb{E} = \left(\binom{0}{0}; \binom{1}{0}, \binom{0}{1}\right)$ die Punkte $P = (2,1)^\intercal$, $Q = (4,2)^\intercal$ und $R = (3,3)^\intercal$. Das Koordinatensystem $\mathbb{F} = (P; v, w)$ wird durch den Punkt P und die beiden Vektoren $v = \overrightarrow{PQ}$ und $w = \overrightarrow{PR}$ gebildet.

(a) M sei der Mittelpunkt der Strecke $\overline{QR}$. Geben Sie die Koordinaten des Punktes M bezüglich beider Koordinatensysteme an.

(b) Die affine Abbildung α vertauscht die Punkte P, Q und R zyklisch, d.h. $\alpha(P) = Q$, $\alpha(Q) = R$ und $\alpha(R) = P$. Geben Sie die Darstellung ${}_{\mathbb{F}}\alpha_{\mathbb{F}}$ von α bezüglich des Koordinatensystems $\mathbb{F}$ an.

(c) Geben Sie die Koordinatentransformationen ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$, ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$ und ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{F}}$ an. Berechnen Sie ${}_{\mathbb{E}}\alpha_{\mathbb{E}}$.

O. Alaya, S. Demirel
M. Fetzer, B. Krinn
M. Wied

11. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 1

Wintersemester 2012/2013

Dr. M. Künzer
Prof. Dr. M. Stroppel

Präsenzübungen

Aufgabe P 39. *Eigenwerte, Eigenvektoren*

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a+b\mathrm{i} & 1 & 0 \\ 0 & \mathrm{i} & 1 \\ 0 & 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3} \qquad \text{mit } a, b \in \mathbb{R}.$$

(a) Geben Sie die Determinante von A in Abhängigkeit von a und b an.

(b) Für welche Paare $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ haben alle Eigenwerte die algebraische Vielfachheit 1?

(c) Für welche Werte von a und b ist der Vektor $\begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor?

(d) Können a und b so gewählt werden, dass ein Eigenwert die geometrische Vielfachheit 2 hat?

Aufgabe P 40. *Diagonalisieren*

Bestimmen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{14}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & -\frac{2}{5} & \frac{11}{5} \end{pmatrix}.$$

Geben Sie für jeden Eigenwert seine geometrische und algebraische Vielfachheit an. Entscheiden Sie, ob die Matrix diagonalisierbar ist. Bestimmen Sie gegebenfalls eine Matrix T so, dass $D = T^{-1}AT$ eine Diagonalmatrix ist. Ist die Matrix A orthogonal diagonalisierbar?

Aufgabe P 41. *Definitheit*

Entscheiden Sie, ob die quadratischen Formen, die durch die folgenden Matrizen beschrieben werden, positiv definit, negativ definit oder indefinit sind.

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe P 42. *symmetrische Matrizen*

Es sei A eine reelle symmetrische Matrix mit den Eigenwerten $1, 2$ und 3. Zum Eigenwert 1 sei der Vektor $(5, 0, 0)^\intercal$ ein Eigenvektor und zum Eigenwert 2 sei $(0, 2, -2)^\intercal$ ein Eigenvektor. Bestimmen Sie eine solche Matrix A.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 37. *Definitheit*

Entscheiden Sie, ob die quadratischen Formen, die durch die folgenden Matrizen beschrieben werden, positiv definit, negativ definit oder indefinit sind.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 \\ -2 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe H 38. *Eigenwerte von Blockmatrizen*

Die Menge der Eigenwerte einer quadratischen Matrix M bezeichnen wir mit $\lambda(M)$.

(a) Zeigen Sie, dass für eine beliebige Blockdreiecksmatrix $L = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline C & D \end{array}\right)$ mit $A \in \mathbb{R}^{k\times k}$ und $D \in \mathbb{R}^{(n-k)\times(n-k)}$ die Gleichung $\lambda(L) = \lambda(A) \cup \lambda(D)$ gilt.

(b) Sei jetzt $\lambda(A) \cap \lambda(D) = \emptyset$. Weiterhin sei v ein Eigenvektor von D und w ein Eigenvektor von A. Finden Sie Vektoren x und y so, dass $\binom{x}{v}$ und $\binom{w}{y}$ Eigenvektoren von L sind, und bestimmen Sie die zugehörigen Eigenwerte.

Aufgabe H 39. *Eigenvektoren*

Für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ definieren wir $M(A) := \begin{pmatrix} \mathbf{0} & A \\ E_n & \mathbf{0} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$.

(a) Zeigen Sie: Ist v ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda \neq 0$, dann existieren Zahlen $\mu^+ \neq \mu^-$ so, dass die Vektoren $w^+ = \begin{pmatrix} \mu^+ v \\ v \end{pmatrix}$ und $w^- = \begin{pmatrix} \mu^- v \\ v \end{pmatrix}$ Eigenvektoren von $M(A)$ sind. Bestimmen Sie die zugehörigen Eigenwerte.

(b) Bestimmen Sie, falls möglich, eine Matrix $T \in \mathbb{R}^{6\times 6}$ so, dass $T^{-1}M(A)T$ eine Diagonalmatrix ist.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe H 40. *Diagonalisieren*

Bestimmen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie für jeden Eigenwert seine geometrische und algebraische Vielfachheit an. Entscheiden Sie, ob die Matrizen orthogonal diagonalisierbar sind und bestimmen Sie gegebenfalls orthogonale Matrizen T und R so, dass $T^{\mathsf{T}}AT$ bzw. $R^{\mathsf{T}}BR$ eine Diagonalmatrix ist.

O. Alaya, S. Demirel
M. Fetzer, B. Krinn
M. Wied

12. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 1

Dr. M. Künzer
Prof. Dr. M. Stroppel

Wintersemester 2012/2013

Präsenzübungen

Aufgabe P 43. *Hauptachsentransformation*

Bestimmen Sie für die folgenden Quadriken jeweils eine euklidische Normalform und ein Koordinatensystem, bezüglich dem die Quadrik Normalform hat. Skizzieren Sie die Quadriken.

- $\mathcal{Q}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x_1^2 + x_2^2 - 2x_2 - 3 = 0 \right\}$
- $\mathcal{Q}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 + x_1 - x_2 = 0 \right\}$
- $\mathcal{Q}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x_1x_2 + 2x_1 = 0 \right\}$

Aufgabe P 44. *Quadriken*

Gegeben ist die folgende Quadrik

$$Q = \left\{ (x_1, x_2, x_3)^\intercal \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; -x_1^2 - x_2^2 + 2x_3 + 4 = 0 \right\}.$$

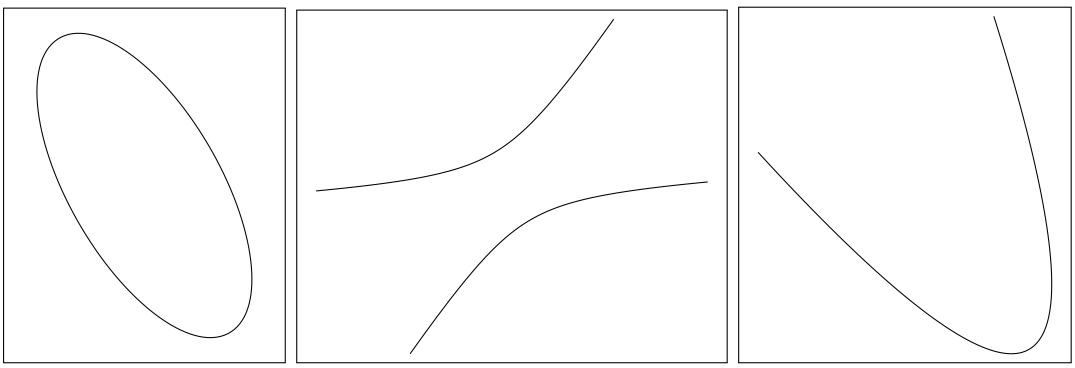
(a) Schneiden Sie die Quadrik Q mit den Ebenen $x_3 = 0$, $x_3 = -2$, $x_3 = -4$, $x_2 = 0$. Geben Sie jeweils eine Gleichung für den Schnitt und die Gestalt des Schnitts an. Skizzieren Sie den Schnitt.

(b) Skizzieren Sie nun die Quadrik Q.

Aufgabe P 45. *Quadriken in der Ebene*

Welche Gestalt haben die abgebildeten Quadriken? Ordnen Sie den Quadriken $\mathcal{Q}_1$ und $\mathcal{Q}_2$ ein passendes Bild zu.

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_1 &= \left\{ (x_1, x_2)^\intercal \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x_1^2 + x_2^2 + \frac{2}{3}x_1x_2 - 1 = 0 \right\} \\ \mathcal{Q}_2 &= \left\{ (x_1, x_2)^\intercal \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 4x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 + 2x_1 + 4x_2 = 0 \right\} \end{aligned}$$



Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 41. *Hauptachsentransformation*

Bestimmen Sie für die folgende Quadrik die erweiterte Matrix und damit den Typ. Berechnen Sie eine euklidische Normalform und ein Koordinatensystem, bezüglich dem die Quadrik Normalform hat. Skizzieren Sie die Quadrik.

$$\mathcal{Q} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; -\frac{3}{8}x_1^2 + \frac{1}{9}x_2^2 - \frac{3}{8}x_3^2 + \frac{5}{4}x_1x_3 + \sqrt{2}x_1 + \frac{2}{9}x_2 - \sqrt{2}x_3 + \frac{1}{9} = 0 \right\}$$

Aufgabe H 42. *Hauptachsentransformation*

Bestimmen Sie für die folgende Quadrik die erweiterte Matrix und damit den Typ. Berechnen Sie eine euklidische Normalform und ein Koordinatensystem, bezüglich dem die Quadrik Normalform hat. Skizzieren Sie die Quadrik.

$$\mathcal{Q} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 + 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 2 = 0 \right\}$$

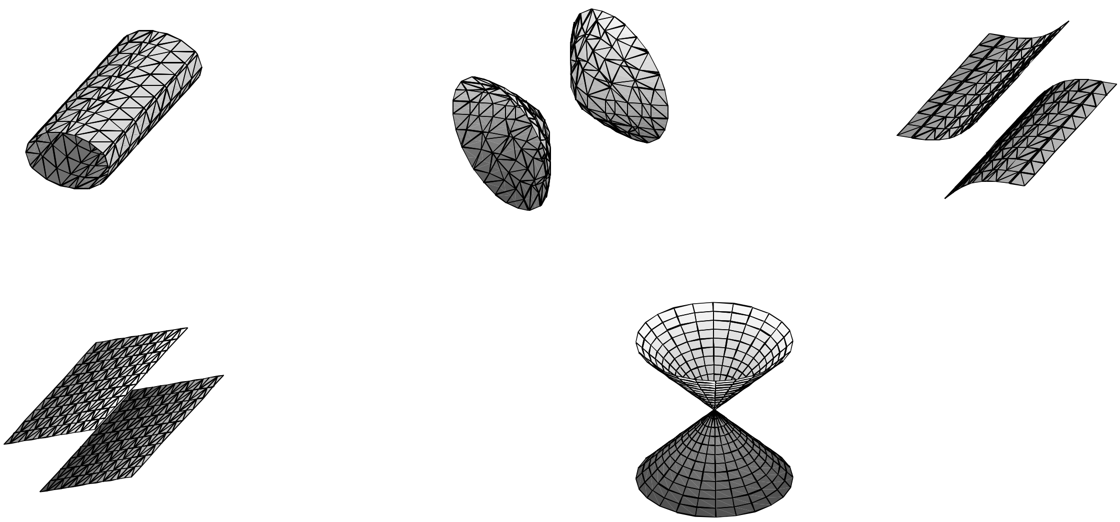
Aufgabe H 43. *Quadriken im Raum*

Welche Gestalt haben die abgebildeten Quadriken? Ordnen Sie den Quadriken $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ ein passendes Bild zu.

(a) $\mathcal{A} = \left\{ (x_1, x_2, x_3)^\intercal \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 2x_1^2 + 4x_1 + 4x_2^2 - 8x_2 + 2 = 0 \right\}$

(b) $\mathcal{B} = \left\{ (x_1, x_2, x_3)^\intercal \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 2x_1^2 - x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 4x_2x_3 = -3 \right\}$

(c) $\mathcal{C} = \left\{ (x_1, x_2, x_3)^\intercal \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1^2 - 2x_1 - 4x_2 + 2x_2^2 - x_3^2 + 2 = -1 \right\}$



O. Alaya, S. Demirel
M. Fetzer, B. Krinn
M. Wied

13. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 1

Dr. M. Künzer
Prof. Dr. M. Stroppel

Wintersemester 2012/2013

Präsenzübungen

Aufgabe P 46. *Folgen*

Entscheiden Sie jeweils, ob es möglich ist, dass eine Folge die aufgeführten Eigenschaften hat und geben Sie gegebenenfalls ein Beispiel einer Folge mit diesen Eigenschaften an:

- Die Folge ist beschränkt und streng monoton fallend.
- Die Folge ist monoton fallend und nach oben unbeschränkt.
- Die Folge ist nach oben unbeschränkt und nicht monoton wachsend.
- Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt und für $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_{n+1} = \sum_{j=1}^{n} a_j$.
- Die Folge ist nach oben durch 7 und nach unten durch 4 beschränkt und weder monoton fallend noch monoton steigend.
- Die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt, es gilt $b_1 = 1$ und für $n \in \mathbb{N}$ gilt $b_{n+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j$.

Aufgabe P 47. *Kegelschnitte*

Es sei der Kegel $K = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0\right\}$ im $\mathbb{R}^3$ gegeben.

(a) Schneiden Sie K mit den folgenden Ebenen. Bestimmen Sie eine Normalform der Schnittquadriken und deren Gestalt. Skizzieren Sie diese.

$$x_1 = 0 \quad , \quad x_1 = 1 \quad \text{und} \quad x_3 = 0$$

(b) Es sei nun eine Ebene E geben durch $2x_3 - x_1 = 1$. Um eine Normalform des Schnitts von K und E zu berechnen, bearbeiten Sie die folgenden Punkte.

- Fertigen Sie eine Skizze der Situation in der x_1-x_3-Ebene an.
- Geben Sie die Matrixbeschreibung $0 = x^\intercal Ax + 2a^\intercal x + c$ mit $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, $a \in \mathbb{R}^3$ und $c \in \mathbb{R}$ von K an.
- Bestimmen Sie $u \in \mathbb{R}^3$ so, dass das Koordinatensystem
$$\mathbb{F} = \left((-1,0,0)^\intercal; (0,1,0)^\intercal, u, \frac{1}{\sqrt{5}}(-1,0,2)^\intercal\right)$$
kartesisch ist.
- Geben Sie die Koordinatentransformation ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}} \colon v \mapsto {}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}(v)$ von $\mathbb{F}$ nach $\mathbb{E}$ an.
- Berechnen Sie die Gleichung von K im Koordinatensystem $\mathbb{F}$. Substituieren Sie hierzu in der Matrixbeschreibung $x = {}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}(w)$. Welche Gleichung hat E im Koordinatensystem $\mathbb{F}$?
- Berechnen Sie eine euklidische Normalform der Gleichung des Schnitts von K und E. Welche Gestalt hat dieser Schnitt?
- Einsetzen der Beziehung $2x_3 = x_1 + 1$ in die Gleichung von K liefert ebenfalls eine Gleichung einer Quadrik. Warum hat diese eine andere euklidische Normalform als obiger Schnitt?

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 44. *Monotonie und Beschränkheit*

Untersuchen Sie die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jeweils auf Monotonie und Beschränkheit. Finden Sie gegebenenfalls eine obere und untere Schranke.

(a) $a_n = \dfrac{n+2}{2n}$

(b) $a_n = n\cos(\pi n)$

(c) $a_n = 1 + \left(-\dfrac{2}{3}\right)^n$

(d) $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}(a_n+1)^2$; $a_1 = \sqrt{17}$

Aufgabe H 45. *Fibonacci-Folge*

Gegeben ist die rekursiv definierte Folge $(b_n)_{n\geqq 0}$ mit

$$b_0 = 0, \qquad b_1 = 1, \qquad b_n = 2b_{n-1} + 3b_{n-2} \text{ für } n \geqq 2.$$

(a) Bestimmen Sie eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ so, dass für $n \geqq 2$ gilt

$$\begin{pmatrix} b_n \\ b_{n-1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} b_{n-1} \\ b_{n-2} \end{pmatrix}.$$

(b) Bestimmen Sie eine Matrix $B_n \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ so, dass für $n \geqq 1$ gilt

$$\begin{pmatrix} b_n \\ b_{n-1} \end{pmatrix} = B_n \begin{pmatrix} b_1 \\ b_0 \end{pmatrix}.$$

(c) Berechnen Sie eine explizite (d.h. nicht rekursive) Formel für b_n.

Aufgabe H 46. *Kegelschnitte*

Es sei der Kegel $K = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0\right\}$ im $\mathbb{R}^3$ gegeben. Weiter sei $n_\varphi = (\cos\varphi, 0, \sin\varphi)^\intercal$ der Normalenvektor an die Ebene E_φ durch den Punkt $(1,0,0)^\intercal$. Betrachten Sie die Schnitte der Ebene E_φ mit dem Kegel K in Abhängigkeit von φ. Geben Sie die möglichen Gestalten der Schnittquadriken für $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ an.

Hinweis: Vollziehen Sie die Schritte aus der Präsenzaufgabe P47 (b) nach.

Präsenzübungen

Aufgabe P 48. *Grenzwerte*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert

$$a_n = \frac{3n^2+5n+1}{5n^2+7} \quad b_n = \frac{4n+\cos(n)}{13n}$$

Aufgabe P 49. *Konvergenz*

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei monoton steigend und beschränkt. Es sei die Folge $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch $d_n := a_{n+1} - a_n$. Bestimmen Sie den Grenzwert von $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Aufgabe P 50. *Paradoxon von Achilles und der Schildkröte*

Der antike Philosoph Zenon von Elea präsentierte im fünften Jahrhundert vor Christus das folgende Paradoxon: Der Läufer Achilles tritt zu einem Wettrennen gegen eine Schildkröte an. Er läuft um den Faktor k mal schneller ($k > 1$, beide laufen mit konstanter Geschwindigkeit) als die Schildkröte und gewährt ihr deshalb einen Vorsprung von d_0 Metern. Nun kann laut Zenon Achilles die Schildkröte niemals einholen, denn bevor Achilles die Schildkröte überholen kann, muss er zuerst ihren Vorsprung einholen. In der Zeit, die er dafür benötigt, hat die Schildkröte aber einen neuen, wenn auch kleineren Vorsprung d_1 gewonnen, den Achilles ebenfalls erst einholen muss und dafür eine gewisse Zeit benötigt. Ist ihm auch das gelungen, hat die Schildkröte wiederum einen Vorsprung d_2 gewonnen, und so weiter. Der Vorsprung, den die Schildkröte hat, werde zwar immer kleiner, bleibe aber dennoch immer ein Vorsprung, sodass sich Achilles der Schildkröte zwar immer weiter nähert, sie aber niemals überholen könne.

Lösen Sie das Paradoxon mit Hilfe der folgendermaßen definierten Folge $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf:

- T_0 sei die Zeitspanne vom Anfang des Rennens bis zu dem Zeitpunkt, an dem Achilles die Strecke d_0 gelaufen ist.
- T_1 sei die Zeitspanne vom Anfang des Rennens bis zu dem Zeitpunkt, an dem Achilles die Strecke d_0 und die Strecke d_1 gelaufen ist.
- usw.

Finden Sie eine Rekursionsvorschrift für $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und untersuchen Sie die Folge auf Konvergenz. Was würden Sie Zenon antworten?

Aufgabe P 51. *Datteln zu verkaufen*

Ein Karawanenhändler möchte in einer 1000 km entfernten Oase Datteln verkaufen. Er hat 3000 Datteln. Seine Kamele können zusammen 1000 Stück auf einmal tragen. Seine Karawane verbraucht insgesamt pro Kilometer eine Dattel als Kamelnahrung. Finden Sie eine Methode, wie der Händler mit möglichst vielen Datteln in der fernen Oase ankommt.
Hinweis: In der besten uns bekannten Lösung kommt der Händler mit 533 Datteln an.

Hausübungen (Abgabe in der ersten Gruppenübung des Sommersemesters 2013):

Aufgabe H 47. *Folgen*

Bestimmen Sie die Häufungspunkte der Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sowie jeweils $\underline{\lim}$ und $\overline{\lim}$. Welche der Folgen sind konvergent?

$$a_n = (-1)^{n+1}\frac{6n^3+13n}{5n^3+7} \qquad b_n = (-1)^n 2^{-2n+1}\frac{n^4-3}{n^4+2n^2+1}$$
$$c_n = \cos\left(\frac{\pi}{n}\sin(2^n)\right)\frac{-n^3+2}{13n} \qquad d_n = \sin\left(n\frac{\pi}{6}\right)$$

Aufgabe H 48. *Grenzwerte*

Untersuchen Sie jeweils die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

(a) $a_n = \sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

(b) $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$

(c) $a_n = \dfrac{n}{2^n}$

(d) $a_n = \dfrac{2^n+3^n}{3^n+2n+4}$

Aufgabe H 49. *Konvergenz*

Untersuchen Sie jeweils die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert. Bestimmen Sie alle Häufungspunkte sowie gegebenenfalls Infimum und Supremum der Folgen.

(a) $a_n = \dfrac{(-1)^n n}{n+1}$

(b) $a_n = \dfrac{4(n+1)^2\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{n+4}$

(c) $a_n = \dfrac{2n+5^n}{5^{n+1}}$

(d) $a_n = \left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^n$