L. Allerhand
A. Armiti, J. Hörner
A. Kerschl, M. Werth
C. Winkel, C. Zeiler

1. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 1

M. Künzer
M. Stroppel

Wintersemester 2014/15

Präsenzübungen

Aufgabe P 1. *Elementares Rechnen*

Berechnen Sie ohne Taschenrechner:

(a) $x_1 = \frac{1}{6} \cdot \frac{15}{\frac{5}{2}}$, **(b)** $x_2 = \binom{9}{6} + \binom{9}{5}$,

(c) $x_3 = \sqrt{13^2 + 39^2}$, **(d)** $x_4 = 100^3 - 99^3$.

Aufgabe P 2. *Summen*

Welche der folgenden Ausdrücke liefern für $n \in \mathbb{N}$ und für alle reellen Zahlen a_j stets dasselbe Resultat?

(a) $\sum_{k=0}^{n} a_{2k+1}$, **(b)** $\sum_{k=4}^{n+4} a_{2k-7}$,

(c) $\sum_{k=1}^{2n+1} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_{2k}$, **(d)** $\sum_{l=1}^{2n+1} \frac{\left(1-(-1)^l\right)}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2l\pi\right) a_l$,

(e) $\sum_{l=0}^{2n} (-1)^{l^2+l} \frac{a_{2n-(l-1)}}{2} + \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^{k+1} \frac{a_k}{2}$.

Aufgabe P 3. *Vollständige Induktion*

Gegeben sei die Folge

$$a_1 = 3, \quad a_2 = 7, \quad a_3 = 11, \quad a_4 = 15, \quad a_5 = 19, \quad \ldots$$

Beschreiben Sie die Folgenglieder systematisch.
Stellen Sie eine Formel für die Summe über die ersten n Zahlen dieser Folge auf und beweisen Sie diese Formel mittels vollständiger Induktion.

Aufgabe P 4. *Vollständige Induktion*

Zeigen Sie für $n \geqq 2$

$$\sum_{k=2}^{n} \binom{k}{2} = \binom{n+1}{3}.$$

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 1. *Aussagen*

Zeigen Sie folgende Aussagen.

(a) Die Summe der ersten n ungeraden Zahlen ist eine Quadratzahl.

(b) Die Differenz zweier ungerader Quadratzahlen ist durch 8 teilbar.

(c) Die Gleichung $x^3+x+1=0$ kann in den reellen Zahlen nur negative Lösungen haben.

(d) Die Gleichung $x^4-4x^3+6x^2-4x+1=0$ hat in den reellen Zahlen genau eine Lösung.

Aufgabe H 2. *Summen*

Beweisen Sie folgende Summenformeln für alle $n \in \mathbb{N}$.

(a) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}(j^2-1) = \frac{1}{6}(2n^3+3n^2-5n)$,

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k(k+1) = \frac{1}{3}n(1+n)(2+n)$,

(c) $\displaystyle\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m(m+1)} = \frac{n}{n+1}$.

Aufgabe H 3. *Binomialkoeffizienten*

Zeigen Sie folgende Aussagen für alle $n \in \mathbb{N}$.

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k = 3^n$ **(b)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\cos(k\pi)\binom{n}{k} = 0$ **(c)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}$

Aufgabe H 4. *Rationale Zahlen*

Seien a, b und c ungerade ganze Zahlen. Zeigen Sie, dass für

$$ax^2+bx+c=0$$

keine Lösung $x \in \mathbb{Q}$ existiert. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(a) Angenommen es existiert eine Lösung $x \in \mathbb{Q}$. Dann gibt es $r, s \in \mathbb{Z}$ mit $s \neq 0$, $\frac{r}{s}$ vollständig gekürzt und

$$b^2-4ac = \frac{r^2}{s^2}.$$

Zeigen Sie, dass in diesem Fall r und s ungerade sind.

(b) Formen Sie die Gleichung aus **(a)** zu folgender Gleichung um

$$b^2s^2-r^2 = 4acs^2$$

und leiten Sie einen Widerspruch zur Annahme aus **(a)** her.

L. Allerhand
A. Armiti, J. Hörner
A. Kerschl, M. Werth
C. Winkel, C. Zeiler

2. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 1

M. Künzer
M. Stroppel

Wintersemester 2014/15

Präsenzübungen

Aufgabe P 5. *Abbildungen*

Geben Sie an, welche Eigenschaft eine Abbildung erfüllen muss, um nicht injektiv beziehungsweise nicht surjektiv zu sein.
Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität.

(a) Es seien A die Menge der (anwesenden) Teilnehmer Ihrer Übungsgruppe und B die Menge $\{$Januar, Februar, ..., Dezember$\}$. Weiterhin sei $f\colon A \to B$ die Abbildung, die jedem Teilnehmer seinen Geburtsmonat zuordnet.

(b) Es sei C die Menge der Vereine der ersten Fußball-Bundesliga und D die Menge der Zahlen zwischen 1 und 18. Weiterhin sei $t\colon C \to D$ die Abbildung, die jedem Verein seinen aktuellen Tabellenplatz zuordnet. Kann t vom Spieltag abhängen?

(c) Sei $g\colon \mathbb{R} \to [0,\infty)\colon x \mapsto \min\{(x+1)^2, (x-1)^2\}$. Skizzieren Sie auch den Graphen.

Aufgabe P 6. *Ungleichungen, Beträge*

(a) Skizzieren Sie die Menge $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \left|x-y\right| \leqq \left|x^2-y^2\right|\right\}$.

(b) Bestimmen Sie die Menge $\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, |x-1| \leqq |x-2|\right\}$.

Aufgabe P 7. *Beispiele von Abbildungen*

Finden Sie

(a) eine Abbildung $f\colon [0,1] \to [0,1]$, die injektiv, aber nicht surjektiv ist,

(b) eine Abbildung $g\colon [0,1] \cup [2,3] \to [0,1]$, die surjektiv, aber nicht injektiv ist,

(c) eine Abbildung $h\colon [1,\infty) \to (0,1]$, die bijektiv ist.

Aufgabe P 8. *Mengen*

(a) Skizzieren Sie die folgenden Mengen.

$$\begin{aligned}
M_1 &:= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + (y+1)^2 = 1\right\}, \\
M_2 &:= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, (x-1)^2 + y^2 > 1\right\}, \\
M_3 &:= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, (x-2)^2 + y^2 \leqq 4\right\}.
\end{aligned}$$

(b) Skizzieren Sie die Schnittmenge $M_2 \cap M_3$.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 5. *Abbildungen*

Skizzieren Sie folgende Funktionen und überprüfen Sie diese auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität:

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon \quad x \mapsto x^3 \qquad\qquad h\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}\colon \quad x \mapsto \frac{x^3}{|x|}$$

$$g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}\colon \quad n \mapsto \binom{n+2}{3} \qquad\qquad s\colon \mathbb{R} \to [-1,1]\colon \quad x \mapsto \sin(x)$$

Aufgabe H 6. *Beträge, Ungleichungen*

(a) Skizzieren Sie die folgenden Mengen.

(i) $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 2x + 3y \leqq 6\right\}$ **(ii)** $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, |x-1| + |y| \leqq 2\right\}$

(b) Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der Gleichung $x^2 - 5|x| + 6 = 0$.

(c) Sei $a \in \mathbb{R}$ ein Parameter. Bestimmen Sie $\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, |x^2 - 1| + |x - a| = 0\right\}$.

Aufgabe H 7. *Ungleichungen*

(a) Zeigen Sie für $x, y, z \in \mathbb{R}_0^+$:

$$(x + y + z)^3 \geqq 27x\,y\,z$$

Hinweis: Geometrisches Mittel.

(b) Zeigen Sie folgende Ungleichung für $x \geqq -1/6$.

$$\sqrt{1 + 6x} \leqq (1 + x)^3$$

Aufgabe H 8. *Mengen*

(a) Skizzieren Sie die Mengen

$$M_1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0{,}5\,(x-2)^2 + 1\},$$
$$M_2 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - 0{,}5\,(y-2)^2 = 1\}.$$

(b) Skizzieren Sie nun die Mengen

$$M_3 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - 0{,}5\,(y-2)^2 \geqq 1 \vee y - 0{,}5\,(x-2)^2 \geqq 1\},$$
$$M_4 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + (y-1)^2 \leqq 16\}$$

und die Schnittmenge von M_3 und M_4.

L. Allerhand
A. Armiti, J. Hörner
A. Kerschl, M. Werth
C. Winkel, C. Zeiler

3. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 1

M. Künzer
M. Stroppel

Wintersemester 2014/15

Präsenzübungen

Aufgabe P 9. *Polarkoordinaten, Kehrwerte*

Zeichnen Sie die komplexen Zahlen z_k in die komplexe Ebene ein für $k \in \{1, 2, 3\}$. Zeichnen Sie auch ihre jeweiligen Kehrwerte $1/z_k$ ein. Berechnen Sie jeweils die Polarkoordinatendarstellung der komplexen Zahlen z_k und $1/z_k$.

$$z_1 = \mathrm{i}$$
$$z_2 = 2 + \mathrm{i}\,2\sqrt{3}$$
$$z_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Aufgabe P 10. *Polarkoordinaten*

(a) Stellen Sie die folgenden komplexen Zahlen in Polarkoordinaten dar.
- $z = 1 + \mathrm{i}$
- $z = \sqrt{3} - \mathrm{i}$

(b) Berechnen Sie damit die folgenden Ausdrücke:
- $(1 + \mathrm{i})^9$
- $(\sqrt{3} - \mathrm{i})^6$

Aufgabe P 11. *Mengen in $\mathbb{C}$*

Skizzieren Sie die folgenden Mengen in der komplexen Zahlenebene.

(a) $A = \left\{z \in \mathbb{C} \,\middle|\, (z \neq 0) \ \wedge \ (\frac{\pi}{6} \leqq \arg(z) \leqq \frac{\pi}{3})\right\}$

(b) $B = \left\{z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z| \leqq 3\right\}$

(c) $C = \left\{z \in \mathbb{C} \smallsetminus \{0\} \,\middle|\, \mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right) > 1\right\}$

(d) $D = B \smallsetminus (A \cap C)$

Aufgabe P 12. *Faktorisierung*

Faktorisieren Sie folgende Polynome so weit wie möglich.

(a) $x^2 - 1 \in \mathrm{Pol}\,\mathbb{R}$

(b) $x^2 + 1 \in \mathrm{Pol}\,\mathbb{R}$

(c) $z^2 + 1 \in \mathrm{Pol}\,\mathbb{C}$

(d) $z^3 - \mathrm{i} \in \mathrm{Pol}\,\mathbb{C}$

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 9. *Faktorisierung*

Faktorisieren Sie folgende Polynome so weit wie möglich.

(a) $z^2 + 4\mathrm{i}z - 4 \in \operatorname{Pol}\mathbb{C}$

(b) $z^5 - \mathrm{i} \in \operatorname{Pol}\mathbb{C}$

(c) $x^4 + 1 \in \operatorname{Pol}\mathbb{R}$

(d) $x^4 - 2x^3 + x^2 - 4x + 4 \in \operatorname{Pol}\mathbb{R}$

Aufgabe H 10. *Komplexe Zahlenebene*

Skizzieren Sie die folgenden Mengen in der komplexen Zahlenebene.

(a) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z + \mathrm{i}| > 1\}$

(b) $\{z \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Re}(z)| + 2|\operatorname{Im}(z)| < 3\}$

(c) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - \mathrm{i}| < |z - 1|\}$

(d) $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z^2) > 1\}$

Aufgabe H 11. *Komplexe Zahlenebene*

Gegeben seien die Abbildungen

$$f_1 \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C} \colon z \mapsto (4 + 3\mathrm{i})z \quad \text{und} \quad f_2 \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C} \colon z \mapsto z^2$$

sowie die Mengen

$$\begin{aligned} M_1 &= \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z| = \frac{1}{2} \right\}, \\ M_2 &= \{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) = 1 \} \quad \text{und} \\ M_3 &= \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2} \right\}. \end{aligned}$$

Skizzieren Sie die Mengen M_1, M_2 und M_3 sowie $f_1(M_1)$, $f_1(M_2)$, $f_1(M_3)$ und $f_2(M_1)$, $f_2(M_2)$, $f_2(M_3)$.

Aufgabe H 12. *Komplexe Zahlen*

Bestimmen Sie die folgenden Mengen.

(a) $\{n \in \mathbb{Z} \mid \mathrm{i}^n \in \mathbb{R}\}$

(b) $\{n \in \mathbb{Z} \mid \operatorname{Im}((1 + \mathrm{i})^n) > 0\}$

(c) $\{z \in \mathbb{C} \mid z^6 = 1 + \mathrm{i}\}$

(d) $\{z \in \mathbb{C} \mid \overline{z}^2 = \mathrm{i}z\}$

L. Allerhand
A. Armiti, J. Hörner
A. Kerschl, M. Werth
C. Winkel, C. Zeiler

4. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 1

M. Künzer
M. Stroppel

Wintersemester 2014/15

Präsenzübungen

Aufgabe P 13. *Untervektorraum, Basis, Erzeugendensystem*

Es seien die folgenden Vektoren des $\mathbb{R}^2$ gegeben.

$$v_1 = (1, 2)\,,\ v_2 = (1, 0)\,,\ v_3 = (2, 3)\,, v_4 = (0, 0)\,.$$

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind:

(a) Die Menge $\mathrm{L}\,(v_2)$ ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$.

(b) Die Vektoren v_1 und v_2 bilden eine Basis von $\mathbb{R}^2$.

(c) Es gilt: $\mathrm{L}\,(v_1, v_2) = \mathrm{L}\,(v_1, v_2, v_3)$.

(d) Die Vektoren v_1, v_2 und v_3 sind linear unabhängig.

(e) Die Vektoren v_1, v_2 und v_3 sind ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^2$.

(f) Die Vektoren v_1 und v_4 sind linear unabhängig.

Aufgabe P 14. *Geraden und Ebenen*

Gegeben seien die folgenden Punkte in $\mathbb{R}^3$:

$$A = (1, -1, 1)\,,\ B = (2, 0, 1)\,,\ C = (0, -1, 2)\,.$$

(a) Bestimmen Sie den Winkel, den die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ einschließen.

(b) Geben Sie die Ebene, die A, B und C enthält, in Parameterdarstellung an.

(c) Finden Sie den Punkt D auf der Geraden durch B und C so, dass $\overrightarrow{AD}$ auf $\overrightarrow{BC}$ senkrecht steht.

Aufgabe P 15. *Funktionenräume*

Gegeben seien die folgenden Funktionen aus dem Vektorraum $\mathcal{C}^0([-\pi, \pi])$ (vgl. **2.6.3**):

$$f_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto 1 \qquad f_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \sin(x)$$
$$f_3\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \sin(2x) \qquad f_4\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \sin(x)\cos(x)$$
$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \cos(x)(1 + \sin(x))$$

(a) Untersuchen Sie, ob die Funktionen f_1, f_2, f_3 und f_4 linear unabhängig sind.

(b) Geben Sie eine Basis für $\mathrm{L}\,(f_1, f_2, f_3, f_4)$ an.

(c) Untersuchen Sie, ob $g \in \mathrm{L}\,(f_1, f_2, f_3, f_4)$ liegt.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 13. *Untervektorraum, Basis, Erzeugendensystem*
Es seien die folgenden Vektoren aus $\mathbb{R}^4$ gegeben.

$$w_1 = (0, -1, 2, 1)\,,\; w_2 = (1, 0, 2, 1)\,,\; w_3 = (1, -1, 4, 2)\,,\; w_4 = (2, 1, 1, 0).$$

(a) Bestimmen Sie eine Basis von $\mathrm{L}\,(w_1, w_2, w_3, w_4)$.

(b) Gibt es ein $v \in \mathbb{R}^4$ so, dass w_1, w_2, w_4, v eine Basis von $\mathbb{R}^4$ ist?

(c) Gibt es ein $v \in \mathbb{R}^4$ so, dass w_1, w_2, w_3, v eine Basis von $\mathbb{R}^4$ ist?

(d) Geben Sie eine Basis von $\mathrm{L}\,(w_1, w_1 + w_2 + w_3, w_2, w_3)$ an.

Aufgabe H 14. *Untervektorräume, Geraden*
Für $t \in \mathbb{R}$ sei $V_t := \left\{t(1-\lambda) + \mathrm{i}(\lambda+1)(t-1) \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R}\right\} \subseteqq \mathbb{C}$. Sei $\mathrm{i}V_t := \left\{\mathrm{i}v \;\middle|\; v \in V_t\right\}$.

(a) Zeichnen Sie V_2 und $\mathrm{i}V_2$.

(b) Berechnen Sie $V_t \cap \mathrm{i}V_t$ für $t \in \mathbb{R}$.

(c) Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist V_t ein Untervektorraum des reellen Vektorraums $\mathbb{C}$?

(d) Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist V_t ein Untervektorraum des komplexen Vektorraums $\mathbb{C}$?

Aufgabe H 15. *Skalarprodukt*
Sei $V := \left\{p\colon [0,1] \to \mathbb{R}\colon x \mapsto ax^2 + bx + c \;\middle|\; a, b, c \in \mathbb{R}\right\}$ der Raum aller Polynome auf $[0,1]$ mit Grad maximal 2. Sei auf V das Skalarprodukt $\langle p \,|\, q\rangle := \int_0^1 p(x)q(x)\,\mathrm{d}x$ für $p, q \in V$ definiert. Seien $p_1, p_2, p_3 \in V$ definiert durch $p_1(x) := x^2 + x$, $p_2(x) := x - 1$, $p_3(x) := x^2 + 2x + 1$.

(a) Bilden p_1 und p_3 eine Basis für V?

(b) Bestimmen Sie eine Basis von V. Bestimmen Sie eine Basis von $\left\{p \in V \;\middle|\; p(1) = 0\right\}$.

(c) Bestimmen Sie die Skalarprodukte $\langle p_1 \,|\, p_2\rangle$, $\langle p_1 \,|\, p_1\rangle$ und $\langle p_2 \,|\, p_2\rangle$. Entscheiden Sie mittels der Schwarzschen Ungleichung, ob p_1 und p_2 linear abhängig sind.

Aufgabe H 16. *Geraden und Ebenen*
Seien $A := (1, -1, 2)$, $B := (1, 0, 2)$, $C := (3, 1, 0)$, $P := (3, 3, 4)$ in $\mathbb{R}^3$ gegeben.

(a) Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung für die Gerade g_1 durch die Punkte A und B.

(b) Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung für die Gerade g_2, die senkrecht auf g_1 steht und durch einen Punkt auf g_1 und den Punkt C verläuft.

(c) Geben Sie eine Parameterdarstellung der Ebene E an, die den Punkt P enthält und parallel zu g_1 und g_2 ist.

(d) Ist das Dreieck mit den Ecken A, B und C stumpfwinklig, d.h. enthält es einen Innenwinkel größer als $\pi/2$?

L. Allerhand
A. Armiti, J. Hörner
A. Kerschl, M. Werth
C. Winkel, C. Zeiler

5. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 1

M. Künzer
M. Stroppel

Wintersemester 2014/15

Präsenzübungen

Aufgabe P 16. *Matrixmultiplikation*

Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}, \; v = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \; w = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie damit, wenn möglich

(a) $A \cdot B$ **(b)** $v \cdot w$ **(c)** $A \cdot C$ **(d)** $w \cdot C$ **(e)** $(w \cdot A) \cdot v$

(f) $B \cdot A$ **(g)** $w \cdot v$ **(h)** $C \cdot B$ **(i)** $C \cdot v$ **(j)** $w \cdot (A \cdot v)$

Aufgabe P 17. *Hessesche Normalform und Kreuzprodukt*

Sei E die Ebene in $\mathbb{R}^3$, auf der die Punkte $P_1 = (1, 3, 0)$, $P_2 = (-2, 4, -1)$ und $P_3 = (0, 0, 1)$ liegen. Bestimmen Sie die Hessesche Normalform von E. Bestimmen Sie die Fläche des Dreiecks mit den Eckpunkten P_1, P_2 und P_3.

Aufgabe P 18. *Orthonormalbasis*

Im reellen Vektorraum $V = \mathbb{R}^3$ sei der Vektor

$$v = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{6}}{4} \end{pmatrix}$$

gegeben. Ergänzen Sie diesen zu einer Orthonormalbasis von V. Ergänzen Sie diesen zu einer anderen Orthonormalbasis von V.

Aufgabe P 19. *Kreuzprodukt*

Gegeben sei $a = (7, 1, -2)^\mathsf{T}$. Bestimmen Sie die Menge $\{ b \in \mathbb{R}^3 \mid a \times b = 0 \}$.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 17. *Matrixmultiplikation*

Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie $(A+B)^2$ und $A^2 + 2AB + B^2$.

(b) Berechnen Sie A^n für alle $n \in \mathbb{N}$.

(c) Berechnen Sie B^n für alle $n \in \mathbb{N}$.

(d) Bestimmen Sie alle $C \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ mit $C^\intercal C = 0$.

Aufgabe H 18. *Hessesche Normalform*

Es seien der Punkt $P = (3, 0, 4)$ und die Gerade $g = (2, 0, -5) + \mathbb{R}(1, 1, 0)$ gegeben.

(a) Bestimmen Sie die Hessesche Normalform der Ebene durch P und g.

(b) Bestimmen Sie die Hessesche Normalform der Ebene durch P senkrecht zu g.

(c) Bestimmen Sie den Punkt Q auf g mit $\overrightarrow{PQ}$ senkrecht zu g.

(d) Bestimmen Sie die Hessesche Normalform der Ebene durch g mit maximalem Abstand zu P.

Aufgabe H 19. *Hessesche Normalform und Orthonormalbasis*

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei $E_\alpha := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \alpha x = 1 - y - z\right\}$.

(a) Geben Sie eine Parameterdarstellung der Ebene E_α an.

(b) Bestimmen Sie die Hessesche Normalform von E_α.

(c) Bestimmen Sie den Abstand von E_α zum Punkt $P = (1, -2, 1)$.

(d) Ergänzen Sie einen Normalenvektor von E_α zu einer Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe H 20. *Kreuzprodukt*

Gegeben seien $u = (1, 0, 1)^\intercal$, $v = (1, 1, 0)^\intercal$ und $w = (1, 2, -1)^\intercal$.

(a) Bestimmen Sie $|u|$ und $|v|$. Bestimmen Sie die Fläche des Parallelogramms, das von den Vektoren u und v aufgespannt wird. Bestimmen Sie unter Verwendung dieser Fläche den von u und v eingeschlossenen Winkel.

(b) Bestimmen Sie $\left\{b \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, u \times b = w\right\}$.

(c) Bestimmen Sie $\left\{b \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, u \times b = v\right\}$ unter Verwendung von (a).

(d) Berechnen Sie $(u \times v) \times w$ und $u \times (v \times w)$.

L. Allerhand
A. Armiti, J. Hörner
A. Kerschl, M. Werth
C. Winkel, C. Zeiler

6. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 1

M. Künzer
M. Stroppel

Wintersemester 2014/15

Präsenzübungen

Aufgabe P 20. *Lineares Gleichungssystem*

Wir betrachten das folgende lineare Gleichungssystem.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 1 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 &= 2 \end{aligned}$$

Stellen Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix auf. Formen Sie diese in die in Satz 3.7.2 angegebene Form um. Verwenden Sie dies zur Ermittlung der Lösungsmenge.

Aufgabe P 21. *Lineare Gleichungssysteme*

Entscheiden Sie, ob die Mengen

$$M_1 := (1,1,1) + \mathbb{R}\,(2,0,-1) \quad \text{und} \quad M_2 := (0,1,1) + \mathbb{R}\,(2,1,5)$$

in der Lösungsmenge des Gleichungsystems

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ -4x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

liegen. Bestimmen Sie eine Basis des Lösungsraums.

Aufgabe P 22. *Lineare Gleichungssysteme*

Jeden Mittwoch um halb acht liefert Bauer Marcus Kartoffeln, Zwiebeln und Tomaten an die 3 Gemüsehändler in der Parkstraße. Diese Woche sind es folgende Mengen (in kg):

	Kartoffeln	Zwiebeln	Tomaten
Händler 1	200	100	120
Händler 2	150	50	80
Händler 3	280	150	120

Der erste Händler bezahlt 738 Euro, der zweite 530 Euro und der dritte 900 Euro. Wieviel kostet also jeweils 1 kg Kartoffeln, Zwiebeln oder Tomaten? Dabei ist zu berücksichtigen, dass Bauer Marcus bei einer Gesamtabnahmemenge über 350 kg 10% Rabatt gewährt.

Aufgabe P 23. *Rechenregeln*

Seien $X, Y \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Entscheiden Sie, ob die folgenden Regeln zutreffend sind.

(a) $XY - YX = 0 \Rightarrow XY = E_2$ **(b)** $X^2 = E_2 \Rightarrow X = \pm E_2$

(c) $X^2 = 0 \Rightarrow X = 0$ **(d)** $XY = 0 \iff YX = 0.$

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 21. *Lineare Gleichungssysteme*

Entscheiden Sie ob die Mengen

$$\begin{array}{ll} M_1 := \{(25,-10,4,-3)\} & M_2 := (-1,0,2,0) + \mathbb{R}\,(0,1,0,1) \\ M_3 := \mathbb{R}\,(-1,1,1,-1) & M_4 := \{(-3+t, 4-2t, t, 0), t \in \mathbb{R}\} \end{array}$$

in der Lösungsmenge des Gleichungsystems

$$\begin{aligned} 1x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 5 \\ 3x_1 + 2x_2 + 1x_3 &= -1 \end{aligned}$$

liegen. Bestimmen Sie die Lösungsmenge. Ist sie ein affiner Teilraum von $\mathbb{R}^4$? Ist sie ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^4$?

Aufgabe H 22. *Lineares Gleichungssystem*

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ betrachten wir das folgende reelle lineare Gleichungssystem.

$$S(\alpha)\ :\ \left\{ \begin{aligned} x_1 + x_2 - 2x_3 + 4x_4 + 11x_5 &= 13 \\ -4x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 - 2x_5 &= -81 \\ -2x_1 + x_2 - 2x_4 - 4x_5 &= -39 \\ x_2 - 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 &= -7 \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 2x_5 &= \alpha \end{aligned} \right.$$

(a) Erstellen Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix für $S(26)$. Bringen Sie diese mittels Algorithmus 3.7.3 in die in Satz 3.7.2 angegebene Form.

(b) Bestimmen Sie eine spezielle Lösung von $S(26)$. Bestimmen Sie eine Basis des Lösungsraums des zugehörigen homogenen linearen Gleichungssystems $S(26)_H$.

(c) Geben Sie die Lösungsmenge von $S(26)$ an. Verwenden Sie dazu (b).

(d) Welche Lösungsmengen ergeben sich für die anderen Werte von α?

Aufgabe H 23. *Matrizen und lineare Gleichungssysteme*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

(a) Die Menge der Matrizen A, welche

$$A\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$$

erfüllen, enthält mehr als 2 Elemente.

(b) Es existiert eine Matrix A mit $A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}$ und $A\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\3\\1\end{pmatrix}$.

(c) Sei $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}$. Sei $b \in \mathbb{R}^3$. Wenn $\left\{ x \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, Ax = b \right\} = \mathbb{R}^2$ ist, dann gilt $A = \mathbf{0}$ und $b = \mathbf{0}$.

(d) Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n} \smallsetminus \{\mathbf{0}\}$. Ist $m > n$, dann ist $\dim\left\{ x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, Ax = 0 \right\} = 0$.

(e) Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n} \smallsetminus \{\mathbf{0}\}$. Ist $m < n$, dann ist $\dim\left\{ x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, Ax = 0 \right\} > 0$.

L. Allerhand
A. Armiti, J. Hörner
A. Kerschl, M. Werth
C. Winkel, C. Zeiler

7. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 1

M. Künzer
M. Stroppel

Wintersemester 2014/15

Präsenzübungen

Aufgabe P 24. *Lineare Abbildungen und Matrixbeschreibungen*

Gegeben sind die linearen Abbildungen

$$g_1\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon (x,y,z)^\intercal \mapsto (x+2y-4z, -y+2z, -x+y-2z)^\intercal,$$
$$g_2\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3\colon \quad (x,y)^\intercal \mapsto (5x+2y, 4y, 3y+4x)^\intercal.$$

(a) Geben Sie die Matrixbeschreibungen von g_1 und g_2 bezüglich der Standardbasen an. Geben Sie jeweils den Rang der Matrix an.

(b) Bestimmen Sie eine Basis des Kerns von g_1. Bestimmen Sie die Dimension des Bildes von g_1.

(c) Bestimmen Sie eine Basis des Bildes von g_2. Bestimmen Sie die Dimension des Kerns von g_2.

(d) Welche der Abbildungen g_1 und g_2 sind injektiv? Welche sind surjektiv?

(e) Begründen Sie, warum die Abbildung $g_1 \circ g_2$ linear ist. Geben Sie die Matrixbeschreibung ${}_{E_3}(g_1 \circ g_2)_{E_2}$ bezüglich der Standardbasen E_2 von $\mathbb{R}^2$ und E_3 von $\mathbb{R}^3$ an. Bestimmen Sie den Kern und das Bild von $g_1 \circ g_2$.

Aufgabe P 25. *Lineare Abbildung*

Es sei $E\colon x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0$ eine Ebene in $\mathbb{R}^3$ und sei $\sigma\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die Spiegelung an dieser Ebene. Wählen Sie eine geeignete Basis und bestimmen Sie die Matrixbeschreibung von σ bezüglich dieser Basis.

Aufgabe P 26. *Einschränkung einer linearen Abbildung*

Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} x$.

Wir betrachten den Untervektorraum $U := \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x_1 - x_2 = 0 \right\}$.

(a) Geben Sie eine Basis von U an.

(b) Ist $f(U) \subseteqq U$?

Evaluation der Veranstaltung zur HM1

Bis einschließlich Freitag, den **05.12.2014** können Sie an der Befragung zur Evaluation der Lehrveranstaltung online teilnehmen. Sie erreichen die Eingabeseite unter

`https://evasysw.uni-stuttgart.de`

Die dann abgefragte Losung ist "**DFUPW**".

Vielen Dank für Ihre Beteiligung!

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 24. *Einschränkungen und Matrixbeschreibungen*

Sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon x \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} x$. Sei $B : (1,1,0)^\intercal, (0,1,1)^\intercal$. Sei $U := \mathrm{L}(B)$.

(a) Weisen Sie nach, dass auch $C : (0,1,1)^\intercal, (1,2,1)^\intercal$ eine Basis von U ist.

(b) Weisen Sie nach, dass $f(U) \subseteqq U$ ist.

(c) Sei $g\colon U \to U\colon x \mapsto f(x)$ die Einschränkung von f auf U.
Bestimmen Sie die Matrizen ${}_Bg_B$, ${}_Bg_C$ und ${}_B(g \circ g \circ g)_C$.

(d) Ist g bijektiv?

Aufgabe H 25. *Polynome und Matrixbeschreibungen*

Es sei der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad kleiner oder gleich 3 gegeben durch

$$\mathrm{Pol}_3 \mathbb{R} = \left\{ p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,\middle|\, p(X) = \textstyle\sum_{j=0}^{3} a_j X^j,\ a_j \in \mathbb{R} \right\}.$$

(a) Prüfen Sie, dass $B : 1,\ X,\ \frac{1}{2}(3X^2-1),\ \frac{1}{2}(5X^3-3X)$ eine Basis von $\mathrm{Pol}_3 \mathbb{R}$ ist.

(b) Es sei $d\colon \mathrm{Pol}_3 \mathbb{R} \to \mathrm{Pol}_3 \mathbb{R}\colon p(X) \mapsto p(1) + p'(X)$. Geben Sie die Matrix ${}_Bd_B$ an.

(c) Bestimmen Sie $d \circ d$. Berechnen Sie ${}_B(d \circ d)_B$. Berechnen Sie $({}_Bd_B)^2$.

(d) Bestimmen Sie den Kern der Abbildung $\delta\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4\colon v \mapsto {}_Bd_B\, v$. Bestimmen Sie die Dimension des Bildes von δ.

Aufgabe H 26. *Spiegelungen*

Seien $H_1 : x_1 + x_2 = 0$ und $H_2 : x_2 + x_3 = 0$ Ebenen in $\mathbb{R}^3$. Sei σ_1 die Spiegelung an H_1. Sei σ_2 die Spiegelung an H_2. Sei E die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$.
Bestimmen Sie ${}_E(\sigma_1)_E$, ${}_E(\sigma_2)_E$, ${}_E(\sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \sigma_1)_E$.
Zeigen Sie, dass $\sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \sigma_1$ die Spiegelung an einer Ebene ist und bestimmen Sie diese.

Aufgabe H 27. *Lineares Gleichungssystem*

Sei das lineare Gleichungssystem $S : Ax = b$ gegeben durch

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad b := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bringen Sie $[A||b]$ mittels Algorithmus 3.7.3 in die in Satz 3.7.2 angegebene Form. Bestimmen Sie den Rang von A.

(b) Bestimmen Sie eine spezielle Lösung von S. Bestimmen Sie eine Basis des Lösungsraums des zugehörigen homogenen linearen Gleichungssystems S_H .

(c) Geben Sie die Lösungsmenge von S an. Verwenden Sie dazu **(b)**.

(d) Finden Sie $c \in \mathbb{R}^4$ so, dass $S' : Ax = c$ keine Lösung hat.

L. Allerhand
A. Armiti, J. Hörner
A. Kerschl, M. Werth
C. Winkel, C. Zeiler

8. Gruppenübung zur Vorlesung
Höhere Mathematik 1

M. Künzer
M. Stroppel

Wintersemester 2014/15

Präsenzübungen

Aufgabe P 27. *Basiswechsel*

Gegeben ist der Vektorraum $\mathbb{R}^3$ mit der Basis $B\colon (1,0,-1)^\intercal, (1,1,0)^\intercal, (0,1,-1)^\intercal$ sowie mit der Standardbasis E.

(a) Bestimmen Sie die Matrixdarstellung ${}_E\mathrm{id}_B$.

(b) Sei $v \in \mathbb{R}^3$ mit ${}_Bv = (1,1,2)^\intercal$. Bestimmen Sie ${}_Ev$ unter Verwendung von ${}_E\mathrm{id}_B$.

(c) Bestimmen Sie die Matrixdarstellung ${}_B\mathrm{id}_E$.

(d) Bestimmen Sie den bereits bekannten Vektor ${}_Bv$, nur nun unter Verwendung von ${}_Ev$ und ${}_B\mathrm{id}_E$.

Aufgabe P 28. *Determinanten*

Gegeben sind die folgenden Matrizen:

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 1+\mathrm{i} \\ 2\mathrm{i} & 1 \end{pmatrix}, \qquad B := \begin{pmatrix} 12 & 12 & 13 \\ 11 & 12 & 13 \\ 15 & 17 & 19 \end{pmatrix}, \qquad C := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie $\det(A)$, $\det(B)$ und $\det(C)$.
Bestimmen Sie auch die Determinanten von A^2, von $BB^\intercal$ und von $3C$.

Aufgabe P 29. *Inverse*

Gegeben sind die folgenden Matrizen:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie, falls möglich, eine Rechts- sowie eine Linksinverse der jeweiligen Matrix.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 28. *Determinante und Inverse*

Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -3 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie P^{-1}. Berechnen Sie $P^{-1}AP$.

(b) Bestimmen Sie $\det(A)$, $\det(P)$ und $\det(P^{-1})$. Berechnen Sie $\det(P^{-1}AP)$ und $\det(P^{-1})\det(A)\det(P)$.

(c) Bestimmen Sie $(P^{-1}AP)^3 - P^{-1}A^3P$.

(d) Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist $tA - P^2$ regulär?

Aufgabe H 29. *Links- und Rechtsinvertierbarkeit*

Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie $\left\{X \in \mathbb{R}^{4\times 2} \,\middle|\, AX = \mathrm{E}_2\right\}$.

(b) Bestimmen Sie $\left\{Y \in \mathbb{R}^{2\times 4} \,\middle|\, YB = \mathrm{E}_2\right\}$.

(c) Bestimmen Sie $\operatorname{Rg}(A)$, $\operatorname{Rg}(B)$, $\operatorname{Rg}(AB)$ und $\operatorname{Rg}(BA)$.

(d) Haben A, B, AB oder BA eine Inverse? Wenn ja, bestimmen Sie diese.

Aufgabe H 30. *Determinante und Rang*

Für $x \in \mathbb{R}$ sei $A_x := \begin{pmatrix} 2 & 2 & x & 2 \\ x & 2 & 2 & 2 \\ 2 & x & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & x \end{pmatrix}$.

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \det(A_x)$. Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \operatorname{Rg}(A_x)$.

(a) Ist die Abbildung f linear?

(b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt $f(x) = 0$?

(c) Bestimmen Sie das Bild $\left\{g(x) \,\middle|\, x \in \mathbb{R}\right\}$ von g.

Aufgabe H 31. *Invertierbarkeit*

Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & a_{13} & a_{14} \\ 1 & 0 & a_{23} & a_{24} \\ 1 & 1 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 1 & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$.

Finden Sie reelle Werte für a_{kl} für $1 \leqq k \leqq 4$ und $3 \leqq l \leqq 4$ so, dass A regulär ist. Invertieren Sie diese Matrix A. Invertieren Sie A^2.

L. Allerhand
A. Armiti, J. Hörner
A. Kerschl, M. Werth
C. Winkel, C. Zeiler

9. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 1

M. Künzer
M. Stroppel

Wintersemester 2014/15

Präsenzübungen

Aufgabe P 30. *Determinanten*

Berechnen Sie die Determinanten der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -4 & -1 \\ -3 & 2 & 8 & 3 \end{pmatrix}.$$

Warum ist A invertierbar? Ist A orthogonal? Berechnen Sie die Determinante von $A^{-1}B$.

Aufgabe P 31. *Schmidtsches Orthonormierungsverfahren*

Gegeben seien die Vektoren $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}^4$ mit

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 12 \\ 2 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und $V = \mathrm{L}(a_1, a_2, a_3, a_4)$.

(a) Berechnen Sie die Dimension von V und eine Basis von V.

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe des Verfahrens von Schmidt eine Orthonormalbasis von V.

Aufgabe P 32. *Affine Abbildungen und Isometrien*

Gegeben ist die affine Abbildung

$$\alpha\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : v \mapsto \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & 1 & 1 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Was ist der lineare Anteil, was ist der Translationsanteil von α?

(b) Untersuchen Sie, ob α eine Affinität ist und ob es sich dabei um eine Isometrie handelt.

(c) Gibt es eine Drehung δ und eine Translation τ so, dass $\alpha = \tau \circ \delta$ ist?

(d) Finden Sie alle Fixpunkte der Abbildung δ (also alle Vektoren v mit $\delta(v) = v$).
Finden Sie alle Fixpunkte der Abbildung α.

Aufgabe P 33. *Komposition und Inversion von Isometrien*

Es seien $\alpha\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : x \mapsto Ax + s$ und $\beta\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : x \mapsto Bx + t$ zwei Isometrien.

(a) Berechnen Sie $(\beta \circ \alpha)(x)$ für $x \in \mathbb{R}^n$. Ist $\beta \circ \alpha$ eine Isometrie?

(b) Berechnen Sie $\alpha^{-1}(x)$ für $x \in \mathbb{R}^n$. Ist α^{-1} eine Isometrie?

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 32. *Entwicklungssatz*

Seien $A := \begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 4 & 5 & 7 \\ 7 & 0 & 0 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 6 & 12 & 7 & 4 \end{pmatrix}$ und $B := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie $\det(A)$, $\det(B)$ und $\det(2AB)$.

Aufgabe H 33. *Affine Abbildungen*

Gegeben seien die Abbildungen

$$L_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad L_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 6 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$L_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : x \mapsto \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Welche der Abbildungen L_1, L_2, L_3 sind Affinitäten? Welche sind Isometrien? Welche sind eigentliche Isometrien?

(b) Bestimmen Sie $L_3 \circ L_2 \circ L_1$.

(c) Ist $L_3 \circ L_3$ eine Translation? Bestimmen Sie die Menge der Fixpunkte von L_3. Ist L_3 eine Spiegelung?

(d) Bestimmen Sie $(L_1)^{-1}$ und $(L_3)^{-1}$.

Aufgabe H 34. *Orthogonale Abbildungen*

Sei $B\colon b_1 := \frac{\sqrt{2}}{2}(1,0,1)^\intercal, b_2 := \frac{\sqrt{2}}{6}(1,4,-1)^\intercal, b_3 := \frac{1}{3}(2,-1,-2)^\intercal$ und sei $E\colon e_1, e_2, e_3$ die Standardbasis in $\mathbb{R}^3$.

Sei die lineare Abbildung $\delta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch ${}_B(\delta(e_1)) = \frac{1}{6}\left(-4, \sqrt{2}, 3\sqrt{2}\right)^\intercal$, ${}_B(\delta(e_2)) = \frac{1}{3}\left(1, 2\sqrt{2}, 0\right)^\intercal$, ${}_B(\delta(e_3)) = \frac{1}{6}\left(4, -\sqrt{2}, 3\sqrt{2}\right)^\intercal$.

(a) Untersuchen Sie, ob B eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ ist.

(b) Bestimmen Sie ${}_E\mathrm{id}_B$, ${}_B\delta_E$ und ${}_B\delta_B$.

(c) Untersuchen Sie, ob δ eine orthogonale Abbildung ist.

(d) Untersuchen Sie, ob δ^2 eine orthogonale Abbildung ist.

Aufgabe H 35. *Schmidtsches Orthonormierungsverfahren*

Seien $v_1 = (1,0,-1,0)^\intercal$, $v_2 = (0,0,1,1)^\intercal$, $v_3 = (0,-1,1,0)^\intercal$ und $U = \mathrm{L}(v_1, v_2, v_3)$.

(a) Konstruieren Sie eine Orthonormalbasis $F\colon f_1, f_2, f_3$ von U derart, dass $\mathrm{L}(f_1) = \mathrm{L}(v_1)$, $\mathrm{L}(f_1, f_2) = \mathrm{L}(v_1, v_2)$ und $\mathrm{L}(f_1, f_2, f_3) = \mathrm{L}(v_1, v_2, v_3)$ ist.

(b) Konstruieren Sie eine Orthonormalbasis $G\colon g_1, g_2, g_3$ von U derart, dass $\mathrm{L}(g_1) = \mathrm{L}(v_1)$, $\mathrm{L}(g_1, g_2) = \mathrm{L}(v_1, v_3)$ und $\mathrm{L}(g_1, g_2, g_3) = \mathrm{L}(v_1, v_2, v_3)$ ist.

(c) Ist ${}_F\mathrm{id}_G$ orthogonal? Bestimmen Sie ${}_G\mathrm{id}_F$.

(d) Finden Sie ein $f_4 \in \mathbb{R}^4$ so, dass $F' : f_1, f_2, f_3, f_4$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^4$ ist.

Aufgabe H 36. *Spiegelungen*

Sei $A := \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 \\ -4 & 7 & 4 \\ 8 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis b_1, b_2 von $\left\{v \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, Av = v\right\}$. Bestimmen Sie ein $b_3 \in \mathbb{R}^3$ mit $|b_3| = 1$ und $Ab_3 = -b_3$. Ist $\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : v \mapsto Av$ eine Spiegelung?

(b) Sei $\beta_s : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : v \mapsto Av + sb_1 + b_3$ mit $s \in \mathbb{R}$. Für welche s ist β_s eine Spiegelung?

(c) Sei $\gamma : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : v \mapsto A^{-1}v + t$ mit $t \in \mathbb{R}^3$. Finden Sie t so, dass $\gamma((1,0,1)^\intercal) = (2,1,2)^\intercal$ ist. Ist γ dann eine Spiegelung?

Aufgabe H 37. *Isometrien*

Für $s \in \mathbb{R}$ sei $\beta_s : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : v \mapsto \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ 4 & s & 7 \\ -1 & -8 & -4 \end{pmatrix} v$.

Sei $\gamma : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die affine Abbildung, die sich aus einer Drehung um die x_3-Achse und einer nachfolgenden Translation in Richtung der x_3-Achse zusammensetzt und die $\gamma((0,1,0)^\intercal) = (1,0,1)^\intercal$ erfüllt.

(a) Bestimmen Sie s so, dass β_s eine eigentliche Isometrie ist.

(b) Bestimmen Sie die Drehachse und den Drehwinkel von β_s für s aus **(a)**.

(c) Bestimmen Sie den linearen Anteil und den Translationanteil von γ.

(d) Bestimmen Sie die Menge der Fixpunkte von $\gamma^{-1} \circ \beta_s \circ \gamma$ mit s aus **(a)**.

Aufgabe H 38. *Koordinatensysteme*

Sei $\mathbb{E}$ das Standardkoordinatensystem in $\mathbb{R}^3$. Betrachte die Koordinatentransformation

${}_\mathbb{E}\kappa_\mathbb{F} : v \mapsto \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ -6 & 4 & 8 \\ 3 & -4 & -3 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Sei $\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : v \mapsto \begin{pmatrix} 3 & -1/2 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \\ -2 & -1/2 & -1 \end{pmatrix} v$.

(a) Bestimmen Sie das affine Koordinatensystems $\mathbb{F}$. Bestimmen Sie ${}_\mathbb{F}\kappa_\mathbb{E}$.

(b) Geben Sie die Beschreibung ${}_\mathbb{F}\alpha_\mathbb{F}$ der Abbildung α bezüglich $\mathbb{F}$ an.

Aufgabe H 39. *Koordinatentransformationen*

Gegeben sind die Punkte $P = (-3,3,2)^\intercal$, $F_1 = (5,-2,0)^\intercal$, $F_2 = (-4,4,2)^\intercal$ und $F_3 = (2,0,1)^\intercal$ sowie die Punkte $Q = (1,-1,-2)^\intercal$, $G_1 = (1,0,-3)^\intercal$, $G_2 = (3,-2,0)^\intercal$ und $G_3 = (2,0,-3)^\intercal$.

(a) Zeigen Sie, dass durch die Punkte P und F_j bzw. die Punkte Q und G_j jeweils ein affines Koordinatensystem $\mathbb{F} = \left(P; \overrightarrow{PF_1}, \overrightarrow{PF_2}, \overrightarrow{PF_3}\right)$ bzw. $\mathbb{G} = \left(Q; \overrightarrow{QG_1}, \overrightarrow{QG_2}, \overrightarrow{QG_3}\right)$ gegeben ist. Sind dies auch kartesische Koordinatensysteme?

(b) Sei $\mathbb{E}$ das Standardkoordinatensystem. Berechnen Sie die Koordinatentransformationen ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$, ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$, ${}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{E}}$, ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{G}}$, ${}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{F}}$ und ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{G}}$.

Hinweis

Dieses Blatt bezieht sich auf zwei Wochen der Vorlesung. Entsprechend werden zwei dieser Hausübungen zur Korrektur ausgewählt.

L. Allerhand
A. Armiti, J. Hörner
A. Kerschl, M. Werth
C. Winkel, C. Zeiler

10. Gruppenübung zur Vorlesung
Höhere Mathematik 1

M. Künzer
M. Stroppel

Wintersemester 2014/15

Präsenzübungen

Aufgabe P 34. *Eigenräume und Vielfachheiten*

Gegeben seien

$$A := \begin{pmatrix} -3 & 7 & -3 \\ -4 & 7 & -2 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Welche der Vektoren v_1, v_2, v_3 sind Eigenvektoren? Geben Sie die zugehörigen Eigenwerte an.

(b) Berechnen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume von A.

(c) Welche algebraische und welche geometrische Vielfachheit besitzen die Eigenwerte jeweils?

(d) Ist die Matrix A diagonalisierbar?

Aufgabe P 35. *Symmetrische Matrizen und orthogonales Diagonalisieren*

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie $\chi_A(\lambda)$.

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte und zugehörigen Eigenräume von A.

(c) Gibt es eine invertierbare Matrix S so, dass $S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix ist? Bestimmen Sie gegebenenfalls eine solche Matrix S.

(d) Gibt es eine orthogonale Matrix T so, dass $T^{-1}AT$ eine Diagonalmatrix ist? Bestimmen Sie gegebenenfalls eine solche Matrix T und ihre Inverse.

Aufgabe P 36. *Eigenwerte und Eigenräume*

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 3\mathrm{i} & 1 \\ 1 & \mathrm{i} \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A.

(b) Bestimmen Sie die Eigenräume von A. Ist A diagonalisierbar?

Aufgabe P 37. *Eigenwerte und Eigenräume*

Finden Sie eine Matrix mit den Eigenräumen $V(2) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ und $V(3) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 40. *Diagonalisierbarkeit*

Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und zugehörigen Eigenräume dieser Matrizen.

(b) Geben Sie in den diagonalisierbaren Fällen jeweils eine invertierbare Matrix T an, die die entsprechende Matrix in Diagonalgestalt transformiert. Bestimmen Sie die dazugehörige Diagonalmatrix D.

(c) Ist B^3 diagonalisierbar? Geben Sie gegebenenfalls eine invertierbare Matrix T so an, dass $T^{-1}B^3T$ eine Diagonalmatrix ist. Bestimmen Sie die Eigenwerte von B^3.

(d) Bestimmen Sie einen Eigenvektor und einen Eigenwert von A^{-1}.

Aufgabe H 41. *Eigenwerte und Eigenvektoren*

Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 4 & 1 \\ 2 & -10 & 15 & 7 \\ 6 & -11 & 12 & 6 \\ -4 & -1 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A.

(b) Geben Sie die zugehörigen Eigenräume an.

(c) Geben sie zu allen Eigenwerten jeweils die algebraische und geometrische Vielfachheit an. Existiert eine Basis von $\mathbb{C}^4$ aus Eigenvektoren von A?

(d) Ist $A + \mathrm{E}_4$ diagonalisierbar?

Aufgabe H 42. *Symmetrische Matrizen*

Gesucht ist eine symmetrische reelle Matrix A mit den Eigenwerten 1 und 4 und den zugehörigen Eigenräumen

$$V(1) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right), \qquad V(4) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

(a) Bestimmen Sie die Matrix A, mitsamt einer orthogonalen Matrix S, für welche $S^{\mathsf{T}}AS$ eine Diagonalmatrix ist.

(b) Bestimmen Sie eine Orthogonalmatrix T mit $\det(T) = -\det(S)$, für welche $T^{\mathsf{T}}AT$ eine Diagonalmatrix ist.

(c) Berechnen Sie die Inverse von A, ohne den Gauß-Algorithmus anzuwenden.

(d) Berechnen Sie das charakteristische Polynom von $2A$.

L. Allerhand
A. Armiti, J. Hörner
A. Kerschl, M. Werth
C. Winkel, C. Zeiler

11. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 1

M. Künzer
M. Stroppel

Wintersemester 2014/15

Präsenzübungen

Aufgabe P 38. *Punktmengen als Quadrik*

Zeigen Sie, dass die folgenden Punktmengen jeweils Teil einer Quadrik sind, d.h. geben Sie jeweils eine quadratische Form $q(x)$, eine Linearform $f(x)$ und eine Konstante c so an, dass alle $x \in M_k$ die Gleichung $q(x) + 2f(x) + c = 0$ erfüllen.

(a) $M_1 := \left\{x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x_2 = 1/x_1\right\}$

(b) $M_2 := \left\{x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; (x_1, x_2) \text{ hat vom Punkt } (3,4) \text{ den Abstand } 2\right\}$

(c) $M_3 := \left\{x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x_1 = 3 + 4\cos(t), x_2 = 7 + 3\sin(t)\,, \quad t \in [0, 2\pi)\right\}$

Aufgabe P 39. *Hauptachsentransformation*

Bestimmen Sie für die folgenden Quadriken jeweils eine euklidische Normalform und ein Koordinatensystem, bezüglich dem die Quadrik diese Normalform hat. Skizzieren Sie das neue Koordinatensystem und die Quadrik im Ausgangskoordinatensystem.

(a) $\mathcal{Q}_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 + 2x_2 = 0\}$,

(b) $\mathcal{Q}_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 9x_1^2 + 24x_1x_2 + 16x_2^2 - 25 = 0\}$.

Aufgabe P 40. *Modell: Hyperbolisches Paraboloid (Sattelfläche)*

Die Sattelfläche ist die Quadrik $Q = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 - x_2^2 + x_3 = 0\}$; im Modell dargestellt ist der Ausschnitt $-1 \leqq x_1, x_2 \leqq 1$. Erörtern Sie folgende Fragestellungen:

(a) Wir betrachten die Paare aus schwarzen und blauen Linien. Sind diese aus Geradenstücken zusammengesetzt? Können Sie dies ohne Rechnung am Modell feststellen?

(b) Die schwarz ($x_3 = 0$) und blau ($|x_1 - x_2| = \frac{1}{4}$) markierten Teilmengen erfüllen die angegebenen zusätzlichen Gleichungen (zusätzlich zur Quadrikgleichung). Entscheiden Sie an Hand dieser Gleichungen, ob diese Schnitte aus Geraden zusammengesetzt sind. Parametrisieren Sie die auftretenden Geraden.

(c) Welche Gleichungen erfüllen die grünen Linien? Welche Form haben diese Linien?

(d) Welche der folgenden Konfigurationen können als Schnitt der Sattelfläche mit einer passenden Ebene entstehen?

- Ein Punkt,
- Parabel,
- leere Menge,
- schneidendes Geradenpaar,
- Ellipse,
- Hyperbel,
- genau eine Gerade,
- paralleles Geradenpaar.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 43. *Quadratische Form*

Gegeben sei die quadratische Form $q_{a,b}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon x \mapsto a(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2bx_1x_2$.

(a) Für welche Werte $a, b \in \mathbb{R}$ ist die quadratische Form $q_{a,b}$ positiv definit, negativ definit beziehungsweise indefinit?

(b) Sei nun $a = 1$. Wir betrachten die Quadrik $\mathcal{Q}_b : q_{1,b}(x) - 1 = 0$. Geben Sie die Matrixbeschreibung dieser Quadrik an.

(c) Geben Sie in Abhängigkeit von b die euklidische Normalform von $\mathcal{Q}_b$ an, sowie ein kartesisches Koordinatensystem, in welchem diese euklidische Normalform angenommen wird.

(d) Geben Sie in Abhängigkeit von b die affine Normalform von $\mathcal{Q}_b$ an.

Aufgabe H 44. *Quadrikgleichung erstellen*

Bestimmen Sie eine Gleichung der Quadrik, die die Gerade $\left\{x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_1 = x_2 = 0\right\}$, den Kreis $\left\{x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 = 0, x_3 = 0\right\}$ sowie die Punkte $(1, -1, -1)$ und $(1, 2, -1/2)$ enthält. Welche Gestalt hat diese Quadrik?

Aufgabe H 45. *Hauptachsentransformation*

Gegeben sei die Quadrik $\mathcal{Q}\colon 4x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_3 - 4x_2x_3 + 8x_1 - 4x_2 + 8x_3 = 0$.

(a) Geben Sie die Matrixdarstellung von $\mathcal{Q}$ an.

(b) Ist der quadratische Teil der Quadrikgleichung von $\mathcal{Q}$ positiv definit?

(c) Geben Sie die erweiterte Matrix von $\mathcal{Q}$ an. Welchen Typ hat die Quadrik $\mathcal{Q}$?

(d) Bringen Sie $\mathcal{Q}$ auf euklidische Normalform und geben Sie ein kartesisches Koordinatensystem an, bezüglich dessen $\mathcal{Q}$ diese Normalform besitzt.

Aufgabe H 46. *Modell: Hyperbolisches Paraboloid (Sattelfläche)*

Gegeben sind die Ebenen $E_t = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_3 = t\right\}$ für $t \in \mathbb{R}$ und die Quadrik Q, die Sie als Modell in den Übungen schon in der Hand hatten, mit der Gleichung $x_1^2 - x_2^2 + x_3 = 0$; im Modell dargestellt ist der Ausschnitt $-1 \leqq x_1, x_2 \leqq 1$. Sie finden das Modell auch unter:
www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/HM-Stroppel-Material/3D-Modelle/01

(a) Entscheiden Sie, für welche $t \in \mathbb{R}$ der Schnitt von Q und E_t die Form zweier sich schneidender Geraden, einer Ellipse bzw. einer Hyperbel hat.

(b) Das gelbe Linienpaar auf Q erfüllt die zusätzliche Gleichung $|x_1 + x_2| = \frac{1}{4}$. Ist es ein Geradenpaar? Parametrisieren Sie gegebenenfalls die beiden Geraden.

(c) Welche der folgenden farbigen Teilmengen von Q entsteht als Schnitt von Q mit einer der folgenden Ebenen? Zu welcher Farbe bzw. Ebene gibt es keine Entsprechung?

• Grün	• Schwarz	• $x_3 = 0$	• $x_3 = -0{,}6$	• $x_1 = 0{,}2$
• Gelb	• Magenta	• $x_3 = 0{,}5$	• $x_2 = -0{,}6$	• $x_2 - 2x_3 = 1/8$

L. Allerhand
A. Armiti, J. Hörner
A. Kerschl, M. Werth
C. Winkel, C. Zeiler

12. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 1

M. Künzer
M. Stroppel

Wintersemester 2014/15

Präsenzübungen

Aufgabe P 41. *Euklidische Normalform von Quadriken*

Gegeben sei die Quadrik

$$\mathcal{Q} := \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_3 + 1 = 0 \right\} .$$

(a) Bestimmen Sie den Typ von $\mathcal{Q}$.

(b) Bestimmen Sie eine euklidische Normalform und die Gestalt von $\mathcal{Q}$.

(c) Geben Sie ein Koordinatensystem an, in dem $\mathcal{Q}$ diese Normalform hat. Ist dieses Koordinatensystem eindeutig bestimmt? Geben Sie die zugehörigen Koordinatentransformationen an.

Aufgabe P 42. *Modell: Kegelschnitte*

Sei $\mathcal{Q}$ der Doppelkegel, der gegeben ist durch die Gleichung $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$; im Modell dargestellt ist der Bereich $-\frac{7}{2} \leqq x_1, x_2, x_3 \leqq \frac{7}{2}$. Außerdem sind dargestellt die Ebenen mit den Gleichungen $x_1 + 2\,x_3 = 3$ (gelb), $x_1 - x_3 = 1$ (blau) und $x_1 = 1$ (grün).

(a) Welche Schnittkurven liefert der Doppelkegel jeweils in den drei Ebenen?

(b) Welche der folgenden Konfigurationen entstehen als Schnitt des Doppelkegels mit einer passenden Ebene?

- ein Punkt,
- genau eine Gerade,
- ein Paar schneidender Geraden,
- ein Kreis,
- die leere Menge,
- ein Paar paralleler Geraden.

(c) Lösen Sie die Gleichung der gelben Ebene nach x_1 auf und setzen Sie diese in die Gleichung von $\mathcal{Q}$ ein. Bestimmen Sie die Gestalt der daraus entstandenen ebenen Quadrik. Finden Sie diese Quadrik im Modell wieder?

Aufgabe P 43. *Alte Klausuraufgabe zu Quadriken*

Bestimmen Sie die euklidische Normalform der Quadrik

$$\mathcal{Q} := \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 5x_1^2 - 8x_1x_2 + 5x_2^2 + 6x_1 - 12x_2 - 9 = 0 \right\}$$

und ermitteln Sie die zugehörige Koordinatentransformation. Bestimmen Sie anhand der Normalform die Gestalt der Quadrik und fertigen Sie eine Skizze der Quadrik in Standardkoordinaten an.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 47. *Ebene Quadriken*

Gegeben sei die Quadrik $\mathcal{Q} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + 10x_1x_2 + x_2^2 + 12x_1 + 12x_2 + 14 = 0\}$.

(a) Bestimmen Sie eine euklidische Normalform von $\mathcal{Q}$.

(b) Geben Sie das Koordinatensystem an, bezüglich dessen $\mathcal{Q}$ diese Normalform hat.

(c) Skizzieren Sie das Koordinatensystem und die Quadrik im Ausgangskoordinatensystem.

(d) Sei $\mathcal{Q}'$ die Vereinigungsmenge der beiden Asymptoten von $\mathcal{Q}$. Geben Sie im Ausgangskoordinatensystem eine Quadrikgleichung für $\mathcal{Q}'$ an.

Aufgabe H 48. *Quadrikgleichung transformieren*

Wir betrachten die Quadrik $\mathcal{Q} := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + 4x_2 + 3x_3 = 0\}$ und das kartesische Koordinatensystem $\mathbb{F} := ((0,0,0)^\intercal; (1,0,0)^\intercal, \frac{1}{5}(0,4,3)^\intercal, \frac{1}{5}(0,3,-4)^\intercal)$.

(a) Bestimmen Sie eine Gleichung von $\mathcal{Q}$ bezüglich $\mathbb{F}$.

(b) Bestimmen Sie die euklidische Normalform, die Gestalt und den Typ von $\mathcal{Q}$.

(c) Zeichnen Sie in das Ausgangskoordinatensystem die Schnitte von $\mathcal{Q}$ mit der Ebene $x_1 = 0$, der Ebene $x_2 = 0$ und der Ebene $x_3 = 0$.

Aufgabe H 49. *Quadriken im $\mathbb{R}^3$*

Gegeben sei die Quadrik $\mathcal{Q} := \left\{x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_1^2 + 4x_2^2 - 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 6x_1 - 12x_2 + 7 = 0\right\}$.

(a) Bestimmen Sie den Typ von $\mathcal{Q}$ mittels der erweiterten Matrix.

(b) Bestimmen Sie die euklidische Normalform und die Gestalt von $\mathcal{Q}$.

(c) Bestimmen Sie ein Koordinatensystem $\mathbb{F}$, bezüglich dessen $\mathcal{Q}$ diese Normalform hat.

(d) Bestimmen Sie ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$ und ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$.

Aufgabe H 50. *Modell: Kegelschnitte*

Sei $\mathcal{Q}$ der durch die Gleichung $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$ gegebene Doppelkegel; im Modell dargestellt ist der Bereich $-\frac{7}{2} \leqq x_1, x_2, x_3 \leqq \frac{7}{2}$. Außerdem sei in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$ eine Ebene E_α gegeben durch $x_1 + \alpha x_3 = 1$ im Standardkoordinatensystem.

(a) Welche Ebenen erhalten Sie für $\alpha \in \{-1, 0, 2\}$?
Wie hängen diese Ebenen mit dem Modell zusammen?

(b) Die Basis B_α: $b_1 := \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}(1,0,\alpha)^\intercal, b_2 := (0,1,0)^\intercal, b_3 := \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}(-\alpha,0,1)^\intercal$ von $\mathbb{R}^3$ liefert das kartesische Koordinatensystem $\mathbb{F}_\alpha = (\frac{1}{1+\alpha^2}(1,0,\alpha)^\intercal; B_\alpha)$. Geben Sie die Ebene E_α in Hessescher Normalform bezüglich des Koordinatensystems $\mathbb{F}_\alpha$ an. Prüfen Sie, ob $\mathbb{F}'_\alpha := (\frac{1}{1+\alpha^2}(1,0,\alpha)^\intercal; b_2, b_3)$ ein kartesisches Koordinatensystem von E_α ist.

(c) Geben Sie eine Quadrikgleichung für den Doppelkegel $\mathcal{Q}$ bezüglich des Koordinatensystems $\mathbb{F}_\alpha$ an.

(d) Geben Sie eine Gleichung für die Schnittquadrik $E_\alpha \cap \mathcal{Q}$ bezüglich $\mathbb{F}'_\alpha$ an. Bestimmen Sie die Gestalt dieser Schnittquadrik in Abhängigkeit von α.

www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/HM-Stroppel-Material/3D-Modelle/02

L. Allerhand
A. Armiti, J. Hörner
A. Kerschl, M. Werth
C. Winkel, C. Zeiler

13. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 1

M. Künzer
M. Stroppel

Wintersemester 2014/15

Präsenzübungen

Aufgabe P 44. *Monotonie und Beschränktheit*

Untersuchen Sie die Folgen auf Monotonie und Beschränktheit. Geben Sie, falls möglich, zwei verschiedene obere und zwei verschiedene untere Schranken an.

(a) $(7^{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ **(b)** $\left(7^{\frac{1}{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ **(c)** $\left(\sin(\frac{\pi n}{4})\right)_{n\in\mathbb{N}}$

(d) $\left(\sin(2\,\pi\,n-\frac{1}{n})\right)_{n\in\mathbb{N}}$ **(e)** $\left(\frac{1}{2}\,n^2-20n+1\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Aufgabe P 45. *Häufungspunkte*

Bestimmen Sie jeweils die Häufungspunkte der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(a) $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$

(b) $a_n = (-2)^n$

(c) $a_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\frac{2n+3}{3n}$

(d) $a_n = \begin{cases} 0 & \text{für } n \leqq 1000 \\ \frac{3n}{2n+1} & \text{für } 1000 < n \leqq 100000 \\ n^2 & \text{für } n > 100000 \end{cases}$

Aufgabe P 46. *Rekursive Folge, Monotonie und Beschränktheit*

Sei die Folge $(a_n)_{n\geqq 0}$ rekursiv durch $a_0 := 0$, $a_1 := 1$ und $a_{n+2} := \frac{a_{n+1}+a_n}{2}$ für $n \geqq 0$ definiert. Außerdem sei die Folge $(b_n)_{n\geqq 0}$ mit $b_n := \frac{2}{3}\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)$ gegeben.

(a) Zeichnen Sie a_0, a_1, ..., a_5 auf der Zahlengeraden ohne zu rechnen.

(b) Zeigen Sie per Induktion, dass $a_n = b_n$ für alle $n \geqq 0$ gilt.

(c) Untersuchen Sie die Folge $(a_n)_{n\geqq 0}$ auf Monotonie und Beschränktheit.

(d) Bestimmen Sie die Häufungspunkte der Folge $(a_n)_{n\geqq 0}$.

Aufgabe P 47. *Rekursive Folge*

Berechnen Sie die ersten fünf Folgenglieder der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die rekursiv definiert ist durch

$$a_1 := 1, \qquad a_{n+1} := a_n + 2n.$$

Zeigen Sie mit Induktion, dass sich in geschlossener Form

$$a_n = n^2 - n + 1$$

ergibt für $n \in \mathbb{N}$.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 51. *Häufungspunkte*

Bestimmen Sie jeweils die Häufungspunkte der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(a) $a_n = \begin{cases} \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) & \text{für } n \text{ gerade} \\ \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases}$

(b) $a_n = \frac{4n^2+3}{3n^2-9}(-1)^{n+1}$

(c) $a_n = n^{((-1)^{n+1})}$

(d) $a_n = n^{-1} + \sqrt{1 - \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{n\pi}{3}\right)\right)^2}$

Aufgabe H 52. *Rekursive Folge, Monotonie und Beschränktheit*

Sei $q \in \mathbb{R}$. Gegeben sei die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die rekursiv durch $a_1 := 2$ und $a_{n+1} := qa_n + 3$ für $n \in \mathbb{N}$ definiert ist.

(a) Geben Sie a_n durch einen Ausdruck an, der nicht mehr rekursiv von anderen Folgengliedern abhängt.

(b) Für welche $q \in \mathbb{R}$ ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton?

(c) Für welche $q \in \mathbb{R}$ ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt?

(d) Bestimmen Sie die Häufungspunkte der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für $q \in \{-1, -1/2, 1\}$.

Aufgabe H 53. *Monotonie und Beschränktheit*

Untersuchen Sie die Folgen auf Monotonie und Beschränktheit. Geben Sie dabei jeweils zwei obere beziehungsweise zwei untere Schranken an, falls solche existieren.

(a) $\left(\dfrac{2n^2+2n+7}{n^2+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

(b) $\left(n \cdot 2^{1-n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

(c) $\left(2 + \left(-\frac{1}{4}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$

(d) $\left(3\,\pi\,n^2 + 2n\,\cos(\pi n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Aufgabe H 54. *Rekursive Folge, Definition Grenzwert*

Für die Folge $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ gelte $a_1 = \frac{1}{2}$ und $a_n = (a_{n-1}^{-1} + 2)^{-1}$ für $n \geqq 2$.

(a) Geben Sie eine geschlossene Formel für a_n an und zeigen Sie diese mit Induktion.

(b) Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Finden Sie dazu ein n_ε so, dass $|a_n| < \varepsilon$ ist für $n > n_\varepsilon$.

(c) Bestimmen Sie $\lim_{n\to\infty} a_n$ und begründen Sie Ihre Antwort mittels **(b)**.

(d) Für welche $q \in \mathbb{R}$ ist $(a_n + q(n+1)^{-1})_{n\in\mathbb{N}}$ streng monoton fallend?

L. Allerhand
A. Armiti, J. Hörner
A. Kerschl, M. Werth
C. Winkel, C. Zeiler

14. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 1

M. Künzer
M. Stroppel

Wintersemester 2014/15

Präsenzübungen

Aufgabe P 48. *Werte von Reihen*

Berechnen Sie die Werte der folgenden Reihen.

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{7}{13}\right)^n$ **(b)** $\displaystyle\sum_{n=5}^{\infty} 5^{1-n}$ **(c)** $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{5n}{n!}$

Aufgabe P 49. *Rechenregeln für Grenzwerte*

Bestimmen Sie den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

indem Sie die Folge der Kehrwerte betrachten. Welchen Wert hat

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \quad ?$$

Aufgabe P 50. *Produktfolge*

Finden Sie jeweils Beispiele von Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen so, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht konvergiert, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen Null konvergiert und die Produktfolge $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$

(a) unbeschränkt ist,

(b) gegen ein $c \in \mathbb{R}$ konvergiert,

(c) beschränkt ist, aber nicht konvergiert.

Aufgabe P 51. *Teleskopsumme*

Geben sie die Glieder der rekursiv definierten Folge

$$a_1 = \frac{1}{2}, \qquad a_k = \frac{k-1}{k+1}\, a_{k-1}, \quad k = 2, 3 \ldots$$

in nicht rekursiver Darstellung an und bestimmen Sie

$$\sum_{k=1}^{n} a_k, \quad \text{sowie} \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k .$$

Hausübungen (Die Abgaben zu diesen Aufgaben werden in der ersten Übung des kommenden Semesters eingesammelt und zählen zum HM2-Schein.):

Aufgabe H 55. *Matrixpotenzen*

Die drei Firmen Weiß, Sauber und Rein führen ein völlig neuartiges Waschmittel am Markt ein. Zu Beginn besitzen Weiß 50 %, Sauber 30 % und Rein 20 % Marktanteil. Während des ersten Jahres verliert Weiß jeweils 20 % seiner Kunden an Sauber und Rein, Sauber gibt 10 % an Weiß und 50 % an Rein ab, und Rein verliert 10 % an Weiß und 30 % an Sauber. Während der folgenden Jahre verändern sich die Marktanteile stets nach demselben Schema.

(a) Bestimmen Sie eine Matrix A mit der sich die Veränderung der Marktanteile als lineare Abbildung schreiben läßt, d.h. wenn m_k ein Vektor ist, dessen Komponenten den Marktanteilen nach k Jahren entsprechen, so gilt $m_{k+1} = Am_k$.

(b) Die Matrix A hat den Eigenwert 1. Bestimmen Sie den zugehörigen Eigenvektor v_1. Geben Sie eine zu A konjugierte Diagonalmatrix an. Geben Sie eine zu A^n konjugierte Diagonalmatrix an für $n \geqq 1$.

(c) Begründen Sie mit Hilfe der Ergebnisse aus **(b)**, warum der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} A^n m_0$ ein Vielfaches von v_1 ist.

(d) Geben Sie die Grenzverteilung der Marktanteile an. Welche Firma wird auf lange Sicht zum Marktführer?

Aufgabe H 56. *Rekursive Folgen*

Die rekursiv definierten Folgen

$$a_0 = 4\sqrt{3}\,, \; b_0 = 6\,, \quad a_{n+1} = \tfrac{2a_n b_n}{a_n+b_n}\,, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1}b_n}$$

entsprechen den Umfängen von regelmäßigen $6 \cdot 2^n$-Ecken, die den Einheitskreis als Inkreis oder Umkreis haben. Zeigen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Beziehung

$$b_n < b_{n+1} < a_{n+1} < a_n$$

gilt und begründen Sie damit, dass beide Folgen konvergieren. Begründen Sie geometrisch, gegen welchen Grenzwert diese Folgen streben.

Aufgabe H 57. *Konvergenz von Reihen*

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{5+n}{5n}\right)^n$ **(b)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+2n+2}}$ **(c)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{33(n!)^3}{(3n)!}$ **(d)** $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^2-\sin(n)}$

Aufgabe H 58. *Werte von Reihen*

Bestimmen Sie die Werte folgender Reihen.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+2}}{2\cdot 5^n}$ **(b)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{n^k}{(n+1)^k}$ für $n \in \mathbb{N}$ **(c)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(n+1)(n+3)}$

Hinweis: Zeigen Sie für **(c)** zunächst, dass $\dfrac{2}{(n+1)(n+3)} = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+3}$ gilt.