A. Armiti, M. Fetzer
J. Magiera
T. Pfrommer, C. Zeiler

1. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 1

M. Künzer
M. Stroppel

Wintersemester 2015/16

Präsenzübungen

Aufgabe P 1. *Elementares Rechnen*

Berechnen Sie ohne Taschenrechner:

(a) $\dfrac{3}{\frac{5}{2}} \cdot \dfrac{25}{6}$ **(b)** $\dbinom{7}{3} + \dbinom{7}{4}$

(c) $\sqrt{17^2 + 34^2}$ **(d)** $101^3 - 100^3$

Aufgabe P 2. *Funktionsgraphen*

Skizzieren Sie die Graphen der folgenden Funktionen. Geben Sie die Wertebereiche dieser Funktionen an.

(a) $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \colon x \mapsto x^2 - x$

(b) $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \colon x \mapsto \mathrm{e}^x + 1$

(c) $h \colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{R} \colon x \mapsto 3\sin(2x)$

Aufgabe P 3. *Summen*

Welche der folgenden Ausdrücke liefern für $n \in \mathbb{N}$ und für alle reellen Zahlen a_j stets dasselbe Resultat?

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_{2k+1}$ **(b)** $\displaystyle\sum_{k=4}^{n+4} a_{2k-7}$

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n+1} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_{2k}$ **(d)** $\displaystyle\sum_{l=1}^{2n+1} \frac{\left(1-(-1)^l\right)}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2l\pi\right) a_l$

Aufgabe P 4. *Vollständige Induktion*

Zeigen Sie mit vollständiger Induktion:

Es ist $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (3k-1) = \frac{n(3n+1)}{2}$ für $n \geqq 1$.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 1. *Vollständige Induktion*

Beweisen Sie folgende Aussagen mit vollständiger Induktion.

(a) Es ist $4^n - 1$ durch 3 teilbar für $n \geqq 0$.

(b) Es ist $\sum_{k=1}^{n} k^3 = n^2(n+1)^2/4$ für $n \geqq 1$.

(c) Es ist $\sum_{j=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{j}} \geqq \sqrt{n}$ für $n \geqq 1$.

(d) Es ist $n! > 2^n$ für $n \geqq 4$.

Aufgabe H 2. *Binomischer Lehrsatz, Binomialkoeffizienten*

Zeigen Sie folgende Aussagen.

(a) Es ist $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 4^k = 5^n$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

(b) Es ist $\sum_{k=0}^{n} \cos(\frac{\pi}{4} + k\pi)\binom{n}{k} = 0$ für $n \in \mathbb{N}$.

(c) Die Gleichung $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$ hat genau eine Lösung x aus $\mathbb{R}$.

(d) Es ist $\sum_{j=0}^{k} \binom{j+1}{j} = \binom{k+2}{k}$ für $k \in \mathbb{N}_0$.

Aufgabe H 3. *Fakultät*

(a) Finden Sie Parameter $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $an^2 + bn + c = n!$ für $n \in \{2, 3, 4\}$.

(b) Sei mit den in **(a)** gefundenen Parametern $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto ax^2 + bx + c$.
Bestimmen Sie das kleinste $n \in \mathbb{N}_0$ mit $f(n) < n!$.

Aufgabe H 4. *Funktionsgraphen*

(a) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto |x^2 - 1|$. Skizzieren Sie den Graphen von f. Bestimmen Sie den Wertebereich von f. Bestimmen Sie $\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, f(x) = \frac{1}{2}\right\}$.

(b) Sei $g\colon [-1, 0] \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \ln(2\mathrm{e}^{-x^2})$. Skizzieren Sie den Graphen von g. Bestimmen Sie den Wertebereich von g. Bestimmen Sie $\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, g(x) = 0\right\}$.

(c) Sei $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto 2 - \mathrm{e}^{2x}$. Skizzieren Sie den Graphen von h. Bestimmen Sie den Wertebereich von h. Bestimmen Sie $\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, h(x) \geqq 0\right\}$.

Präsenzübungen

Aufgabe P 5. *Abbildungen*

Geben Sie an, welche Eigenschaft eine Abbildung erfüllen muss, um nicht injektiv zu sein. Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität.

(a) Es seien A die Menge der (anwesenden) Teilnehmer Ihrer Übungsgruppe, die zwischen 1994 und 1998 geboren sind. Sei $B := \{1994, 1995, 1996, 1997, 1998\}$.

Sei $f\colon A \to B$ die Abbildung, die jedem Teilnehmer sein Geburtsjahr zuordnet.

(b) $g\colon \mathbb{R} \to [-1, 1]\colon x \mapsto \sin(x)$

Aufgabe P 6. *Teilmengen*

(a) Skizzieren Sie die folgenden Mengen.

$$M_1 := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + (y + 1)^2 \leqq 1\right\}$$
$$M_2 := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, (x - 1)^2 + y^2 > 2\right\}$$

(b) Skizzieren Sie $M_1 \cap M_2$ und $M_1 \smallsetminus M_2$.

Aufgabe P 7. *Teilmengen*

Bestimmen Sie die folgenden Mengen und skizzieren Sie diese.

(a) $\left\{x \in \mathbb{R}^+ \,\middle|\, x + \frac{1}{x} > 2\right\}$

(b) $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, |x + y| \leqq 1\right\}$

(c) $\left\{z \in \mathbb{C} \,\middle|\, z\mathrm{i} \in \mathbb{R}\right\}$

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 5. *Abbildungen*

(a) Sei $f_1\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+\colon x \mapsto x^2+1$. Ist f_1 injektiv? Ist f_1 surjektiv? Ist f_1 bijektiv?

(b) Sei $f_2\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon (x,y) \mapsto (x+y, x-y)$. Ist f_2 bijektiv?

(c) Konstruieren Sie eine Abbildung von $[0,1]$ nach $[0,1]$, die injektiv, aber nicht surjektiv ist.

(d) Konstruieren Sie eine Abbildung von $[0,1]$ nach $[0,1]$, die surjektiv, aber nicht injektiv ist.

Aufgabe H 6. *Teilmengen*

(a) Skizzieren Sie die folgenden Mengen.

$$\begin{aligned} M_1 &:= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, |x| < 2\right\} \\ M_2 &:= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, |xy| \leqq 1\right\} \\ M_3 &:= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, (x-1)^2 + (y+1)^2 \leqq 4\right\} \end{aligned}$$

Skizzieren Sie $M_2 \cap M_3$.

(b) Skizzieren Sie die Menge

$$M_4 := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 2(x-2)^2 + (y-1)^2 \leqq 1 \;\vee\; (x-2)^2 + 2(y+1)^2 \leqq 4\right\}.$$

Aufgabe H 7. *Ungleichungen*

Bestimmen Sie jeweils die Menge der $x \in \mathbb{R}$, die die Ungleichung erfüllen.

(a) $2|x-2| < x+1$

(b) $(x+1)(x-2)(x+3)(x-4)(x+5) > 0$

(c) $|x-3||x-1| < (x+1)|x-5|$

(d) $|x^2+x-2| < x+3$

Aufgabe H 8. *Teilmengen im Komplexen*

Bestimmen Sie folgende Mengen und skizzieren Sie diese.

(a) $\left\{z \in \mathbb{C} \,\middle|\, z(1+\mathrm{i}) \in \mathbb{R}\right\}$

(b) $\left\{z \in \mathbb{C} \,\middle|\, z^2 = \mathrm{i}\right\}$

(c) $\left\{z \in \mathbb{C} \,\middle|\, 2\,\mathrm{Im}(z^2) = \mathrm{Im}(z)^2\right\}$

(d) $\left\{(1-\mathrm{i})^k \,\middle|\, k \in \{0,1,2,3\}\right\}$

A. Armiti, M. Fetzer
J. Magiera
T. Pfrommer, C. Zeiler

3. Gruppenübung zur Vorlesung
Höhere Mathematik 1

M. Künzer
M. Stroppel

Wintersemester 2015/16

Präsenzübungen

Aufgabe P 8. *Rechnen mit komplexen Zahlen*

Geben Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $a + b\mathrm{i}$ an mit $a, b \in \mathbb{R}$.

$$z_1 = (1+\mathrm{i})^2 \qquad z_2 = \frac{2+5\mathrm{i}}{3+\mathrm{i}} \qquad z_3 = \operatorname{Im}\left(\frac{1}{3+7\mathrm{i}}\right)$$

Aufgabe P 9. *Mengen in* $\mathbb{C}$

Skizzieren Sie die folgenden Mengen in der komplexen Zahlenebene.

(a) $A = \left\{z \in \mathbb{C} \smallsetminus \{0\} \,\middle|\, \frac{\pi}{6} \leqq \arg(z) \leqq \frac{\pi}{3}\right\}$

(b) $B = \left\{z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z| \leqq 3\right\}$

(c) $C = \left\{z \in \mathbb{C} \smallsetminus \{0\} \,\middle|\, \operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) |z|^2 > 1\right\}$

(d) $D = \mathbb{C} \smallsetminus (B \cup C)$

(e) $E = (\mathbb{C} \smallsetminus B) \cap (\mathbb{C} \smallsetminus C)$

Aufgabe P 10. *Komplexe Wurzeln*

(a) Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung $z^3 = -1$ in Polarkoordinaten und in der Form $a + b\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Skizzieren Sie die Lösungen in der komplexen Ebene.

(b) Bestimmen Sie die Menge $\left\{z \in \mathbb{C} \,\middle|\, z^6 - 64\mathrm{i} = 0\right\}$. Skizzieren Sie diese in der komplexen Ebene.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 9. *Nullstellen von Polynomen*

Berechnen Sie alle Nullstellen in $\mathbb{C}$ der folgenden Polynome.

(a) $p_1(x) = x^2 + 1$

(b) $p_2(x) = x^3 - 13x + 12$

(c) $p_3(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 4\lambda + 8$

(d) $p_4(z) = z^4 + 2z^2 + 2$

Aufgabe H 10. *Komplexe Zahlen*

Bestimmen Sie jeweils Real- und Imaginärteil, Betrag, komplex Konjugiertes und Kehrwert der folgenden komplexen Zahlen.

(a) $z_1 = \dfrac{2+\mathrm{i}}{4-3\mathrm{i}}$

(b) $z_2 = \dfrac{3}{2}\mathrm{i} + \dfrac{1-2\mathrm{i}}{(1+\mathrm{i})^2}$

(c) $z_3 = \overline{\left(\dfrac{5}{2+\mathrm{i}}\right)}$

(d) $z_4 = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}(-1+\mathrm{i})\right)^8$

Aufgabe H 11. *Mengen in $\mathbb{C}$*

Gegeben sind folgende Mengen.

$$
\begin{aligned}
M_1 &= \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z - 2\mathrm{i}| \geqq 2 \right\} \\
M_2 &= \left\{ z \in \mathbb{C} \smallsetminus \{0\} \;\middle|\; \operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) > 1 \right\} \\
M_3 &= \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; z^8 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} \right\} \\
M_4 &= \left\{ 1 + \mathrm{i}t \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}
\end{aligned}
$$

(a) Zeichnen Sie die Mengen M_1, M_2 und M_3.

(b) Sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}\colon z \mapsto z^2$. Zeichnen Sie die Mengen M_4, $f(M_4)$ und $f(f(M_4))$.

Aufgabe H 12. *Polarkoordinaten*

(a) Stellen Sie die folgenden komplexen Zahlen in Polarkoordinaten dar.

- $z = 1 + \mathrm{i}$
- $z = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$

(b) Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke in Polarkoordinaten.

- $(1+\mathrm{i})^k$ für $k \in \mathbb{Z}$
- $(1-\mathrm{i}\sqrt{3})^k$ für $k \in \mathbb{Z}$

Zeichnen Sie die Ergebnisse jeweils für $-2 \leqq k \leqq 2$ in die komplexe Zahlenebene ein.

A. Armiti, M. Fetzer
J. Magiera
T. Pfrommer, C. Zeiler

4. Gruppenübung zur Vorlesung
Höhere Mathematik 1

M. Künzer
M. Stroppel

Wintersemester 2015/16

Präsenzübungen

Aufgabe P 11. *Unterverktorraum, Basis, Erzeugendensystem*
Es seien die folgenden Vektoren des $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ gegeben:

$$v_1 = (1,1)\,,\ v_2 = (0,2)\,,\ v_3 = (5,4)\,,\ w_1 = (1,-1,1)\,,\ w_2 = (1,3,2)\,.$$

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind:

(a) Die Vektoren v_1 und v_2 sind linear unabhängig.

(b) Die Vektoren v_1 und v_2 bilden eine Basis von $\mathbb{R}^2$.

(c) Es ist $\mathrm{L}(v_2, v_3) = \left\{v_2 + sv_3 \,\middle|\, s \in \mathbb{R}\right\}$.

(d) Es ist $\mathrm{L}(v_1, v_2, v_3) = \mathbb{R}^2$.

(e) Die Vektoren v_1, v_2 und v_3 sind ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^2$.

(f) Die Vektoren v_1, v_2 und v_3 bilden eine Basis von $\mathbb{R}^2$.

(g) Es ist $\langle w_1 \,|\, w_2 \rangle = 1$.

(h) Es ist $\mathrm{L}(w_1, w_2) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 5x + y - 4z = 0\right\}$.

Aufgabe P 12. *Ebenen*
Die Punkte $A = (2,3,0)$, $B = (4,0,-2)$ und $C = (1,1,-3)$ liegen in einer Ebene E. Liegen die Punkte $P = (-7,2,-5)$ und $Q = (-2,2,-4)$ auch in dieser Ebene E?

Aufgabe P 13. *Geraden und Ebenen*
Gegeben seien die folgenden Punkte in $\mathbb{R}^3$:

$$A = (1,-1,1)\,,\ B = (2,0,1)\,,\ C = (0,-1,2)\,.$$

(a) Bestimmen Sie den Winkel, den die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ einschließen.

(b) Geben Sie die Ebene, die A, B und C enthält, in Parameterdarstellung an.

(c) Finden Sie den Punkt D auf der Geraden durch B und C so, dass $\overrightarrow{AD}$ auf $\overrightarrow{BC}$ senkrecht steht.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 13. *Lineare Unabhängigkeit, Basis, Erzeugendensystem*

Gegeben seien die Vektoren $v_1 = (3,0,3,6)$, $v_2 = (2,-1,1,2)$, $v_3 = (-1,1,0,0)$, $v_4 = (0,1,2,\pi)$ und $v_5 = (2,1,4,4+\pi)$ aus $\mathbb{R}^4$.
Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

(a) Die Vektoren v_1 und v_2 sind linear unabhängig.

(b) Die Vektoren v_1 und v_2 bilden eine Basis von $\mathrm{L}(v_1, v_2, v_3)$

(c) Die Vektoren v_1, v_2, v_4, v_5 bilden eine Basis von $\mathbb{R}^4$.

(d) Die Vektoren v_2, v_3, v_4, v_5 sind linear unabhängig.

(e) Die Vektoren v_1, v_2, v_4 bilden ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^3$.

(f) Der Vektorraum $\mathrm{L}(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ hat eine Basis aus 3 Vektoren.

Aufgabe H 14. *Ebenen*

(a) Liegen die beiden folgenden Geraden in einer Ebene?

$$g = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad h = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(b) Gegeben seien die Punkte: $A = (2,3,2)$, $B = (3,0,-2)$, $C = (1,4,-3)$ und $D = (-2,9,-9)$. Gibt es eine Ebene, die das Viereck $ABCD$ enthält?

Aufgabe H 15. *Funktionenräume*

Gegeben seien die folgenden Funktionen aus dem Vektorraum $\mathcal{C}^0([0,2\pi])$ (siehe **2.6.3**):

$f_1\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}\colon x \mapsto 1$ $\qquad f_2\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \cos(x)$

$f_3\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \sin(x)$ $\qquad f_4\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \cos(2x)$

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

(a) Die Funktionen f_1, f_2, f_3 und f_4 sind linear unabhängig.

(b) Sei $g\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \big(\cos(x) - 2\big)\cos(2x) + \big(3 + \sin(2x)\big)\sin(x)$.
Dann ist $\mathrm{L}(f_1, f_2, f_3, f_4) = \mathrm{L}(f_1, f_2, f_3, f_4, g)$.

(c) Es ist $\langle f_2 \,|\, f_3 \rangle = \langle f_1 \,|\, f_1 \rangle$.

Aufgabe H 16. *Geraden und Ebenen*

Gegeben sind die Punkte $P_1 = (1,2,1)$, $P_2 = (1,2,-3)$, $P_3 = (2,0,1)$, $P_4 = (5,2,2)$ und $P_{5,\alpha} = (7,\alpha,1)$, wobei $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Berechnen Sie eine Parameterdarstellung der Ebene E_1, die die Punkte P_1, P_2 und P_3 beinhaltet.

(b) Für welche α liegt der Punkt $P_{5,\alpha}$ auf der Ebene E_1?

(c) Bestimmen Sie α so, dass die Gerade g durch die Punkte P_4 und $P_{5,\alpha}$ parallel zu der Ebene E_1 verläuft.

A. Armiti, M. Fetzer
J. Magiera, T. Pfrommer
G. Santin, C. Zeiler

5. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 1

M. Künzer
M. Stroppel

Wintersemester 2015/16

Präsenzübungen

Aufgabe P 14. *Darstellungen von Ebenen*

Gegeben sind die Punkte $P = (1, \frac{1}{2}, 2)$, $\quad Q = (-1, 2, 1)$, $\quad$ und $\quad R = (3, -1, -6)$.

(a) Bestimmen Sie das Kreuzprodukt der beiden Vektoren, die P mit Q und P mit R verbinden.

(b) Bestimmen Sie die Hesse-Normalform der Ebene E durch die Punkte P, Q und R.

(c) Geben Sie die Ebene durch den Punkt $S = (-2, 4, 7)$ parallel zu E sowohl in Hesse-Normalform als auch in Parameterform an.

Aufgabe P 15. *Matrizenaddition und -multiplikation*

Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} & 2 \\ 3 & 4-\mathrm{i} \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 2 & \mathrm{i} & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie an, welche der Matrizenprodukte und Summen

$$A + B^{\mathsf{T}}, \quad B + D, \quad C + D, \quad AB, \quad BA, \quad CF, \quad FC, \quad F^{\mathsf{T}}C, \quad F^2$$

existieren und berechnen Sie diese.

Aufgabe P 16. *Kreuzprodukt*

(a) Seien $a = (3,\ 0,\ -4)$, $\ b = (2,\ 2,\ -1)$, $\ c = (0,\ 1,\ 0) \in \mathbb{R}^3$.
Berechnen Sie $\ a \times b, \quad a \times c, \quad b \times c, \quad a \times (2b + 10c - 17a), \quad \langle a \times b \,|\, c \rangle$.

(b) Entscheiden Sie, ob die folgenden Rechenregeln für alle Vektoren $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ und alle reellen Zahlen $s, t \in \mathbb{R}$ korrekt oder falsch sind.
$a \times (sb + tc) = s(a \times b) + t(a \times c) \qquad a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$

(c) Seien a, b, c linear abhängige Vektoren aus $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Seien a, b linear unabhängig. Warum ist $a \times b$ ungleich 0 und orthogonal zu c?

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 17. *Darstellungen von Ebenen*

Es seien der Punkt $P = (2,0,1)$ und die Gerade $g = (2,0,-1) + \mathbb{R}\,(0,1,1)$ in $\mathbb{R}^3$ gegeben.

(a) Bestimmen Sie die Hesse-Normalform der Ebene durch P und g.

(b) Bestimmen Sie die Hesse-Normalform der Ebene durch P senkrecht zu g.

(c) Bestimmen Sie $Q \in g$ mit $\overrightarrow{PQ}$ senkrecht zu g.

(d) Bestimmen Sie die Hesse-Normalform der Ebene durch g mit maximalem Abstand zu P.

Aufgabe H 18. *Flächeninhalt eines Dreiecks*

Seien die Punkte $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $C_\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \alpha \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^3$ gegeben, wobei $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Berechnen Sie $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC_\alpha}$.

(b) Bestimmen Sie den Flächeninhalt F_α des Dreiecks mit den Ecken A, B und C_α. Bestimmen Sie $\beta \in \mathbb{R}$ mit F_β minimal.

(c) Bestimmen Sie die Gerade g durch C_β, die die Gerade durch A und B in einem Punkt schneidet und die senkrecht auf $\overrightarrow{AB}$ steht.

(d) Bestimmen Sie den Winkel zwischen g und $\overrightarrow{C_0C_1}$.

Aufgabe H 19. *Matrizenmultiplikation*

(a) Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie $\left\{ X \in \mathbb{R}^{2\times 2} \,\middle|\, AX = \mathrm{E}_2 \right\}$.

(b) Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Sei $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie $\left\{ X \in \mathbb{R}^{2\times 3} \,\middle|\, XA = B \right\}$.

(c) Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie $\left\{ X \in \mathbb{C}^{2\times 2} \,\middle|\, XA = AX \right\}$.

(d) Bestimmen Sie $\left\{ X \in \mathbb{C}^{2\times 2} \,\middle|\, XX^\intercal = 0 \right\}$.

Aufgabe H 20. *Matrizenmultiplikation*

Seien

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3\sqrt{5}}{10} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3\sqrt{5}}{10} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{5}}{10} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{5}}{10} & \frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{3}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie

(a) $Q^\intercal Q$, **(b)** $Q^\intercal A$, **(c)** $Q^\intercal A S$, **(d)** $SQ^\intercal ASQ^\intercal A - SS^\intercal A^\intercal QQ^\intercal A$.

Hinweis: Für Matrizen M und N, für die MN definiert ist, gilt $(MN)^\intercal = N^\intercal M^\intercal$.

A. Armiti, M. Fetzer
J. Magiera, T. Pfrommer
G. Santin, C. Zeiler

6. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 1

M. Künzer
M. Stroppel

Wintersemester 2015/16

Präsenzübungen

Aufgabe P 17. *Lineare Gleichungssysteme*

(a) Wir betrachten das folgende lineare Gleichungssystem.

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 2x_3 &= 6 \end{aligned}$$

Stellen Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix auf. Formen Sie diese in die in Satz 3.7.2 angegebene Form um. Verwenden Sie dies zur Ermittlung der Lösungsmenge.

(b) Wir betrachten das folgende lineare Gleichungssystem in Matrixform.

$$\left[\begin{array}{cccc||c} 2 & 4 & 3 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

Bringen Sie dieses Gleichungssystem in die in Satz 3.7.2 angegebene Form. Geben Sie eine spezielle Lösung an. Geben Sie eine Basis des Lösungsraums des zugehörigen homogenen linearen Gleichungssystems an. Verwenden Sie diese Ergebnisse zur Ermittlung der Lösungsmenge.

Aufgabe P 18. *Lineares Gleichungssystem*

Entscheiden Sie, ob die Mengen

$$M_1 := (1,1,1) + \mathbb{R}\,(2,0,-1) \quad \text{und} \quad M_2 := (0,1,1) + \mathbb{R}\,(2,1,5)$$

in der Lösungsmenge des Gleichungsystems

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ -4x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

liegen. Bestimmen Sie eine Basis des Lösungsraums.

Aufgabe P 19. *Matrixmultiplikation*

Seien $X, Y \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Entscheiden Sie, ob die folgenden Regeln zutreffend sind.
Falls nicht, geben Sie ein Gegenbeispiel an.

(a) $XY = 0 \iff YX = 0$

(b) $(X+Y)^2 = X^2 + 2\,X\,Y + Y^2$

(c) $XX^\intercal = 0 \Rightarrow X = 0$

(d) $X\,Y = X^2 \Rightarrow X = Y$ oder $X = 0$

(e) Wenn $XA = AX$ ist für alle $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, dann ist $X \in \mathrm{L}\,(\mathrm{E}_2)$.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 21. *Lineares Gleichungssystem*

Sei U der Lösungsraum des folgenden linearen Gleichungssystems.

$$\begin{aligned} 4x_1 + 5x_2 - x_3 - x_4 &= 0 \\ 4x_1 + 4x_2 - 2x_3 \quad &= 0 \end{aligned}$$

(a) Entscheiden Sie, ob die Mengen $M_1 := (1,-1,1,0)+\mathbb{R}\,(2,0,0,0)$, $M_2 := \mathbb{R}\,(2,1,6,7)$, $M_3 := \{x \in \mathbb{R}^4 | \, x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0\}$, $M_4 := \mathbb{R}\,(1,2,6,8)$ in U liegen.

(b) Bestimmen Sie eine Basis von U.

Aufgabe H 22. *Lineares Gleichungssystem*

Wir betrachten das folgende reelle lineare Gleichungssystem.

$$S : \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcrcr} -2x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & - & 8x_4 & - & 4x_5 & = & 0 \\ & & x_2 & - & x_3 & - & 3x_4 & - & 2x_5 & = & 2 \\ 2x_1 & - & 5x_2 & + & 5x_3 & + & 17x_4 & + & 10x_5 & = & -6 \\ -2x_1 & + & 3x_2 & - & 3x_3 & - & 11x_4 & - & 6x_5 & = & 2 \\ -3x_1 & + & 4x_2 & - & 4x_3 & - & 15x_4 & - & 8x_5 & = & 2 \end{array} \right.$$

(a) Erstellen Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix für S. Bringen Sie diese mittels Algorithmus 3.7.3 in die in Satz 3.7.2 angegebene Form.

(b) Bestimmen Sie eine spezielle Lösung von S. Bestimmen Sie eine Basis des Lösungsraums des zugehörigen homogenen linearen Gleichungssystems S_H.

(c) Geben Sie die Lösungsmenge von S an. Verwenden Sie dazu **(b)**.

(d) Ersetzen Sie in der letzten Gleichung 2 durch -2 und bestimmen Sie nun die Lösungsmenge.

Aufgabe H 23. *Lineares Gleichungssystem*

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ ein Parameter. Sei $A_\alpha := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Sei $b := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie $\left\{ x \in \mathbb{R}^6 \,\middle|\, A_\alpha x = 0 \right\}$ in Abhängigkeit von α.

(b) Bestimmen Sie $\left\{ x \in \mathbb{R}^6 \,\middle|\, A_\alpha x = b \right\}$ in Abhängigkeit von α.

Aufgabe H 24. *Schnitt von Untervektorräumen*

Seien

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; v_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \; v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; v_5 = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \; v_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; v_7 = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Sei $A \in \mathbb{R}^{4\times 7}$ die Matrix mit Spalten v_j für $1 \leqq j \leqq 7$.
Bestimmen Sie eine Basis des Lösungsraums $\left\{ x \in \mathbb{R}^7 \,\middle|\, Ax = 0 \right\}$.

(b) Bestimmen Sie $\mathrm{L}\,(v_1, v_2, v_3, v_4) \cap \mathrm{L}\,(v_5, v_6, v_7)$ unter Verwendung von **(a)**.

A. Armiti, M. Fetzer
J. Magiera, T. Pfrommer
G. Santin, C. Zeiler

7. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 1

M. Künzer
M. Stroppel

Präsenzübungen

Aufgabe P 20. *Lineare Abbildung*

Gegeben sei die lineare Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\varphi\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}, \qquad \varphi\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}.$$

(a) Sei $E_2 : \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie ${}_{E_2}\varphi_{E_2}$.

(b) Bestimmen Sie $\varphi\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}$.

(c) Seien $B : \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ und $C : \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$. Bestimmen Sie ${}_{C}\varphi_{B}$.

(d) Ist φ bijektiv?

Aufgabe P 21. *Rang, Injektivität, Surjektivität*

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie den Rang von A.

(b) Untersuchen Sie die Abbildung

$$f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3 \colon x \mapsto Ax$$

auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität.

(c) Führen Sie **(a)** und **(b)** auch für $A^\intercal$ anstelle von A durch. Was stellen Sie fest?

Aufgabe P 22. *Polynome und Matrixbeschreibungen*

Wir erinnern an den reellen Vektorraum

$$\operatorname{Pol}_3 \mathbb{R} = \left\{ p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,\middle|\, p(x) = \textstyle\sum_{j=0}^{3} a_j x^j, \;\; a_j \in \mathbb{R} \right\} .$$

(a) Prüfen Sie, dass $B : 1,\ x,\ 3x^2 - 1,\ 5x^3 - 3x$ eine Basis von $\operatorname{Pol}_3 \mathbb{R}$ ist.

(b) Es sei $d\colon \operatorname{Pol}_3 \mathbb{R} \to \operatorname{Pol}_3 \mathbb{R} \colon p(x) \mapsto p(1) + p'(x)$. Geben Sie die Matrix ${}_{B}d_{B}$ an.

(c) Bestimmen Sie $d \circ d$. Berechnen Sie ${}_{B}(d \circ d)_{B}$. Berechnen Sie $({}_{B}d_{B})^2$.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 25. *Rang, Matrixbeschreibung*

Sei $A := \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & -1 \end{pmatrix}$. Sei $A' := \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Wir betrachten die Basis $B : \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix}$ von $\mathbb{C}^2$.

(a) Bestimmen Sie $\operatorname{Rg} A$.

(b) Bestimmen Sie eine Basis von $\left\{ S \in \mathbb{C}^{2\times 2} \,\middle|\, AS = SA' \right\}$

(c) Sei $f\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2 : x \mapsto Ax$. Ist $\operatorname{Kern}(f) = \operatorname{Bild}(f)$?

(d) Bestimmen Sie ${}_Bf_B$.

Aufgabe H 26. *Matrixbeschreibung einer linearen Abbildung*

Sei die lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben mit

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wir betrachten den Untervektorraum $U := \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_1 - x_2 - x_3 = 0 \right\} \subseteqq \mathbb{R}^3$.

(a) Geben Sie die Matrixdarstellung ${}_Ef_E$ von f bezüglich der Standardbasis E an.

(b) Bestimmen Sie zwei verschiedene Basen B und C von U.

(c) Sei $g\colon U \to U : x \mapsto f(x)$ die Einschränkung von f auf U.
Bestimmen Sie die Matrizen ${}_Bg_B$ und ${}_Bg_C$.

(d) Ist f bijektiv? Ist g bijektiv?

Aufgabe H 27. *Rang einer Matrix*

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ ein Parameter. Sei

$$A_\alpha := \begin{pmatrix} \alpha - 1 & 1 & -1 & 0 \\ \alpha - 2 & \alpha - 1 & -\alpha + 2 & -\alpha + 2 \\ -3 + \alpha & 0 & 1 & 3 - \alpha \\ 1 & 1 & -1 & \alpha - 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie den Rang von A_α in Abhängigkeit von α.

(b) Für welche α ist $\varphi_\alpha : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4 : x \mapsto (A_\alpha)^2 x$ injektiv?

(c) Bestimmen Sie den Rang von $(A_\alpha)^2$ in Abhängigkeit von α.

Aufgabe H 28. *Matrixbeschreibung einer linearen Abbildung*

Sei $f\colon \operatorname{Pol}_4 \mathbb{R} \to \operatorname{Pol}_4 \mathbb{R} : p(x) \mapsto p'(x) + x^2 p(1)$.

(a) Geben Sie eine Basis B von $\operatorname{Pol}_4 \mathbb{R}$ an. Bestimmen Sie ${}_Bf_B$.

(b) Bestimmen Sie eine Basis des Kerns von f.

(c) Ist f injektiv? Ist f surjektiv?

(d) Sei $V := \operatorname{L}(x, x^2 + 1)$. Wählen Sie eine Basis C von V und eine Basis D von $U := f(V)$. Sei $g\colon V \to U : p(x) \mapsto p'(x) + x^2 p(1)$. Bestimmen Sie ${}_Dg_C$.

A. Armiti, M. Fetzer
J. Magiera, T. Pfrommer
G. Santin, C. Zeiler

8. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 1

M. Künzer
M. Stroppel

Präsenzübungen

Aufgabe P 23. *Determinante*

Seien

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 3 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 2 & 5 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

und $v = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}^\intercal$, $w = \begin{pmatrix} 6 & -10 & -2 \end{pmatrix}^\intercal$.

(a) Bestimmen Sie $\det(A)$, $\det(B)$.

(b) Bestimmen Sie $\det(AB^\intercal)$, $\det(A + B^\intercal)$ und $\det(2B)$.

(c) Ersetzen Sie die letzte Spalte von A durch v und bestimmen Sie $\det(A)$.

(d) Ersetzen Sie die letzte Spalte von B durch w und bestimmen Sie $\det(B)$.

Aufgabe P 24. *Basiswechsel*

Gegeben ist der Vektorraum $\mathbb{R}^3$ mit der Basis $B\colon (1, 2, -1)^\intercal, (1, 1, 0)^\intercal, (2, 0, -1)^\intercal$ sowie mit der Standardbasis E.

(a) Bestimmen Sie ${}_E\mathrm{id}_B$.

(b) Sei $v \in \mathbb{R}^3$ mit ${}_Bv = (1, 1, 2)^\intercal$. Bestimmen Sie ${}_Ev$ unter Verwendung von ${}_E\mathrm{id}_B$.

(c) Bestimmen Sie ${}_B\mathrm{id}_E$.

(d) Bestimmen Sie den bereits bekannten Vektor ${}_Bv$, nur nun unter Verwendung von ${}_Ev$ und ${}_B\mathrm{id}_E$.

Aufgabe P 25. *Inverse*

Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 1 \\ -1 & 2+2\mathrm{i} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Inverse von A, falls sie existiert.

(b) Bestimmen Sie, falls möglich, eine Rechts- sowie eine Linksinverse von B. Ist B invertierbar?

(c) Zeigen Sie, dass C linksinvertierbar ist, aber nicht rechtsinvertierbar.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 29. *Determinante*

Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ Parameter. Sei $A_\alpha := \begin{pmatrix} 0 & (\alpha-1)^2 & (\alpha-1)(\alpha-2) \\ 4 & 0 & 2 \\ 2 & (\alpha-1)(\alpha-2) & 3+\alpha(\alpha-3) \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie $\det(A_\alpha)$ in Abhängigkeit von α.

(b) Bestimmen Sie $\operatorname{Rg}(A_\alpha)$ in Abhängigkeit von α.

(c) Bestimmen Sie $\det(A_\alpha A_\beta A_\alpha^\intercal)$ in Abhängigkeit von α und β.

(d) Bestimmen Sie $A_0^{-2} := (A_0^{-1})^2 = (A_0^2)^{-1}$.

Aufgabe H 30. *Determinante*

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ ein Parameter. Seien

$$A_\alpha := \begin{pmatrix} 3 & \alpha & -7 & 2 \\ 2 & 1 & \alpha & 4 \\ 1 & 3 & 4 & -3 \\ -1 & -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_\alpha := \begin{pmatrix} 3 & \alpha & -7 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & \alpha & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & -3 & 3 \\ -1 & -2 & -3 & 1 & 4 \\ 5 & \alpha+2 & \alpha-6 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie $\det(A_\alpha)$.

(b) Bestimmen Sie $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} B_\alpha$. Bestimmen Sie $\det(B_\alpha)$ und $\det(\alpha B_\alpha)$.

Aufgabe H 31. *Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen*

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ ein Parameter. Seien $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ und $B_\alpha := \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie die Menge aller Rechtsinversen zu A.

(b) Verwenden Sie eine Rechtsinverse aus **(a)**, um ein $x \in \mathbb{R}^3$ mit $Ax = (1,2)^\intercal$ zu finden.

(c) Für welche Werte des Parameters α ist B_α invertierbar?

(d) Seien $y := (2,2,1)^\intercal$, $b := (-1,3,1)^\intercal$. Ist $B_1 y = b$? Bestimmen Sie $\left\{ x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, B_1 x = b \right\}$.

Aufgabe H 32. *Basiswechsel*

Seien $b_1 = (1,0,1)^\intercal$, $b_2 = (1,2,0)^\intercal$, $b_3 = (0,1,1)^\intercal$, $c_1 = (1,1,1)^\intercal$, $c_2 = (1,2,3)^\intercal$, $c_3 = (2,1,1)^\intercal$. Wir betrachten $B : b_1, b_2, b_3$ und $C : c_1, c_2, c_3$. Sei E die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$.

(a) Verwenden Sie Determinanten, um zu überprüfen, dass B und C Basen von $\mathbb{R}^3$ sind.

(b) Bestimmen Sie ${}_E\mathrm{id}_B$, ${}_B\mathrm{id}_E$, ${}_E\mathrm{id}_C$ und ${}_C\mathrm{id}_E$.

(c) Sei die lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch $\varphi(b_j) = j c_j$ für $j \in \{1,2,3\}$. Bestimmen Sie ${}_C\varphi_B$ und ${}_E\varphi_E$.

(d) Sei ${}_Bv = (1,1,1)^\intercal$. Bestimmen Sie ${}_C\varphi(v)$, v und $\varphi(v)$.

A. Armiti, M. Fetzer
J. Magiera, T. Pfrommer
G. Santin, C. Zeiler

9. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 1

M. Künzer
M. Stroppel

Wintersemester 2015/16

Präsenzübungen

Aufgabe P 26. *Schmidtsches Orthonormierungsverfahren*

Gegeben seien die Vektoren $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}^4$ mit

$$a_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad a_2 = \begin{pmatrix} -7 \\ -19 \\ 9 \\ -11 \end{pmatrix}, \qquad a_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad a_4 = \begin{pmatrix} 5 \\ -31 \\ 33 \\ -11 \end{pmatrix}.$$

Sei $V = \mathrm{L}\,(a_1, a_2, a_3, a_4)$.
Bestimmen Sie mit Hilfe des Verfahrens von Schmidt eine Orthonormalbasis von V.

Aufgabe P 27. *Affine Abbildungen*

(a) Bestimmen Sie eine Matrix A und einen Vektor t so, dass die affine Abbildung $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon x \mapsto Ax + t$ die Spiegelung an der Geraden $(1,0)^\intercal + \mathrm{L}\left((0,1)^\intercal\right)$ beschreibt. Ist f eine Isometrie? Ist f eine eigentliche Isometrie?

(b) Bestimmen Sie eine Matrix B und einen Vektor r so, dass die affine Abbildung $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon x \mapsto Bx + r$ die Spiegelung an der Geraden $(2,0)^\intercal + \mathrm{L}\left((0,1)^\intercal\right)$ beschreibt.

(c) Berechnen Sie jeweils den linearen Anteil und den Translationsanteil der Umkehrabbildung f^{-1} und des Kompositums $f \circ g$.

Aufgabe P 28. *Orthogonale Matrizen und orthogonale Abbildungen*

Gegeben seien die Matrizen

$$A_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad A_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix},$$

sowie die Abbildungen

$$\alpha_1\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon v \mapsto A_1 v\,, \quad \alpha_2\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon v \mapsto A_2 v \quad .$$

Sei $\beta := \alpha_1 \circ \alpha_2$. Sei $\gamma := \alpha_2 \circ \alpha_1$.

(a) Sind A_1 und A_2 orthogonal? Bestimmen Sie die Determinanten von A_1 und von A_2.

(b) Sei E die Standardbasis. Bestimmen Sie ${}_E\beta_E$ und ${}_E\gamma_E$. Sind β und γ orthogonal?

(c) Bestimmen Sie $\left\{x \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \varphi(x) = x\right\}$ für $\varphi \in \{\alpha_1\,, \alpha_2\,, \beta\,, \gamma\}$.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 33. *Determinante, Cofaktor-Matrix*

Seien $A := \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$, $B := \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie die Cofaktor-Matrizen $\tilde{A}$ von A und $\tilde{B}$ von B.

(b) Bestimmen Sie $\det(A)$ und $\det(B)$.

(c) Bestimmen Sie B^{-1} unter Verwendung von **(a)** und **(b)**.

(d) Bestimmen Sie $A\tilde{A}^{\intercal}$ und $\det(\tilde{A}^{\intercal})$.

Aufgabe H 34. *Determinante, Block-Dreiecksmatrizen*

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ ein Parameter. Sei $A_\alpha := \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & \alpha+4 & 1 & \alpha+2 \\ -1 & 1 & 7 & -7 \\ 1 & \alpha+4 & -7 & \alpha+10 \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie $\det(A_\alpha)$ in Abhängigkeit von α.

(b) Bestimmen Sie die Determinanten der Blockmatrizen $\left(\begin{array}{c|c} A_\alpha & A_\alpha^{\intercal} \\ \hline 0 & A_\alpha \end{array}\right)$, $\left(\begin{array}{c|c} A_\alpha & A_\alpha \\ \hline 3A_\alpha & A_\alpha \end{array}\right) \in \mathbb{R}^{8\times 8}$.

(c) Ist $\det\left(\begin{array}{c|c} B_1 & B_2 \\ \hline B_3 & B_4 \end{array}\right) = \det(B_1)\det(B_4) - \det(B_2)\det(B_3)$ für $B_j \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ für $1 \leqq j \leqq 4$?

Aufgabe H 35. *Orthogonale Matrizen*

Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ Parameter. Gegeben seien die folgenden Matrizen.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \frac{1}{75}\begin{pmatrix} 3 & 12 \\ -4 & 9 \end{pmatrix},$$
$$B_{\alpha,\beta} = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ -\alpha & \beta \end{pmatrix} \quad C_{\alpha,\beta} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & \beta \end{pmatrix}$$

(a) Welche der Matrizen A_1, A_2, A_3 sind orthogonal?

(b) Für welche Paare (α, β) ist $B_{\alpha,\beta}$ orthogonal? Für welche ist $C_{\alpha,\beta}$ orthogonal?

Aufgabe H 36. *Drehung*

Seien $b_1 := (1\ \ 1\ \ 0)^{\intercal}$, $b_2 := (-1\ \ 1\ \ 1)^{\intercal}$, $b_3 := (0\ \ 0\ \ 3)^{\intercal}$ die Vektoren der Basis B, seien $c_1 := (1\ \ 1\ \ 0)^{\intercal}$, $c_2 := (-1\ \ 1\ \ -1)^{\intercal}$, $c_3 := (-2\ \ 2\ \ 1)^{\intercal}$ die Vektoren der Basis C, sei E die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$. Sei $\gamma\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ linear mit $\gamma(b_j) = c_j$ für $j \in \{1,2,3\}$.

(a) Bestimmen Sie ${}_E\mathrm{id}_C$, ${}_C\gamma_B$, ${}_B\mathrm{id}_E$ und ${}_E\gamma_E$.

(b) Ist γ eine Drehung? Bestimmen Sie gegebenenfalls die Drehachse und den Cosinus des Drehwinkels von γ.

(c) Ist ${}_B\gamma_B$ eine Orthogonalmatrix?

Aufgabe H 37. *Charakteristische Polynome*

Seien $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ und $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

(a) Geben Sie die charakteristischen Polynome von A, A^2, B und C an und berechnen Sie deren Nullstellen.

(b) Subtrahieren Sie die erste Zeile von der zweiten Zeile in A und ersetzen Sie die zweite Zeile durch das Ergebnis. Berechnen Sie das charakteristische Polynom der resultierenden Matrix und geben Sie die Nullstellen des charakteristischen Polynoms an.

Aufgabe H 38. *Affine Abbildungen*

(a) Bestimmen Sie eine affine Abbildung $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

(b) Bestimmen Sie das Bild der Geraden $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ unter f.

(c) Bestimmen Sie die inverse Abbildung zu f.

(d) Existiert eine affine Abbildung $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$g\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad g\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad g\begin{pmatrix} 9 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \end{pmatrix}?$$

Wie kann die Antwort allein mit der Geradentreue begründet werden?

Aufgabe H 39. *Schmidtsches Orthonormierungsverfahren*

Seien $v_1 = (-1, 0, 1, 0)^\intercal$, $v_2 = (1, 1, 0, 0)^\intercal$, $v_3 = (1, 0, 0, -1)^\intercal$ und $U = \mathrm{L}(v_1, v_2, v_3)$.

(a) Konstruieren Sie eine Orthonormalbasis $F\colon f_1, f_2, f_3$ von U derart, dass $\mathrm{L}(f_1) = \mathrm{L}(v_1)$, $\mathrm{L}(f_1, f_2) = \mathrm{L}(v_1, v_2)$ und $\mathrm{L}(f_1, f_2, f_3) = \mathrm{L}(v_1, v_2, v_3)$ ist.

(b) Konstruieren Sie eine Orthonormalbasis $G\colon g_1, g_2, g_3$ von U derart, dass $\mathrm{L}(g_1) = \mathrm{L}(v_1)$, $\mathrm{L}(g_1, g_2) = \mathrm{L}(v_1, v_3)$ und $\mathrm{L}(g_1, g_2, g_3) = \mathrm{L}(v_1, v_2, v_3)$ ist.

(c) Ist ${}_F\mathrm{id}_G$ orthogonal? Bestimmen Sie ${}_G\mathrm{id}_F$.

(d) Finden Sie ein $f_4 \in \mathbb{R}^4$ so, dass $F' : f_1, f_2, f_3, f_4$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^4$ ist.

Aufgabe H 40. *Spiegelung, Drehung*

Sei $\alpha\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die Spiegelung an $U := \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^\intercal, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^\intercal\right)$. Sei $\beta\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die Spiegelung an $V := \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}^\intercal, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^\intercal\right)$. Sei E die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$.

(a) Bestimmen Sie ${}_E\alpha_E$ und $\det({}_E\alpha_E)$.

(b) Bestimmen Sie ${}_E\beta_E$ und $\det({}_E\beta_E)$.

(c) Ist $\beta \circ \alpha$ eine Drehung? Bestimmen Sie gegebenenfalls die Drehachse.

(d) Bestimmen Sie $U \cap V$.

A. Armiti, M. Fetzer
J. Magiera, T. Pfrommer
G. Santin, C. Zeiler

10. Gruppenübung zur Vorlesung
Höhere Mathematik 1

M. Künzer
M. Stroppel

Wintersemester 2015/16

Präsenzübungen

Aufgabe P 29. *Eigenwerte und Eigenräume*

Berechnen Sie die charakteristischen Polynome, die Eigenwerte und die Eigenräume der folgenden Matrizen.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Geben sie die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten der Eigenwerte an.

Aufgabe P 30. *Eigenwerte und Eigenräume*

Finden Sie eine Matrix, die die Eigenwerte $1, 2$ und 3 hat und zu diesen die Eigenräume

$$V(1) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right), \qquad V(2) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right), \qquad V(3) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Bestimmen Sie das charakteristische Polynom dieser Matrix.

Aufgabe P 31. *Charakteristisches Polynom*

Gegeben ist eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$, die die paarweise unterschiedlichen Eigenwerte a_1, a_2, a_3 mit jeweils zugehörigen Eigenvektoren v_1, v_2, v_3 hat.

(a) Geben Sie das charakteristische Polynom $\chi_A(\lambda)$ an in Abhängigkeit von a_1, a_2, a_3.

(b) Sind v_1, v_2 und v_3 linear unabhängig?

(c) Ist jeder Eigenvektor von A auch Eigenvektor von A^2?
Ist jeder Eigenvektor von A^2 auch Eigenvektor von A?

(d) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix A^2 sowie das zugehörige charakteristische Polynom $\chi_{A^2}(\lambda)$ in Abhängigkeit von a_1, a_2, a_3.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 41. *Parameterabhängige Eigenwerte und Eigenräume*

Gegeben sei die von den Parametern $a, b \in \mathbb{R}^+$ abhängige Matrix $A = \begin{pmatrix} -a & ab & a+b \\ 0 & b & ab \\ 0 & ab & b \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A in Abhängigkeit von a und b.

(b) Bestimmen Sie die Eigenräume der Matrix A in Abhängigkeit von a und b.

(c) Bestimmen Sie alle $v \in \mathbb{C}^3$ mit $Av = \mathrm{i}v$.

(d) Sei $\alpha\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3\colon x \mapsto Ax$. Für welche Paare (a, b) ist $\dim \operatorname{Kern}(\alpha) \geqq 1$?

Aufgabe H 42. *Diagonalisierung und Matrixpotenzen*

Seien $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & 2 \\ -1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie die charakteristischen Polynome $\chi_A(\lambda)$ und $\chi_B(\lambda)$.

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenräume von A und von B.

(c) Geben Sie eine invertierbare Matrix S so an, dass $S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix ist. Bestimmen Sie $(S^{-1}AS)^4$ und A^4.

(d) Geben Sie eine invertierbare Matrix T so an, dass $T^{-1}BT$ eine Diagonalmatrix ist. Bestimmen Sie für $k \geqq 1$ die Matrizen $(T^{-1}BT)^k$, $T^{-1}B^kT$ und B^k.

Aufgabe H 43. *Test auf Eigenvektor*

Seien $A = \begin{pmatrix} 12 & 4 & 0 & -9 \\ 2 & 10 & 0 & -3 \\ 2 & 2 & 1 & -6 \\ 2 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(a) Untersuchen Sie, welche der Vektoren v_1, v_2, v_3 Eigenvektoren von A sind.

(b) Geben Sie die Eigenwerte von A und jeweils einen zugehörigen Eigenvektor an.

(c) Welche algebraische und geometrische Vielfachheit besitzen die Eigenwerte jeweils?

Aufgabe H 44. *Eigenvektoren*

Für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ definieren wir $M(A) := \begin{pmatrix} \mathbf{0} & A \\ E_n & \mathbf{0} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$.

(a) Zeigen Sie: Ist v ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda \neq 0$, dann existieren Zahlen $\mu^+ \neq \mu^-$ so, dass die Vektoren $w^+ = \begin{pmatrix} \mu^+ v \\ v \end{pmatrix}$ und $w^- = \begin{pmatrix} \mu^- v \\ v \end{pmatrix}$ Eigenvektoren von $M(A)$ sind. Bestimmen Sie die zugehörigen Eigenwerte.

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenräume von $M(A)$ für $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

A. Armiti, M. Fetzer,
L. Margolis, J. Magiera,
T. Pfrommer,
G. Santin, C. Zeiler

11. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 1

M. Künzer
M. Stroppel

Wintersemester 2015/16

Präsenzübungen

Aufgabe P 32. *Eigenwerte, Diagonalisierbarkeit*

Gegeben sei die vom Parameter $x \in \mathbb{R}$ abhängige Matrix $A_x = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A_x.
Bestimmen Sie ihre jeweilige algebraische und geometrische Vielfachheit.

(b) Für welche Werte von x ist A_x diagonalisierbar?

(c) Welche der Matrizen A_{-1}, A_3 sind orthogonal diagonalisierbar?

Aufgabe P 33. *Quadratische Formen*

Gegeben seien die quadratischen Formen

$$q_1 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \colon x \mapsto 2x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2$$
$$q_2 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \colon x \mapsto -x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_1x_2$$
$$q_3 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \colon x \mapsto x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_1x_2 \ .$$

Bestimmen Sie zu jeder der Formen eine Matrixdarstellung und entscheiden Sie, ob die Form positiv definit, negativ definit oder indefinit ist.

Aufgabe P 34. *Schnitte von Quadriken und Ebenen*

Gegeben sei die Quadrik $K = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}$, die vom reellen Parameter $d \in \mathbb{R}$ abhängige Ebene $E_d = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = d\}$ sowie die Ebene $F = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = 2\}$.

(a) Was für ein geometrisches Objekt ist die Quadrik K? Finden Sie ein solches Objekt im Übungsraum?

(b) Bestimmen Sie, welches geometrische Objekt sich als Schnittmenge von K und F ergibt.

(c) Welche Arten von geometrischen Objekten können sich als Schnittmenge von K mit E_d ergeben?

(d) Überlegen Sie sich anschaulich, welche weiteren geometrischen Objekte als Schnittmengen von K mit anderen Ebenen entstehen können. Sie brauchen dies nicht zu berechnen.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 45. *Orthogonales Diagonalisieren*

Es sei $A_x = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ eine vom reellen Parameter x abhängige Matrix.

(a) Berechnen Sie $A_x(1,0,-1,0)^\top$ und $A_x(1,0,0,-1)^\top$. Welche Abschätzung für die algebraische Vielfachheit welchen Eigenwerts von A_x folgt hieraus?

(b) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom und die Eigenwerte von A_x.

(c) Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix S so, dass $S^\intercal A_{-1} S$ eine Diagonalmatrix ist.

(d) Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix T so, dass $T^\intercal A_1 T$ eine Diagonalmatrix ist.

Aufgabe H 46. *Affine Abbildungen, Koordinatensysteme*

In $\mathbb{R}^2$ seien die Punkte $P = (1,2)^\intercal$, $Q = (3,-1)^\intercal$, $R = (5,3)^\intercal$ und $S = (4,1)^\intercal$ gegeben. Sei $\alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine affine Abbildung, für welche $\alpha(P) = R$, $\alpha(Q) = S$ und $\alpha(R) = P$ ist. Sei $\mathbb{F} = (P; \overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PQ})$. Sei $\mathbb{E}$ das Standardkoordinatensystem.

(a) Zeichnen Sie P, Q, R und S in $\mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie ${}_{\mathbb{F}}P$, ${}_{\mathbb{F}}Q$, ${}_{\mathbb{F}}R$ und ${}_{\mathbb{F}}S$.

(b) Bestimmen Sie A und t mit ${}_{\mathbb{F}}\alpha(x) = A\,{}_{\mathbb{F}}x + t$ für $x \in \mathbb{R}^2$. Ist α bijektiv?

(c) Bestimmen Sie ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$ und ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$.

(d) Bestimmen Sie mittels **(b)** und **(c)** B und u mit ${}_{\mathbb{E}}\alpha(x) = B\,{}_{\mathbb{E}}x + u$ für $x \in \mathbb{R}^2$. Ist α eine Isometrie?

Aufgabe H 47. *Quadratische Formen*

Seien a und b reelle Parameter.
Sei $q_{a,b}\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}\colon x \mapsto a(x_1^2 + x_2^2 + bx_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + bx_4^2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_4 - 2bx_2x_4) - 4x_1x_3$.

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom der zu $q_{a,b}$ gehörigen Matrix.

(b) Bestimmen Sie die Menge P der Paare (a,b), für welche $q_{a,b}$ positiv definit ist.

(c) Bestimmen Sie die Menge I der Paare (a,b), für welche $q_{a,b}$ indefinit ist.

(d) Skizzieren Sie die Teilmengen P und I von $\mathbb{R}^2$.

Aufgabe H 48. *Eigenwerte, Diagonalisierbarkeit*

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei $A_\alpha = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ \alpha & -5 \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume von A_4.

(b) Berechnen Sie für jedes α die Eigenwerte von A_α, sowie deren jeweilige algebraische und geometrische Vielfachheit. Für welche α ist A_α diagonalisierbar?

(c) Bestimmen Sie ein α, für welches A_α orthogonal diagonalisierbar ist.

(d) Für welche α ist $(3+6\mathrm{i},\, -5\mathrm{i})^\intercal$ ein Eigenvektor von A_α?
Für welche α ist $(3-6\mathrm{i},\, 5\mathrm{i})^\intercal$ ein Eigenvektor von A_α?

A. Armiti, M. Fetzer,
L. Margolis, J. Magiera,
T. Pfrommer,
G. Santin, C. Zeiler

12. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 1

M. Künzer
M. Stroppel

Wintersemester 2015/16

Präsenzübungen

Aufgabe P 35. *Ebene Quadriken*

Im $\mathbb{R}^2$ seien bezüglich des Standardkoordinatensystems $\mathbb{E}$ folgende Quadriken gegeben.

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_1 &= \{(x_1,x_2)^\intercal \in \mathbb{R}^2 \mid 2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 + 4x_2 - 10 = 0\} \\ \mathcal{Q}_2 &= \{(x_1,x_2)^\intercal \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 - 4\sqrt{2}x_2 + 2 = 0\} \end{aligned}$$

Führen Sie folgende Schritte für $j = 1$ und $j = 2$ durch.
Geben Sie von $\mathcal{Q}_j$ die Matrixbeschreibung an. Bestimmen Sie die euklidische Normalform und die Gestalt von $\mathcal{Q}_j$. Geben Sie ein kartesisches Koordinatensystem $\mathbb{F}_j$ an, in welchem diese euklidische Normalform angenommen wird. Geben Sie ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}_j}$ und ${}_{\mathbb{F}_j}\kappa_{\mathbb{E}}$ an. Skizzieren Sie $\mathcal{Q}_j$ in das Standardkoordinatensystem.

Aufgabe P 36. *Modell: Kegelschnitte*

Sei $\mathcal{Q}$ der Doppelkegel, der gegeben ist durch die Gleichung $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$; im Modell dargestellt ist der Bereich $-\frac{7}{2} \leqq x_1, x_2, x_3 \leqq \frac{7}{2}$. Außerdem sind dargestellt die Ebenen mit den Gleichungen $x_1 + 2\,x_3 = 3$ (gelb), $x_1 - x_3 = 1$ (blau) und $x_1 = 1$ (grün).

(a) Welche Schnittkurven liefert der Doppelkegel jeweils in den drei Ebenen?

(b) Welche der folgenden Konfigurationen entstehen als Schnitt des Doppelkegels mit einer passenden Ebene?

- ein Punkt
- genau eine Gerade
- ein Paar schneidender Geraden
- ein Kreis
- die leere Menge
- ein Paar paralleler Geraden

Aufgabe P 37. *Modell: Hyperbolisches Paraboloid (Sattelfläche)*

Die Sattelfläche ist die Quadrik $Q = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 - x_2^2 + x_3 = 0\}$; im Modell dargestellt ist der Ausschnitt $-1 \leqq x_1, x_2 \leqq 1$.

(a) Wir betrachten die Paare aus schwarzen und blauen Linien. Sind diese aus Geradenstücken zusammengesetzt? Können Sie dies ohne Rechnung am Modell feststellen?

(b) Welche Gleichungen erfüllen die grünen Linien? Welche Form haben diese Linien?

(c) Die schwarz ($x_3 = 0$) und gelb ($|x_1 + x_2| = \frac{1}{4}$) markierten Teilmengen erfüllen die angegebenen zusätzlichen Gleichungen (zusätzlich zur Quadrikgleichung). Entscheiden Sie anhand dieser Gleichungen, ob diese Schnitte aus Geraden zusammengesetzt sind. Parametrisieren Sie die auftretenden Geraden.

(d) Welche der folgenden Konfigurationen können als Schnitt der Sattelfläche mit einer passenden Ebene entstehen?

- ein Punkt
- Parabel
- leere Menge
- schneidendes Geradenpaar
- Ellipse
- Hyperbel
- genau eine Gerade
- paralleles Geradenpaar

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 49. *Räumliche Quadrik*

Bestimmen Sie die euklidische Normalform und die Gestalt der Quadrik

$$\mathcal{Q} = \left\{ (x_1, x_2, x_3)^\intercal \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; -3x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 - 8x_1x_2 + 4x_1x_3 - 12x_2x_3 - 6x_1 + 24x_2 - 18 = 0 \right\}.$$

Geben Sie ein kartesisches Koordinatensystem $\mathbb{F}$ an, in dem $\mathcal{Q}$ diese euklidische Normalform annimmt. Geben Sie ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$ und ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$ an.

Aufgabe H 50. *Modell: Hyperbolisches Paraboloid (Sattelfläche)*

Gegeben sind die Ebenen $E_t = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_3 = t \right\}$ für $t \in \mathbb{R}$ und die Quadrik Q, die Sie als Modell in den Übungen schon in der Hand hatten, mit der Gleichung $x_1^2 - x_2^2 + x_3 = 0$; im Modell dargestellt ist der Ausschnitt $-1 \leqq x_1, x_2 \leqq 1$. Sie finden das Modell auch unter:

www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/HM-Stroppel-Material/3D-Modelle/01

(a) Entscheiden Sie, für welche $t \in \mathbb{R}$ der Schnitt von Q und E_t die Form zweier sich schneidender Geraden, einer Ellipse bzw. einer Hyperbel hat.

(b) Das blaue Linienpaar auf Q erfüllt die zusätzliche Gleichung $|x_1 - x_2| = \frac{1}{4}$. Ist es ein Geradenpaar? Parametrisieren Sie gegebenenfalls die beiden Geraden.

(c) Welche der folgenden farbigen Teilmengen von Q entstehen als Schnitt von Q mit einer der folgenden Ebenen? Zu welcher Farbe bzw. Ebene gibt es keine Entsprechung?

• Schwarz	• Rot (Hyperbel)	• $x_3 = 0$	• $x_3 = -0{,}6$	• $x_1 = 0{,}2$
• Gelb	• Blau (Parabel)	• $x_3 = 0{,}5$	• $x_2 = -0{,}6$	• $x_2 - 2x_3 = 1/8$

Aufgabe H 51. *Modell: Kegelschnitte*

Sei $\mathcal{Q}$ der durch die Gleichung $-x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 = 0$ gegebene Doppelkegel; im Modell dargestellt ist der Bereich $-\frac{7}{2} \leqq x_1, x_2, x_3 \leqq \frac{7}{2}$. Außerdem sei in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$ eine Ebene E_α gegeben durch $x_1 + \alpha x_3 = 1$ im Standardkoordinatensystem.

(a) Welche Ebenen erhalten Sie für $\alpha \in \{-1, -1/2, 0\}$?
Wie hängen diese Ebenen mit denen des Modells zusammen?

(b) Die Basis B_α: $b_1 := \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}(1, 0, \alpha)^\intercal, b_2 := (0, 1, 0)^\intercal, b_3 := \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}(\alpha, 0, -1)^\intercal$ von $\mathbb{R}^3$ liefert das kartesische Koordinatensystem $\mathbb{F}_\alpha = \left(\frac{1}{1+\alpha^2}(1, 0, \alpha)^\intercal; B_\alpha\right)$. Ist B_α ein Rechtssystem? Geben Sie die Ebene E_α in Hessescher Normalform bezüglich des Koordinatensystems $\mathbb{F}_\alpha$ an. Prüfen Sie, ob $\mathbb{F}'_\alpha := \left(\frac{1}{1+\alpha^2}(1, 0, \alpha)^\intercal; b_2, b_3\right)$ ein kartesisches Koordinatensystem von E_α ist.

(c) Geben Sie eine Quadrikgleichung für den Doppelkegel $\mathcal{Q}$ bezüglich des Koordinatensystems $\mathbb{F}_\alpha$ an.

(d) Geben Sie eine Gleichung für die Schnittquadrik $E_\alpha \cap \mathcal{Q}$ bezüglich $\mathbb{F}'_\alpha$ an. Bestimmen Sie die Gestalt dieser Schnittquadrik in Abhängigkeit von α.

www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/HM-Stroppel-Material/3D-Modelle/02

A. Armiti, M. Fetzer,
L. Margolis, J. Magiera,
T. Pfrommer,
G. Santin, C. Zeiler

13. Gruppenübung zur Vorlesung
Höhere Mathematik 1

M. Künzer
M. Stroppel

Wintersemester 2015/16

Präsenzübungen

Aufgabe P 38. *Folgen*

Gegeben ist die vom reellen Parameter β abhängige Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch

$$a_n := (2+3\beta)^n.$$

(a) Für welche $\beta \in \mathbb{R}$ ist $|2+3\beta| \leqq 1$?

(b) Für welche $\beta \in \mathbb{R}$ ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton?

(c) Für welche $\beta \in \mathbb{R}$ ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt?

(d) Für welche $\beta \in \mathbb{R}$ ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ alternierend?

Aufgabe P 39. *Quadrik in vorgegebenen Koordinaten*

In $\mathbb{R}^2$ sei in Standardkoordinaten $\mathbb{E}$ die Quadrik

$$Q = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x_1^2 - 2x_2^2 - 4x_1 = 0\right\}$$

gegeben. Sei $\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)$.

(a) Bestimmen Sie ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$.

(b) Bestimmen Sie die Quadrikgleichung für Q in Koordinaten bezüglich $\mathbb{F}$.
Welche Gestalt hat Q?

(c) Zeichnen Sie $\mathbb{F}$ und Q in das Standardkoordinatensystem ein.
Enthält Q den Ursprung von $\mathbb{E}$?

Aufgabe P 40. *Konstruktion von Folgen*

Entscheiden Sie jeweils, ob es möglich ist, dass eine Folge die angeführten Eigenschaften hat. Geben Sie diesenfalls eine Folge mit diesen Eigenschaften an.

(a) Die Folge ist beschränkt und streng monoton fallend.

(b) Die Folge ist monoton fallend und nach oben unbeschränkt.

(c) Die Folge ist konvergent und nicht monoton.

(d) Für die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt $b_1 = 1$ und $b_{n+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j$ für $n \in \mathbb{N}$.

(e) Die Folge hat drei verschiedene Häufungspunkte.

(f) Die Folge hat drei verschiedene Häufungspunkte und konvergiert.

(g) Die Folge hat die Häufungspunkte 1 und $+\infty$.

Link zur Umfrage bezüglich der Gruppenübungen:
evasysw.uni-stuttgart.de/evasys/online.php?p=EP9KN

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 52. *Quadrik mit Parameter*

Betrachten Sie die von einem Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ abhängige Quadrik

$$Q_\alpha := \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_1^2 - 2x_2^2 + \alpha x_3^2 + 4x_1x_2 + 2\sqrt{5}\,x_1 + 4\sqrt{5}\,x_2 + \alpha = 0 \right\}.$$

(a) Schreiben Sie die Gleichung der Quadrik Q_α in Matrixform.

(b) Bestimmen Sie den Typ der Quadrik Q_α in Abhängigkeit von α.

(c) Bestimmen Sie eine euklidische Normalform von Q_α in Abhängigkeit von α.

(d) Geben Sie die Gestalt von dieser Quadrik in Abhängigkeit von α an.

Aufgabe H 53. *Folgen*

Gegeben ist die vom reellen Parameter $\beta \neq -\frac{1}{4}$ abhängige Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch

$$a_1 := 1 \text{ und } a_{n+1} := \frac{2+3\beta}{1+4\beta} a_n$$

(a) Für welche β ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton?

(b) Für welche β ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt?

(c) Bestimmen Sie die Häufungspunkte der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in Abhängigkeit von β.

(d) Für welche β konvergiert die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
Bestimmen Sie in diesen Fällen den Grenzwert.

Aufgabe H 54. *Quadrik*

Sei $Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 5x_1^2 + 3x_2 + 4x_3 = 0 \right\}$. Sei $\mathbb{G} := \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$.

(a) Bestimmen Sie den Typ von Q.

(b) Bestimmen Sie ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{G}}$ und ${}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{E}}$.

(c) Bestimmen Sie die Quadrikgleichung für Q in Koordinaten bezüglich $\mathbb{G}$.
Welche Gestalt hat Q?

(d) Finden Sie ein kartesisches Koordinatensystem, bezüglich dessen die Quadrik Q eine Matrixbeschreibung aufweist, deren Matrix keine Nulleinträge hat.

Aufgabe H 55. *Häufungspunkte*

Bestimmen Sie jeweils die Häufungspunkte, den Limes inferior und den Limes superior der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(a) $a_n = \min\{100, n\}(-1)^n$ **(b)** $a_n = \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) - \frac{1}{n}$ **(c)** $a_n = n^{((-1)^n)}$
(d) $a_n = \mathrm{Re}(\mathrm{i}^n) + 2\,\mathrm{Im}(\mathrm{i}^n)$