T. Conde, J. Meinel,
D. Seus, S. Thelin,
R. Tielen, A. Wünsch

1. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 1

M. Künzer
M. Stroppel

Wintersemester 2016/17

Präsenzübungen

Aufgabe P 1. *Elementares Rechnen*

(a) Berechnen Sie $\frac{3\cdot\frac{2}{3}}{2}$, $\frac{10}{\frac{2}{5}}$, $\frac{1}{6}+\frac{13}{21}$ und $\frac{1}{3}+\frac{2+5}{5}$.

(b) Berechnen Sie $\binom{3}{k}$ für alle $k \in \{0,1,2,3\}$. Bestimmen Sie $\binom{5}{2}$. Vereinfachen Sie die Ausdrücke $\binom{n}{1}$ und $\binom{n}{n-1}$ für $n \in \mathbb{N}$.

(c) Multiplizieren Sie die Klammern aus und vereinfachen Sie:

$$(\alpha+1)(2-\alpha), \qquad (\alpha+3)(2-\alpha)(\alpha+1), \qquad (\alpha-2)\frac{(\alpha+3)^2-(\alpha+1)(\alpha+4)}{(\alpha-2)(\alpha+5)}.$$

(d) Seien $a_1 = 5,\ a_2 = 3,\ a_3 = -1,\ a_4 = 3,\ a_5 = 17,\ a_6 = -4$ gegeben. Sei $b_j = a_j + 1$ für alle $j \in \{1,2,3,4,5,6\}$. Berechnen Sie

$$\sum_{j=2}^{5} a_j, \quad \sum_{j=2}^{5} b_j, \quad \sum_{j=0}^{2} a_{2j+1}, \quad \sum_{j=1}^{3} b_{2j}, \quad \sum_{j=1}^{3} 2b_j, \quad \sum_{j=4}^{4} a_j.$$

Aufgabe P 2. *Binomischer Lehrsatz*

(a) Berechnen Sie $(\alpha+2)^4$, indem Sie die Klammern ausmultiplizieren.
Berechnen Sie danach $(\alpha+2)^4$ unter Zuhilfenahme des binomischen Lehrsatzes.

(b) Bestimmen Sie die reellen Nullstellen der folgenden beiden Funktionen $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Skizzieren Sie anschließend den jeweiligen Funktionsgraphen in $\mathbb{R}^2$:

$$f_1(x) \ = \ x^3+3x^2+3x+1, \qquad f_2(x) \ = \ \sqrt{(x-5)(x+5)+3^2+4^2}.$$

(c) Berechnen Sie alle reellen Lösungen der Gleichung $2 = 2x^2 - 28x + 100$.

Aufgabe P 3. *Vollständige Induktion*

Beweisen Sie durch vollständige Induktion die folgende Aussage:

$$\text{Für alle } n \in \mathbb{N} \text{ gilt } \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Können Sie diese Aussage auch aus dem Binomischen Lehrsatz herleiten?

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 1. *Umgang mit Summen*

Hinweis: Bereits behandelte Summenformeln aus dem Skript dürfen verwendet werden.

(a) Sei $a_k \in \mathbb{R}$ für $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie $\sum_{j=0}^{n}(a_{j+1} - a_j) = a_{n+1} - a_0$ für $n \in \mathbb{N}$.

(b) Berechnen Sie $\sum_{j=1}^{n-1}(j^2 - 2j)$.

(c) Berechnen Sie $\sum_{j=3}^{n}(j^2 - 2j)$.

(d) Sei $a_j = (-1)^j \cdot j$ für $j \in \mathbb{N}$.
Berechnen Sie $\sum_{j=1}^{4} a_{2j}$ und $\sum_{j=4}^{8} a_{3j-9}$. Berechnen Sie $\sum_{j=1}^{2k+1} a_j$ für $k \in \mathbb{N}$.

Aufgabe H 2. *Binomischer Lehrsatz*

Berechnen Sie alle reellen Lösungen der folgenden Gleichungen.

(a) $x^3 - 9x^2 + 27x - 27 = 0$

(b) $7x^4 + 28x^3 + 42x^2 + 28x + 15 = 8$

(c) $x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 14 = 3x^3 + 4x^2 + 7$

(d) $(x^2 + 4x + 4)(x^2 - 6x + 9) = -1$

Aufgabe H 3. *Vollständige Induktion*

(a) Beweisen Sie mittels Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2+k}{2} = \binom{3+n}{n}.$$

(b) Zeigen Sie mit Induktion, dass für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k.$$

Online-Aufgabe.

Sie finden Ihre Online-Aufgabe auf folgender Webseite.

http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test430/

Bitte geben Sie dort zunächst Ihre Matrikelnummer ein.

Die Lösungen sind als ganze Zahlen oder als Dezimalzahlen mit einem Dezimal**punkt** einzugeben. Sonstige Zeichen, wie zum Beispiel Klammern oder Operatoren wie $*$ und $/$, dürfen **nicht** benutzt werden.

Anschließend müssen Sie das per Email erhaltene **Passwort** für die Onlineübungen eintragen.

Innerhalb des Bearbeitungszeitraums können Sie Ihre Eingaben beliebig oft wiederholen, wobei die **letzten** Eingaben gewertet werden. Der Bearbeitungszeitraum endet mittwochs, nach der Abgabe der schriftlichen Übungen in den Übungsgruppen, um 24:00 Uhr. Sie erhalten für die Bearbeitung der Online-Aufgabe 0 bis 2 Punkte.

Präsenzübungen

Aufgabe P 4. *Abbildungen*

(a) Sei A die Menge der Teilnehmer Ihrer Übungsgruppe. Sei $B := \{1, 2, \ldots, 31\}$. Sei $f : A \to B$ die Abbildung, die jedem Teilnehmer den Kalendertag seines Geburtstags zuordnet. Ist f injektiv? Ist f surjektiv? Ist f bijektiv?

(b) Sei $g\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \colon x \mapsto x^{-1}$.
Skizzieren Sie den Graphen von g. Ist g injektiv? Ist g surjektiv? Ist g bijektiv?

(c) Sei $h\colon \mathbb{R} \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x^{-2}$.
Skizzieren Sie den Graphen von h. Ist h injektiv? Ist h surjektiv? Ist h bijektiv?

Aufgabe P 5. *Rechnen mit komplexen Zahlen, Mengen in* $\mathbb{C}$

(a) Geben Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $a + b\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

(i) $\dfrac{4 + 3\mathrm{i}}{2 - \mathrm{i}}$

(ii) $\mathrm{Im}\left(\dfrac{7 + \mathrm{i}}{6 - 2\mathrm{i}}\right) + \mathrm{Re}(\overline{3 + 2\mathrm{i}})$.

(b) Skizzieren Sie die folgenden Mengen in der komplexen Zahlenebene.

(i) $A = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 \leqq |z - 3\mathrm{i}| < 2\}$

(ii) $B = \{(1 + \sqrt{3}\,\mathrm{i})^k \mid k \in \{-1, 0, 1, 2, 3\}\}$

(iii) $C = \{z \in \mathbb{C} \mid |\mathrm{Re}(z)| + 2|\mathrm{Im}(z)| < 2\}$

Aufgabe P 6. *Polarkoordinaten*

Seien
$$z_1 = 1 + \mathrm{i} \quad \text{und} \quad z_2 = \frac{1 - \sqrt{3}\mathrm{i}}{2}.$$
Berechnen Sie jeweils die Polarkoordinatendarstellung der folgenden komplexen Zahlen, und zeichnen Sie sie in der komplexen Zahlenebene.

(a) z_1

(b) z_2

(c) z_1^3

(d) $z_1 \cdot z_2$

(e) $1/\overline{z_2}$

(f) $1/\overline{z_1}$

(g) z_2^{40}

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 4. *Abbildungen*

(a) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto (2\cos(t), -\sin(t))$.
Ist f injektiv? Ist f surjektiv? Ist f bijektiv?

(b) Konstruieren Sie eine Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqq -3\}$, die surjektiv, aber nicht injektiv ist.

(c) Sei $h\colon \mathbb{C} \smallsetminus \{\mathrm{i}\} \to \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}\colon z \mapsto \frac{1}{\overline{z}+\mathrm{i}}$. Ist h injektiv? Ist h surjektiv? Ist h bijektiv?

(d) Sei $u\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}\colon z \mapsto \operatorname{Re}(|\mathrm{i}z|) - |\mathrm{i}\operatorname{Re}(z)|$. Ist u injektiv? Ist u surjektiv? Ist u bijektiv?

Aufgabe H 5. *Mengen in* $\mathbb{C}$

Skizzieren Sie die folgenden Mengen in der komplexen Zahlenebene.

(a) $A = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(\overline{z}) \geqq 2\}$

(b) $B = \{z \in \mathbb{C} \mid 2\operatorname{Re}(z^2) - 2\operatorname{Im}(z)^2 = 4\operatorname{Re}(z)^2 - 3\operatorname{Im}(z^2)\}$

(c) $C = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \operatorname{Im}(z) \neq 0,\ 1 \leqq \dfrac{\operatorname{Re}(z)}{\operatorname{Im}(z)} < 2 \right\}$

(d) $D = C \smallsetminus (A \cup B)$

Aufgabe H 6. *Komplexe Wurzeln*

(a) Berechnen Sie die Polarkoordinatendarstellung der komplexen Zahl $w = (1-\mathrm{i})/\sqrt{2}$. Wie viele Elemente hat die Menge $\{w^k + w \mid k \in \mathbb{Z}\}$? Skizzieren Sie diese Menge in der komplexen Zahlenebene.

(b) Bestimmen Sie die Menge $\{z \in \mathbb{C} \mid \sqrt{2}z^6 - 64 = -64\mathrm{i}\}$ und skizzieren Sie diese in der komplexen Zahlenebene.

(c) Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung $z^4 - 4z^2 + 4 = -4$ in Polarkoordinaten.

(d) Zerlegen Sie das Polynom $x^3 - 2 \in \operatorname{Pol}\mathbb{C}$ in ein Produkt von Linearfaktoren.

Online-Aufgabe.

Sie finden Ihre Online-Aufgabe auf folgender Webseite.

http://morw.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/

Präsenzübungen

Aufgabe P 7. *Lineare Unabhängigkeit und Untervektorräume*

Gegeben seien $v_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix}2\\3\\0\\0\end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix}8\\-1\\6\\0\end{pmatrix}$, $v_4 = \begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\\-1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$.

Entscheiden und begründen Sie:

(a) Sind v_1, v_2 linear unabhängig? Bilden diese Vektoren eine Basis von $\mathbb{R}^4$?

(b) Sind v_1, v_2, v_3, v_4 linear unabhängig? Bilden diese Vektoren eine Basis von $\mathbb{R}^4$?

(c) Sind v_1, 0, v_2 linear unabhängig?

(d) Sind v_1, $-v_1$ linear unabhängig?

(e) Bilden die Vektoren v_1, v_2, v_3, v_4, $v_4 + v_1$ eine Basis von $\mathbb{R}^4$?

(f) Bilden die Vektoren $v_1 + v_4$, $v_2 + v_4$, $v_3 + v_4$, v_4 eine Basis von $\mathbb{R}^4$?

(g) Liegt v_2 in der Ebene $\mathrm{L}\,(v_1, v_3)$?

(h) Ist $\{v_2 + x \mid x \in \mathrm{L}\,(v_1, v_3)\}$ ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^4$?

Aufgabe P 8. *Standardskalarprodukt in* $\mathbb{R}^2$

Gegeben seien die folgenden Vektoren in $\mathbb{R}^2$.

$$u_1 = \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix},\ v_1 = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\quad u_2 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},\quad u_3 = \begin{pmatrix}-3\\3\end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}.$$

(a) Zeichnen Sie u_j, v_j, $u_j + v_j$ für $j \in \{1, 2, 3\}$ in je ein Standardkoordinatensystem ein. In welchen Fällen ist $|u_j + v_j| < |u_j| + |v_j|$?

(b) In welchen Fällen ist $\langle u_j \mid v_j\rangle^2 < \langle u_j \mid u_j\rangle \langle v_j \mid v_j\rangle$?

Aufgabe P 9. *Skalarprodukte für Funktionenräume*

Für $f, g \in \mathcal{C}^0([0, 1])$ ist ein Skalarprodukt definiert durch $\langle f \mid g\rangle := \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$.
Sei $f_1 \colon [0, 1] \to \mathbb{R} \colon x \mapsto x + 1$. Sei $f_2 \colon [0, 1] \to \mathbb{R} \colon x \mapsto x^2$.

(a) Bestimmen Sie $\langle f_1 \mid f_2\rangle$.

(b) Bestimmen Sie $\alpha \in \mathbb{R}$ so, dass $\langle f_1 \mid f_2 + \alpha f_1\rangle = 0$ ist.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 7. *Lineare Unabhängigkeit und Untervektorräume*

Gegeben seien in $\mathbb{R}^5$ die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \ v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \ v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \ v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ q = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Geben Sie zwei verschiedene Basen von $\mathrm{L}(v_1, v_2, v_3)$ an.

(b) Geben Sie zwei verschiedene Basen von $\mathrm{L}(v_1, v_3, v_4)$ an.

(c) Betrachten Sie die Ebene $E = \mathrm{L}(v_1, v_4)$ in $\mathbb{R}^5$.
Liegt p in E? Ist $\{p + x \mid x \in E\}$ ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^5$?

(d) Liegt q in E? Ist $\{q + x \mid x \in E\}$ ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^5$?

Aufgabe H 8. *Unterschied zwischen Teilmengen und Untervektorräumen*

Untersuchen Sie, ob diese Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ Untervektorräume bilden:

$$U_1 = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad U_2 = \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad U_3 = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad U_4 = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\},$$

$$U_5 = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + y^2 = 1\right\}, \qquad U_6 = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x > 0\right\},$$

$$U_7 = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, -3x + 9y = 0\right\}, \qquad U_8 = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + 4xy + 4y^2 = 0\right\}.$$

Welche zwei dieser Teilmengen stimmen überein?

Aufgabe H 9. *Abstände mittels Skalarprodukt*

Für $f, g \in \mathcal{C}^0([-2, 1])$ ist ein Skalarprodukt definiert durch $\langle f \mid g \rangle := \int\limits_{-2}^{1} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$.
Der Abstand von f und g sei $d(f, g) := \langle f - g \mid f - g \rangle^{1/2}$.
Sei $b\colon [-2, 1] \to \mathbb{R}\colon x \mapsto |x|$. Sei $f_j : [-2, 1] \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x^j$ für $j \in \mathbb{N}_0$.

(a) Bestimmen Sie $d(f_2, f_1)$ und $d(f_1, b)$.

(b) Bestimmen Sie $\alpha \in \mathbb{R}$ derart, dass $d(f_0 + \alpha f_1, b)$ minimal wird. Skizzieren Sie für dieses α die Graphen von $f_0 + \alpha f_1$ und von b in ein Koordinatensystem.

Online-Aufgabe.

Sie finden Ihre Online-Aufgabe auf folgender Webseite.

http://morw.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test430/

Präsenzübungen

Aufgabe P 10. *Ebene, Hessesche Normalform*

Gegeben sind die Punkte $P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $P_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $P_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Sei E die Ebene, die P_1, P_2 und P_3 enthält. Sei $F = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_3 = 0 \right\}$.

(a) Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung von E.

(b) Geben Sie die Ebene E in Hessescher Normalform an.
Welchen Abstand hat die Ebene zum Ursprung?

(c) Prüfen Sie mittels **(a)** und erneut mittels **(b)**, ob der Punkt P_4 auf der Ebene E liegt.

(d) Berechnen Sie den Cosinus des Winkels zwischen den Ebenen E und F.

Aufgabe P 11. *Komplexe Vektorräume*

(a) Wir betrachten den $\mathbb{C}$-Vektorraum $\mathbb{C}^3$. Untersuchen Sie die folgenden Vektoren auf lineare Unabhängigkeit:

(i) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2+\mathrm{i} \\ 2+2\mathrm{i} \\ 2+4\mathrm{i} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 2\mathrm{i} \\ 4\mathrm{i} \end{pmatrix}$

(ii) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2+\mathrm{i} \\ 2+2\mathrm{i} \\ 2+4\mathrm{i} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$

(iii) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(b) Wir betrachten $B\colon 1, \mathrm{i}$.
Ist B eine Basis des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{C}$? Ist B eine Basis des $\mathbb{C}$-Vektorraums $\mathbb{C}$?

Aufgabe P 12. *Vektorraum der Polynome*

Wir betrachten den Vektorraum $\operatorname{Pol}_2 \mathbb{R} := \left\{ \sum_{j=0}^{2} \alpha_j x^j \,\middle|\, \alpha_j \in \mathbb{R} \right\}$ der reellen Polynome vom Grad höchstens 2.

Es sind $B\colon 1, x, x^2$ und $C\colon x^2, x-1, x+1$ Basen von $\operatorname{Pol}_2 \mathbb{R}$.

Seien $p(x) := x^2 + 2x$ und $q(x) := x^2 + 2x + 1$.

(a) Bestimmen Sie die Koordinatenvektoren ${}_Bp$, ${}_Bq$ und ${}_B(p+q)$.

(b) Bestimmen Sie die Koordinatenvektoren ${}_Cp$, ${}_Cq$ und ${}_C(p+q)$.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 10. *Komplexe Vektorräume*

(a) Zeigen Sie, dass die Vektoren $\begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2+5\mathrm{i} \\ 5-2\mathrm{i} \end{pmatrix}$ im $\mathbb{C}$-Vektorraum $\mathbb{C}^2$ linear abhängig sind. Betrachten Sie den Untervektorraum $U = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2+5\mathrm{i} \\ 5-2\mathrm{i} \end{pmatrix}\right)$. Geben Sie eine Basis von U an und bestimmen Sie die Dimension von U.

(b) Sei $\alpha \in \mathbb{C}$. Wir betrachten die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 2+\mathrm{i} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1-\mathrm{i} \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \alpha \\ 2\mathrm{i}+5 \\ 1 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{C}^3$. Bestimmen Sie, für welche Werte des Parameters $\alpha \in \mathbb{C}$ diese Vektoren linear unabhängig sind. Bestimmen Sie für die Werte von α, bei denen lineare Abhängigkeit eintritt, die Dimension des Aufspanns dieser Vektoren.

Aufgabe H 11. *Geraden, Winkel, Satz des Thales*

Gegeben sind die Punkte $A = (-1, 0)$, $B = (1, 0)$ in $\mathbb{R}^2$.

(a) Skizzieren Sie die Menge $K = \{(h, \sqrt{1-h^2}) \in \mathbb{R}^2 \mid h \in [-1, 1]\}$ in die Ebene $\mathbb{R}^2$. Zeichnen Sie außerdem die Punkte A und B ein. Sei $C = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \in K$ gegeben.
Zeichnen Sie die Gerade g_{AC} ein, die durch die Punkte A und C verläuft.
Zeichnen Sie die Gerade g_{BC} ein, die durch die Punkte B und C verläuft.

(b) Bestimmen Sie Parameterdarstellungen für die Geraden g_{AC} und g_{BC}. Untersuchen Sie, ob diese beiden Geraden orthogonal zueinander sind.

(c) Seien P und Q Punkte in $\mathbb{R}^2$. Sei M der Mittelpunkt der Strecke $\overline{PQ}$. Sei R ein Punkt in $\mathbb{R}^2$ mit $|\overrightarrow{MP}| = |\overrightarrow{MR}|$. Wir setzen $u := \overrightarrow{MP}$ und $v := \overrightarrow{MR}$. Schreiben Sie $\overrightarrow{RP}$ und $\overrightarrow{RQ}$ als Linearkombinationen in u und v. Verwenden Sie dies, um $\left\langle \overrightarrow{RP} \,\middle|\, \overrightarrow{RQ} \right\rangle$ zu berechnen. Wie kann man dieses Resultat in **(b)** verwenden?

Aufgabe H 12. *Vektorraum der Polynome*

Sei $k \in \mathbb{N}$. Wir betrachten den Vektorraum $\mathrm{Pol}_k \mathbb{R} := \left\{ \sum_{j=0}^{k} \alpha_j x^j \,\middle|\, \alpha_j \in \mathbb{R} \right\}$ der reellen Polynome vom Grad höchstens k.

(a) Seien $p(x) := x^3 + 2x^2 - 3$ und $q(x) := 4x - 2$ in $\mathrm{Pol}_3 \mathbb{R}$. Gegeben sei die Basis $A\colon 1, x, x^2, x^3 + x^2$ von $\mathrm{Pol}_3 \mathbb{R}$. Bestimmen Sie ${}_A p$, ${}_A 0$ und ${}_A(2p - q)$.

(b) Ist $B\colon 1, x, x^2, x^3, x^2 + 3x + 6$ eine Basis von $\mathrm{Pol}_3 \mathbb{R}$?

(c) Ist $C\colon x^3 + x^2 + x + 1,\ x^3 + x^2 + x,\ x^2 + x + 1,\ x^2 + x$ eine Basis von $\mathrm{Pol}_3 \mathbb{R}$?

(d) Ist $\mathrm{Pol}_2 \mathbb{R}$ ein Untervektorraum von $\mathrm{Pol}_3 \mathbb{R}$?

Online-Aufgabe.

Sie finden Ihre Online-Aufgabe auf folgender Webseite.

http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/ (Achtung! Neuer Link!)

Präsenzübungen

Aufgabe P 13. *Vektorprodukt*
Gegeben seien in $\mathbb{R}^3$ die Vektoren

$$a = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \; c = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie:

(a) $a \times b$

(b) $a \times c$

(c) $a \times (3b + 4c)$

(d) $c \times c$

(e) $\langle a \,|\, a \times b \rangle$

(f) $\langle a + b \,|\, a \times b \rangle$

Aufgabe P 14. *Rechnen mit Matrizen*
Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 + \mathrm{i} \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3\mathrm{i} \\ 4 + 2\mathrm{i} & 1 & 1 \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie damit, wenn möglich:

$$DA, \quad DC, \quad CD, \quad C^2, \quad CC^{\mathsf{T}}, \quad C^{\mathsf{T}}C, \quad A + CB.$$

(b) Bestimmen Sie alle Matrizen $X \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $DX = XD$.

Aufgabe P 15. *Orthonormalbasis*
Gegeben seien in $\mathbb{R}^3$ die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \alpha \end{pmatrix}, \; v_3 = \begin{pmatrix} \beta \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie alle $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, für welche v_1, v_2 und v_3 paarweise orthogonal sind.

(b) Benutzen Sie **(a)**, um eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ zu finden, welche ein Vielfaches von v_1 enthält.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 13. *Ebene, Hessesche Normalform*

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ ein Parameter. Seien $P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $P_3 = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ Punkte in $\mathbb{R}^3$.

Sei E_α die Ebene, die P_1, P_2 und P_3 enthält. Sei $F = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1 + x_2 + x_3 = 5 \right\}$.

(a) Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung von E_α.

(b) Geben Sie die Ebene E_α in Hessescher Normalform an. Bestimmen Sie den Abstand von E_α zum Ursprung. Für welche Werte von α ist dieser Abstand minimal?

(c) Für welche Werte von α sind die Ebenen E_α und F zueinander orthogonal?

(d) Bestimmen Sie für jedes α eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$, die einen Normalenvektor von E_α enthält.

Aufgabe H 14. *Rechnen mit Matrizen, lineare Gleichungssysteme*

Gegeben seien die folgenden Matrizen und Vektoren:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \; b_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; b_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}, \; b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Sei $S_j\colon Ax = b_j$ das zu A und b_j gehörende lineare Gleichungssystem. Bestimmen Sie für jedes $j \in \{0, 1, 2\}$ die zugehörige Lösungsmenge $\mathcal{L}(S_j)$. Wenn $\mathcal{L}(S_j)$ nicht leer ist, bestimmen Sie auch ihre Dimension.

(b) Zeigen Sie, dass

$$B^n = \begin{pmatrix} 1+2n & -4n \\ n & 1-2n \end{pmatrix}$$

ist für $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe H 15. *Vektorprodukt und Geometrie*

Gegeben sei die Pyramide Δ mit den Eckpunkten

$$A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ und die Fläche des Dreiecks mit den Ecken A, B und C.

(b) Sei E die Ebene, die A, B und C enthält. Bestimmen Sie den Punkt $X \in E$, für welchen $\overrightarrow{DX}$ orthogonal zu E ist. Bestimmen Sie $|\overrightarrow{DX}|$.

(c) Berechnen Sie das Volumen der Pyramide Δ.

Sie finden Ihre Online-Aufgabe auf folgender Webseite.

http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test430/

T. Conde, J. Meinel,
D. Seus, S. Thelin,
R. Tielen, A. Wünsch

6. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 1

M. Künzer
M. Stroppel

Wintersemester 2016/17

Präsenzübungen

Aufgabe P 16. *Lineares Gleichungssystem, Gauß-Algorithmus*

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 \phantom{{}+x_2} + 2x_3 - x_4 &= 2 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 \phantom{{}-2x_4} &= 5 \\ x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 &= -1 \end{aligned}$$

(a) Stellen Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix $[A\|b]$ auf. Formen Sie die Koeffizientenmatrix in die in Satz $3.7.2$ angegebene Form um.

(b) Geben Sie eine Basis des Lösungsraums des zugehörigen homogenen linearen Gleichungssystems an. Verwenden Sie diese und **(a)** zur Ermittlung der Lösungsmenge des gegebenen linearen Gleichungssystems.

(c) Sei b' der erste Spaltenvektor von A. Ist das Gleichungssystem zu $[A\|b']$ lösbar? Berechnen Sie davon die Lösungmenge.

(d) Finden Sie einen Vektor b'' so, dass das lineare Gleichungssystem zu $[A\|b'']$ unlösbar ist.

Aufgabe P 17. *Lineare Abbildungen*

(a) Gegeben seien die Abbildungen

$$f_1\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon (x_1, x_2)^\intercal \mapsto (x_1 + 1, x_2)^\intercal$$
$$f_2\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2\colon (x_1, x_2, x_3)^\intercal \mapsto (2x_1, x_2 + x_3)^\intercal.$$

Welche dieser Abbildungen ist linear? Geben Sie ihre Matrixbeschreibung bezüglich Standardbasen an.

(b) Gibt es eine lineare Abbildung $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $h((1,1)^\intercal) = (1,2)^\intercal$, $h((1,2)^\intercal) = (1,3)^\intercal$ und $h((0,1)^\intercal) = (1,0)^\intercal$?

Aufgabe P 18. *Lineare Abbildungen, Matrixbeschreibungen*

Gegeben sei die lineare Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $\varphi((1,0)^\intercal) = (-1,2)^\intercal$ und $\varphi((3,-1)^\intercal) = (-3,-1)^\intercal$.

(a) Bestimmen Sie ${}_E\varphi_E$, wobei E die Standardbasis von $\mathbb{R}^2$ bezeichnet.

(b) Bestimmen Sie $\varphi((5,-2)^\intercal)$.

(c) Gegeben seien die Basen $B\colon (3,-1)^\intercal, (1,0)^\intercal$ und $C\colon (-3,-1)^\intercal, (-1,2)^\intercal$ von $\mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie ${}_C\varphi_B$.

(d) Ist φ injektiv? Ist φ surjektiv?

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 16. *Lineares Gleichungssystem, Gauß-Algorithmus*

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 3x_5 &= -7 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 \qquad - x_5 &= 17 \\ 4x_1 - 6x_2 + 10x_3 - 13x_4 + 9x_5 &= -7 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 - 2x_5 &= 15 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 + 4x_5 &= 24 \end{aligned}$$

(a) Stellen Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix $[A\|b]$ auf. Formen Sie die Koeffizientenmatrix in die in Satz $3.7.2$ angegebene Form um.

(b) Geben Sie eine Basis des Lösungsraums des zugehörigen homogenen linearen Gleichungssystems an. Verwenden Sie diese und **(a)** zur Ermittlung der Lösungsmenge des gegebenen linearen Gleichungssystems.

(c) Verfahren Sie genauso, um das lineare Gleichungssystem zu lösen, das nur aus den ersten drei der obigen Gleichungen besteht.

Aufgabe H 17. *Vektorraum der Polynome*

Wir betrachten den Vektorraum $\operatorname{Pol}_3\mathbb{R}$ der reellen Polynome vom Grad höchstens 3 und die Basis $B\colon 1, x, x^2, x^3$ davon. Sei dazuhin E die Standardbasis von $\mathbb{R}^2$.

(a) Zeigen Sie, dass auch $C\colon 1+2x^2, x^2, -3+x, x^2+2x^3$ eine Basis von $\operatorname{Pol}_3\mathbb{R}$ ist.

(b) Sei $d\colon \operatorname{Pol}_3\mathbb{R} \to \operatorname{Pol}_3\mathbb{R}\colon p(x) \mapsto xp'(x) - p(x)$. Geben Sie die Matrix ${}_Bd_C$ an.

(c) Es sei $e\colon \operatorname{Pol}_3\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2\colon p(x) \mapsto (p(-1), p'(1))^T$. Geben Sie die Matrix ${}_Ee_B$ an. Bestimmen Sie die Menge aller Polynome $q(x) \in \operatorname{Pol}_3\mathbb{R}$ mit $q(-1) = 2$ und $q'(1) = 0$.

(d) Bestimmen Sie die Matrix ${}_E(e \circ d)_C$ und geben Sie $(e \circ d)(-3 + x + x^2 + 2x^3)$ an.

Aufgabe H 18. *Rang, Dimensionsformel*

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ ein Parameter. Seien

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha & \alpha+2 \\ 2 & 2 & 3\alpha & \alpha+2 \\ -1 & -1 & 0 & -\alpha-2 \end{pmatrix}, \quad b_\alpha = \begin{pmatrix} 3+2\alpha \\ 5+4\alpha \\ -3-\alpha \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie den Rang von A_α in Abhängigkeit von α.

(b) Sei $f_\alpha\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3\colon x \mapsto A_\alpha x$. Bestimmen Sie die Dimension von $\operatorname{Bild}(f_\alpha)$ und die Dimension von $\operatorname{Kern}(f_\alpha)$ in Abhängigkeit von α. Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist f_α injektiv? Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist f_α surjektiv?

(c) Bestimmen Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $b_\alpha \in \operatorname{Bild}(f_\alpha)$.

Sie finden Ihre Online-Aufgabe auf folgender Webseite.

http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/

Präsenzübungen

Aufgabe P 19. *Inverse*

(a) Gegeben seien die Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1+\mathrm{i} \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Welche der Matrizen sind invertierbar? Wenn möglich, bestimmen Sie die inversen Matrizen.

(b) Seien $B, C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar. Ist BC invertierbar? Berechnen Sie $(BC)^{-1}$ in Abhängigkeit von B^{-1} und C^{-1}.

Aufgabe P 20. *Lineare Abbildung, Matrixbeschreibungen*

Gegeben seien die Standardbasis E von $\mathbb{R}^2$ und die Basis

$$B\colon b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \; b_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

von $\mathbb{R}^2$. Sei $\sigma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Spiegelung an der Geraden $\mathrm{L}(b_1)$.

(a) Skizzieren Sie die Vektoren e_1, e_2, b_1, b_2, $\sigma(b_1)$, $\sigma(b_2)$, $\sigma(\mathrm{e}_1)$ und $\sigma(\mathrm{e}_2)$ in ein Koordinatensystem.

(b) Bestimmen Sie ${}_B\sigma(b_1)$ und ${}_B\sigma(b_2)$. Geben Sie damit die Matrix ${}_B\sigma_B$ an.

(c) Geben Sie die Matrix ${}_E\mathrm{id}_B$ an. Berechnen Sie daraus ${}_B\mathrm{id}_E$.

(d) Berechnen Sie ${}_E\sigma_E$ unter Verwendung von **(b)** und **(c)**.

(e) Berechnen Sie ${}_E\sigma(\mathrm{e}_1)$ und ${}_E\sigma(\mathrm{e}_2)$ unter Verwendung von **(d)**.

(f) Berechnen Sie $|{}_E\sigma(\mathrm{e}_1)|$ und $|{}_E\sigma(\mathrm{e}_2)|$.

(g) Vergleichen Sie die Ergebnisse aus **(e)** und **(f)** mit der Skizze aus **(a)**.

Aufgabe P 21. *Determinanten*

Gegeben sei die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie $\det(A)$ und $\det(B)$.

(b) Ist $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$?

(c) Berechnen Sie $\det(A^{\mathsf{T}} B^{-1})$.

(d) Ist A invertierbar?

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 19. *Inverse*

Seien $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ und $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie A^{-1} und B^{-1}, falls dies jeweils möglich ist.

(b) Bestimmen Sie die Mengen $\{X \in \mathbb{R}^{3\times 2} \mid CX = \mathrm{E}_2\}$ und $\{X \in \mathbb{R}^{3\times 2} \mid XC = \mathrm{E}_3\}$. Ist C invertierbar?

Aufgabe H 20. *Determinanten*

Sei $t \in \mathbb{R}$ ein Parameter. Gegeben seien die Matrix und die Vektoren

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ t & 1 & 1 & t^2 \end{pmatrix}, \qquad x_t = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2t \end{pmatrix},\ y_t = \begin{pmatrix} 2 \\ t \\ 2 \end{pmatrix},\ z_t = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ t \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie $\det(A_t)$. Für welche Werte des Parameters t ist A_t invertierbar?

(b) Bestimmen Sie $\mathrm{Rg}(A_t)$ in Abhängigkeit von t.

(c) Seien die Spalten von A_t bezeichnet mit v_1, v_2, v_3 und v_4. Sei B_t die Matrix mit den Spalten $2v_2$, $3v_3$, $4v_4$ und v_1, in dieser Reihenfolge. Bestimmen Sie $\det(B_t)$.

(d) Für welche Werte des Parameters t ist das Volumen des von x_t, y_t und z_t aufgespannten Spats gleich 12?

Aufgabe H 21. *Basiswechsel, Kern, Bild*

Wir betrachten die lineare Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2\colon (x,y,z)^\intercal \mapsto (2x, -2x+3y+3z)^\intercal$$

und die Basen $B : \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ von $\mathbb{R}^2$ und $\tilde{B} : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ von $\mathbb{R}^3$.

Sei E die Standardbasis von $\mathbb{R}^2$. Sei $\tilde{E}$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$.

(a) Bestimmen Sie ${}_E\varphi_{\tilde{E}}$.

(b) Bestimmen Sie ${}_E\mathrm{id}_B$, ${}_B\mathrm{id}_E$, ${}_{\tilde{E}}\mathrm{id}_{\tilde{B}}$ und ${}_{\tilde{B}}\mathrm{id}_{\tilde{E}}$.

(c) Bestimmen Sie ${}_B\varphi_{\tilde{B}}$.

(d) Bestimmen Sie Basen von $\mathrm{Kern}\,(\varphi)$ und von $\mathrm{Bild}\,(\varphi)$.

Sie finden Ihre Online-Aufgabe auf folgender Webseite.

http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test430/

T. Conde, J. Meinel,
D. Seus, S. Thelin,
R. Tielen, A. Wünsch

8. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 1

M. Künzer
M. Stroppel

Wintersemester 2016/17

Präsenzübungen

Aufgabe P 22. *Orthogonalität und Orthonormalbasen*

(a) Welche der folgenden Matrizen sind orthogonal?

$$A = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{3} & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0&1&0&0 \\ 1&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

(b) Geben Sie mindestens zwei Beispiele für Orthonormalbasen von $\mathbb{R}^4$ an.

(c) Wenden Sie das Schmidtsche Orthonormierungsverfahren auf die Basis $B:\ (3,4,0)^\intercal, (25,25,25)^\intercal, (0,0,1)^\intercal$ von $\mathbb{R}^3$ an.

Aufgabe P 23. *Entwicklungssatz für Determinanten*

Sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1&2&0&3 \\ 0&3&0&3 \\ 5&7&1&8 \\ 2&3&0&8 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ gegeben.

(a) Geben Sie die Cofaktoren $\tilde{a}_{11}$, $\tilde{a}_{12}$, $\tilde{a}_{13}$ und $\tilde{a}_{14}$ an.

(b) Berechnen Sie die Determinante von A durch Entwicklung nach der ersten Zeile.

(c) Entwickeln Sie nun die Determinante von A nach einer Zeile oder Spalte Ihrer Wahl. Gibt es eine geschickte Wahl? Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem aus Teilaufgabe **(b)**.

(d) Berechnen Sie nun die Determinante von A unter Verwendung aller Ihnen bekannten Mittel und vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem aus Teilaufgabe **(b)**.

(e) Finden Sie alle $\mu \in \mathbb{R}$ mit $\det(\mu A) = 1$.

(f) Finden Sie ein Beispiel für eine Matrix B mit $\det(A+B) = 0$ und $\det(B) = \det(A)$.

Aufgabe P 24. *Affine Abbildungen*

Gegeben seien die affinen Abbildungen

$$\alpha_1\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon x \mapsto \begin{pmatrix} 1&0&2 \\ 2&1&2 \\ 0&0&1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon x \mapsto \begin{pmatrix} 0&0&0 \\ 1&1&1 \\ 0&1&0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie $\alpha_j\left((2,-1,1)^\intercal\right)$, $\alpha_j\left((2,0,-2)^\intercal\right)$ und $\alpha_j\left((-1,0,1)^\intercal\right)$ für $j \in \{1,2\}$.

(b) Gibt es eine Matrix B mit $\alpha_1(x) = Bx$ für $x \in \mathbb{R}^3$?

(c) Ist α_1 bijektiv? Ist α_2 bijektiv?

(d) Bestimmen Sie $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha_1(x) = (0,0,0)^\intercal\}$. Bestimmen Sie $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha_2(x) = (0,0,0)^\intercal\}$. Bestimmen Sie $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha_2(x) = (2,3,3)^\intercal\}$.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 22. *Determinanten*

Wir betrachten die Matrix $A = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 2 & 1+\mathrm{i} \\ -1-\mathrm{i} & \mathrm{i} & -1-\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 1 & \mathrm{i} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$.

(a) Berechnen Sie $\det(\tilde{A}_{11})$, $\det(\tilde{A}_{12})$, $\det(\tilde{A}_{13})$ sowie $\det(A)$.

(b) Bestimmen Sie $\operatorname{Rg} A$. Ist die lineare Abbildung $\gamma\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3 \colon x \mapsto Ax$ surjektiv?

(c) Finden Sie alle $\mu \in \mathbb{C}$ mit $\det(\mu A) = 1$.

(d) Finden Sie ein Beispiel für eine Matrix B mit $\det(A+B) = 0$ und $\det(B) = \det(A)$.

Aufgabe H 23. *Schmidtsches Orthonormierungsverfahren*

Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & -4 & -10 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & -5 & -10 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie den Lösungsraum $\mathcal{L}(S) \subseteqq \mathbb{R}^6$ des homogenen linearen Gleichungssystems $S : Ax = 0$. Konstruieren Sie eine Orthonormalbasis für $\mathcal{L}(S)$.

(b) Sei nun die Basis $G : g_1, g_2, g_3, g_4$ von $\mathbb{R}^4$ gegeben mit

$$g_1 = (0,0,0,2)^\intercal,\ g_2 = (3,0,0,0)^\intercal,\ g_3 = (1,1,1,1)^\intercal,\ g_4 = (1,1,-1,-1)^\intercal.$$

Weisen Sie nach, dass g_1, g_3 eine Basis des Lösungsraums $\mathcal{L}(T)$ des homogenen linearen Gleichungssystems $T : Bx = 0$ ist. Konstruieren Sie eine Orthonormalbasis $H : h_1, h_2, h_3, h_4$ für $\mathbb{R}^4$ so, dass $\mathrm{L}(h_1, h_2) = \mathcal{L}(T)$ ist.

Aufgabe H 24. *Affine Abbildungen und Isometrien*

Betrachten Sie die Abbildungen

$$\alpha_1\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \colon x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \colon x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 12 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\alpha_3\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \colon x \mapsto \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_4\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \colon x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} x.$$

(a) Welche dieser Abbildungen ist linear? Welche ist eine Isometrie? Welche ist eine Affinität, aber keine Isometrie? Welche ist ihre eigene Umkehrabbildung?

(b) Bestimmen Sie $\alpha_1 \circ \alpha_2$, $\alpha_2 \circ \alpha_1$, α_1^{-1} sowie $\alpha_4 \circ \alpha_3 \circ \alpha_2 \circ \alpha_1$.

Online-Aufgabe.

Sie finden Ihre Online-Aufgabe auf folgender Webseite.

http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/

Präsenzübungen

Aufgabe P 25. *Affine Abbildungen*

Sei $P = (1,2)^\intercal \in \mathbb{R}^2$. Sei $\alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Drehung um P mit dem Drehwinkel $\frac{\pi}{4}$ gegen den Uhrzeigersinn.

(a) Skizzieren Sie die Punkte $Q = (1,0)^\intercal$, $R = (0,2)^\intercal$, $\alpha(Q)$ und $\alpha(R)$.
Ist $|Q - R| = |\alpha(Q) - \alpha(R)|$?

(b) Sei $\beta\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon x \mapsto x + P$. Sei $\gamma\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon x \mapsto \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{4}) & -\sin(\frac{\pi}{4}) \\ \sin(\frac{\pi}{4}) & \cos(\frac{\pi}{4}) \end{pmatrix} x$.
Ist $\alpha = \beta \circ \gamma \circ \beta^{-1}$ oder ist $\alpha = \beta^{-1} \circ \gamma \circ \beta$?

(c) Ist α eine affine Abbildung? Bestimmen Sie den linearen Anteil und den Translationsanteil von α. Ist α eine Isometrie?

Aufgabe P 26. *Drehung*

Gegeben seien $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$, $t = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $u = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Sei $\alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon x \mapsto Ax$. Sei $\beta\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon x \mapsto Ax + t$.

(a) Zeigen Sie, dass A eine eigentliche Orthogonalmatrix ist.

(b) Die Abbildung α ist eine Drehung. Bestimmen Sie ihren Drehwinkel.

(c) Die Gerade g verlaufe durch die Punkte mit den Ortsvektoren u und v.
Zeichnen Sie g und $\beta(g)$ in ein Koordinatensystem.

(d) Bestimmen Sie $w \in \mathbb{R}^2$ mit $\beta(w) = w$.

Aufgabe P 27. *Koordinatentransformation*

Sei $\mathbb{E}$ das Standardkoordinatensystem für $\mathbb{R}^2$. Weiter seien

$$\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \text{ und } \mathbb{G} = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

gegeben. Sei ${}_{\mathbb{E}}P = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a) Skizzieren Sie die Koordinatensysteme $\mathbb{F}$ und $\mathbb{G}$ und den Punkt P in das Standardkoordinatensystem $\mathbb{E}$.

(b) Bestimmen Sie ${}_{\mathbb{F}}P$ und ${}_{\mathbb{G}}P$ anhand der Skizze.

(c) Skizzieren Sie den Punkt Q mit ${}_{\mathbb{F}}Q = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(d) Bestimmen Sie ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$ und ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{G}}$.

(e) Bestimmen Sie ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$ und ${}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{E}}$ unter Verwendung von **(d)**.
Bestimmen Sie damit erneut ${}_{\mathbb{F}}P$ und ${}_{\mathbb{G}}P$.

(f) Bestimmen Sie ${}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{F}}$ unter Verwendung von **(d)** und **(e)**.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 25. *Spiegelung und Koordinatentransformation*

Seien $P = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $R = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ Punkte in $\mathbb{R}^3$. Sei E die Ebene, die P, Q und R enthält. Sei $\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die Spiegelung an der Ebene E.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{F} := (P; \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR})$ ein affines Koordinatensystem ist.

(b) Geben Sie eine Matrix B und einen Vektor s an mit ${}_{\mathbb{F}}\alpha(x) = B\,{}_{\mathbb{F}}x + s$ für $x \in \mathbb{R}^3$.

(c) Bestimmen Sie ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$ und ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$.

(d) Berechnen Sie unter Verwendung von **(b)** und **(c)** eine Matrix A und einen Vektor t mit $\alpha(x) = Ax + t$ für $x \in \mathbb{R}^3$.

Aufgabe H 26. *Drehung*

Sei $\gamma \in \mathbb{R}^+$ ein Parameter. Seien

$$C_\gamma := \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -\gamma \\ -1 & 3 & -\gamma \\ \gamma & \gamma & 2 \end{pmatrix}, \quad t = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

(a) Sei $\alpha\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \colon x \mapsto C_1 x + t$. Bestimmen Sie die Fixpunktmenge $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha(x) = x\}$.

(b) Bestimmen Sie $\gamma_0 \in \mathbb{R}^+$ so, dass C_{γ_0} eigentlich orthogonal ist.

(c) Bestimmen Sie die Drehwinkel und die Drehachse von $\delta\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \colon x \mapsto C_{\gamma_0} x$.

Aufgabe H 27. *Koordinatentransformation*

Sei $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $G_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $G_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 \end{pmatrix}$ und $G_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} - 1 \end{pmatrix}$ Punkte in $\mathbb{R}^3$.

(a) Ist $\mathbb{G} = \left(P; \overrightarrow{PG_1}, \overrightarrow{PG_2}, \overrightarrow{PG_3}\right)$ ein kartesisches Koordinatensystem?

(b) Sei $\mathbb{E}$ das Standardkoordinatensystem für $\mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{G}}$ und ${}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{E}}$.

(c) Seien Q und R Punkte mit ${}_{\mathbb{E}}Q = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und ${}_{\mathbb{G}}R = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.
Bestimmen Sie ${}_{\mathbb{G}}Q$ und ${}_{\mathbb{E}}R$.

(d) Sei $\alpha\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \colon x \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie ${}_{\mathbb{G}}\alpha_{\mathbb{G}} := {}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{E}} \circ \alpha \circ {}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{G}}$.

Online-Aufgabe.

Sie finden Ihre Online-Aufgabe auf folgender Webseite.

http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test430/

Präsenzübungen

Aufgabe P 28. *Eigenvektoren*

Gegeben seien die Matrizen $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ und $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Bearbeiten Sie für beide Matrizen, also $j \in \{1, 2\}$, die folgenden beiden Aufgabenteile.

(a) Zeichnen Sie in das Standardkoordinatensystem für $\mathbb{R}^2$ die Vektoren $v_1 = (2, 0)^\mathsf{T}$, $v_2 = (0, 1)^\mathsf{T}$, $v_3 = (2, -2)^\mathsf{T}$ sowie $A_j v_k$ für $k \in \{1, 2, 3\}$ ein. Welche dieser Vektoren sind Eigenvektoren von A_j?

(b) Stellen Sie das charakteristische Polynom $\chi_{A_j}(\lambda)$ auf. Welche Eigenwerte hat A_j? Geben Sie für jeden Eigenwert zwei verschiedene Eigenvektoren an. Bestimmen Sie die Eigenräume. Geben Sie eine Basis von $\mathbb{C}^2$ an, die aus Eigenvektoren für A_j besteht.

Aufgabe P 29. *Geometrische und algebraische Vielfachheit*

Wir betrachten nun die komplexen Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume in $\mathbb{C}^2$ von A_j für $j \in \{1, 2, 3\}$. Bestimmen Sie die geometrische und die algebraische Vielfachheit der Eigenwerte.

Aufgabe P 30. *Charakteristische Polynome*

(a) Bestimmen Sie die charakteristischen Polynome der Nullmatrix $\mathbf{0} \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ und der Einheitsmatrix E_4.

(b) Seien $A, B \in \mathbb{C}^{2\times 2}$. Gilt: $\det(A) = \det(B) \Leftrightarrow \chi_A(\lambda) = \chi_B(\lambda)$?

(c) Seien Matrizen $A, B \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ mit $\chi_A(\lambda) = \chi_B(\lambda)$ gegeben.
Folgt daraus, dass A und B konjugiert sind?
Betrachten Sie dazu insbesondere das Beispiel $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 28. *Koordinatentransformation*

Wir betrachten das Standardkoordinatensystem $\mathbb{E}$ von $\mathbb{R}^4$ sowie die Koordinatensysteme

$$\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}4\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\\frac{1}{4}\end{pmatrix} \right), \quad \mathbb{G} = \left(\begin{pmatrix}1\\2\\0\\-1\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}0\\-1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\\frac{1}{4}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix} \right).$$

(a) Stellen Sie die Koordinatentransformationen ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$, ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$, ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{G}}$ und ${}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{E}}$ auf.

(b) Bestimmen Sie ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{G}}$. Ist ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{G}}$ eine Isometrie?

(c) Bestimmen Sie ${}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{E}} \circ \left({}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}\right)^{-1} \circ {}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{G}}$.

Aufgabe H 29. *Geometrische und algebraische Vielfachheit*

Gegeben seien die komplexen Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix}3 & 2 & \mathrm{i} & 8\\0 & 3 & 2 & 0\\0 & 0 & 3 & 0\\0 & 0 & 0 & \mathrm{i}\end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix}4 & 0 & -1 & 1\\1 & 3 & -1 & 1\\4-\mathrm{i} & 0 & -1+\mathrm{i} & 1\\0 & 0 & 0 & 3\end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix}3 & 0 & 0 & 0\\0 & 3 & 0 & 0\\3-\mathrm{i} & 0 & \mathrm{i} & 0\\0 & 0 & 0 & 3\end{pmatrix}.$$

(a) Sei $v := (1, 1, 4-\mathrm{i}, 0)^\mathsf{T}$. Für welche $j \in \{1,2,3\}$ ist v ein Eigenvektor von A_j?

(b) Stellen Sie die charakteristischen Polynome $\chi_{A_j}(\lambda)$ auf, und bestimmen Sie die algebraische und die geometrische Vielfachheit der Eigenwerte von A_j für $j \in \{1,2,3\}$. Hat $\mathbb{C}^4$ eine Basis aus Eigenvektoren für A_j? Wenn ja, geben Sie eine solche Basis an.

(c) Gilt $\det(A_2) = \det(A_3)$? Ist A_2 zu A_3 konjugiert?

Aufgabe H 30. *Parameterabhängiges charakteristisches Polynom*

Sei $t \in \mathbb{R}$ ein Parameter. Wir betrachten die Matrix $B_t = \begin{pmatrix}t-1 & 1 & t\\0 & t & -1\\0 & -t^2+1 & t\end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von B_t.

(b) Geben Sie ein solches $t \in \mathbb{R}$ an, dass B_t drei verschiedene reelle Eigenwerte hat.

(c) Geben Sie ein solches $t \in \mathbb{R}$ an, dass B_t genau zwei verschiedene Eigenwerte hat, und berechnen Sie die jeweiligen Eigenräume in $\mathbb{C}^3$.

(d) Für welche $t \in \mathbb{R}$ hat B_t mindestens einen nicht-reellen Eigenwert?

Online-Aufgabe.

Sie finden Ihre Online-Aufgabe auf folgender Webseite.

http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/

T. Conde, J. Meinel,
D. Seus, S. Thelin,
R. Tielen, A. Wünsch

11. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 1

M. Künzer
M. Stroppel

Wintersemester 2016/17

Präsenzübungen

Aufgabe P 31. *Rang, Vielfachheiten, Diagonalisierbarkeit*

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie den Rang der Matrix A. Ist 0 ein Eigenwert von A?

(b) Berechnen Sie einen Eigenwert von A. Berechnen Sie einen Eigenvektor von A.

(c) Geben Sie die algebraische Vielfachheit des Eigenwerts aus **(b)** an.

(d) Geben Sie die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts aus **(b)** an.

(e) Ist A diagonalisierbar?

Aufgabe P 32. *Quadriken*

(a) Betrachten Sie die Quadrik $Q \subseteqq \mathbb{R}^2$. Zeichnen Sie die Quadrik Q in ein Koordinatensystem ein. Bestimmen Sie den Typ von Q.

(i) $Q : -x_1^2 - \left(\frac{x_2}{2}\right)^2 + 1 = 0$

(ii) $Q : -x_1^2 + \left(\frac{x_2}{2}\right)^2 + 1 = 0$

(iii) $Q : x_1^2 = 1$

(b) Welche Gestalt hat die durch $Q : -x_1^2 - \left(\frac{x_2}{2}\right)^2 + 1 = 0$ in $\mathbb{R}^3$ beschriebene Quadrik?

Aufgabe P 33. *Diagonalisierbarkeit*

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 0 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

(a) Ist A diagonalisierbar?

(b) Ist A orthogonal diagonalisierbar? Falls ja, geben Sie eine Orthogonalmatrix T so an, dass $T^{\mathsf{T}}AT$ eine Diagonalmatrix ist. Ist $T^{-1}AT$ eine Diagonalmatrix?

Link zur Vorlesungsumfrage:

https://evasysw.uni-stuttgart.de/evasys/online.php?p=14PMC

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 31. *Orthogonales Diagonalisieren*

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -1 \\ -3 & 9 & -6 & 3 \\ 2 & -6 & 4 & -2 \\ -1 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie den Rang von A.

(b) Bestimmen Sie die Determinante und die Spur von A.

(c) Berechnen Sie die Eigenwerte von A.
Berechnen Sie ihre geometrische und algebraische Vielfachheiten.

(d) Bestimmen Sie eine Orthogonalmatrix T und eine Diagonalmatrix D mit $T^{-1}DT = A$.

Aufgabe H 32. *Eigenwerte, Definitheit*

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ ein Parameter. Sei $A_\alpha = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A in Abhängigkeit von α.

(b) Bestimmen Sie die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten der Eigenwerte in Abhängigkeit von α.

(c) Für welche Werte des Parameters α ist $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von A?

(d) Ist die quadratische Form $q_{A_3} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \colon x \mapsto x^\intercal A_3 x$ positiv definit, negativ definit oder indefinit? Geben Sie einen Vektor $y \in \mathbb{R}^2$ an mit $q_{A_3}(y) < 0$.

Aufgabe H 33. *Quadriken, Typ einer Quadrik*

(a) Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ ein Parameter. Bestimmen Sie für die Quadrik

$$Q_\alpha : x_1^2 - 2x_2^2 + \alpha x_3^2 + 4x_1x_2 + 2\sqrt{5}x_1 + 4\sqrt{5}x_2 + \alpha = 0$$

die Matrixbeschreibung, die erweiterte Matrix und den Typ in Abhängigkeit von α.

(b) Sei $Q = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 1 = 0\}$. Zeichnen Sie die Schnitte von Q mit den Koordinatenebenen $E_{2,3} : x_1 = 0$, $E_{1,3} : x_2 = 0$ und $E_{1,2} : x_3 = 0$ in ein dreidimensionales Koordinatensystem ein.

(c) Sei $Q' = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 - 2x_2^2 = 0\}$. Zeichnen Sie die Schnitte von Q' mit den Koordinatenebenen $E_{2,3} : x_1 = 0$, $E_{1,3} : x_2 = 0$ und $E_{1,2} : x_3 = 0$ in ein dreidimensionales Koordinatensystem ein.

Online-Aufgabe.

Sie finden Ihre Online-Aufgabe auf folgender Webseite.

http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test430/

Präsenzübungen

Aufgabe P 34. *Punktmengen als Quadrik*

Skizzieren Sie M. Finden Sie eine Quadrik Q derart, dass $M = Q$ ist.

(a) $M = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, (x_1, x_2) \text{ hat vom Punkt } (-1, 2) \text{ den Abstand } 3\right\}$

(b) $M = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 2x_1 = x_2 \vee x_1 = 5\right\}$

(c) $M = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x_1 = 1 + 2\cos(t), x_2 = 5 + 3\sin(t)\,,\ t \in [0, 3\pi]\right\}$

Aufgabe P 35. *Modell: Einschaliges Hyperboloid*

Die Quadrik Q sei in $\mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$Q : z_1^2 + 2z_2^2 - z_3^2 - 2 = 0.$$

(a) Stellen Sie Q in euklidischer Normalform dar.
Welcher Typ liegt vor? Welche Gestalt liegt vor?

(b) Betrachten Sie die Schnitte von Q mit den Koordinatenebenen $E_{2,3} : z_1 = 0$ (gelb), $E_{1,3} : z_2 = 0$ (grün) und $E_{1,2} : z_3 = 0$ (blau). Bestimmen Sie die Gestalten dieser Schnitte.

(c) Welche der folgenden Konfigurationen können als Schnitt von Q mit einer Ebene durch den Ursprung entstehen?

- ein Punkt
- die leere Menge
- ein schneidendes Geradenpaar
- eine Ellipse
- eine Hyperbel
- ein paralleles Geradenpaar

Aufgabe P 36. *Ebene Quadrik*

In $\mathbb{R}^2$ sei bezüglich des Standardkoordinatensystems $\mathbb{E}$ die folgende Quadrik gegeben.

$$Q : x_1^2 - 6x_2^2 - 24x_1x_2 + 74x_1 - 18x_2 + 100 = 0$$

(a) Geben Sie von Q die Matrixbeschreibung an.

(b) Bestimmen Sie die euklidische Normalform und die Gestalt von Q.

(c) Geben Sie ein kartesisches Koordinatensystem $\mathbb{F}$ an, in welchem diese euklidische Normalform angenommen wird.

(d) Skizzieren Sie Q sowie das Koordinatensystem $\mathbb{F}$ in das Standardkoordinatensystem.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 34. *Quadrikgleichung transformieren*

Wir betrachten die Quadrik $Q : 2x_1^2 + 3x_2^2 - x_3^2 = 0$ und das kartesische Koordinatensystem

$$\mathbb{F} := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

(a) Ist die Quadrik Q in euklidischer Normalform dargestellt? Welchen Typ hat Q? Welche Gestalt hat Q?

(b) Betrachten Sie die Schnitte von Q mit den Ebenen $E : x_3 = 0$, $E' : x_3 = 1$ und $E'' : x_2 = 1$. Bestimmen Sie die Gestalten dieser Schnitte.

(c) Geben Sie eine Gleichung an, die Q bezüglich $\mathbb{F}$ beschreibt.

(d) Geben Sie ein kartesisches Koordinatensystem $\mathbb{G}$ so an, dass darin Q die Matrixbeschreibung $Q : z^\mathsf{T} A z = 0$ mit einer Matrix $A = (a_{jk})_{j,k}$ besitzt, worin $a_{11} = 0$ ist.

Aufgabe H 35. *Modell: Einschaliges Hyperboloid*

Die Quadrik Q in $\mathbb{R}^3$ sei gegeben durch

$$Q : x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 8x_1x_3 - 2x_2x_3 + (3\sqrt{2} - \sqrt{6})x_1 - 2\sqrt{6}x_2 - (3\sqrt{2} + \sqrt{6})x_3 - 6 = 0.$$

Ein Modell von Q hatten Sie in den Übungen in den Händen. Sie finden das Modell auch unter www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/HM-Stroppel-Material/3D-Modelle/03/

(a) Sei $\mathbb{G} = \left(\tfrac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} \\ 2 \\ 1-\sqrt{3} \end{pmatrix}; \tfrac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \tfrac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$.
Geben Sie eine Gleichung von Q in Koordinaten z_1, z_2, z_3 bezüglich $\mathbb{G}$ an.

(b) Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ ein Parameter. Wir betrachten die Ebene $E_\alpha : z_2 = \alpha$. Bestimmen Sie die Gestalt von $Q \cap E_\alpha$ in Abhängigkeit von α.

(c) Berechnen Sie die Koordinatentransformationen ${}_\mathbb{E}\kappa_\mathbb{G}$ und ${}_\mathbb{G}\kappa_\mathbb{E}$.

Aufgabe H 36. *Räumliche Quadrik*

Die Quadrik Q in $\mathbb{R}^3$ sei in Standardkoordinaten gegeben durch

$$Q\colon\ -7x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_3^2 + 4x_1x_2 + 20x_1x_3 - 16x_2x_3 + 48x_1 - 24x_2 + 6x_3 + 18 = 0.$$

(a) Bestimmen Sie die Matrixbeschreibung $Q : x^\mathsf{T} A x + 2a^\mathsf{T} x + c = 0$

(b) Bestimmen Sie die euklidische Normalform und die Gestalt von Q.
Bestimmen Sie ein kartesisches Koordinatensystem, bezüglich dessen Q diese euklidische Normalform annimmt.

(c) Bestimmen Sie eine Ebene E derart, dass $E \cap Q$ ein Paar schneidender Geraden ist. Bestimmen Sie eine Gleichung für E in Standardkoordinaten x_1, x_2, x_3.

Online-Aufgabe.

Sie finden Ihre Online-Aufgabe auf folgender Webseite.

http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/

Präsenzübungen

Aufgabe P 37. *Modell: Der Doppelkegel*

Der im Modell dargestellte Doppelkegel ist gegeben durch die Gleichung

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0.$$

Außerdem sind dargestellt drei Ebenen:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_3 &= 3 \quad \text{(gelb)} \\ x_1 - x_3 &= 1 \quad \text{(blau)} \\ x_1 &= 1 \quad \text{(grün).} \end{aligned}$$

(a) Welche Schnittlinien liefert der Doppelkegel jeweils in den drei Ebenen?

(b) Welche der folgenden Konfigurationen entstehen als Schnitt des Doppelkegels mit einer passenden Ebene?

- ein Punkt
- die leere Menge
- ein schneidendes Geradenpaar
- ein Kreis
- genau eine Gerade
- ein paralleles Geradenpaar

Aufgabe P 38. *Monotonie und Beschränktheit*

Untersuchen Sie die Folgen auf Monotonie und Beschränktheit. Geben Sie, falls möglich, eine obere Schranke an. Geben Sie, falls möglich, eine untere Schranke an.

(a) $(42)_{n\in\mathbb{N}}$

(b) $\left(n(-1)^{2n-1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

(c) $\left(n(-1)^{n-1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

(d) $\left(\frac{13n(n+1)}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Aufgabe P 39. *Häufungspunkte*

Untersuchen Sie die Folgen auf Häufungspunkte. Geben Sie zu jedem Häufungspunkt eine gegen diesen konvergierende oder bestimmt divergierende Teilfolge an.

(a) $(5\cdot(-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$

(b) $\left(\frac{(-1)^n}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

(c) $((-n)^n)_{n\in\mathbb{N}}$

(d) $\left((-1)^n\frac{13n(n+1)}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

(e) $\left(\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 37. *Modell: Der Doppelkegel*

Wir betrachten das Modell aus den Übungen, und davon insbesondere den Doppelkegel Q und die blaue Ebene E. Sie finden das Modell auch unter:
www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/HM-Stroppel-Material/3D-Modelle/02/.

Seien $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $S = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie das Koordinatensystem $\mathbb{F}$ mit

$$ {}_{\mathbb{F}}P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad {}_{\mathbb{F}}Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad {}_{\mathbb{F}}R = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad {}_{\mathbb{F}}S = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. $$

Ist $\mathbb{F}$ ein kartesisches Koordinatensystem? Ist $\mathbb{F}$ ein Rechtssystem?

(b) Der Doppelkegel wird in Standardkoordinaten durch $Q : x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$ beschrieben. Geben Sie eine Gleichung an, die Q bezüglich $\mathbb{F}$ beschreibt.

(c) Die blaue Ebene wird in Standardkoordinaten durch $E : x_1 - x_3 = 1$ beschrieben. Geben Sie eine Gleichung an, die E bezüglich $\mathbb{F}$ beschreibt.

(d) Bestimmen Sie die euklidische Normalform von $E \cap Q$. Verwenden Sie hierzu das Ergebnis aus **(b)** und **(c)**. Bestimmen Sie die Gestalt von $E \cap Q$.

Aufgabe H 38. *Monotonie und Beschränktheit*

Untersuchen Sie die Folgen auf Monotonie und Beschränktheit. Geben Sie, falls möglich, eine obere Schranke an. Geben Sie, falls möglich, eine untere Schranke an.

(a) $\left(n \sin\left(\frac{3}{2}\pi(2n-1)\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$

(b) $\left(\sqrt{17(n+3)} - \sqrt{17n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

(c) $(n - \sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$

(d) $\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}(2n-1)\right)^n}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Aufgabe H 39. *Häufungspunkte*

Untersuchen Sie die Folgen auf Häufungspunkte. Geben Sie zu jedem Häufungspunkt eine gegen diesen konvergierende oder bestimmt divergierende Teilfolge an.

(a) $\left(\sqrt{49(n+3)} - \sqrt{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

(b) $\left(8\cos(\frac{\pi}{2}n)(2n+1)\right)_{n\in\mathbb{N}}$

(c) $\left(\mathrm{Re}((1+\mathrm{i})^n)2^{-n/2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

(d) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_1 := 3$ und $a_n := 1/(1 - a_{n-1}/2)$ für $n \geqq 2$.