T. Cruz, U. Linden,
S. Nitsche, C. Rösinger,
A. Wünsch

1. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 1

M. Stroppel

Wintersemester 2017/18

Präsenzübungen

Aufgabe P 1. *Elementares Rechnen, Pascalsches Dreieck*

(a) Berechnen Sie ohne Taschenrechner $\frac{3}{5/2} \cdot \frac{25}{6}$ und $101^3 - 100^3$.

(b) Berechnen Sie ohne Taschenrechner $\binom{49}{3}$ und $\binom{7}{3} + \binom{7}{4}$.

(c) Wir betrachten die Gleichung

$$\binom{n}{k}\binom{n+1}{k+2}\binom{n+2}{k+1} = \binom{n}{k+1}\binom{n+1}{k}\binom{n+2}{k+2}.$$

Finden Sie die Faktoren für $n = 2,\ k = 0$ im Pascalschen Dreieck.
Zeigen Sie, dass die Formel allgemein gültig ist.

Aufgabe P 2. *Umgang mit Summen*

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $a_j \in \mathbb{R}$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Welche der Summen A, B, C, D liefern dasselbe Resultat?

$$A = \sum_{k=0}^{n} a_{2k+1}\ , \qquad B = \sum_{k=4}^{n+4} a_{2k-7}\ ,$$

$$C = \sum_{k=1}^{2n+1} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_{2k}\ , \qquad D = \sum_{l=1}^{2n+1} \frac{\left(1-(-1)^l\right)}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2l\pi\right) a_l\ .$$

Aufgabe P 3. *Vollständige Induktion mit Summe*

Beweisen Sie durch vollständige Induktion die folgende Aussage.

$$\text{Für alle } n \in \mathbb{N} \text{ gilt } \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Aufgabe P 4. *Binomischer Lehrsatz*

Beweisen Sie:

$$\text{Für alle } n \in \mathbb{N} \text{ gilt } \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 1. *Binomialkoeffizienten, Summen und binomischer Lehrsatz*

(a) Zeigen Sie $n\binom{n-1}{k-1} = k\binom{n}{k}$ für $n, k \in \mathbb{N}$ mit $n \geqq k$.

(b) Berechnen Sie $\sum_{k=0}^{n}(k+1)\binom{n}{k}$ für $n \in \mathbb{N}$. Sie dürfen dabei die bisherigen Resultate aus der Vorlesung sowie den Präsenz- und Hausübungen verwenden.

(c) Berechnen Sie $\sum_{j=4}^{n}(6j^2 - 2j)$. Dabei dürfen bereits behandelte Summenformeln aus dem Skript verwendet werden.

(d) Berechnen Sie alle reellen Lösungen der Gleichung

$$x^5 - 10x^4 + 70x^3 - 40x^2 = 30x^3 + 40x^2 - 80x + 64.$$

Aufgabe H 2. *Vollständige Induktion mit Teilbarkeit*

Zeigen Sie die folgenden Behauptungen mittels Induktion. Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$, dass

(a) die Zahl $7^n - 1$ ohne Rest durch 6 teilbar ist; das heißt, es gibt ein $k \in \mathbb{N}_0$ so, dass $7^n - 1 = 6k$.

(b) die Zahl $10^n + 3 \cdot 4^{n+2} + 5$ ohne Rest durch 9 teilbar ist; das heißt, es gibt ein $k \in \mathbb{N}_0$ so, dass $10^n + 3 \cdot 4^{n+2} + 5 = 9k$.

Aufgabe H 3. *Vollständige Induktion mit Produkt*

Analog zur Summenschreibweise, führen wir das Produktsymbol ein: $\prod_{j=1}^{m} A_j$ bedeutet, dass man den Term A_j für alle j von 1 bis m auswertet und die entstandenen Zahlen zusammenmultipliziert. Zeigen Sie die folgenden Aussagen mittels vollständiger Induktion.

(a) Es gilt $\prod_{k=1}^{n} k^k \leqq n^{\frac{n(n+1)}{2}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) Es gilt $\prod_{k=2}^{n}\left(\frac{k+1}{k-1}\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqq 2$.

Online-Aufgabe.

Sie finden Ihre Online-Aufgabe auf folgender Webseite.

http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test430/

Bitte geben Sie dort zunächst Ihre Matrikelnummer ein.

Die Lösungen sind als ganze Zahlen oder als Dezimalzahlen mit einem Dezimal**punkt** einzugeben. Sonstige Zeichen, wie zum Beispiel Klammern oder Operatoren wie $*$ und $/$, dürfen **nicht** benutzt werden.

Anschließend müssen Sie das per Email an Ihre studentische Adresse (<st******@stud.uni-stuttgart.de>) erhaltene **Passwort** für die Onlineübungen eintragen.

Innerhalb des Bearbeitungszeitraums können Sie Ihre Eingaben beliebig oft wiederholen, wobei die **letzten** Eingaben gewertet werden. Der Bearbeitungszeitraum endet mittwochs, nach der Abgabe der schriftlichen Übungen in den Übungsgruppen, um 24:00 Uhr. Sie erhalten für die Bearbeitung der Online-Aufgabe 0, 1, oder 2 Punkte.

Präsenzübungen

Aufgabe P 5. *Abbildungen*

(a) Geben Sie an, welche Eigenschaft eine Abbildung erfüllen muss, um nicht injektiv beziehungsweise nicht surjektiv zu sein.

(b) Es seien A die Menge der (anwesenden) Teilnehmer Ihrer Übungsgruppe und B die Menge $\{\text{Januar}, \text{Februar}, \ldots, \text{Dezember}\}$. Weiterhin sei $f\colon A \to B$ die Abbildung, die jedem Teilnehmer seinen Geburtsmonat zuordnet. Ist f injektiv? Ist f surjektiv? Ist f bijektiv?

(c) Sei $g\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}\colon x \mapsto (x-3)^2 - 1$. Skizzieren Sie den Graphen von g. Ist g injektiv? Ist g surjektiv? Ist g bijektiv?

(d) Sei $h\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+\colon x \mapsto x^{-1}$.
Skizzieren Sie den Graphen von h. Ist h injektiv? Ist h surjektiv? Ist h bijektiv?

Aufgabe P 6. *Ungleichungen, Beträge*

(a) Bestimmen Sie die Menge $\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, |x-1| = |x-2|\right\}$.

(b) Skizzieren Sie die Menge $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 2x + 3y \leqq 6\right\}$.

(c) Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der Gleichung $x^2 - 5|x| + 6 = 0$.

Aufgabe P 7. *Rechnen mit komplexen Zahlen, komplexe Zahlenebene*

Geben Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $a + b\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an und zeichnen Sie sie in der komplexen Zahlenebene.

(a) $z_1 = (1-\mathrm{i})^2$

(b) $z_2 = \dfrac{4+3\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}$

(c) $z_1 + z_2$

(d) $z_3 = \dfrac{4}{1-\sqrt{3}\,\mathrm{i}}$

(e) $z_4 = \mathrm{Im}\left(\dfrac{7+\mathrm{i}}{6-2\mathrm{i}}\right) + \mathrm{Re}(\overline{3+2\mathrm{i}})$

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 4. *Abbildungen*

Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität.

(a) $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}\colon n \mapsto \binom{n+1}{n}$

(b) $g\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^+\colon x \mapsto \frac{x^2}{|x|}$

(c) $h\colon [1,2] \to [0,10]\colon x \mapsto (x^2-1)^2$

(d) $s\colon \mathbb{C} \setminus \{\mathrm{i}\} \to \mathbb{C}\colon z \mapsto \frac{z}{z-\mathrm{i}}$

Aufgabe H 5. *Ungleichungen, Beträge*

(a) Bestimmen Sie jeweils die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, die die Ungleichung erfüllen.

(i) $x - 7 > x^4(x-7)$

(ii) $2\,|x^2-2| < x\,|x+\sqrt{2}|$

(b) Seien $x, y \in \mathbb{R}^+$ und bezeichne $\min\{x,y\}$ das Minimum der Zahlen x und y. Zeigen Sie die folgende Ungleichungskette:

$$\min\{x,y\} \leqq \frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} \leqq \sqrt{xy}.$$

Aufgabe H 6. *Komplexe Zahlenebene*

Skizzieren Sie die folgenden Mengen in der komplexen Zahlenebene.

(a) $A := \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \operatorname{Im}(\overline{z} + 1 - \mathrm{i}) \leqq 1 \right\}$

(b) $B := \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \frac{z}{1+\mathrm{i}} \in \mathbb{R} \right\}$

(c) $C := \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \operatorname{Re}(z) \neq 0 \ \wedge \ 1 < \frac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)} \leqq 2 \right\}$

(d) $D := \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, 2|\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)| < 2 \right\}$

Online-Aufgabe.

Sie finden ab Donnerstag Ihre Online-Aufgabe auf folgender Webseite.

http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/

Bitte geben Sie dort zunächst Ihre Matrikelnummer ein.

Die Lösungen sind als ganze Zahlen oder als Dezimalzahlen mit einem Dezimal**punkt** einzugeben. Sonstige Zeichen, wie zum Beispiel Klammern oder Operatoren wie $*$ und $/$, dürfen **nicht** benutzt werden.

Anschließend müssen Sie das per Email erhaltene **Passwort** für die Onlineübungen eintragen.

Innerhalb des Bearbeitungszeitraums können Sie Ihre Eingaben beliebig oft wiederholen, wobei die **letzten** Eingaben gewertet werden. Der Bearbeitungszeitraum endet mittwochs, nach der Abgabe der schriftlichen Übungen in den Übungsgruppen, um 24:00 Uhr. Sie erhalten für die Bearbeitung der Online-Aufgabe 0, 1, oder 2 Punkte.

Präsenzübungen

Aufgabe P 8. *Polarkoordinaten komplexer Zahlen*
Geben Sie die komplexen Zahlen

$$z_1 = \sin(\tfrac{\pi}{6}) + \sin(\tfrac{\pi}{6}) \cdot \mathrm{i}, \quad z_2 = \sqrt{\tfrac{3}{2}}\,\cos(\tfrac{\pi}{4}) + \sqrt{\tfrac{1}{2}}\,\sin(\tfrac{\pi}{4}) \cdot \mathrm{i}, \quad z_3 = \sin(\tfrac{7\pi}{8}) + \cos(\tfrac{7\pi}{8}) \cdot \mathrm{i}$$

in Polarkoordinatendarstellung an und zeichnen Sie sie in der komplexen Zahlenebene.

Aufgabe P 9. *Polarkoordinaten*
Seien

$$z_1 = 1 + \mathrm{i} \quad \text{und} \quad z_2 = \frac{1 - \sqrt{3} \cdot \mathrm{i}}{2}.$$

Berechnen Sie jeweils die Polarkoordinatendarstellung der folgenden komplexen Zahlen, und zeichnen Sie die Zahlen in der komplexen Zahlenebene. Ordnen Sie diese Zahlen dann nach ihrem Absolutbetrag.

(a) z_1
(b) z_2
(c) z_1^3
(d) $z_1 \cdot z_2$
(e) $z_1 - z_2$
(f) $1/\overline{z_2}$
(g) $1/\overline{z_1}$
(h) z_2^{40}

Aufgabe P 10. *Vektorraum der Polynomfunktionen*
Sei Pol($\mathbb{R}$) die Menge aller Polynomfunktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Mit den üblichen Operationen für Funktionen bildet Pol($\mathbb{R}$) einen Vektorraum. Welche der folgenden Teilmengen von Pol($\mathbb{R}$) ist ein Untervektorraum?

(a) $U_1 := \{f \in \mathrm{Pol}(\mathbb{R}) \mid f(0) = 4\}$
(b) $U_2 := \{f \in \mathrm{Pol}(\mathbb{R}) \mid f(2) = 0\}$
(c) $U_3 := \{f \in \mathrm{Pol}(\mathbb{R}) \mid f \text{ hat Grad kleiner gleich } 3\}$
(d) $U_4 := \{f \in \mathrm{Pol}(\mathbb{R}) \mid f(x) \geqq 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\}$

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 7. *Komplexe Lösungen von Gleichungen*

Geben Sie jeweils alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der folgenden Gleichungen an.

(a) $z^5 = 7$ **(b)** $z^{12} - z = 0$

(c) $4z^2 - 8z + 5 = 0$ **(d)** $z^2 + \mathrm{i}z + 6 = 5z + 2\mathrm{i}$

Aufgabe H 8. *Linearfaktorzerlegung von Polynomen*

(a) Zerlegen Sie die folgenden Polynome in Linearfaktoren.

$$p_1(X) = X^4 - 3X^3 - 33X^2 + 35X$$
$$p_2(X) = X^3 + (1-\mathrm{i})X^2 + (2-\mathrm{i})X + 2$$
$$p_3(X) = X^4 + X^2 - 2$$

(b) Geben Sie ein Polynom p vom Grad 3 an, sodass $p(2) = p(-3) = p(\frac{1}{2}) = 0$ und $p(0) = 1$ gilt.

Aufgabe H 9. *Untervektorräume*

Gegeben seien die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

in $\mathbb{R}^4$. Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^4$ sind Untervektorräume?

(a) $V_1 := \{\alpha v_1 + \beta v_3 \in \mathbb{R}^4 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ **(b)** $V_2 := \{v_1 + \alpha v_2 \in \mathbb{R}^4 \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$

(c) $V_3 := \{v \in \mathbb{R}^4 \mid \langle v \,|\, v_2\rangle = 0\}$ **(d)** $V_4 := V_1 \cap V_3$

(e) $V_5 := \{v \in \mathbb{R}^4 \mid \langle v \,|\, v_2\rangle = 0 \wedge \langle v \,|\, v_3\rangle = 0\}$ **(f)** $V_6 := \{v \in \mathbb{R}^4 \mid \langle v \,|\, v_1\rangle = 1\}$

(g) $V_7 := \{v \in \mathbb{R}^4 \mid \langle v \,|\, v_2\rangle = 0 \vee \langle v \,|\, v_3\rangle = 0\}$ **(h)** $V_8 := \{v \in V_2 \mid |v| = 1\}$

Online-Aufgabe.

Sie finden ab Donnerstag Ihre Online-Aufgabe auf folgender Webseite.

http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test430/

Bitte geben Sie dort zunächst Ihre Matrikelnummer ein.

Die Lösungen sind als ganze Zahlen oder als Dezimalzahlen mit einem Dezimal**punkt** einzugeben. Sonstige Zeichen, wie zum Beispiel Klammern oder Operatoren wie $*$ und $/$, dürfen **nicht** benutzt werden.

Anschließend müssen Sie das per Email erhaltene **Passwort** für die Onlineübungen eintragen.

Innerhalb des Bearbeitungszeitraums können Sie Ihre Eingaben beliebig oft wiederholen, wobei die **letzten** Eingaben gewertet werden. Der Bearbeitungszeitraum endet mittwochs, nach der Abgabe der schriftlichen Übungen in den Übungsgruppen, um 24:00 Uhr. Sie erhalten für die Bearbeitung der Online-Aufgabe 0, 1, oder 2 Punkte.

T. Cruz, U. Linden,
S. Nitsche, C. Rösinger,
A. Wünsch

4. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 1

M. Stroppel

Wintersemester 2017/18

Präsenzübungen

Aufgabe P 11. *Geraden und Ebenen*

Gegeben sind die Punkte $P = (0, 2, 5)$, $Q = (3, 5, 6)$ und $R = (-1, 0, 0)$, sowie die Vektoren $v = (1, 0, 0)$ und $w = (-6, -6, -2)$ in $\mathbb{R}^3$.

(a) Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung der Geraden g, die durch P und Q geht.

(b) Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung der Ebene E, die durch P, Q und R geht.

(c) Welche der folgenden Geraden sind parallel zu g? Welche stimmen mit g überein? Welche der folgenden Geraden sind parallel zu E?

$$h_1 : Q + \lambda_1 v\,, \quad h_2 : R + \lambda_2 w\,; \quad \lambda_1\,, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

Aufgabe P 12. *Lineare Unabhängigkeit, Basis und Skalarprodukt*

Gegeben seien $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$.

(a) Sind v_1, v_2 linear unabhängig? Sind v_1, 0 linear unabhängig?

(b) Sind v_2, v_3, v_5 linear unabhängig?

(c) Bilden die Vektoren v_1, v_2, v_4, v_5 eine Basis von $\mathbb{R}^4$?

(d) Bestimmen Sie eine Basis von $\mathrm{L}\,(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$.

(e) Geben Sie drei verschiedene Basen von $\mathrm{L}\,(v_1, v_2)$ an.

(f) Bestimmen Sie $\langle v_3 \,|\, v_5 \rangle$ und $\langle v_4 \,|\, v_5 \rangle$.

(g) Bestimmen Sie $w \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ so, dass $\langle w \,|\, v_2 \rangle + \langle v_5 \,|\, w \rangle = 0$.

Aufgabe P 13. *Vektorraum der Polynome*

Wir betrachten den Vektorraum $\mathrm{Pol}_2 \mathbb{R} := \left\{ \sum_{j=0}^{2} a_j X^j \,\middle|\, a_j \in \mathbb{R} \right\}$ der reellen Polynome vom Grad höchstens 2. Es sei $B\colon b_1(X) = X^2, b_2(X) = X - 1, b_3(X) = X + 1$, und es seien $p(X) := X^2 + 2X$ und $q(X) := X^2 + 2X + 1$ in $\mathrm{Pol}_2 \mathbb{R}$ gegeben.

(a) Stellen Sie $p(X)$ und $q(X)$ jeweils als Linearkombinationen von $b_1(X)$, $b_2(X)$ und $b_3(X)$ dar.

(b) Zeigen Sie, dass B eine Basis von $\mathrm{Pol}_2 \mathbb{R}$ ist.

(c) Bestimmen Sie die Koordinatenvektoren ${}_B p$, ${}_B q$ und ${}_B (p + q)$.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 10. *Lineare Unabhängigkeit und Basis*

Gegeben seien für $\alpha \in \mathbb{R}$ die folgenden Vektoren in $\mathbb{R}^5$.

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \; v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \; v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ -2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \; v_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 2 \\ -4 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie $w \in \mathbb{R}^5$ so, dass v_1, v_2, v_3, v_4, w eine Basis von $\mathbb{R}^5$ ist.

(b) Bestimmen Sie zwei verschiedene Basen von $\mathrm{L}(v_2 + v_3, 2v_1 + v_4)$.

(c) Bestimmen Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$ so, dass v_1, v_3, v_5 linear unabhängig sind.

(d) Bestimmen Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$ so, dass v_2, v_4, v_5 linear abhängig sind.

Aufgabe H 11. *Skalarprodukt*

Sei $\mathrm{Pol}_1 \mathbb{R} := \left\{ \sum_{j=0}^{1} a_j X^j \;\middle|\; a_j \in \mathbb{R} \right\}$ der Vektorraum aller reellen Polynome vom Grad höchstens 1. Welche der Eigenschaften für die Definition eines Skalarprodukts (siehe **2.6.2**) erfüllen die folgenden Abbildungen $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle_j$ für $j = 1, \ldots, 4$? Geben Sie für nicht erfüllte Eigenschaften jeweils ein Gegenbeispiel an.

(a) $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle_1 : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}\colon \langle v \,|\, w \rangle_1 = \sum_{j=1}^{4} |v_j w_j|$.

(b) Sei $u = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ so gewählt, dass $u_j > 0$ für alle j gilt.
$\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\colon \langle v \,|\, w \rangle_2 = \sum_{j=1}^{n} u_j v_j w_j$.

(c) $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle_3 : \mathrm{Pol}_1 \mathbb{R} \times \mathrm{Pol}_1 \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon \langle r_0 + r_1 X \,|\, t_0 + t_1 X \rangle_3 = r_1 t_1 - r_1 t_0 + r_0 t_1 + r_0 t_0$.

(d) $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle_4 : \mathrm{Pol}_1 \mathbb{R} \times \mathrm{Pol}_1 \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon \langle r_0 + r_1 X \,|\, t_0 + t_1 X \rangle_4 = (r_1 t_1)^2 - (r_0 t_0)^2$.

Aufgabe H 12. *Funktionenräume*

Gegeben seien die folgenden Funktionen aus dem Vektorraum $\mathcal{C}^0([0, 2\pi])$ (siehe **2.6.3**):

$f_1\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}\colon x \mapsto 1$ $\qquad f_2\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \left(\frac{x}{\pi} - 1\right)^2$

$f_3\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \sin(3x)$ $\qquad f_4\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \cos(4x)$

(a) Zeigen Sie, dass die Funktionen f_1, f_2, f_3 und f_4 linear unabhängig sind.

(b) Zeigen Sie für alle $x \in \mathbb{R}$ die Identität $\sin(3x) = 3\sin(x) - 4\sin(x)^3$. Sie dürfen dabei die Additionstheoreme aus der Vorlesung für $\cos$ und $\sin$ (siehe **1.8.3**) benutzen.

(c) Sei $g\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}\colon g(x) = 8\sin(x)^3 + \cos(\frac{\pi}{4})\cos(4x) - 6\sin(x) + \frac{3}{\pi^2} x(x - 2\pi) - 11$. Gilt $g \in \mathrm{L}(f_1, f_2, f_3, f_4)$?

(d) Sei $h\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}\colon h(x) = (\sin(x) - 1)^3$. Gilt $h \in \mathrm{L}(f_1, f_3)$?

Online-Aufgabe.

Sie finden ab Donnerstag Ihre Online-Aufgabe auf folgender Webseite.

http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/

Präsenzübungen

Aufgabe P 14. *Ebene, Hessesche Normalform, Flächenberechnung*

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ ein Parameter und seien $P_1 = (0,1,1)$, $P_2 = (2,0,1)$ und $P_3 = (\alpha,1,2)$ Punkte in $\mathbb{R}^3$. Sei ferner E_α die Ebene, die P_1, P_2 und P_3 enthält, und F die durch $x_1+x_2+x_3 = 5$ definierte Ebene.

(a) Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung von E_α.

(b) Geben Sie die Ebene E_α in Hessescher Normalform an. Bestimmen Sie den Abstand von E_α zum Ursprung. Für welche Werte von α ist dieser Abstand minimal?

(c) Für welche Werte von α sind die Ebenen E_α und F zueinander orthogonal?

(d) Bestimmen Sie für jedes α eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$, die einen Normalenvektor von E_α enthält.

(e) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks mit den Eckpunkten P_1, P_2 und P_3. Für welches α ist dieser Flächeninhalt minimal? Wie groß ist der minimale Inhalt?

Aufgabe P 15. *Rechnen mit Matrizen*

Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 3 \\ -1+\mathrm{i} \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3\mathrm{i} \\ 4+2\mathrm{i} & 1 & 1 \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \; F = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie damit, falls möglich:

$$DA, \quad DC, \quad CD, \quad C^2, \quad CC^\intercal, \quad C^\intercal C, \quad A + CB.$$

(b) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$F^n = \begin{pmatrix} 1+2n & -4n \\ n & 1-2n \end{pmatrix}.$$

Aufgabe P 16. *Blockmatrizen*

Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Produkte AB und BA.

(b) Bei A und B handelt es sich um sogenannte Blockmatrizen mit Dreiecksstruktur. Was fällt Ihnen bezüglich der Block- und Dreiecksstruktur von AB und BA auf?

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 13. *Matrixmultiplikation*

Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} 2 & \mathrm{i} \\ 0 & 3 \\ 4 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie damit die Produkte BC, CB und ADB.

(b) Berechnen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ die Potenzen A^n, B^n und C^n.

Aufgabe H 14. *Skalarprodukt und dyadisches Produkt*

(a) Gegeben seien für $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ die Vektoren v_j durch

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T,$$
$$v_3 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T, \qquad v_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}^T.$$

Berechnen Sie alle Vektoren des $\mathbb{R}^5$, welche auf allen v_j senkrecht stehen.

(b) Gegeben seien im $\mathbb{R}^n$ die Vektoren

$$v = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & n \end{pmatrix}^T, \qquad w = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 & \ldots & n^2 \end{pmatrix}^T.$$

Berechnen Sie den Skalar $v^T \cdot w$ und alle Komponenten der Matrix $v \cdot w^T$.

Aufgabe H 15. *Schnitt von Ebenen*

Sei $t \in \mathbb{R}$. Seien ferner im $\mathbb{R}^3$ die Ebenen E und F_t gegeben durch

$$E\colon x_1 + x_2 = 2, \qquad F_t\colon tx_1 + (1+t)x_2 - tx_3 = 1.$$

(a) Zeigen Sie, dass sich E und alle F_t in einem Punkt schneiden.

(b) Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung von E und die Hesse-Normalform von F_t.

(c) Berechnen Sie die Schnittgerade von E und F_0 und jene von E und F_{-1}.

(d) Berechnen Sie den Cosinus des Winkels zwischen diesen beiden Schnittgeraden.

Online-Aufgabe.

Sie finden ab Donnerstag Ihre Online-Aufgabe auf folgender Webseite.

http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test430/

Präsenzübungen

Aufgabe P 17. *Lineare Gleichungssysteme*

(a) Wir betrachten die folgenden linearen Gleichungssysteme.

(i)
$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 2x_3 &= 6 \\ 5x_2 - 2x_3 &= 7 \end{aligned}$$

(ii)
$$\begin{aligned} 3x_1 - 6x_2 &= 3(1 - x_3) \\ -2x_1 + 6x_2 &= -2x_3 - 6 \\ 10(x_3 - x_2) &= 7 - 6x_1 \end{aligned}$$

Stellen Sie jeweils die erweiterte Koeffizientenmatrix $[A\|b]$ auf. Formen Sie diese in die in Satz 3.7.2 angegebene Form um und ermitteln Sie damit die Lösungsmenge.

(b) Wir betrachten das folgende lineare Gleichungssystem in Matrixform.

$$\left[\begin{array}{cccc||c} 2 & 4 & 3 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

Bringen Sie dieses Gleichungssystem in die Form von Satz 3.7.2. Geben Sie eine spezielle Lösung und eine Basis des Lösungsraums des zugehörigen homogenen linearen Gleichungssystems an. Bestimmen Sie mit diesen Ergebnissen die Lösungsmenge.

Aufgabe P 18. *Lineare Abbildungen*

(a) Welche der folgenden Abbildungen ist linear?

$$\begin{aligned} &f_1\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon (x,y)^\intercal \mapsto (y,x)^\intercal, \\ &f_2\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon (x,y)^\intercal \mapsto (x+1,y)^\intercal, \\ &f_3\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2\colon (x,y,z)^\intercal \mapsto (2x,y+z)^\intercal. \end{aligned}$$

(b) Für welche Vektoren $w \in \mathbb{R}^2$ ist $f_1(w) = w$? Interpretieren Sie die Abbildung f_1 geometrisch.

(c) Gibt es eine lineare Abbildung $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $h((1,1)^\intercal) = (1,2)^\intercal$, $h((1,2)^\intercal) = (1,3)^\intercal$ und $h((0,1)^\intercal) = (1,0)^\intercal$?

Aufgabe P 19. *Ingenieure beim Glücksspiel*

André Citroën, Rudolf Diesel und Henry Ford spielen ein Würfelspiel, bei dem jeder mit einem Würfel genau einmal würfeln darf. Rudolf Diesel würfelt nur eine halb so hohe Augenzahl wie Henry Ford und André Citroën zusammen. Dahingegen würfelt Henry Ford eine genauso hohe Augenzahl wie die anderen beiden gemeinsam. Wenn André Citroën, Rudolf Diesel und Henry Ford zusammengenommen genau die bei einem Würfel höchstmögliche Augenzahl würfeln, welche Augenzahl würfeln dann die einzelnen Ingenieure?

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 16. *Lineare Gleichungssysteme*

Wir betrachten das folgende lineare Gleichungssystem.

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcrcr}
 & - & x_2 & + & 11x_3 & + & 5x_4 & - & 2x_5 & - & 2x_6 & - & 3x_7 & = & -3 \\
-2x_1 & + & x_2 & - & 4x_3 & + & 2x_4 & + & 5x_5 & + & 2x_6 & + & 3x_7 & = & 1 \\
-5x_1 & + & 2x_2 & - & 5x_3 & + & 8x_4 & + & 12x_5 & + & 4x_6 & + & 6x_7 & = & 1 \\
6x_1 & - & x_2 & - & 10x_3 & & & - & 15x_5 & - & 2x_6 & - & 3x_7 & = & 3 \\
-2x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & + & x_4 & & & + & 4x_6 & + & 6x_7 & = & 4 \\
10x_1 & - & 6x_2 & + & 31x_3 & - & 9x_4 & + & 3x_5 & - & 12x_6 & - & 18x_7 & = & -8
\end{array}$$

(a) Stellen Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix $[A\|b]$ auf und formen Sie diese in die in Satz 3.7.2 angegebene Form um.

(b) Bestimmen Sie den Lösungsraum des linearen Gleichungssystems.

(c) Ersetzen Sie in der letzten Gleichung die rechte Seite (also den Wert -8) durch 0. Entscheiden Sie, ob das lineare Gleichungssystem dann weiterhin eine Lösung besitzt.

Aufgabe H 17. *Lineares Gleichungssystem*

Sei $t \in \mathbb{R}$ ein Parameter. Sei $A_t := \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & t & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ sowie $b_t := \begin{pmatrix} -2 \\ t+1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie eine Basis von $\left\{x \in \mathbb{R}^5 \;\middle|\; A_t x = 0\right\}$ in Abhängigkeit von t.

(b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\left\{x \in \mathbb{R}^5 \;\middle|\; A_t x = b_t\right\}$ in Abhängigkeit von t.

Aufgabe H 18. *Lineare Abbildungen*

(a) Zeigen Sie, dass $\delta\colon \operatorname{Pol}_2 \mathbb{R} \to \operatorname{Pol}_2 \mathbb{R}\colon a_2x^2 + a_1x + a_0 \mapsto 2a_2x + a_1$ eine lineare Abbildung ist (dass also das Ableiten eine lineare Abbildung liefert, siehe **P 13**).

(b) Zeigen Sie, dass $T\colon \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}\colon (a_{ij})_{1\leqq i,j\leqq n} \mapsto \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii}$ eine lineare Abbildung ist.

(c) Welche der Eigenschaften für die Definition einer linearen Abbildung (siehe **3.8.1**) erfüllen die folgenden Abbildungen? Geben Sie für nicht erfüllte Eigenschaften jeweils ein Gegenbeispiel an.

$$f_1\colon\ \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}\colon \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto ad - bc$$

$$f_2\colon\ \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}\colon \quad A \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(d) Bestimmen Sie eine lineare Abbildung $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit den folgenden Eigenschaften:

$$g((1,0,-1)^\intercal) = (-1,0,1)^\intercal,\ g((0,2,0)^\intercal) = (0,4,0)^\intercal.$$

Online-Aufgabe.

Sie finden ab Donnerstag Ihre Online-Aufgabe auf folgender Webseite.

http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/

T. Cruz, U. Linden,
S. Nitsche, C. Rösinger,
A. Wünsch

7. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 1

M. Stroppel

Wintersemester 2017/18

Präsenzübungen

Aufgabe P 20. *Koordinatendarstellung von Vektoren*

Zeichnen Sie die Vektoren $a = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ in ein Koordinatensystem ein. Die Basis von $\mathbb{R}^2$, die aus a und b besteht, bezeichnen wir mit B. Zeichnen Sie die Vektoren

$$u = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix},\ v = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix},\ w = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

in dasselbe Koordinatensystem ein und bestimmen Sie grafisch ${}_B u$, ${}_B v$ und ${}_B w$.

Aufgabe P 21. *Spiegelung an einer Ebene*

Wir betrachten die Spiegelung $\sigma\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ an der durch $E\colon x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0$ gegebenen Ebene in $\mathbb{R}^3$. Wählen Sie eine geeignete Basis und bestimmen Sie die Matrixbeschreibung von σ bezüglich dieser Basis.

Aufgabe P 22. *Lineare Abbildung*

Gegeben sei die lineare Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\varphi\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \varphi\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

(a) Geben Sie die Matrixdarstellung von φ bezüglich der Standardbasis an.

(b) Geben Sie die Matrixdarstellung von φ bezüglich der Basis $B : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ an.

(c) Bestimmen Sie das Bild von $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ unter φ.

Aufgabe P 23. *Rang, Injektivität, Surjektivität*

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie den Rang von A.

(b) Untersuchen Sie die Abbildung

$$f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3\colon x \mapsto Ax$$

auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 19. *Differentialoperator in Matrixdarstellung*

Wir betrachten die lineare Abbildung $T : \operatorname{Pol}_3 \mathbb{R} \to \operatorname{Pol}_3 \mathbb{R}$, die gegeben ist durch $f \mapsto f + f'$. Die Polynome $b_1(X) = X^3$, $b_2(X) = X^2$, $b_3(X) = X$ und $b_4(X) = 1$ bilden eine Basis B von $\operatorname{Pol}_3 \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrizen von T und T^3 bezüglich der Basis B.

(b) Berechnen Sie die inverse Abbildung von T. Geben Sie $T^{-1}f$ an, wobei $f \in \operatorname{Pol}_3 \mathbb{R}$ gegeben ist durch $f(X) = X^3 - 6X$.

Aufgabe H 20. *Basistransformation*

Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{9}{2} & -6 & -10 & 9 & 8 \\ -3 & -3 & -3 & 5 & 3 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -7 & 2 & 3 \\ -5 & -5 & -9 & 9 & 7 \end{pmatrix}$$

beschreibe eine lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ bezüglich der jeweiligen Standardbasen, d.h. $\varphi(x) = Ax$ für alle $x \in \mathbb{R}^5$. Gegeben seien außerdem die Basen

$$B : \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

von $\mathbb{R}^5$ bzw. $\mathbb{R}^4$. Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix ${}_C\varphi_B$ und geben Sie dann Kern und Bild von φ jeweils in Standardkoordinaten an.

Aufgabe H 21. *Rechts- und Linksinverse*

Gegeben seien die Matrizen

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie für jede der gegebenen Matrizen eine Rechts- bzw. eine Linksinverse, falls diese existieren.

Online-Aufgabe.

Sie finden ab Donnerstag Ihre Online-Aufgabe auf folgender Webseite.

http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test430/

Präsenzübungen

Aufgabe P 24. *Laplacescher Entwicklungssatz*

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 5 & 7 & 1 & 8 \\ 2 & 3 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie $\det(A)$ durch Entwicklung nach der ersten Zeile.

(b) Entwickeln Sie nun $\det(A)$ nach einer Zeile oder Spalte Ihrer Wahl.

(c) Berechnen Sie $\det(A)$ unter Verwendung elementarer Umformungen (Gauß -Algorithmus).

(d) Finden Sie alle $\mu \in \mathbb{R}$ mit $\det(\mu A) = 1$.

Aufgabe P 25. *Determinanten und Invertierbarkeit*

Untersuchen Sie die folgenden Matrizen in Abhängigkeit von $t \in \mathbb{R}$ auf Invertierbarkeit:

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & t^2 \end{pmatrix}, \qquad B_t = \begin{pmatrix} 2-t & 0 & 0 \\ 1 & -1-t & 2 \\ 1 & 1 & 2-t \end{pmatrix}.$$

Aufgabe P 26. *Determinanten bei Block-Dreiecksgestalt*

Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 & 3 \\ 1 & 2 & 13 & 99 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 11 \\ -2 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} & 2 & 3 & -1 \\ 1-\mathrm{i} & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5+\mathrm{i} & 3+\mathrm{i} \\ 0 & 0 & 2 & \mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe P 27. *Eigenschaften von Determinanten*

Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie $\det(A)$ und $\det(B)$.

(b) Bestimmen Sie $\det(AB)$, $\det(-2A)$ und $\det(A^\mathsf{T} B^\mathsf{T})$, indem Sie diese Größen auf die Ergebnisse aus **(a)** zurückführen.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 22. *Unterschiedliche Wege zur Determinantenberechnung*

Gegeben sei die Matrix
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie ihre Determinante

(a) unter Berücksichtigung der Blockstruktur.

(b) unter Verwendung elementarer Zeilenumformungen (Gauß -Algorithmus).

(c) indem Sie diese und alle benötigten Unterdeterminanten nach der jeweils dritten Zeile entwickeln.
Berechnen Sie Determinanten von (3×3) – Matrizen mit der Regel von Sarrus; Determinanten, die offensichtlich verschwinden, müssen nicht weiter entwickelt werden.

Aufgabe H 23. *Volumenberechnung*

Gegeben seien die Matrix A und die Vektoren v_1, v_2 und v_3 durch
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie das Volumen des von v_1, v_2 und v_3 aufgespannten Spats.

(b) Berechnen Sie das Volumen des von Av_1, Av_2 und Av_3 aufgespannten Spats.

(c) Berechnen Sie die Determinante von A.

(d) Wie hängen die in **(a)** und **(b)** berechneten Volumina mit der Determinante zusammen?

Aufgabe H 24. *Eigenschaften von Determinanten*

Es seien die folgenden Matrizen gegeben:
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 9 & -6 \\ 4 & -1 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie $\det(A)$ und $\det(B)$.

(b) Bestimmen Sie $\det(A^2B^3)$ und $\det(C^3(A-B))$.

Online-Aufgabe.

Sie finden ab Donnerstag Ihre Online-Aufgabe auf folgender Webseite.

http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/

Präsenzübungen

Aufgabe P 28. *Schmidtsches Orthonormierungsverfahren*

Seien $v_1 = (1, 0, -1)^\intercal$, $v_2 = (0, 0, 1)^\intercal$, $v_3 = (0, -1, 1)^\intercal$ in $\mathbb{R}^3$.
Konstruieren Sie eine Orthonormalbasis $F\colon f_1, f_2, f_3$ von $\mathbb{R}^3$ mit Hilfe des Schmidtschen Orthonormierungsverfahrens so, dass $\mathrm{L}(f_1) = \mathrm{L}(v_1)$, sowie $\mathrm{L}(f_1, f_2) = \mathrm{L}(v_1, v_2)$.
Bildet F ein Rechtssystem?

Aufgabe P 29. *Koordinatentransformation*

Sei $\mathbb{E}$ das Standardkoordinatensystem für $\mathbb{R}^2$. Weiter seien die affinen Koordinatensysteme

$$\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \quad \text{und} \quad \mathbb{G} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

gegeben. Sei P der Punkt mit ${}_{\mathbb{E}}P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(a) Skizzieren Sie die Koordinatensysteme $\mathbb{F}$ und $\mathbb{G}$, sowie den Punkt P in das Standardkoordinatensystem $\mathbb{E}$.

(b) Bestimmen Sie ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$ und ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$.

(c) Bestimmen Sie ${}_{\mathbb{F}}P$.

(d) Bestimmen Sie ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{G}}$ und ${}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{E}}$.

(e) Bestimmen Sie ${}_{\mathbb{G}}P$.

(f) Bestimmen Sie ${}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{F}}$ und mit Teil (c) nochmals ${}_{\mathbb{G}}P$.
Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit Teil (e).

Aufgabe P 30. *Affine Abbildungen und Isometrien*

Gegeben ist die affine Abbildung

$$\alpha\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon v \mapsto \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & 1 & 1 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Was ist der lineare Anteil, was ist der Translationsanteil von α?

(b) Untersuchen Sie, ob α eine Affinität ist und ob es sich dabei um eine Isometrie handelt.

(c) Bestimmen Sie eine Drehung δ und eine Translation τ so, dass $\alpha = \tau \circ \delta$ ist.

(d) Bestimmen Sie die Drehachse und den Drehwinkel von δ.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 25. *Drehung und Spiegelung*

(a) Sei $\beta\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine affine Abbildung, die sich aus einer Drehung um die x_1-Achse und einer nachfolgenden Translation in Richtung der x_2-Achse zusammensetzt und die $\beta((1,0,1)^\intercal) = (1,-1,\frac{1}{2})^\intercal$ erfüllt. Welche Möglichkeiten gibt es für den linearen Anteil und den Translationsanteil?

(b) Sei $\gamma\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die Spiegelung an der Ebene $U := \mathrm{L}\left((1,3,2)^\intercal, (-1,0,1)^\intercal\right)$ und sei F die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie ${}_F\gamma_F$ und $\det({}_F\gamma_F)$.

Aufgabe H 26. *Koordinatentransformation*

Seien das affine Koordinatensystem $\mathbb{F} := \left(\begin{pmatrix} 2\\-1\\1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1\\-1\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2\\1\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4\\-2\\2 \end{pmatrix}\right)$

und die Koordinatentransformation ${}_\mathbb{E}\kappa_\mathbb{G} : v \mapsto \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & 6 & 0\\ -\sqrt{3} & 0 & \sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} -1\\1\\0 \end{pmatrix}$ gegeben.

Seien O, P und Q Punkte mit ${}_\mathbb{E}O := \begin{pmatrix} 0\\0\\0 \end{pmatrix}$, ${}_\mathbb{E}P := \begin{pmatrix} 1\\-2\\1 \end{pmatrix}$, ${}_\mathbb{F}Q := \begin{pmatrix} -2\\1\\\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie ${}_\mathbb{E}\kappa_\mathbb{F}$ und ${}_\mathbb{F}\kappa_\mathbb{E}$.

(b) Bestimmen Sie ${}_\mathbb{F}O$, ${}_\mathbb{F}P$ und ${}_\mathbb{E}Q$.

(c) Bestimmen Sie das affine Koordinatensystem $\mathbb{G}$. Ist $\mathbb{G}$ ein kartesisches Koordinatensystem?

(d) Bestimmen Sie ${}_\mathbb{G}\kappa_\mathbb{F}$ und ${}_\mathbb{G}Q$.

Aufgabe H 27. *Drehung und Spiegelung*

Die vom Parameter $s \in \mathbb{R}$ abhängige Matrix

$$A_s = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5s & \sqrt{2} & 5s\\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2}\\ -5s & \sqrt{2} & -5s \end{pmatrix}$$

definiert eine lineare Abbildung $\varphi_s\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon x \mapsto A_s\,x$.

(a) Bestimmen Sie alle $s \in \mathbb{R}$, für die φ_s eine orthogonale Abbildung ist.

(b) Wählen Sie s so, dass φ_s eigentlich orthogonal ist. Dann beschreibt φ_s eine Drehung. Berechnen Sie die Drehachse und den Cosinus des Drehwinkels.

(c) Wählen Sie nun s so, dass φ_s uneigentlich orthogonal ist. Finden Sie eine Spiegelung σ und eine Drehung δ so, dass $\varphi_s = \delta \circ \sigma$ ist.

Online-Aufgabe.

Sie finden ab Donnerstag Ihre Online-Aufgabe auf folgender Webseite.

http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test430/

T. Cruz, U. Linden,
S. Nitsche, C. Rösinger,
A. Wünsch

10. Gruppenübung zur Vorlesung
Höhere Mathematik 1

M. Stroppel

Wintersemester 2017/18

Präsenzübungen

Aufgabe P 31. *Eigenwerte, Eigenräume, Vielfachheiten und Invertierbarkeit*

(a) Wir betrachten die komplexen Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A_3 = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ -4 & 5 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume von A_j für $j \in \{1, 2, 3\}$.

(b) Bestimmen Sie die geometrische und die algebraische Vielfachheit der Eigenwerte von A_j für $j \in \{1, 2, 3\}$. Gibt es jeweils eine Basis aus Eigenvektoren?

(c) Gibt es zwei Matrizen aus **(a)** welche zueinander konjugiert sind?

(d) Machen Sie sich unter Verwendung von **Bemerkung 5.2.3** klar, dass eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ genau dann invertierbar ist, wenn alle ihre Eigenwerte von Null verschieden sind.

Aufgabe P 32. *Geometrische Bedeutung von Eigenwerten und -vektoren*

Es seien die folgenden Größen gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Determinante und die Eigenwerte von A.

(b) Bestimmen Sie eine Basis aus Eigenvektoren und skizzieren Sie diese im Standardkoordinatensystem.

(c) Stellen Sie v und w bezüglich der Basis aus **(b)** dar.

(d) Berechnen Sie Av und Aw unter Verwendung der Darstellung aus **(c)**.

(e) Zeichnen Sie v und w, sowie Av und Aw in das Bild von **(b)** ein. Machen Sie sich unter Verwendung der Eigenwerte und Eigenvektoren das Zustandekommen der Bildpunkte klar.

Aufgabe P 33. *Eigenwerte und Eigenräume*

Finden Sie eine Matrix, die die Eigenwerte $1, 2$ und 3 hat und zu diesen die Eigenräume

$$V(1) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right), \qquad V(2) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right), \qquad V(3) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Bestimmen Sie das charakteristische Polynom dieser Matrix.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 28. *Eigenwerte und Eigenvektoren*

Gegeben seien die folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & e^2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & i\pi \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ ohne Verwendung des charakteristischen Polynoms.

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A.

(c) Berechnen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume von B.

Aufgabe H 29. *Algebraische und geometrische Vielfachheit*

Sei $(s,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ein Parameterpaar. Wir betrachten die parameterabhängige Matrix

$$A_{s,t} = \begin{pmatrix} t+2 & 2 & 8-t^2 \\ 0 & s+3 & 0 \\ -1 & -2 & t-2 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von $A_{s,t}$ in Abhängigkeit des Paares (s,t).

(b) Bestimmen Sie für das Paar $(s,t) = (2,2)$ die geometrische Vielfachheit für jeden Eigenwert von $A_{2,2}$.

(c) Bestimmen Sie mit Hilfe von **P 31(d)** alle Paare (s,t) so, dass $A_{s,t}$ invertierbar ist.

(d) Sei nun $s = t$. Bestimmen Sie alle $t \in \mathbb{R}$ so, dass ein Eigenwert von $A_{t,t}$ mindestens die algebraische Vielfachheit 2 besitzt. Gibt es auch $t \in \mathbb{R}$ so, dass ein Eigenwert von $A_{t,t}$ die algebraische Vielfachheit 3 besitzt?

Aufgabe H 30. *Transformation einer affinen Abbildung*

Betrachten Sie (bezüglich des Standardkoordinatensystems) die affine Abbildung $\alpha\colon v \mapsto Av + b$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} -2 \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Eigenwerte sowie die zugehörigen Eigenräume von A.

(b) Bestimmen Sie die Beschreibung ${}_{\mathbb{F}}\alpha_{\mathbb{F}}$ von α bezüglich des Koordinatensystems $\mathbb{F} = (P; f_1, f_2)$ mit dem Ursprung $P = (-1, \sqrt{3})^\intercal$ und den Basisvektoren $f_1 = (-1, \sqrt{3})^\intercal$ und $f_2 = (\sqrt{3}, 1)^\intercal$.

Online-Aufgabe.

Sie finden ab Donnerstag Ihre Online-Aufgabe auf folgender Webseite.

http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/

Präsenzübungen

Aufgabe P 34. *Diagonalisierbarkeit von Matrizen*

Welche der reellen Matrizen M sind diagonalisierbar? Welche sind orthogonal diagonalisierbar? Finden Sie, falls möglich, eine (orthogonale) Matrix $T \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ so, dass $T^{-1}M\,T$ eine Diagonalmatrix ist.

(a) $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

(b) $M = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(c) $M = \begin{pmatrix} 1 & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}$

Aufgabe P 35. *Quadriken in $\mathbb{R}^2$*

Betrachten Sie für die unten angegebenen Werte der Parameter α und β die Quadrik

$$Q := \left\{ (x_1, x_2)^\intercal \in \mathbb{R}^2 \mid\ x_1^2 + \alpha x_2^2 = \beta \right\}.$$

Zeichnen Sie die Quadrik in ein Koordinatensystem und geben Sie ihren Typ an.

(a) $\alpha = -4,\ \beta = 0$

(b) $\alpha = -4,\ \beta = 1$

(c) $\alpha = 1,\ \beta = 4$

(d) $\alpha = 4,\ \beta = 1$

(e) $\alpha = 4,\ \beta = 0$

Aufgabe P 36. *Matrixdarstellung von Quadriken*

Es sei $\alpha \in \mathbb{R}$ ein Parameter.

(a) Beschreiben Sie die quadratische Form

$$q_\alpha \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \colon x = (x_1, x_2, x_3)^\intercal \mapsto 3(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2\alpha x_1 x_2 + 2x_2 x_3$$

durch eine symmetrische Matrix A_α als $q_\alpha(x) = x^\intercal A_\alpha x$.

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A_α in Abhängigkeit von α.

(c) Für welche Werte des Parameters α ist die quadratische Form positiv definit, negativ definit oder indefinit?

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 31. *Orthogonales Diagonalisieren*

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & -1 & 5 \\ 3 & -1 & 11 & -1 \\ 3 & 5 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

(a) Die Matrix A hat die Eigenwerte 0 und 12. Bestimmen Sie die geometrischen Vielfachheiten d_0 und d_{12}.

(b) Geben Sie eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^4$ an, die aus Eigenvektoren von A besteht.

(c) Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix S so, dass $S^{\mathsf{T}} A S$ eine Diagonalmatrix ist.

(d) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von A.

Aufgabe H 32. *Symmetrische Matrizen*

Sei A die reelle, symmetrische Matrix mit den Eigenwerten 1 und -2 und den Eigenräumen

$$V(1) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \qquad V(-2) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right).$$

(a) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von A.

(b) Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix S so, dass $S^{\mathsf{T}} A S$ eine Diagonalmatrix ist, und geben Sie diese Diagonalmatrix an. (Sie brauchen A selbst dazu nicht zu kennen!)

(c) Bestimmen Sie A.

(d) Berechnen Sie die Inverse von A, ohne den Gauß-Algorithmus anzuwenden.

Aufgabe H 33. *Quadrik in* $\mathbb{R}^3$

Betrachten Sie die Quadrik $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid 3x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 - 2\sqrt{3}\, x_1 x_3 - 2x_1 - 2\sqrt{3}\, x_3 = 0\}$.

(a) Schreiben Sie die Gleichung der Quadrik in Matrixdarstellung, geben Sie die erweiterte Matrix an und bestimmen Sie den Typ der Quadrik.

(b) Beschreiben Sie die Quadrik durch eine Gleichung in Matrixdarstellung in Abhängigkeit von y, wobei $x = Fy$ mit

$$F = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

(c) Welche Kurven können sich durch den Schnitt der Quadrik mit der Ebene $E_\alpha := \{y \in \mathbb{R}^3 \mid y_3 = \alpha\}$ in Abhängigkeit vom Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ ergeben?

Online-Aufgabe.

Sie finden ab Donnerstag Ihre Online-Aufgabe auf folgender Webseite.

http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test430/

T. Cruz, U. Linden,
S. Nitsche, C. Rösinger,
A. Wünsch

12. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 1

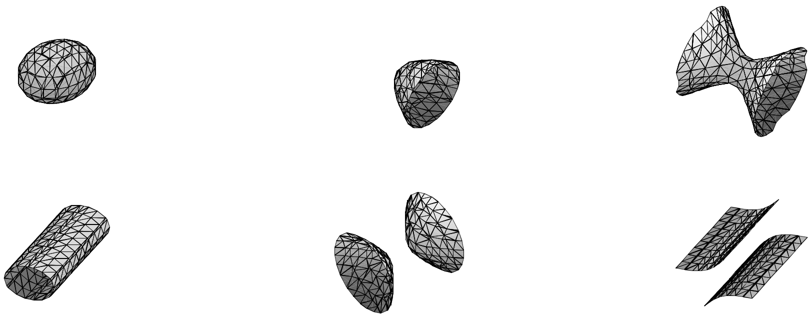
M. Stroppel

Wintersemester 2017/18

Präsenzübungen

Aufgabe P 37. *Quadriken erkennen*

Um welche Quadriken könnte es sich bei den folgenden Bildern handeln? Geben Sie jeweils die Gestalt der Quadrik und eine affine Normalform an.



Aufgabe P 38. *Modell: Kegelschnitte*

Sei $\mathcal{Q}$ der Doppelkegel, der gegeben ist durch die Gleichung $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$; im Modell dargestellt ist der Bereich $-\frac{7}{2} \leqq x_1, x_2, x_3 \leqq \frac{7}{2}$. Außerdem sind dargestellt die Ebenen mit den Gleichungen $x_1 + 2\,x_3 = 3$ (gelb), $x_1 - x_3 = 1$ (blau) und $x_1 = 1$ (grün).

(a) Welche Schnittkurven liefert der Doppelkegel jeweils in den drei Ebenen?

(b) Welche der folgenden Konfigurationen entstehen als Schnitt des Doppelkegels mit einer passenden Ebene?

- ein Punkt
- genau eine Gerade
- ein Paar schneidender Geraden
- ein Kreis
- die leere Menge
- ein Paar paralleler Geraden

Aufgabe P 39. *Ebene Quadrik*

In $\mathbb{R}^2$ sei bezüglich des Standardkoordinatensystems $\mathbb{E}$ die folgende Quadrik gegeben:

$$Q := \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 - 4\sqrt{2}\,x_1 + 6 = 0 \right\}.$$

(a) Geben Sie die Matrixbeschreibung für Q an.

(b) Bestimmen Sie die euklidische Normalform und die Gestalt von Q.

(c) Geben Sie ein kartesisches Koordinatensystem $\mathbb{H}$ an, in welchem diese euklidische Normalform angenommen wird.

(d) Skizzieren Sie Q sowie das Koordinatensystem $\mathbb{H}$ in das Standardkoordinatensystem.

Bitte nehmen Sie an der Online-Befragung des WiGeMath-Projekts teil. Sie finden die Umfrage unter dem Link http://go.upb.de/wigemath oder über den nebenstehenden QR-Code.
Unter den Befragungsteilnehmern werden Amazon-Gutscheine verlost (10€ an 10% der Teilnehmer, einmalig 100€).
Vielen Dank!

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 34. *Modell: Der Doppelkegel*

Wir betrachten das Modell des Doppelkegels Q aus den Übungen, sowie die gelbe Ebene E.
Sie finden das Modell auch unter:
www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/HM-Stroppel-Material/3D-Modelle/02/.

Der Doppelkegel wird in Standardkoordinaten beschrieben durch $Q : x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$.
Die gelbe Ebene wird in Standardkoordinaten beschrieben durch $E : x_1 + 2x_3 = 3$.

Sei das Koordinatensystem $\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}; \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$ gegeben.

(a) Bestimmen Sie die Koordinatentransformation ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$.

(b) Geben Sie eine Gleichung an, die E bezüglich $\mathbb{F}$ beschreibt.

(c) Geben Sie eine Gleichung an, die Q bezüglich $\mathbb{F}$ beschreibt.

(d) Nach Aufgabe **P 38(a)** ist die Schnittlinie von $E \cap Q$ in der gelben Ebene eine Ellipse. Bestimmen Sie die Längen der Halbachsen dieser Ellipse (in Koordinaten bezüglich $\mathbb{F}$).

Aufgabe H 35. *Räumliche Quadrik*

Gegeben sei die Quadrik $Q = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x^\intercal A\, x + 2\, a^\intercal x = 0\}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -\sqrt{3} \\ 0 & -2 & 0 \\ -\sqrt{3} & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad a = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie eine diagonale Matrix D, sowie eine orthogonale Matrix F so, dass $D = F^\intercal A\, F$.

(b) Bestimmen Sie eine euklidische Normalform von Q, sowie ein kartesisches Koordinatensystem $\mathbb{F}$, bezüglich dessen Q diese Normalform annimmt.

Aufgabe H 36. *Quadrik mit Parameter*

Betrachten Sie die von einem Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ abhängige Quadrik

$$Q_\alpha := \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 2(x_1 + x_2)^2 - 6x_1x_2 - \sqrt{2}(x_1 + 7x_2) + (\alpha - 2)(2x_3 + 1) + 16 = 0 \right\}.$$

(a) Schreiben Sie die Gleichung der Quadrik Q_α in Matrixform.

(b) Bestimmen Sie eine euklidische Normalform von Q_α in Abhängigkeit von α.

(c) Geben Sie den Typ und die Gestalt von dieser Quadrik in Abhängigkeit von α an.

Online-Aufgabe.

Sie finden ab Donnerstag Ihre Online-Aufgabe auf folgender Webseite.

http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/

Präsenzübungen

Aufgabe P 40. *Modell: Einschaliges Hyperboloid*

Die Quadrik Q sei gegeben durch

$$Q := \left\{ z \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, z_1^2 + 2z_2^2 - z_3^2 - 2 = 0 \right\}$$

mit den Koordinatenebenen $E_{2,3} : z_1 = 0$, $E_{1,3} : z_2 = 0$ und $E_{1,2} : z_3 = 0$, welche im Modell farbig dargestellt sind. Eine Darstellung von Q bezüglich des Koordinatensystems mit den drei unterschiedlich grau gefärbten Koordinatenachsen finden Sie in Aufgabe **H 37**.

(a) Stellen Sie Q in euklidischer Normalform dar.
Welcher Typ liegt vor? Welche Gestalt liegt vor?

(b) Bestimmen Sie die Schnitte von Q mit den Koordinatenebenen $E_{2,3}$, $E_{1,3}$ und $E_{1,2}$. Geben Sie die Gestalten dieser Schnitte an.

(c) Identifizieren Sie mit Hilfe von **(b)** die z_1-Achse, die z_2-Achse und die z_3-Achse, sowie die Koordinatenebenen $E_{2,3}$, $E_{1,3}$ und $E_{1,2}$ im Modell.

(d) Welche der folgenden Konfigurationen können als Schnitt von Q mit einer Ebene durch den Ursprung entstehen?

- ein Punkt
- die leere Menge
- ein schneidendes Geradenpaar
- eine Ellipse
- eine Hyperbel
- ein paralleles Geradenpaar

Aufgabe P 41. *Monotonie und Beschränktheit*

Untersuchen Sie die Folgen auf Monotonie und Beschränktheit. Geben Sie, falls möglich, eine obere Schranke an. Geben Sie, falls möglich, eine untere Schranke an.

(a) $(42)_{n\in\mathbb{N}}$

(b) $\left(n(-1)^{2n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

(c) $\left(n(-1)^{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

(d) $\left(\frac{13n(n+1)}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

(e) $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{2}{k!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Aufgabe P 42. *Häufungspunkte*

Untersuchen Sie die Folgen auf Häufungspunkte. Geben Sie jeweils eine Teilfolge an, welche gegen den Häufungspunkt konvergiert.

(a) $(5 \cdot (-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$

(b) $\left(\frac{(-1)^n}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

(c) $\left((-1)^n \frac{13n(n+1)}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

(d) $\left((-2)\sin(\frac{n\pi}{2})\right)_{n\in\mathbb{N}}$

(e) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv definiert durch

$$a_1 = 0,\ a_2 = 1,\ a_{3n} = a_{3n-1} + 1,\ a_{3n+1} = a_{3n} + 1,\ a_{3n+2} = a_{3n+1} - 2.$$

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 37. *Modell: Einschaliges Hyperboloid*

Die Quadrik Q in $\mathbb{R}^3$ sei in Standardkoordinaten gegeben durch

$$Q: x_1^2+4x_2^2+x_3^2-2x_1x_2+8x_1x_3-2x_2x_3+(3\sqrt{2}-\sqrt{6})x_1-2\sqrt{6}x_2-(3\sqrt{2}+\sqrt{6})x_3-6=0.$$

Ein Modell von Q hatten Sie in den Übungen in den Händen. Sie finden dies auch unter: www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/HM-Stroppel-Material/3D-Modelle/03/.
Sei das kartesische Koordinatensystem

$$\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

gegeben. Dieses wird im Modell farbig dargestellt.

(a) Geben Sie eine Gleichung von Q in Koordinaten y_1, y_2, y_3 bezüglich $\mathbb{F}$ an.

(b) Bestimmen Sie eine euklidische Normalform von Q, sowie ein Koordinatensystem $\mathbb{G}$, bezüglich dem Q diese Normalform annimmt.

(c) Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ ein Parameter. Die Ebene E_α sei bezüglich des Koordinatensystems $\mathbb{G}$ beschrieben durch die Gleichung $z_1 = \alpha$. Bestimmen Sie die Gestalt von $Q \cap E_\alpha$ in Abhängigkeit von α.

(d) Bestimmen Sie eine Gleichung für E_{-1} in Standardkoordinaten x_1, x_2, x_3.

Aufgabe H 38. *Rekursive Folge, Definition Grenzwert, Monotonie*

Sei die Folge $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{2n}{n+3}$ gegeben.

(a) Finden Sie zwei verschiedene rekursive Darstellungen der Folge.

(b) Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Finden Sie dazu ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ so, dass $|a_n - 2| < \varepsilon$ ist für $n > n_\varepsilon$.

(c) Bestimmen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ und begründen Sie Ihre Antwort mittels **(b)**.

(d) Für welche $q \in \mathbb{R}$ ist $(a_n + \frac{q}{n+3})_{n\in\mathbb{N}}$ streng monoton steigend?

Aufgabe H 39. *Konvergenz und Häufungspunkte*

Untersuchen Sie jeweils die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert. Bestimmen Sie zudem jeweils alle Häufungspunkte, sowie den Limes superior und den Limes inferior der Folgen.

(a) $a_n = \dfrac{4n^3-1}{10n^2+5\sqrt{n}}$

(b) $a_n = (-1)^n \sqrt[n]{\dfrac{2n}{5^{n^2}}} + \dfrac{\sin(n)}{n}$

(c) $a_n = \operatorname{Im}\left(2^{-n}\left(-1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^n\right)$

(d) $a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{3^k+(-1)^k}{7^k}$

Online-Aufgabe.

Zu diesem Übungsblatt gibt es keine Online-Aufgabe.