S. Hagh Shenas Noshari,
S. Nitsche, C. Rösinger,
A. Thumm, D. Zimmermann

1. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 1

M. Stroppel

Wintersemester 2018/19

Präsenzübungen

Aufgabe P 1. *Elementares Rechnen*

Berechnen Sie ohne Taschenrechner:

(a) $2097{,}8 : 17$ **(b)** $\dfrac{15}{\frac{7}{2}} \cdot \dfrac{21}{20}$ **(c)** $\sqrt{\sqrt{13}^4 + 39^2}$ **(d)** $\binom{11}{5}$ **(e)** $\binom{11}{5} - \binom{10}{5} - \binom{10}{6}$

Aufgabe P 2. *Summen*

Seien $a_1 = 5,\ a_2 = 3,\ a_3 = -1,\ a_4 = 3,\ a_5 = 17,\ a_6 = -4$ gegeben. Sei $b_j = a_j + 1$ für alle $j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Berechnen Sie

$$\sum_{j=2}^{5} a_j, \quad \sum_{j=2}^{5} b_j, \quad \sum_{j=0}^{2} a_{2j+1}, \quad \sum_{j=1}^{3} b_{2j}, \quad \sum_{j=1}^{3} 2b_j, \quad \sum_{j=4}^{4} a_j.$$

Aufgabe P 3. *Umgang mit Summen*

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $a_j \in \mathbb{R}$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Welche der Summen A, B, C, D liefern dasselbe Resultat?

$$A = \sum_{k=0}^{n} a_{2k+1}\ , \qquad B = \sum_{k=4}^{n+4} a_{2k-7}\ ,$$

$$C = \sum_{k=1}^{2n+1} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_{2k}\ , \qquad D = \sum_{l=1}^{2n+1} \frac{\left(1 - (-1)^l\right)}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2l\pi\right) a_l\ .$$

Aufgabe P 4. *Vollständige Induktion, Pascalsches Dreieck*

Zeigen Sie durch vollständige Induktion die folgende Aussage:

$$\text{Für alle } n \in \mathbb{N} \text{ mit } n \geqq 2 \text{ gilt } \quad \sum_{k=2}^{n} \binom{k}{2} = \binom{n+1}{3}.$$

Stellen Sie das Ergebnis für $n = 5$ im Pascalschen Dreieck dar.

Aufgabe P 5. *Binomischer Lehrsatz*

Beweisen Sie:

$$\text{Für alle } n \in \mathbb{N}_0 \text{ gilt } \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k = 3^n.$$

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 1. *Polynome*

(a) Berechnen Sie $(3X+2)^3$, $(X-2)^4$ und $(X-1)^5$ mit Hilfe des Binomischen Lehrsatzes.

(b) Bestimmen Sie alle reellen Nullstellen von $(X^4+8X^3+24X^2+32X+16)(X^2+1)$.

(c) Zeigen Sie, dass alle reellen Nullstellen von $X^7+12X^6+31X^3+2$ negativ sind.

(d) Zeigen Sie, dass $3X^{2018}+4X^2-8X+5$ keine reellen Nullstellen besitzt.

Aufgabe H 2. *Teleskopsummen*

Seien $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$. Berechnen Sie die folgenden Summen:

(a) $\displaystyle (x^2-1)\sum_{k=0}^{n} x^k$ **(b)** $\displaystyle \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3}{k}-\frac{2}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)$

Aufgabe H 3. *Vollständige Induktion mit Ungleichung*

Zeigen Sie durch vollständiger Induktion die folgenden Aussagen:

(a) Es gilt $2^n+n^2>(n+1)(n+2)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqq 4$.

(b) Es gilt $\sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^{k-1} > (n+1)n^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqq 6$.

Hinweis: Verwenden Sie für Teil **(b)** die Aussage aus **(a)**.

Aufgabe H 4. *Vollständige Induktion mit Produkt*

Analog zur Summenschreibweise, führen wir das Produktsymbol ein: $\prod_{j=1}^{m} A_j$ bedeutet, dass man den Term A_j für alle j von 1 bis m auswertet und die entstandenen Zahlen zusammenmultipliziert. Zeigen Sie die folgenden Aussagen mittels vollständiger Induktion:

(a) Es gilt $\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\frac{n+1}{2n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqq 2$.

(b) Es gilt $\prod_{k=1}^{n}(2k-1)=\frac{(2n)!}{n!\,2^n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Online-Aufgabe.

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 25.10.–31.10.) auf folgender Webseite:

http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/

Bitte geben Sie dort zunächst Ihre Matrikelnummer ein.

Die Lösungen sind als ganze Zahlen oder als Dezimalzahlen mit einem Dezimal**punkt** einzugeben. Sonstige Zeichen, wie zum Beispiel Klammern oder Operatoren wie $*$ und $/$, dürfen **nicht** benutzt werden.

Anschließend müssen Sie Ihr **Passwort** für die Onlineübungen eintragen, das Sie per Email an Ihre studentische Adresse ($<$st$******$@stud.uni-stuttgart.de$>$) erhalten haben.

Innerhalb des Bearbeitungszeitraums können Sie Ihre Eingaben beliebig oft wiederholen, wobei die **letzten** Eingaben gewertet werden. Der Bearbeitungszeitraum endet mittwochs, nach der Abgabe der schriftlichen Übungen in den Übungsgruppen, um 24:00 Uhr. Sie erhalten für die Bearbeitung der Online-Aufgabe 0, 1, oder 2 Punkte.

Präsenzübungen

Aufgabe P 6. *Beträge, Ungleichungen*

(a) Bestimmen Sie die Menge $\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, |x+1| = |x-2|\right\}$.

(b) Geben Sie die Menge aller $x \in \mathbb{R}$ an, welche die folgende Ungleichung erfüllen:

$$2\,|x-4| \leqq x-1 .$$

Skizzieren Sie die Menge $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, -4\,|x-4| \geqq 2-2x\right\}$.

(c) Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der Gleichung $x^2 - 7|x| + 12 = 0$.

Aufgabe P 7. *Mengen*

Skizzieren Sie die folgenden Mengen:

$$\begin{aligned}
M_1 &:= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, -x-y<1\right\}, \\
M_2 &:= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, (x+1)^2+(y+1)^2=1\right\}, \\
M_3 &:= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, (x-3)^2+y^2 \geqq 4\right\}, \\
M_4 &:= M_1 \cap M_2, \\
M_5 &:= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, |xy| \leqq 1\right\}.
\end{aligned}$$

Aufgabe P 8. *Abbildungen, Beträge*

(a) Wir betrachten die Abbildung

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \big||x|-1\big|.$$

Skizzieren Sie den Graphen von f und beantworten Sie an Hand Ihrer Skizze die folgenden Fragen:

(i) Welche Werte nimmt f an?

(ii) Welche Werte nimmt f nicht an?

(iii) Welche Werte werden von f mehrfach angenommen?

(b) Wir modifizieren die Abbildung f so, dass nur Zahlen aus $[-1,1]$ abgebildet werden. Dies führt auf die neue Abbildung

$$g\colon [-1,1] \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \big||x|-1\big|.$$

Skizzieren Sie den Graphen von g. Gibt es Werte aus $\mathbb{R}^+$ welche g nicht annimmt?

(c) Finden Sie ein Intervall $[a,b] \subseteqq [-1,1]$ so, dass $h\colon [a,b] \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \big||x|-1\big|$ keine mehrfachen Werte annimmt.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 5. *Ungleichungen, Beträge*

Bestimmen Sie jeweils die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, die die Ungleichung erfüllen:

(a) $(x+5)(x-10)x^2 < (x+5)(x-10)(2x)^4$ **(b)** $\dfrac{|x^2-9|}{|x+3|+|x-3|} \leqq 5$

Aufgabe H 6. *Ungleichungen*

(a) Seien $x, y \in \mathbb{R}^+$. Zeigen Sie die Ungleichungskette $\dfrac{x+y}{2} \leqq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \leqq \max\{x,y\}$.

(b) Ist $\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} < \sqrt{|xy|}$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^-$ erfüllt?

(c) Für welche $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ gilt $(x+2y^2+3z^3)^2 \leqq 14(x^2+y^4+z^6)$?
Hinweis: Schwarzsche Ungleichung.

Aufgabe H 7. *Mengen*

(a) Skizzieren Sie die Menge $M_1 \smallsetminus M_2$ falls

$$M_1 := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, (x-1)^2 + (y-1)^2 \leqq 4\right\},$$
$$M_2 := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 - 2x + y^2 - 2y < 0\right\}.$$

(b) Skizzieren Sie die Menge $M_3 \cap M_4$ falls

$$M_3 := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x + 2y^2 - (y+1)^2 + 8y < -10\right\},$$
$$M_4 := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x > -9 \ \wedge\ y > -3\right\}.$$

Aufgabe H 8. *Abbildungen, Beträge*

Geben Sie für die folgenden Abbildungen jeweils an, welche Werte gar nicht / wenigstens einmal / mehrfach angenommen werden.

(a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \big||2x-1|-1\big| + \big||x|-1\big|$

(b) $g\colon [\frac{1}{2}, 1] \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \big||2x-1|-1\big| + \big||x|-1\big|$

(c) $h\colon [0,1] \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \big||2x-1|-1\big| + \big||x|-1\big|$

Online-Aufgabe.

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 01.11.–07.11.) auf folgender Webseite:

http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test430/

Bitte geben Sie dort zunächst Ihre Matrikelnummer ein.

Die Lösungen sind als ganze Zahlen oder als Dezimalzahlen mit einem Dezimal**punkt** einzugeben. Sonstige Zeichen, wie zum Beispiel Klammern oder Operatoren wie $*$ und $/$, dürfen **nicht** benutzt werden.

Anschließend müssen Sie das per Email erhaltene **Passwort** für die Onlineübungen eintragen.

Innerhalb des Bearbeitungszeitraums können Sie Ihre Eingaben beliebig oft wiederholen, wobei die **letzten** Eingaben gewertet werden. Der Bearbeitungszeitraum endet mittwochs, nach der Abgabe der schriftlichen Übungen in den Übungsgruppen, um 24:00 Uhr. Sie erhalten für die Bearbeitung der Online-Aufgabe 0, 1, oder 2 Punkte.

S. Hagh Shenas Noshari,
S. Nitsche, C. Rösinger,
A. Thumm, D. Zimmermann

3. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 1

M. Stroppel

Wintersemester 2018/19

Präsenzübungen

Aufgabe P 9. *Abbildungen*

(a) Geben Sie an, welche Eigenschaft eine Abbildung erfüllen muss, damit sie nicht injektiv beziehungsweise nicht surjektiv ist.

(b) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}\colon x \mapsto -(x-1)^2 - 2$.
Ist f injektiv? Ist f surjektiv? Ist f bijektiv?

(c) Finden Sie eine Abbildung $g\colon [0,4] \to [0,2]$, die injektiv, aber nicht surjektiv ist.

Aufgabe P 10. *Rechnen mit komplexen Zahlen I*

Gegeben seien die komplexen Zahlen $z_1 = 1+\mathrm{i}$, $z_2 = 3-2\mathrm{i}$ und $z_3 = 2\big(\cos\big(\tfrac{2}{3}\pi\big) + \mathrm{i}\sin\big(\tfrac{2}{3}\pi\big)\big)$.

(a) Zeichnen Sie z_1, z_2 und z_3 in die komplexe Zahlenebene.

(b) Bestimmen Sie alle Abstände zwischen je zwei dieser Zahlen.

(c) Zeichnen Sie $z_1 + z_2$, $\overline{z_2}$, $z_1 \cdot z_2$ und $\mathrm{i} \cdot z_3$ in die komplexe Zahlenebene.

Aufgabe P 11. *Rechnen mit komplexen Zahlen II*

Gegeben seien die komplexen Zahlen

$$z_1 = 4\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right), \quad z_2 = 1 + \sqrt{3}\mathrm{i}, \quad \text{und} \quad z_3 = 2 + 4\mathrm{i}.$$

(a) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil sowie Betrag und Argument von z_1 und z_2.

(b) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil sowie Betrag und Argument von $\frac{z_1}{z_2}$.

(c) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil von $\frac{z_2}{z_3}$.

Aufgabe P 12. *Quadratische Gleichung in $\mathbb{C}$ lösen*

(a) Sei $z = x + \mathrm{i}y$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil von z^2.

(b) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil aller Lösungen der Gleichung $z^2 = 2 - 3\mathrm{i}$.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 9. *Injektivität, Surjektivität und Bijektivität*

Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität:

(a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto -2x^3$

(b) $g\colon \mathbb{R} \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{R}^+\colon x \mapsto \frac{|x|}{x^2}$

(c) $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}\colon n \mapsto \binom{n+3}{n+2}$

(d) $k\colon [0, \frac{3}{2}\pi] \to [-1, \frac{3}{2}]\colon x \mapsto \cos(x)$

Aufgabe H 10. *Links- und Rechtsinverse*

Sei $f\colon A \to B$ eine Abbildung. Eine Abbildung $g\colon B \to A$ heißt *Links-* bzw. *Rechtsinverse* von f, wenn $g \circ f = \mathrm{id}_A$ bzw. $f \circ g = \mathrm{id}_B$ gilt. Wir nennen f *links-/rechtsinvertierbar*, wenn eine *Links-/Rechtsinverse* von f existiert. Zeigen Sie:

(a) Wenn $f\colon A \to B$ linksinvertierbar ist, dann ist f injektiv.

(b) Wenn $f\colon A \to B$ rechtsinvertierbar ist, dann ist f surjektiv.

Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen auf Links- und Rechtsinvertierbarkeit:

(c) $h\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x^2$

(d) $k\colon \mathbb{R} \to [-1, 1]\colon x \mapsto \sin x$

Aufgabe H 11. *Rechnen mit komplexen Zahlen*

(a) Seien $\zeta_j = (\cos(\pi/3) + \mathrm{i}\,\sin(\pi/3))^j$. Zeichnen Sie die Zahl ζ_j für $j \in \{0, 1, \ldots, 5\}$ in die komplexe Zahlenebene ein und bestimmen Sie $\sum_{k=0}^{5} \zeta_j$.

(b) Berechnen Sie jeweils Real- und Imaginärteil sowie Betrag und Argument der folgenden komplexen Zahlen:

$$(-\sqrt{2} + \sqrt{6}\,\mathrm{i})^8, \quad \overline{(1+\mathrm{i})^{17}} \cdot (1-\mathrm{i})^{-20}$$

Aufgabe H 12. *Abbildungen im Komplexen*

Zeichnen Sie die folgenden Mengen $M, f(M) \subseteqq \mathbb{C}$ in die komplexe Zahlenebene ein, wenn

(a) $f\colon \mathbb{C} \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{C}\colon z \mapsto \frac{1}{z}$, $M = \{1, \mathrm{i}, 1 - 2\mathrm{i}\}$,

(b) $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}\colon z \mapsto (1+\mathrm{i})z$ und M der Kreis um 1 mit Radius $\sqrt{2}$ ist,

(c) $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}\colon z \mapsto z^2$, $M = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z = 2 \vee \operatorname{Im} z = 1\}$.

Hinweis: Verwenden Sie verschiedene Farben für M und $f(M)$.

Online-Aufgabe.

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 08.11.–14.11.) auf folgender Webseite:

http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/

Bitte geben Sie dort zunächst Ihre Matrikelnummer ein.

Die Lösungen sind als ganze Zahlen oder als Dezimalzahlen mit einem Dezimal**punkt** einzugeben. Sonstige Zeichen, wie zum Beispiel Klammern oder Operatoren wie $*$ und $/$, dürfen **nicht** benutzt werden.

Anschließend müssen Sie Ihr **Passwort** für die Onlineübungen eintragen, das Sie per Email an Ihre studentische Adresse (<st∗∗∗∗∗∗@stud.uni-stuttgart.de>) erhalten haben.

Innerhalb des Bearbeitungszeitraums können Sie Ihre Eingaben beliebig oft wiederholen, wobei die **letzten** Eingaben gewertet werden. Der Bearbeitungszeitraum endet mittwochs, nach der Abgabe der schriftlichen Übungen in den Übungsgruppen, um 24:00 Uhr. Sie erhalten für die Bearbeitung der Online-Aufgabe 0, 1, oder 2 Punkte.

S. Hagh Shenas Noshari,
S. Nitsche, C. Rösinger,
A. Thumm, D. Zimmermann

4. Gruppenübung zur Vorlesung
Höhere Mathematik 1

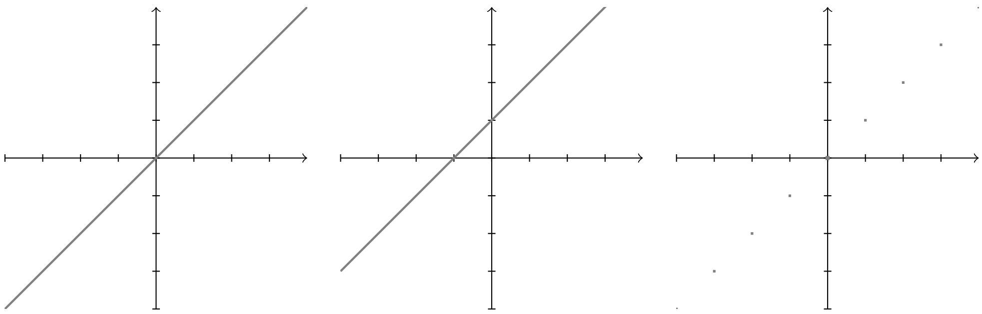
M. Stroppel

Wintersemester 2018/19

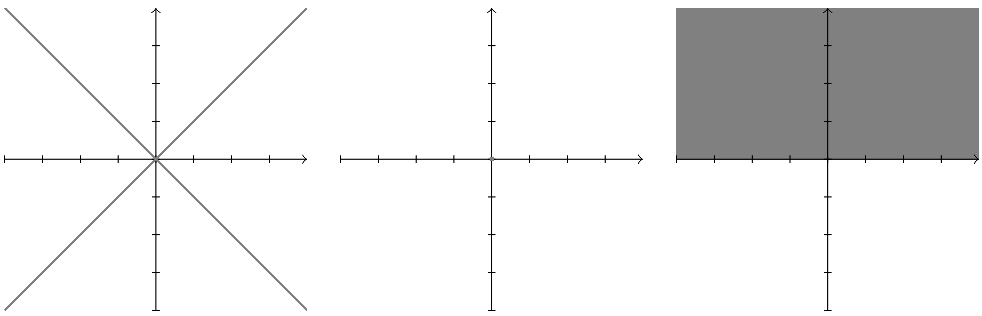
Präsenzübungen

Aufgabe P 13. *Untervektorräume*

Auf welchen der nachfolgenden Abbildungen sind Untervektorräume des $\mathbb{R}^2$ angedeutet? Geben Sie jeweils an, welche Eigenschaften eines Untervektorraums erfüllt und welche verletzt werden.



(a) **(b)** **(c)**



(d) **(e)** **(f)**

Aufgabe P 14. *Polarkoordinaten, komplexe Wurzeln*

Stellen Sie die nachfolgenden komplexen Zahlen z in Polarkoordinaten dar und bestimmen Sie jeweils alle komplexen Lösungen der Gleichung $w^3 = z$.

(a) $z = \mathrm{i}$, **(b)** $z = 1 + \mathrm{i}$,

(c) $z = (\sqrt{3} + \mathrm{i})(\sqrt{3} - \mathrm{i})$, **(d)** $z = \cos(\sqrt{2}\,\pi) + \mathrm{i}\,\sin(-\sqrt{2}\,\pi)$.

Aufgabe P 15. *Schnittpunkte*

Wir schreiben $S = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \langle x \mid x \rangle = 1\}$ und bezeichnen für jedes $t \in \mathbb{R}$ mit g_t die Gerade durch den Punkt $P_t = \big(|2-t|\cos(t), |2-t|\sin(t)\big)^\intercal$ in Richtung $v_t = (-\sin(t), \cos(t))^\intercal$.

(a) Zeigen Sie, dass für jedes $t \in \mathbb{R}$ der Vektor v_t senkrecht auf dem Ortsvektor von P_t steht.

(b) Skizzieren Sie in einem gemeinsamen Koordinatensystem die Menge S und die Geraden g_t für $t = 1$, für einen von Ihnen gewählten Parameterwert $t \leqq 0$, für einen Wert $t \in (1, 3)$ und für ein t mit $t > 3$.

(c) Geben Sie zu jedem $t \in \mathbb{R}$ die Schnittpunkte von S mit g_t an.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 13. *Untervektorräume*

In welchen der folgenden Fälle ist W ein Untervektorraum des reellen Vektorraums V?

(a) V ist der Vektorraum aller reellen Polynome und W die Menge aller Polynome vom Grad 5,

(b) V ist der Vektorraum aller reellen Polynome und W die Menge aller Polynome vom Grad höchstens 5,

(c) $V = \mathbb{R}^2$ und $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqq 0,\, y \geqq 0\}$,

(d) $V = \mathbb{R}^n$ und $W = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x \,|\, y\rangle = 0\}$ für einen festen Vektor $y \in \mathbb{R}^n$.

Aufgabe H 14. *Polarkoordinaten*

Zeigen Sie, dass es zu der Menge

$$D = \left\{ \frac{z-i}{z+i} \;\middle|\; z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Im}(z) > 0 \right\}$$

Konstanten $\ell \in \mathbb{R}_0^+$ und $\varphi_1, \varphi_2 \in [0, 2\pi]$ mit $\varphi_1 \leqq \varphi_2$ derart gibt, dass gilt: $D = \{r\,(\cos(\varphi) + \mathrm{i}\,\sin(\varphi)) \mid r \in [0, \ell),\, \varphi \in [\varphi_1, \varphi_2)\}$.

Aufgabe H 15. *Komplexe Nullstellen*

Geben Sie sämtliche komplexen Nullstellen eines Polynoms $X^2 + aX + b$ mit $a, b \in \mathbb{C}$ an und berechnen Sie anschließend die Nullstellen des komplexen Polynoms $5X^3 + 9X^2 - 17X + 3$.

Aufgabe H 16. *Lineare Gleichungssysteme*

Bestimmen Sie alle Lösungen $(x_1, x_2, x_3)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^3$ des Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcrcrcl}
4x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & = & 0, \\
27x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & = & 0, \\
-2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 0, \\
3x_1 & & & + & x_3 & = & 0, \\
101x_1 & + & 52x_2 & - & 53x_3 & = & 0, \\
15x_1 & + & 3x_2 & & & = & 0.
\end{array}$$

Online-Aufgabe.

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 15.11.–21.11.) auf folgender Webseite:

http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test430/

Bitte geben Sie dort zunächst Ihre Matrikelnummer ein.

Die Lösungen sind als ganze Zahlen oder als Dezimalzahlen mit einem Dezimal**punkt** einzugeben. Sonstige Zeichen, wie zum Beispiel Klammern oder Operatoren wie $*$ und $/$, dürfen **nicht** benutzt werden.

Anschließend müssen Sie das per Email erhaltene **Passwort** für die Onlineübungen eintragen.

Innerhalb des Bearbeitungszeitraums können Sie Ihre Eingaben beliebig oft wiederholen, wobei die **letzten** Eingaben gewertet werden. Der Bearbeitungszeitraum endet mittwochs, nach der Abgabe der schriftlichen Übungen in den Übungsgruppen, um 24:00 Uhr. Sie erhalten für die Bearbeitung der Online-Aufgabe 0, 1, oder 2 Punkte.

S. Hagh Shenas Noshari,
S. Nitsche, C. Rösinger,
A. Thumm, D. Zimmermann

5. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 1

M. Stroppel

Wintersemester 2018/19

Präsenzübungen

Aufgabe P 16. *Komplexe Vektoren*

Gegeben seien die komplexen Vektoren $u = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix}$ und $w = \begin{pmatrix} 1+2\mathrm{i} \\ 0 \end{pmatrix}$.

(a) Sind u, v und w linear abhängig?

(b) Finden Sie zwei verschiedene Linearkombinationen der Null aus u, v und w. Können Sie alle Linearkombinationen der Null aus u, v und w bestimmen?

Aufgabe P 17. *Basis und Skalarprodukt*

Gegeben seien

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ v_3 = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ v_5 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

(a) Bestimmen Sie eine Basis von $\mathrm{L}(v_1, v_2, v_3, v_4)$.

(b) Bestimmen Sie $w \in \mathbb{R}^4$ so, dass v_1, v_2, v_5, w ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^4$ bilden.

(c) Berechnen Sie $\langle v_3 \,|\, v_4 \rangle$ und $\langle v_4 \,|\, v_3 + v_5 \rangle$.

Aufgabe P 18. *Vektorraum der Polynome*

Es sei $\mathrm{Pol}_2 \mathbb{R} := \left\{ \sum_{j=0}^{2} a_j X^j \mid a_j \in \mathbb{R} \right\}$ der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad höchstens 2. Ferner seien die folgenden Polynome aus $\mathrm{Pol}_2 \mathbb{R}$ gegeben:

$$b_1(X) = X^2, \qquad b_2(X) = X - 1, \qquad b_3(X) = X + 1,$$
$$p(X) = X^2 + 2X \quad \text{und} \quad q(X) = X^2 + 2X + 1.$$

(a) Stellen Sie p und q jeweils als Linearkombination der Polynome b_1, b_2 und b_3 dar.

(b) Zeigen Sie, dass $B\colon b_1, b_2, b_3$ eine Basis des Vektorraums $\mathrm{Pol}_2 \mathbb{R}$ ist.

(c) Bestimmen Sie die Koordinatenvektoren ${}_B p$, ${}_B q$ und ${}_B (p+q)$.

Aufgabe P 19. *Geraden und Ebenen*

Gegeben sind die Punkte $P = (0, 2, 5)$, $Q = (3, 5, 6)$ und $R = (-1, 0, 0)$ in $\mathbb{R}^3$.

(a) Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung der Geraden g, die durch P und Q geht.

(b) Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung der Ebene E, die durch P, Q und R geht.

(c) Bestimmen Sie die Hesse-Normalform der Ebene E.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 17. *Skalarprodukt und Vektorprodukt*

Für $x = \binom{x_1}{x_2}$ setzen wir $Jx = \binom{-x_2}{x_1}$. Dann beschreibt $J\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon x \mapsto Jx$ eine Drehung um $\pi/2$. Zeigen Sie die folgende Aussage über Vektoren des $\mathbb{R}^2$:

(a) Zwei Vektoren $u, v \in \mathbb{R}^2$ sind genau dann linear abhängig, wenn gilt $\langle u \mid Jv \rangle = 0$.

Zeigen Sie die folgenden Aussagen über Vektoren des $\mathbb{R}^3$:

(b) Für alle $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ gilt $\langle u \mid v \times w \rangle = \langle v \mid w \times u \rangle = \langle w \mid u \times v \rangle$.

(c) Sind $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ linear abhängig, dann gilt $\langle u \mid v \times w \rangle = 0$.

Aufgabe H 18. *Dimension von Untervektorräumen*

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ betrachten wir im $\mathbb{R}^5$ die Vektoren

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix},\ u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ u_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ v_\alpha = \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix},$$

sowie den Untervektorraum $W := \left\{ (w_1, w_2, w_3, w_4, w_5)^\intercal \in \mathbb{R}^5 \;\middle|\; w_1 + 2w_2 - w_5 = 0 \right\}$.

(a) Bestimmen Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$, für die u_1, u_2, u_3, v_α linear unabhängig / abhängig sind.

(b) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ gibt es ein $w \in \mathbb{R}^5$ so, dass $\mathrm{L}(u_1, u_2, u_3, u_1 + u_2, v_\alpha, w) = \mathbb{R}^5$?

(c) Bestimmen Sie jeweils eine Basis und die Dimension von W und $\mathrm{L}(u_1, u_2, u_3) \cap W$.

Aufgabe H 19. *Funktionenräume*

Die Menge $F = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ von stetigen Funktionen sei gegeben durch

$$f_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto 4(\sin(x))^2, \qquad f_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto -(\cos(x))^2,$$
$$f_3\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto 2\cos(2x), \qquad f_4\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \exp(x).$$

(a) Entscheiden Sie welche Teilmengen von F im Vektorraum $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ der stetigen Funktionen auf $\mathbb{R}$ linear abhängig, bzw. linear unabhängig sind.

(b) Bestimmen Sie die Dimension des von F aufgespannten Untervektorraums von $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$.

Aufgabe H 20. *Kugel und Ebenen*

Wir betrachten im $\mathbb{R}^3$ die Kugel K mit Mittelpunkt $(0, 0, 0)$ und Radius 1, sowie die Ebene

$$E_t\colon\ 2x_1 + (2+t)x_2 + 2x_3 = 3 \qquad \text{für } t \in \mathbb{R}.$$

(a) Bestimmen Sie die Hesse-Normalform von E_t.

(b) Geben Sie eine Ebene F in Parameterdarstellung an, welche E_{-2} orthogonal schneidet.

(c) Bestimmen Sie diejenigen Werte von $t \in \mathbb{R}$, für welche sich E_t und K in keinem Punkt / genau einem Punkt / einem Schnittkreis schneiden.

(d) Geben Sie die Radien der Schnittkreise aus **(c)** in Abhängigkeit von t an.

Online-Aufgabe.

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 22.11.–28.11.) auf folgender Webseite:

http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/

S. Hagh Shenas Noshari,
S. Nitsche, C. Rösinger,
A. Thumm, D. Zimmermann

6. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 1

M. Stroppel

Wintersemester 2018/19

Präsenzübungen

Aufgabe P 20. *Matrixschreibweise für LGS*

Schreiben Sie das folgende lineare Gleichungssystem in der Form $Ax = b$ mit $A \in \mathbb{R}^{5\times 5}$, $b \in \mathbb{R}^5$, $x = (x_1, \dots, x_5)^\intercal \in \mathbb{R}^5$.

$$\begin{aligned} 7 - 3x_1 + 2x_2 &= 9, \\ x_1 + x_2 + x_3 - 5x_5 &= 1, \\ x_2 - x_5 + 19x_3 &= 22, \\ x_3 &= 2x_1, \\ 7x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 7 - x_5 + 4x_3. \end{aligned}$$

Aufgabe P 21. *Rechnen mit Matrizen I*

Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 3 \\ -1+\mathrm{i} \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3\mathrm{i} \\ 4+2\mathrm{i} & 1 & 1 \end{pmatrix}, \ D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Welche der folgenden Ausdrücke sind definiert? Berechnen Sie sie gegebenenfalls.

$$DA, \quad DC, \quad CD, \quad B^\intercal B, \quad BB^\intercal, \quad C^\intercal C, \quad CC^\intercal, \quad C^2, \quad A + CB.$$

(b) Bestimmen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ die Potenzen D^n von D.

Aufgabe P 22. *Rechnen mit Matrizen II*

(a) Finden Sie zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ für die $AB \neq BA$ gilt.

(b) Berechnen Sie $(A + B)(A - B)$ und $A^2 - B^2$ für diese Matrizen.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 21. *Symmetrische und schiefsymmetrische Matrizen*

Eine Matrix A heißt *symmetrisch* wenn $A^\intercal = A$ und *schiefsymmetrisch* wenn $A^\intercal = -A$. Seien V_n und W_n die Mengen der symmetrischen bzw. schiefsymmetrischen $n \times n$-Matrizen.

(a) Zeigen Sie, dass V_n und W_n Untervektorräume von $\mathbb{R}^{n\times n}$ sind.

(b) Zeigen Sie, dass sich jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eindeutig als Summe $A = S + T$ mit Matrizen $S \in V_n$ und $T \in W_n$ schreiben lässt.

(c) Bestimmen Sie je eine Basis von V_2 und W_2.

Aufgabe H 22. *Spurfreie Matrizen*

Sei der Untervektorraum $V = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{C}^{2\times 2} \mid a + d = 0 \right\}$ von $\mathbb{C}^{2\times 2}$ gegeben sowie

$$H = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \qquad X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad Y = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $AB - BA \in V$ für alle $A, B \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass $S\colon H,\, X,\, Y$ eine Basis von V ist. Bestimmen Sie ${}_S\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ und ${}_S\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Aufgabe H 23. *Matrizen potenzieren*

Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ die Potenzen A^n und B^n.

Aufgabe H 24. *Rechtsinverse Matrizen*

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Für eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{\ell\times m}$ soll gelten $AB = E_n$.

(a) Bestimmen Sie ℓ, m und n.

(b) Geben Sie eine solche Matrix B explizit an.

(c) Zeigen Sie, dass für jedes $b \in \mathbb{R}^2$ das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ von $x = Bb$ gelöst wird.

(d) Ist die Lösung des Gleichungssystems aus **(c)** für alle $b \in \mathbb{R}^2$ eindeutig?

Online-Aufgabe.

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 29.11.–05.12.) auf folgender Webseite:

http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test430/

S. Hagh Shenas Noshari,
S. Nitsche, C. Rösinger,
A. Thumm, D. Zimmermann

7. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 1

M. Stroppel

Wintersemester 2018/19

Präsenzübungen

Aufgabe P 23. *Gauß–Algorithmus*

Stellen Sie für die nachfolgenden reellen Gleichungssysteme die erweiterte Koeffizientenmatrix auf und verwenden Sie den Gauß–Algorithmus, um jeweils alle Lösungen zu ermitteln.

(a)
$$\begin{array}{rcrcrcr} -4x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & -4, \\ -5x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & = & 5, \\ 6x_1 & - & 3x_2 & - & x_3 & = & 7, \\ -2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & -1. \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} -8x_1 & - & 6x_2 & - & 4x_3 & - & 2x_4 & = & -6, \\ 2x_1 & + & x_2 & & & - & x_4 & = & -1, \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & + & 7x_4 & = & 12. \end{array}$$

Aufgabe P 24. *Invertieren von Matrizen*

Sei $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ eine reelle Matrix mit $ad - bc \neq 0$. Gesucht ist eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $AB = E_2$. Finden Sie die Spalten von B mit Hilfe von zwei linearen Gleichungssystemen. Lösen Sie diese mit dem Gauß–Algorithmus.

Aufgabe P 25. *Matrixbeschreibung linearer Abbildungen*

Wir fixieren reelle Zahlen α, β, γ sowie δ und setzen

$$F\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^{2\times 2}\colon (x_1, x_2, x_3, x_4)^\intercal \mapsto \begin{pmatrix} \alpha x_1 & \beta x_2 \\ \gamma x_3 & \delta x_4 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass F eine $\mathbb{R}$–lineare Abbildung ist.

(b) Beweisen Sie, dass $C : E_1, E_2, E_3, E_4$ mit

$$E_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_3 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } E_4 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

eine Basis des $\mathbb{R}$–Vektorraums $\mathbb{R}^{2\times 2}$ bildet.

(c) Es bezeichne B die Standardbasis von $\mathbb{R}^4$. Bestimmen Sie ${}_CF_B$.

Aufgabe P 26. *Lineare Abbildungen*

Sei $F\colon V \to W$ eine $\mathbb{R}$–lineare Abbildung zwischen reellen Vektorräumen V und W. Kann dann $F(0) \neq 0$ gelten?

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 25. *Gauß–Algorithmus*

Es seien

$$A := \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 & -4 & 3 \\ 7 & 11 & -1 & 8 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -2 & 3 & -2 \\ -4 & -3 & 2 & -6 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 5} \text{ und } b := \begin{pmatrix} 15 \\ 24 \\ 5 \\ -14 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5.$$

Berechnen Sie alle Lösungen $x \in \mathbb{R}^5$ der Gleichung $Ax = b$ mit Hilfe des Gauß–Algorithmus.

Aufgabe H 26. *Komplex–lineare Abbildungen*

Wir fassen die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$–Vektorraum auf und betrachten die reelle Basis $B : 1, \mathrm{i}$. Angenommen, $F\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist diejenige $\mathbb{R}$–lineare Abbildung, mit

(a) ${}_BF_B = \left(\begin{smallmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{smallmatrix}\right)$, **(b)** ${}_BF_B = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{smallmatrix}\right)$, **(c)** ${}_BF_B = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ oder **(d)** ${}_BF_B = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

In welchen der obigen Fälle ist F dann sogar $\mathbb{C}$–linear?

Aufgabe H 27. *Lineare Abbildungen*

Welche der nachfolgenden Abbildungen sind $\mathbb{R}$–linear?

(a) Die Abbildung $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \langle x \,|\, x\rangle$.

(b) Die Abbildung $G\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \langle v \,|\, x\rangle$, wobei $v \in \mathbb{R}^n$ ein fest gewählter Vektor ist.

(c) Die Abbildung $H\colon \operatorname{Pol}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}\colon f(X) \mapsto f(0)$.

(d) Die Abbildung $K\colon \operatorname{Pol}(\mathbb{R}) \to \operatorname{Pol}(\mathbb{R})\colon f(X) \mapsto f(X^2)$.

Aufgabe H 28. *Kern linearer Abbildungen*

Sei $F\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ die Abbildung mit

$$F((x_1, x_2, x_3, x_4)^\intercal) = \begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 \\ x_1 + 4x_3 + 4x_4 \\ 2x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 4x_4 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie eine Basis $B : v_1, v_2, \ldots, v_k$ des Kerns von F. Welche Dimension besitzt $\operatorname{Kern}(F)$?

(b) Finden Sie eine Basis $C : w_1, w_2, \ldots, w_\ell$ des Untervektorraums

$$W := \{x \in \mathbb{R}^4 \mid \langle v_1 \,|\, x\rangle = \langle v_2 \,|\, x\rangle = \ldots = \langle v_k \,|\, x\rangle = 0\}.$$

(c) Zeigen Sie, dass die Vektoren $v_1, v_2, \ldots, v_k, w_1, w_2, \ldots, w_\ell$ eine Basis des $\mathbb{R}^4$ geben.

Online-Aufgabe.

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 06.12.–12.12.) auf folgender Webseite:

http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/

S. Hagh Shenas Noshari,
S. Nitsche, C. Rösinger,
A. Thumm, D. Zimmermann

8. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 1

M. Stroppel

Wintersemester 2018/19

Präsenzübungen

Aufgabe P 27. *Rangbestimmung*

(a) Bestimmen Sie jeweils den Zeilen- und Spaltenrang der folgenden Matrizen.

$$\begin{pmatrix} 7 & 4 & 3 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 4 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & 6 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & 6 & 7 \\ -2 & 2 & 4 \\ 6 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) Bestimmen Sie den Rang von $\begin{pmatrix} \alpha-2 & 1 & 3 \\ 0 & 2\alpha & 6\alpha \\ \alpha & 0 & \alpha^2-2\alpha \end{pmatrix}$ in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$.

Aufgabe P 28. *Determinante Null auf einen Blick*

Die folgenden reellen Matrizen haben alle die Determinante Null. Wie können Sie das den Matrizen ohne große Rechnung ansehen?

$$\begin{pmatrix} 1 & \pi & -7 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 19 & 4 & \mathrm{e}^3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 9 & 0 & 9 \\ 7 & 0 & 7 \\ 1 & 1 & 19 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 9 & 7 & 13 & 11 & 7 \\ 0 & 4 & -2 & 19 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Aufgabe P 29. *Determinanten- und Inversenberechnung*

Es sei $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $\det A$ und A^{-1}.

Aufgabe P 30. *Koordinatenwechsel und beschreibende Matrizen*

Gegeben seien die folgenden Basen B, C von $\mathbb{R}^2$:

$$B\colon \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C\colon \begin{pmatrix} \pi \\ \mathrm{e}^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Weiter sei E die Standardbasis von $\mathbb{R}^2$.

(a) Bestimmen Sie die Matrizen ${}_E\mathrm{id}_B$, ${}_C\mathrm{id}_E$, ${}_C\mathrm{id}_C$ und ${}_B\mathrm{id}_C$.

(b) Es sei $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit ${}_E\big(\varphi({}_E v)\big) = \begin{pmatrix} -2v_2 \\ 3v_1 + v_2 \end{pmatrix}$, wobei ${}_E v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$.
Bestimmen Sie ${}_E\varphi_E$, ${}_B\varphi_B$ und ${}_E\varphi_C$.

Vorlesungsbefragung

Unter dem folgenden Link gelangen Sie zur Vorlesungsbefragung. Es geht dabei nur um die Bewertung der Vorlesung (also nicht Gruppen- oder Vortragsübungen). Die Umfrage richtet sich an alle teilnehmenden Studiengänge (auch wenn im Formular nur die Studiengänge ernen, tema und bewe stehen).

https://evasysw.uni-stuttgart.de/evasys/online.php?p=E3K5C

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 29. *Rechenregeln für Determinanten*

(a) Gegeben seien die regulären Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 9 & 22 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $\det A$, $\det B$, $\det(A-B)$, $\det\left(\frac{1}{4}B\right)$, $\det\left(\left(B^{-1}\right)^3 A^\intercal\right)$.

(b) Sei $v \in \mathbb{R}^n$ mit $n \geqq 2$. Bestimmen Sie $\det(vv^\intercal)$.

(c) Zeigen Sie: Ist $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ schiefsymmetrisch (vgl. Blatt 6, H21), so gilt $\det A = 0$, falls n ungerade ist.

Aufgabe H 30. *Basiswechsel und beschreibende Matrizen I*

Gegeben seien die folgenden beiden Basen B und C des Vektorraums $\mathbb{R}^{2\times 2}$:

$$B\colon b_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, b_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, b_3 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, b_4 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C\colon c_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, c_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, c_3 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, c_4 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Weiter sei $\varphi\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}\colon A \mapsto A^\intercal$.

(a) Bestimmen Sie die Matrizen ${}_B\mathrm{id}_C$ und ${}_C\mathrm{id}_B$.

(b) Bestimmen Sie die Matrizen ${}_B\varphi_B$, ${}_C\varphi_C$, ${}_B\varphi_C$ und ${}_C\varphi_B$.

Aufgabe H 31. *Basiswechsel und beschreibende Matrizen II*

Es sei E die Standardbasis für $\mathbb{R}^3$. Weiter seien $\varphi, \psi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$${}_E\varphi_E = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } {}_E\psi_E = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Finden Sie eine Basis B so, dass ${}_B\varphi_E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

(b) Warum wäre Teilaufgabe **(a)** nicht lösbar, wenn wir φ durch ψ ersetzen würden?

Aufgabe H 32. *Aufstellen von Abbildungsmatrizen*

Gegeben sei die Ebene $\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$. Weiter sei $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die Spiegelung an der Ebene $\mathcal{E}$.

(a) Bestimmen Sie eine Basis B von $\mathbb{R}^3$, für die die Matrix ${}_B\varphi_B$ eine Diagonalmatrix ist.

(b) Bestimmen Sie ${}_E\varphi_E$, wobei mit E die Standardbasis für $\mathbb{R}^3$ gemeint ist.

Online-Aufgabe.

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 13.12.–20.12.) auf folgender Webseite:

http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test430/

Präsenzübungen

Aufgabe P 31. *Orthogonale Matrizen*
Welche der folgenden Matrizen sind orthogonal?

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}\cos(\sqrt{5}\pi) & \sin(-\sqrt{5}\pi) & 0\\ \sin(\sqrt{5}\pi) & \cos(-\sqrt{5}\pi) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}.$$

Aufgabe P 32. *Entwickeln von Determinanten*
Berechnen Sie die Determinanten der beiden Matrizen

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & \mathrm{e} & \pi\\ 3 & 4 & -\pi & \mathrm{i}\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 3 & 4\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix}11 & 1 & 0 & -1\\ -3 & 4 & \mathrm{i} & 5\\ 2 & 6 & 0 & 7\\ 7 & 5 & 1 & 4\end{pmatrix}.$$

Aufgabe P 33. *Gram–Schmidtsches Orthonormierungsverfahren*
Die Vektoren $b_1 := (1,1,1)^\intercal$, $b_2 := (4,2,0)^\intercal$ und $b_3 := (5,1,3)^\intercal$ bilden eine Basis des $\mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis f_1, f_2, f_3 des $\mathbb{R}^3$ so, dass $\mathrm{L}(f_1) = \mathrm{L}(b_1)$, $\mathrm{L}(f_1, f_2) = \mathrm{L}(b_1, b_2)$ und $\mathrm{L}(f_1, f_2, f_3) = \mathrm{L}(b_1, b_2, b_3)$ gilt.

Aufgabe P 34. *Multiplikativität der Determinante*
Aus der Vorlesung ist bekannt, dass für beliebige Matrizen $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ die Identität

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

gilt. Verifizieren Sie obige Gleichung (ohne sie zu verwenden) exemplarisch für den Fall, dass

(a) A oder B eine *Diagonalmatrix* ist, also eine Matrix der Gestalt

$$\begin{pmatrix}* & 0 & \dots & 0\\ 0 & * & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \dots & 0 & *\end{pmatrix};$$

(b) A und B obere Dreiecksmatrizen sind;

(c) A oder B nicht vollen Rang besitzt.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 33. *Berechnen von Determinanten*

Berechnen Sie für alle $t \in \mathbb{R}$ die Determinante der Matrix

$$A_t := \begin{pmatrix} t^5 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ t^4 & 1 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ t^3 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ t^2 & 2 & 12 & 0 & 2 & 0 \\ t & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{6\times 6}.$$

Für welche t ist A_t invertierbar?

Aufgabe H 34. *Orthogonale Matrizen*

Es seien $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$ und $C \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ eine beliebige orthogonale Matrix. Welche der Matrizen

$$A + A^\intercal,\ B + B^\intercal,\ C^\intercal,\ \left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{smallmatrix}\right) \text{ und } \left(\begin{smallmatrix} A & C \\ 0 & B \end{smallmatrix}\right)$$

sind dann ebenfalls orthogonal?

Aufgabe H 35. *Gram–Schmidtsches Orthonormierungsverfahren*

Wir betrachten den $\mathbb{R}^4$ mit dem Standardskalarprodukt sowie die Vektoren

$$b_1 := (-1, 1, 0, 0)^\intercal,\ b_2 := (3, 1, 1, 0)^\intercal \text{ und } b_3 := (1, -1, 9, 1)^\intercal.$$

(a) Sei V der Untervektorraum des $\mathbb{R}^4$, welcher von den Vektoren b_1, b_2 und b_3 aufgespannt wird. Zeigen Sie, dass V dreidimensional ist.

(b) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis f_1, f_2, f_3 von V, die den Gleichungen $\mathrm{L}(f_1) = \mathrm{L}(b_1)$, $\mathrm{L}(f_1, f_2) = \mathrm{L}(b_1, b_2)$ und $\mathrm{L}(f_1, f_2, f_3) = \mathrm{L}(b_1, b_2, b_3)$ genügt.

Aufgabe H 36. *Determinante linearer Abbildungen*

Es sei V ein n–dimensionaler $\mathbb{R}$–Vektorraum und $F\colon V \to V$ eine $\mathbb{R}$–lineare Abbildung.

(a) Zeigen Sie: Sind B und C zwei Basen von V, dann gilt

$$\det({}_BF_B) = \det({}_CF_C).$$

Wir setzen nun $\det(F) := \det({}_BF_B)$, wobei B eine beliebige Basis von V ist. Nach dem vorherigen Aufgabenteil ist diese Zahl von der konkreten Wahl der Basis unabhängig.

(b) Zeigen Sie nun ferner: Ist $G\colon V \to V$ eine weitere $\mathbb{R}$–lineare Abbildung, so gilt

$$\det(G \circ F) = \det(G) \cdot \det(F).$$

Online-Aufgabe.

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 20.12.–09.01.) auf folgender Webseite:

http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/

S. Hagh Shenas Noshari,
S. Nitsche, C. Rösinger,
A. Thumm, D. Zimmermann

10. Gruppenübung zur Vorlesung
Höhere Mathematik 1

M. Stroppel

Wintersemester 2018/19

Präsenzübungen

Aufgabe P 35. *Koordinatentransformation*

Sei $\mathbb{E}$ das Standardkoordinatensystem für $\mathbb{R}^2$. Weiter seien gegeben

$$_{\mathbb{E}}P = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \quad \text{und} \quad \mathbb{G} = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

(a) Skizzieren Sie die Koordinatensysteme $\mathbb{F}$ und $\mathbb{G}$ und den Punkt P in das Standardkoordinatensystem $\mathbb{E}$. Handelt es sich bei $\mathbb{F}$ und $\mathbb{G}$ um kartesische Koordinatensysteme?

(b) Skizzieren Sie den Punkt Q mit $_{\mathbb{F}}Q = \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix}^\intercal$.

(c) Bestimmen Sie $_{\mathbb{F}}P$ und $_{\mathbb{G}}P$ anhand der Skizze.

(d) Bestimmen Sie $_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$ und $_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{G}}$.

(e) Bestimmen Sie $_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$ und $_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{E}}$ unter Verwendung von **(d)**.
Bestimmen Sie damit erneut $_{\mathbb{F}}P$ und $_{\mathbb{G}}P$.

(f) Bestimmen Sie $_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{F}}$ unter Verwendung von **(d)** und **(e)**.

Aufgabe P 36. *Drehung*

Es beschreiben $D_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & 1 & 1 \end{pmatrix}$ und $D_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$ Drehungen.

(a) Bestimmen Sie jeweils die Spur und den Cosinus des Drehwinkels von D_1 und D_2.

(b) Bestimmen Sie die Drehachse von D_1.

Aufgabe P 37. *Spiegelung*

Bestimmen Sie eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und einen Vektor $t \in \mathbb{R}^2$ so, dass die affine Abbildung $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon x \mapsto Ax + t$ die Spiegelung an der Geraden $(1,0)^\intercal + \mathrm{L}\left((0,1)^\intercal\right)$ beschreibt.
Ist f eine Isometrie? Ist f eine eigentliche Isometrie?

Aufgabe P 38. *Affine Abbildungen*

Sei $P = (1,2)^\intercal \in \mathbb{R}^2$. Sei $\alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Drehung um P mit dem Drehwinkel $\frac{\pi}{4}$ gegen den Uhrzeigersinn.

(a) Skizzieren Sie die Punkte $Q = (1,0)^\intercal$, $R = (0,2)^\intercal$, $\alpha(Q)$ und $\alpha(R)$.
Ist $|Q - R| = |\alpha(Q) - \alpha(R)|$?

(b) Sei $\beta\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon x \mapsto x + P$. Sei $\gamma\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon x \mapsto \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{4}) & -\sin(\frac{\pi}{4}) \\ \sin(\frac{\pi}{4}) & \cos(\frac{\pi}{4}) \end{pmatrix} x$.
Ist $\alpha = \beta \circ \gamma \circ \beta^{-1}$ oder ist $\alpha = \beta^{-1} \circ \gamma \circ \beta$?

(c) Bestimmen Sie den linearen Anteil und den Translationsanteil von α.
Ist α eine Affinität? Ist α eine Isometrie?

(d) Finden Sie eine Abbildung $\delta\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ so, dass $\delta \circ \alpha$ die Drehung um P mit dem Drehwinkel $\frac{\pi}{4}$ im Uhrzeigersinn ist.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 37. *Spiegelung*

Eine Spiegelung an einer Ebene im $\mathbb{R}^3$ wird beschrieben durch $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Geben Sie die Spiegelebene in Hesse-Normalform an.

(b) Sei $\alpha\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon v \mapsto A^{-1}v$. Ist $\alpha \circ \alpha$ eine eigentliche / uneigentliche Isometrie?

(c) Seien $r_1 := (\,-2 \;\; 1 \;\; -2\,)^\intercal$ und $r_2 := (\,-2 \;\; 4 \;\; -2\,)^\intercal$. Für welche $j \in \{1,2\}$ ist die Abbildung $\beta_j : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon v \mapsto Av + r_j$ eine Ebenenspiegelung? Geben Sie in diesen Fällen die Spiegelebene in Hesse-Normalform an.

Aufgabe H 38. *Drehung*

Seien $b_1 := (\,0 \;\; 1 \;\; 0\,)^\intercal$, $b_2 := (\,1 \;\; 0 \;\; -1\,)^\intercal$, $b_3 := (\,-1 \;\; 0 \;\; -1\,)^\intercal$ die Vektoren der Basis B. Für $t \in \mathbb{R} \smallsetminus \{8\}$ seien $c_1 := \frac{1}{3}(\,2 \;\; t \;\; -2\,)^\intercal$, $c_2 := \frac{1}{3}(\,-1 \;\; -4 \;\; 1\,)^\intercal$, $c_3 := (\,-1 \;\; 0 \;\; -1\,)^\intercal$ die Vektoren der Basis C und E sei die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$.

(a) Sei $\gamma\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ linear mit $\gamma(b_j) = c_j$ für $j \in \{1,2,3\}$. Bestimmen Sie ${}_E\gamma_E$.

(b) Gibt es $t \in \mathbb{R} \smallsetminus \{8\}$ so, dass γ aus **(a)** eine Drehung ist? Bestimmen Sie für diese Fälle die Drehachse und den Cosinus des Drehwinkels von γ.

Aufgabe H 39. *Koordinatentransformation I*

Sei $\mathbb{E}$ das Standardkoordinatensystem in $\mathbb{R}^3$. Zudem seien

$$\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right), \quad \alpha\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon v \mapsto \begin{pmatrix} 8 & 6 & 1/2 \\ -2 & -2 & -2 \\ -6 & -4 & 1 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

(a) Ist $\mathbb{F}$ ein affines / kartesisches Koordinatensystem? Bestimmen Sie ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$ und ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$.

(b) Geben Sie die Beschreibung ${}_{\mathbb{F}}\alpha_{\mathbb{F}}$ der Abbildung α bezüglich $\mathbb{F}$ an.

Aufgabe H 40. *Koordinatentransformation II*

Seien $\mathbb{F}$, $\mathbb{G}$ affine Koordinatensysteme. Sei ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon v \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ für das Standardkoordinatensystem $\mathbb{E}$, sowie

$$\begin{array}{llll} {}_{\mathbb{E}}P = (\,1 \;\; 0 \;\; -1\,)^\intercal, & {}_{\mathbb{E}}Q = (\,-3 \;\; 4 \;\; -2\,)^\intercal, & {}_{\mathbb{E}}R = (\,-7 \;\; 2 \;\; -1\,)^\intercal, & {}_{\mathbb{E}}S = (\,-5 \;\; 4 \;\; -1\,)^\intercal \\ {}_{\mathbb{G}}P = (\,0 \;\; 0 \;\; 0\,)^\intercal, & {}_{\mathbb{G}}Q = (\,1 \;\; 0 \;\; 1\,)^\intercal, & {}_{\mathbb{G}}R = (\,2 \;\; 0 \;\; 0\,)^\intercal, & {}_{\mathbb{G}}S = (\,1 \;\; -1 \;\; 1\,)^\intercal. \end{array}$$

(a) Bestimmen Sie $\mathbb{F}$, $\mathbb{G}$ und ${}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{F}}$.

(b) Zeigen Sie mittels der Geradentreue affiner Abbildungen, dass es kein affines Koordinatensystem $\mathbb{H}$ so gibt, dass ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{H}}\left((\,-1 \;\; 0 \;\; 3\,)^\intercal\right) = (\,7 \;\; -3 \;\; 4\,)^\intercal$, ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{H}}\left((\,0 \;\; 1 \;\; 2\,)^\intercal\right) = (\,7 \;\; -2 \;\; 2\,)^\intercal$, ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{H}}\left((\,-3 \;\; -2 \;\; 5\,)^\intercal\right) = (\,7 \;\; -4 \;\; 5\,)^\intercal$.

Online-Aufgabe.

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 10.01.–16.01.) auf folgender Webseite:

http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test430/

S. Hagh Shenas Noshari,
S. Nitsche, C. Rösinger,
A. Thumm, D. Zimmermann

11. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 1

M. Stroppel

Wintersemester 2018/19

Präsenzübungen

Aufgabe P 39. *Geometrische Bedeutung von Eigenwerten und -vektoren*

Gegeben seien $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$, sowie $v_1 = (1,0)^\intercal$, $v_2 = (0,1)^\intercal$ und $v_3 = (2,-2)^\intercal$.

(a) Zeichnen Sie v_k sowie Av_k für $k \in \{1,2,3\}$ in das Standardkoordinatensystem für $\mathbb{R}^2$ ein. Sind v_1, v_2, v_3 Eigenvektoren von A? Welche Eigenwerte hat A?

(b) Bestimmen Sie eine Basis aus Eigenvektoren von A und markieren Sie diese im Bild von **(a)**.

(c) Stellen Sie $w = (-3,1)^\intercal$ bezüglich der Basis aus **(b)** dar und zeichnen Sie w und Aw in das Bild von **(b)** ein. Machen Sie sich unter Verwendung der Eigenwerte und Eigenvektoren das Zustandekommen der Bildpunkte klar.

Aufgabe P 40. *Vielfachheiten und Diagonalisierbarkeit*

Gegeben sei die komplexe Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und die Eigenräume von B.

(b) Bestimmen Sie die algebraische und geometrische Vielfachheit der Eigenwerte von B. Ist B diagonalisierbar?

Aufgabe P 41. *Diagonalisierbarkeit*

Gegeben sei

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie ohne Berechnung des charakteristischen Polynoms, dass 1 ein Eigenwert von C ist. Berechnen Sie die weiteren Eigenwerte mittels der Spur und der Determinante.

(b) Gibt es eine invertierbare Matrix T so, dass $T^{-1}CT$ eine Diagonalmatrix ist? Bestimmen Sie gegebenenfalls eine solche Matrix T.

Aufgabe P 42. *Eigenwerte und Eigenräume*

Finden Sie eine Matrix, welche die Eigenwerte 2 und 3 hat und zu diesen die Eigenräume

$$V(2) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \quad \text{und} \quad V(3) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Bestimmen Sie das charakteristische Polynom dieser Matrix.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 41. *Eigenwerte und Vielfachheiten*

Für $s \in \mathbb{R}$ seien

$$A := \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_s := \begin{pmatrix} 0 & s-2 \\ 4 & 2s-6 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D_s := \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C_s \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A und von C_s in Abhängigkeit von $s \in \mathbb{R}$.

(b) Geben Sie die algebraische Vielfachheit aller Eigenwerte von D_s in Abhängigkeit von $s \in \mathbb{R}$ an.

(c) Bestimmen Sie für $s = 1$ die Eigenräume aller Eigenwerte von D_1 und geben Sie jeweils die geometrische Vielfachheit an.

Aufgabe H 42. *Eigenwerte und orthogonale Matrizen*

(a) Seien v und w reelle Eigenvektoren von $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ zu den reellen Eigenwerten λ bzw. μ. Drücken Sie $\langle Av \,|\, Aw \rangle$ in Abhängigkeit von $\langle v \,|\, w \rangle$ aus.

(b) Zeigen Sie: Für jeden Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$ einer orthogonalen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt $\lambda = 1$ oder $\lambda = -1$.

(c) Zeigen Sie: Ist $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ uneigentlich orthogonal, so sind 1, -1 Eigenwerte von A.

(d) Geben Sie eine eigentlich orthogonale Matrix $B \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ an, die keine reellen Eigenwerte hat.

Aufgabe H 43. *Schiefsymmetrische Matrizen*

Für $t \in \mathbb{R}$ sei $A_t \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ die schiefsymmetrische Matrix

$$A_t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & t \\ 1 & 0 & -t & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie zu jedem $t \in \mathbb{R}$ das charakteristische Polynom, sämtliche Eigenwerte von A_t sowie deren geometrische und algebraische Vielfachheit.

(b) Für welche t gibt es eine symmetrische Matrix $B \in \mathbb{R}^{4\times 4}$, die zu A_t konjugiert ist?

Aufgabe H 44. *Symmetrische Matrizen*

Für jede reelle Zahl t definieren wir die reelle symmetrische Matrix

$$A_t := \begin{pmatrix} t & 0 & -1 \\ 0 & t & 1 \\ -1 & 1 & t \end{pmatrix}.$$

(a) Sei $t \in \mathbb{R}$ beliebig gewählt. Geben Sie eine orthogonale Matrix $T \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ an, für welche $T^{-1}A_tT$ Diagonalgestalt besitzt.

(b) Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist A_t zu A_0 konjugiert?

Online-Aufgabe.

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 17.01.–23.01.) auf folgender Webseite:

http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/

S. Hagh Shenas Noshari,
S. Nitsche, C. Rösinger,
A. Thumm, D. Zimmermann

12. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 1

M. Stroppel

Wintersemester 2018/19

Präsenzübungen

Aufgabe P 43. *Matrixdarstellung von Quadriken*

Es sei $\alpha \in \mathbb{R}$ ein Parameter.

(a) Beschreiben Sie die quadratische Form

$$q_\alpha \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \colon x = (x_1, x_2, x_3)^\intercal \mapsto 3(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2\alpha x_1 x_2 + 2x_2 x_3$$

durch eine symmetrische Matrix A_α als $q_\alpha(x) = x^\intercal A_\alpha \, x$.

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A_α in Abhängigkeit von α.

(c) Für welche Werte des Parameters α ist die quadratische Form q_α positiv definit, negativ definit oder indefinit?

Aufgabe P 44. *2D-Ausschnitte von 3D-Quadriken*

(a) Skizzieren Sie für $c \in \{-1, 0, 1\}$ jeweils die Lösungsmengen der folgenden Gleichungen:

(i) für $c^2 - 4x_3^2 + x_2 = 0$ in der x_2x_3-Ebene,

(ii) für $x_1^2 - 4x_3^2 + c = 0$ in der x_1x_3-Ebene,

(iii) für $x_1^2 - 4c^2 + x_2 = 0$ in der x_1x_2-Ebene

(b) Bestimmen Sie eine euklidische Normalform und die Gestalt der Quadrik $Q = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 - 4x_3^2 + x_2 = 0\}$.

(c) Gehen Sie vor wie in **(a)** und **(b)**, aber ersetzen Sie den Koeffizienten -4 durch $+4$.

Aufgabe P 45. *Euklidische Normalform – der Teufel im Detail*

Von den folgenden Gleichungen für $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ ist keine in euklidischer Normalform. Wo liegt jeweils der Fehler und wie müsste die zugehörige Normalform aussehen?

(a) $9x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 = 16$,

(b) $x_1^2 - 2x_3^2 + 2x_2 = 0$,

(c) $x_1^2 - 2x_2^2 + x_3 = 0$

Aufgabe P 46. *Elemente der Hauptachsentransformation*

Bestimmen Sie jeweils eine euklidische Normalform für die folgenden Quadriken.

(a) $Q_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2 + 4 = 0\}$,

(b) $Q_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 - x_2^2 + 2x_2 + 9x_3 = 17\}$,

(c) $Q_3 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 - x_2^2 + 9x_3^2 + 2x_2 + 18x_3 = 0\}$.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 45. *Typbestimmung von Quadriken*

Gegeben seien die Quadriken

$$Q_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid\ x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - x_3^2 + 9 = 0\}\,,$$
$$Q_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid\ -3x_1^2 + 2x_1x_3 + 19x_2^2 - \tfrac{1}{7}x_2x_3 + 6x_1 - 2x_3 - 3 = 0\}\,.$$

(a) Bestimmen Sie für $j \in \{1, 2\}$ jeweils eine symmetrische Matrix $A_j \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, $a_j \in \mathbb{R}^3$ und $c_j \in \mathbb{R}$ so, dass gilt

$$Q_j = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid\ x^\intercal A_j x + 2a_j^\intercal x + c_j = 0\}\,.$$

(b) Geben Sie für $j \in \{1, 2\}$ jeweils $A_{j,\mathrm{erw}}$ an und prüfen Sie damit, ob es sich bei Q_j um eine kegelige, parabolische oder eine Mittelpunktsquadrik handelt.

Aufgabe H 46. *Hauptachsentransformation*

Gegeben sei die Quadrik

$$Q = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3 + 2\sqrt{2}\,x_1 + 2\sqrt{2}\,x_3 = 0\right\}.$$

Bestimmen Sie ein kartesisches Koordinatensystem, bezüglich dem Q euklidische Normalform besitzt und geben Sie die zugehörige euklidische Normalform an.

Aufgabe H 47. *Schnitt von Ebene und Quadrik*

Gegeben seien die Ebene $E = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ und der Kreiszylinder $Q = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 + 4x_2 + 1 = 0\}$. Der Schnitt $S = E \cap Q$ ist eine Ellipse, deren Halbachsenlängen im Folgenden bestimmt werden sollen. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(a) Führen Sie ein kartesisches Koordinatensystem $\mathbb{F}$ so ein, dass $E = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid\ y_3 = 0\}$, wobei $y = {}_{\mathbb{F}}x$.

(b) Stellen Sie die Gleichung auf, die Q in Koordinaten $y = {}_{\mathbb{F}}x$ bezüglich $\mathbb{F}$ beschreibt.

(c) Wenn Sie in der Gleichung aus **(b)** $y_3 = 0$ setzen, ergibt sich eine beschreibende Gleichung (in zwei Variablen) für die gesuchte Ellipse S. Führen Sie nun eine Hauptachsentransformation für diese Quadrikgleichung durch, um die Halbachsenlängen von S zu bestimmen.

Aufgabe H 48. *Hauptachsentransformation und Skizzen*

Bestimmen Sie für die folgenden Quadriken jeweils eine euklidische Normalform und ein Koordinatensystem, bezüglich dem die Quadrik Normalform hat. Skizzieren Sie die Quadriken im Standardkoordinatensystem.

(a) $Q_1 = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x_1^2 + 4x_2^2 - 8x_2 + 3 = 0\right\}$

(b) $Q_2 = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 + x_1 - x_2 = 0\right\}$

(c) $Q_3 = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x_1x_2 + x_1 + x_2 + 1 = 0\right\}$

(d) $Q_4 = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x_1x_2 + x_1 + x_2 = 0\right\}$

Online-Aufgabe.

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 24.01.–30.01.) auf folgender Webseite:

http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test430/

S. Hagh Shenas Noshari,
S. Nitsche, C. Rösinger,
A. Thumm, D. Zimmermann

13. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 1

M. Stroppel

Wintersemester 2018/19

Präsenzübungen

Aufgabe P 47. *Modell: Einschaliges Hyperboloid*

Die Quadrik Q sei gegeben durch

$$Q := \left\{ z \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, z_1^2 + 2z_2^2 - z_3^2 - 2 = 0 \right\}$$

mit den Koordinatenebenen $E_{2,3} : z_1 = 0$, $E_{1,3} : z_2 = 0$ und $E_{1,2} : z_3 = 0$, welche im Modell farbig dargestellt sind. Eine Darstellung von Q bezüglich des Koordinatensystems mit den drei unterschiedlich grau gefärbten Koordinatenachsen finden Sie in Aufgabe **H 49**.

(a) Stellen Sie Q in euklidischer Normalform dar.
Welcher Typ liegt vor? Welche Gestalt liegt vor?

(b) Bestimmen Sie die Schnitte von Q mit den Koordinatenebenen $E_{2,3}$, $E_{1,3}$ und $E_{1,2}$. Geben Sie die Gestalten dieser Schnitte an.

(c) Identifizieren Sie mit Hilfe von **(b)** die z_1-Achse, die z_2-Achse und die z_3-Achse, sowie die Koordinatenebenen $E_{2,3}$, $E_{1,3}$ und $E_{1,2}$ im Modell.

(d) Welche der folgenden Konfigurationen können als Schnitt von Q mit einer Ebene durch den Ursprung entstehen?

- ein Punkt
- die leere Menge
- ein schneidendes Geradenpaar
- eine Ellipse
- eine Hyperbel
- ein paralleles Geradenpaar

Aufgabe P 48. *Ebene Quadrik*

In $\mathbb{R}^2$ sei bezüglich des Standardkoordinatensystems $\mathbb{E}$ die folgende Quadrik gegeben:

$$Q := \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x_1^2 + 2x_2(2x_1 - 5\sqrt{5}) - 5 + 4x_2^2 = 0 \right\}.$$

(a) Geben Sie die Matrixbeschreibung für Q an.

(b) Bestimmen Sie eine euklidische Normalform und die Gestalt von Q.

(c) Geben Sie ein kartesisches Koordinatensystem $\mathbb{H}$ an, in welchem diese euklidische Normalform angenommen wird.

(d) Skizzieren Sie das Koordinatensystem $\mathbb{H}$ sowie Q in das Standardkoordinatensystem.

Aufgabe P 49. *Monotonie und Beschränktheit*

Untersuchen Sie die Folgen auf Monotonie und Beschränktheit. Geben Sie, falls möglich, eine obere Schranke an. Geben Sie, falls möglich, eine untere Schranke an.

(a) $(5)_{n\in\mathbb{N}}$ **(b)** $(5^n)_{n\in\mathbb{N}}$ **(c)** $(5^{-n})_{n\in\mathbb{N}}$

(d) $\left((-\frac{1}{5})^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ **(e)** $\left(8\cos(\frac{-\pi n}{3})\right)_{n\in\mathbb{N}}$ **(f)** $\left(\frac{1}{2}\,n^2 - 20n + 1\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 49. *Modell: Einschaliges Hyperboloid*

Die Quadrik Q in $\mathbb{R}^3$ sei bezüglich des Standarkoordinatensystems $\mathbb{E}$ gegeben durch

$$Q: x_1^2+4x_2^2+x_3^2-2x_1x_2+8x_1x_3-2x_2x_3+(3\sqrt{2}-\sqrt{6})x_1-2\sqrt{6}x_2-(3\sqrt{2}+\sqrt{6})x_3-6=0.$$

Ein Modell von Q hatten Sie in den Übungen in den Händen. Sie finden dies auch unter: http://info.mathematik.uni-stuttgart.de/HM-Stroppel-Material/3D-Modelle/03/.
Im Modell ist die x_1-Achse weiß, die x_2-Achse grau und die x_3-Achse ist schwarz dargestellt. Sei zudem $\mathbb{F}=(S;\tilde{f}_1,\tilde{f}_2,\tilde{f}_3)$ ein kartesisches Koordinatensystem so, dass

$$_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}\colon \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3\colon\ v\mapsto \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-\sqrt{3} & 1 & -\sqrt{2}\\ 0 & 2 & \sqrt{2}\\ \sqrt{3} & 1 & -\sqrt{2}\end{pmatrix} v-\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1+\sqrt{3}\\ 2\\ 1-\sqrt{3}\end{pmatrix}.$$

- **(a)** Geben Sie eine Gleichung von Q in Koordinaten $\tilde{y}_1$, $\tilde{y}_2$, $\tilde{y}_3$ bezüglich $\mathbb{F}$ an.
- **(b)** Bestimmen Sie eine euklidische Normalform von Q, sowie ein Koordinatensystem $\mathbb{G}=(P;\tilde{f}_1,\tilde{f}_2,\tilde{f}_3)$, bezüglich dem Q diese Normalform annimmt.
- **(c)** Vergleichen Sie das Koordinatensystem $\mathbb{G}$ mit dem farbigen Koordinatensystem zur Darstellung von Q in **P 47** und beantworten Sie, ob $\mathbb{F}$ im Modell sichtbar ist?
- **(d)** Sei $\alpha\in\mathbb{R}$ ein Parameter. Die Ebene E_α sei bezüglich des Koordinatensystems $\mathbb{G}$ beschrieben durch die Gleichung $\tilde{z}_1=\alpha$. Kann $\alpha\in\mathbb{R}$ so gewählt werden, dass $Q\cap E_\alpha$ eine Ellipse beschreibt, welche eine Halbachse der Länge 2 besitzt?

Aufgabe H 50. *Quadrik mit Parameter*

Sei $\alpha\in\mathbb{R}$. Bestimmen Sie für die folgende parameterabhängige Quadrik Q_α die Matrixform, eine euklidische Normalform, sowie den Typ und die Gestalt in Abhängigkeit von α.

$$Q_\alpha := \left\{x\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, \alpha(2\alpha x_1+1)+(x_2-2x_3)^2+6(\sqrt{5}\,x_2-x_3^2)+19+8\alpha x_1=0\right\}.$$

Aufgabe H 51. *Rekursive Folge*

Für das Parameterpaar $(s,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ sei die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv definiert durch $a_1:=s$, $a_2:=t$ und $a_{n+1}:=-4a_n+5a_{n-1}$ für $n\geqq 2$.

- **(a)** Zeigen Sie, dass die folgenden Gleichungen mit $A:=\left(\begin{smallmatrix}-4&5\\1&0\end{smallmatrix}\right)$ für alle $n\in\mathbb{N}$ gelten:
$$A\begin{pmatrix}a_{n+1}\\a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{n+2}\\a_{n+1}\end{pmatrix}\quad\text{und}\quad A^n\begin{pmatrix}t\\s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{n+2}\\a_{n+1}\end{pmatrix}.$$
- **(b)** Bestimmen Sie A^n für $n\in\mathbb{N}$ durch Diagonalisieren von A. Benutzen Sie **(a)** um einen Ausdruck für a_n anzugeben, der nicht rekursiv von anderen Folgengliedern abhängt.
- **(c)** Bestimmen Sie alle Paare (s,t) so, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konstante Folge ist.

Aufgabe H 52. *Monotonie und Beschränktheit*

Untersuchen Sie die Folgen auf Monotonie und Beschränktheit. Geben Sie, falls möglich, eine obere Schranke an. Geben Sie, falls möglich, eine untere Schranke an.

(a) $\left((n+2)^3\cdot 3^{-n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ **(b)** $\left(\frac{1}{\sqrt{5n+10}-\sqrt{5n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ **(c)** $\left(\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k)!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

(d) $\left(\left|(-1)^n+\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)^n-\sin\left(\frac{\pi}{2}(n+4)\right)^n\right|\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Online-Aufgabe.

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 31.01.–06.02.) auf folgender Webseite: **http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/**

S. Hagh Shenas Noshari,
S. Nitsche, C. Rösinger,
A. Thumm, D. Zimmermann

14. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 1

M. Stroppel

Präsenzübungen

Aufgabe P 50. *Sandwiches*

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+\sin(n)\sqrt{n}}{n+1}$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n+3^n}$

Aufgabe P 51. *Limes inferior und Limes superior*

Geben Sie jeweils Beispiele für beschränkte Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an, für die gilt

(a) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$

(b) $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, (a_n+b_n) \neq \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n + \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, b_n$

Aufgabe P 52. *Konstruktion von Folgen I*

Finden Sie zwei Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, für die die folgenden Bedingungen gleichzeitig erfüllt sind:

1. Die Folge $(a_n+b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.
2. Die Folge $(a_n\cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.
3. Die Folge $(a_n-b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert.

Aufgabe P 53. *Konstruktion von Folgen II*

Entscheiden Sie jeweils, ob es möglich ist, dass eine Folge die angeführten Eigenschaften hat. Geben Sie in diesem Fall eine Folge mit dieser Eigenschaft an.

(a) Die Folge ist beschränkt und monoton fallend.

(b) Die Folge ist monoton fallend und nach oben unbeschränkt.

(c) Die Folge ist konvergent und nicht monoton.

(d) Die Folge hat drei verschiedene Häufungspunkte.

(e) Die Folge hat drei verschiedene Häufungspunkte und konvergiert.

(f) Die Folge hat die Häufungspunkte 1 und $+\infty$.

(g) Die Folge hat genau zwei verschiedene Häufungspunkte und besitzt eine Teilfolge mit drei verschiedenen Häufungspunkten.

(h) Die Folge hat zwei verschiedene Häufungspunkte und keine konstante Teilfolge.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 53. *ε-Kriterium*

Berechnen Sie jeweils den Grenzwert a der nachstehenden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und geben Sie jeweils speziell für $\varepsilon = 10^{-15}$ ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ an mit $|a_n - a| < \varepsilon$ für $n \geqq n_\varepsilon$.

(a) $a_n = \sum_{k=0}^{n} 9\left(\frac{1}{10}\right)^k$

(b) $a_n = \frac{n^2-4}{3n^2}$

Aufgabe H 54. *Häufungspunkte*

Bestimmen Sie alle Häufungspunkte der nachstehenden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei

(a) $a_n = \operatorname{Re}\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(1+\mathrm{i})\right)^n\right)$

(b) $a_n = \min\left\{(-1)^n, \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)\right\}$

Aufgabe H 55. *Grenzwerte*

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}\sqrt{\binom{n}{2}}$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n^2+2n-\sqrt{n}}-\sqrt{n^2+3n+14}$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{7^n+n^7}{4^n+3^n}}$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k^2}$

Aufgabe H 56. *Heron-Verfahren*

Zu $c > 1$ sei die rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben mit

$$a_1 = c, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{c}{a_n}\right).$$

(a) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sqrt{c} \leqq a_n \leqq c$.

(b) Folgern Sie mit Hilfe von **(a)**, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend ist.

(c) Begründen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist.

(d) Berechnen Sie den Grenzwert a von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Online-Aufgabe.

Zu diesem Übungsblatt gibt es keine Online-Aufgabe.