I. Blaschczyk, T. Ehnes,
A. P. Nagy, S. Noshari,
I. Paul, M. Pressland,
D. Zimmermann

**1. Gruppenübung zur Vorlesung**

# Höhere Mathematik 1

M. Stroppel

Wintersemester 2019/20

## Präsenzübungen

**Aufgabe P 1.** *Elementares Rechnen ohne Taschenrechner*

**(a)** Berechnen Sie $\frac{5\cdot\frac{4}{5}}{4}$, $\frac{10}{\frac{2}{10}}$, $\frac{1}{6}+\frac{13}{9}$ und $\frac{1}{2}+\frac{2+7}{7}$.

**(b)** Berechnen Sie $\binom{4}{k}$ für alle $k \in \{0,1,2,3,4\}$. Bestimmen Sie $\binom{5}{3}$ und $\binom{5}{2}$. Vereinfachen Sie die Ausdrücke $\binom{n}{1}$ und $\binom{n}{n-1}$ für $n \in \mathbb{N}$.

**(c)** Multiplizieren Sie die Klammern aus und vereinfachen Sie:

$$(\alpha+2)(2-\alpha), \qquad (\alpha+3)(1-\alpha)(\alpha+2), \qquad \frac{\alpha(\alpha+1)^2+\alpha^2+2\alpha+1}{(\alpha+1)^3}.$$

**Aufgabe P 2.** *Binomischer Lehrsatz und Nullstellen*

**(a)** Bestimmen Sie die reellen Nullstellen der folgenden beiden Funktionen $f_1, f_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$f_1(x) \;=\; x^3+3x^2+3x+1, \qquad f_2(x) \;=\; \sqrt{(x-5)(x+5)+3^2+4^2}.$$

**(b)** Berechnen Sie alle reellen Lösungen der Gleichung $2 = 2x^2 - 28x + 100$.

**Aufgabe P 3.** *Summen*

**(a)** Seien $a_1 = 5,\ a_2 = 3,\ a_3 = -1,\ a_4 = 3,\ a_5 = 17,\ a_6 = -4$ gegeben. Sei $b_j = a_j + 1$ für alle $j \in \{1,2,3,4,5,6\}$. Berechnen Sie

$$\sum_{j=2}^{5} a_j, \quad \sum_{j=2}^{5} b_j, \quad \sum_{j=0}^{2} a_{2j+1}, \quad \sum_{j=1}^{3} b_{2j}, \quad \sum_{j=1}^{3} 2b_j, \quad \sum_{j=4}^{4} a_j.$$

**(b)** Sei $a_k \in \mathbb{R}$ für $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie die Gleichheit der Ausdrücke für $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} a_{2k+1}, \qquad \sum_{k=3}^{n+3} a_{2k-5}, \qquad \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2n+1}(\cos((k+1)\pi)+1)a_k.$$

**Aufgabe P 4.** *Vollständige Induktion*

Zeigen Sie mit vollständiger Induktion für $n \in \mathbb{N}$:

**(a)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(3k-1) = \frac{n(3n+1)}{2}$.

**(b)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$.

Können Sie diese Aussage auch aus dem Binomischen Lehrsatz herleiten?

## **Hausübungen** (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

**Aufgabe H 1.** *Polynome, Binomischer Lehrsatz*

**(a)** Bestimmen Sie alle reellen Nullstellen von $(2x^3 + 12x^2 + 24x + 16)(x^4 + 1)$.

**(b)** Beweisen Sie $\sum_{k=0}^{n} \sin(\frac{\pi}{4} + k\pi)\binom{n}{k} = 0$ für $n \in \mathbb{N}$.

**(c)** Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der Ungleichung $\left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right)(4x^2 - 8x + 4) < 0$.

**(d)** Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der Gleichung $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$.

**Aufgabe H 2.** *Summen*

**(a)** Berechnen Sie die Summe der ersten $n$ ungeraden natürlichen Zahlen für $n \in \mathbb{N}$.

**(b)** Berechnen Sie $\sum_{j=4}^{n}(j^2 - 2j)$ für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqq 4$.

**(c)** Sei $a_k = (-1)^k \cdot k$ für $k \in \mathbb{N}$. Berechnen Sie $\sum_{k=4}^{103} a_{4k-12}$. Zeigen Sie außerdem $\sum_{j=1}^{2k} a_j = k$ für $k \in \mathbb{N}$.

**Aufgabe H 3.** *Vollständige Induktion mit Ungleichung*

Zeigen Sie durch vollständige Induktion die folgenden Aussagen:

**(a)** Es gilt $3n + 2^n \leqq 3^n$ für alle $n \geqq 3$.

**(b)** Es gilt $(1 - x)^n < \frac{1}{1+nx}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $0 < x < 1$.

**Aufgabe H 4.** *Vollständige Induktion mit Produkt*

Analog zur Summenschreibweise, führen wir das Produktsymbol ein: $\prod_{j=1}^{m} A_j$ bedeutet, dass man den Term $A_j$ für alle $j$ von $1$ bis $m$ auswertet und die entstandenen Zahlen zusammenmultipliziert. Zeigen Sie die folgenden Aussagen mittels vollständiger Induktion:

**(a)** Es gilt $\prod_{k=0}^{n}\left(1 + x^{(2^k)}\right) = \frac{1-x^{(2^{n+1})}}{1-x}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $x \neq 1$.

**(b)** Es gilt $\prod_{k=2}^{n}\left(1 - \frac{2}{k(k+1)}\right) = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{n}\right)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqq 2$.

**Online-Aufgabe.**

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 25.10.–31.10.) auf folgender Webseite:

**http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/**

Bitte geben Sie dort zunächst Ihre Matrikelnummer ein.

Die Lösungen sind als ganze Zahlen oder als Dezimalzahlen mit einem Dezimal**punkt** einzugeben. Sonstige Zeichen, wie zum Beispiel Klammern oder Operatoren wie $*$ und $/$, dürfen **nicht** benutzt werden.

Anschließend müssen Sie Ihr **Passwort** für die Onlineübungen eintragen, das Sie per Email an Ihre studentische Adresse (<st$*****$$**$@stud.uni-stuttgart.de>) erhalten haben.

Innerhalb des Bearbeitungszeitraums können Sie Ihre Eingaben beliebig oft wiederholen, wobei die **letzten** Eingaben gewertet werden. Der Bearbeitungszeitraum endet mittwochs, nach der Abgabe der schriftlichen Übungen in den Übungsgruppen, um 24:00 Uhr. Sie erhalten für die Bearbeitung der Online-Aufgabe 0, 1, oder 2 Punkte.

## Präsenzübungen

**Aufgabe P 5.** *Ungleichungen*

**(a)** Zeigen Sie für $x, y, z \in \mathbb{R}_0^+$:

$$(x+y+z)^3 \geqq 27\,x\,y\,z.$$

*Hinweis:* Geometrisches Mittel.

**(b)** Zeigen Sie folgende Ungleichung für $x \geqq -1/6$:

$$\sqrt{1+6x} \leqq (1+x)^3\,.$$

**Aufgabe P 6.** *Beträge, Ungleichungen*

**(a)** Bestimmen Sie die Menge $\{x \in \mathbb{R} \mid |x+1| = |x-3|\}$.

**(b)** Geben Sie die Menge aller $x \in \mathbb{R}$ an, welche die folgende Ungleichung erfüllen:

$$2\,|x-4| \geqq x-1.$$

**(c)** Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der Gleichung $x^2 - |x-1| - 1 = 0$.

**Aufgabe P 7.** *Mengen*

**(a)** Skizzieren Sie die folgenden Mengen:

$$M_1 := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y+1)^2 \leqq 1\right\},$$
$$M_2 := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 > 2\right\}.$$

**(b)** Skizzieren Sie $M_1 \cap M_2$ und $M_1 \smallsetminus M_2$.

**Aufgabe P 8.** *Abbildungen*

Untersuchen Sie, welche Werte die folgenden Abbilungen jeweils gar nicht / genau einmal / mehrmals annehmen.

**(a)** $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}\colon n \mapsto 2n$

**(b)** $g\colon \mathbb{R} \smallsetminus \{1\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x-1}$

**(c)** $h\colon [0,3] \to \mathbb{R}^+, x \mapsto |x-1| + |x-2|$

## **Hausübungen** (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

**Aufgabe H 5.** *Ungleichungen*

Zeigen Sie die folgenden Ungleichungen:

**(a)** Für $0 < a < b$ und $k \in \mathbb{N}, k > 1$ gilt $0 < \sqrt[k]{b} - \sqrt[k]{a} < \sqrt[k]{b-a}$.

**(b)** Für $a, b \in \mathbb{R}^+$ gilt $\frac{2ab}{a+b} \leqq \sqrt{ab}$.

Man nennt $\frac{2ab}{a+b}$ *harmonisches Mittel* und $\sqrt{ab}$ *geometrisches Mittel*.
Zeigen Sie außerdem, dass Gleichheit der Mittel nur für $a = b$ eintritt.

**Aufgabe H 6.** *Ungleichungen und Betragsungleichungen*

Bestimmen Sie jeweils die $x \in \mathbb{R}$, die die Ungleichung erfüllen.

**(a)** $3|x-2| > x+1$

**(b)** $(x+1)(x-2)(x+3)(x-4)(x+5) < 0$

**(c)** $|x-3||x-1| > (x+1)|x-5|$

**Aufgabe H 7.** *Mengen*

**(a)** Skizzieren Sie die Menge $M_1 \cap M_2$ falls

$$\begin{aligned} M_1 &:= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2+y^2-4 < 0\right\}, \\ M_2 &:= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2+y^2+2y \geqq 0\right\}. \end{aligned}$$

**(b)** Skizzieren Sie die Menge $M_3 \setminus M_4$ falls

$$\begin{aligned} M_3 &:= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; (y-1)^2 \geqq 1-(x-1)^2\right\}, \\ M_4 &:= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; |x-y| \leqq 1\right\}. \end{aligned}$$

**Aufgabe H 8.** *Abbildungen*

Untersuchen Sie, welche Werte die folgenden Abbildungen jeweils gar nicht / genau einmal / mehrmals annehmen.

**(a)** $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}\colon n \mapsto \binom{n+1}{n}$

**(b)** $g\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^+\colon x \mapsto \frac{x^2}{|x|}$

**(c)** $h\colon [\frac{1}{3}, 1] \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \big||3\,x-1|-1\big| + \big||x|-1\big|$

**Online-Aufgabe.**

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 31.10.–06.11.) auf folgender Webseite:

**http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test430/**

Bitte geben Sie dort zunächst Ihre Matrikelnummer ein.

Die Lösungen sind als ganze Zahlen oder als Dezimalzahlen mit einem Dezimal**punkt** einzugeben. Sonstige Zeichen, wie zum Beispiel Klammern oder Operatoren wie $*$ und $/$, dürfen **nicht** benutzt werden.

Anschließend müssen Sie das per Email erhaltene **Passwort** für die Onlineübungen eintragen.

Innerhalb des Bearbeitungszeitraums können Sie Ihre Eingaben beliebig oft wiederholen, wobei die **letzten** Eingaben gewertet werden. Der Bearbeitungszeitraum endet mittwochs, nach der Abgabe der schriftlichen Übungen in den Übungsgruppen, um 24:00 Uhr. Sie erhalten für die Bearbeitung der Online-Aufgabe 0, 1, oder 2 Punkte.

I. Blaschzyk, T. Ehnes,
A. P. Nagy, S. Noshari,
I. Paul, M. Pressland,
D. Zimmermann

**3. Gruppenübung zur Vorlesung**
**Höhere Mathematik 1**

M. Stroppel

Wintersemester 2019/20

## Präsenzübungen

**Aufgabe P 9.** *Abbildungen*

**(a)** Es seien $A$ die Menge der Teilnehmer einer Prüfung in Höherer Mathematik und $B$ die Menge der möglichen Noten $\{1.0, 1.3, 1.7, ..., 5.0\}$. Weiterhin sei $g\colon A \to B$ die Abbildung, die jedem Teilnehmer seine Note zuordnet. Beschreiben Sie Fälle, in denen $g$ injektiv bzw. surjektiv ist.

**(b)** Es seien $A$ die Menge der (anwesenden) Teilnehmer Ihrer Übungsgruppe. Weiterhin sei $f\colon A \to \mathbb{N}$ die Abbildung, die jedem Teilnehmer sein Alter (auf Jahre gerundet) zuordnet. Ist $f$ injektiv? Ist $f$ surjektiv? Ist $f$ bijektiv?

**(c)** Sei $h\colon (-1, +\infty) \to (0, +\infty)\colon x \mapsto \frac{1}{x+1}$. Skizzieren Sie den Graphen von $h$. Ist $h$ injektiv? Ist $h$ surjektiv? Ist $h$ bijektiv?

**(d)** Sei $j\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}\colon z \mapsto |z|$. Ist $h$ injektiv? Ist $h$ surjektiv? Ist $h$ bijektiv?

**Aufgabe P 10.** *Rechnen mit kompexen Zahlen*

Geben Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $a + b\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an:

**(a)** $\dfrac{1}{1+\mathrm{i}}$,

**(b)** $\mathrm{Im}\left(\dfrac{7+\mathrm{i}}{6-2\mathrm{i}}\right) + \mathrm{Re}(\overline{3+2\mathrm{i}})$,

**(c)** $\overline{w^2 - z}$ mit $w = 3\mathrm{i}$ und $z = \frac{1}{2} + 4\mathrm{i}$.

**Aufgabe P 11.** *Komplexe Gleichungen*

**(a)** Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil von $\overline{z}^2 - |z|$.

**(b)** Bestimmen Sie die Menge $\left\{z \in \mathbb{C} \;\middle|\; z^2 = i\right\}$.

**(c)** Bestimmen Sie die Menge $\left\{z \in \mathbb{C} \;\middle|\; z^2 = 1 + i\right\}$.

**Aufgabe P 12.** *Mengen in $\mathbb{C}$*

Skizzieren Sie die folgenden Mengen in der komplexen Zahlenebene:

**(a)** $A = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 \leqq |z - 3\mathrm{i}| < 2\}$,

**(b)** $B = \{(1 + \sqrt{3}\,\mathrm{i})^k \mid k \in \{-1, 0, 1, 2, 3\}\}$,

**(c)** $C = \{z \in \mathbb{C} \mid |\mathrm{Re}(z)| + 2|\mathrm{Im}(z)| < 2\}$.

## **Hausübungen** (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

**Aufgabe H 9.** *Abbildungen*

**(a)** Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2\colon x \mapsto (\sin(x), -\cos(x))$. Untersuchen Sie $f$ auf Bijektivität.

**(b)** Sei $g\colon \mathbb{C} \setminus \{\mathrm{i}\} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}\colon z \mapsto \frac{1}{z-\mathrm{i}}$. Untersuchen Sie $g$ auf Bijektivität.

**(c)** Sei $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon (x,y) \mapsto (x+2y, x-y)$. Untersuchen Sie $h$ auf Bijektivität.

**(d)** Konstruieren Sie eine bijektive Abbildung $j : [0,2] \to [2,5]$.

**Aufgabe H 10.** *Rechnen mit komplexen Zahlen*

**(a)** Geben Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $a + b\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an und bestimmen Sie den Real- und Imaginärteil:

$$\frac{3+4\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}, \quad \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^k, \ k \in \mathbb{Z}.$$

**(b)** Berechnen Sie die folgende komplexe Zahl mit Hilfe des Binomischen Lehrsatzes:

$$(-\sqrt{3}+\mathrm{i})^6 \cdot \frac{\mathrm{i}}{-\sqrt{2}+\sqrt{2}\mathrm{i}}.$$

**Aufgabe H 11.** *Komplexe Gleichungen*

Bestimmen Sie die folgenden Mengen:

**(a)** $\left\{n \in \mathbb{Z} \,\middle|\, \mathrm{i}^n \in \mathbb{R}\right\}$, **(b)** $\left\{z \in \mathbb{C} \,\middle|\, z\overline{z} - 2\mathrm{i}\overline{z} = 1 + 2\mathrm{i}\right\}$,

**(c)** $\left\{z \in \mathbb{C} \,\middle|\, z^2 + |z| = -2\right\}$, **(d)** $\left\{z \in \mathbb{C} \,\middle|\, z\overline{z} = 4\right\} \cap \left\{z \in \mathbb{C} \,\middle|\, z^2 = -4\right\}$.

**Aufgabe H 12.** *Komplexe Mengen*

Skizzieren Sie die folgenden Mengen in der komplexen Zahlenebene:

**(a)** $M_1 := \left\{z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z-1| = |z+1|\right\}$,

**(b)** $M_2 := \left\{z \in \mathbb{C} \,\middle|\, 1 < |z-\mathrm{i}| < 2\right\}$,

**(c)** $M_3 := \left\{z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z| \geqq 1, |\mathrm{Re}\, z| \leqq \frac{1}{2}, \mathrm{Im}\, z > 0\right\}$.

**Online-Aufgabe.**

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 07.11.–13.11.) auf folgender Webseite:

**http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/**

Bitte geben Sie dort zunächst Ihre Matrikelnummer ein.

Die Lösungen sind als ganze Zahlen oder als Dezimalzahlen mit einem Dezimal**punkt** einzugeben. Sonstige Zeichen, wie zum Beispiel Klammern oder Operatoren wie $*$ und /, dürfen **nicht** benutzt werden.

Anschließend müssen Sie Ihr **Passwort** für die Onlineübungen eintragen, das Sie per Email an Ihre studentische Adresse (<st∗∗∗∗∗∗∗@stud.uni-stuttgart.de>) erhalten haben.

Innerhalb des Bearbeitungszeitraums können Sie Ihre Eingaben beliebig oft wiederholen, wobei die **letzten** Eingaben gewertet werden. Der Bearbeitungszeitraum endet mittwochs, nach der Abgabe der schriftlichen Übungen in den Übungsgruppen, um 24:00 Uhr. Sie erhalten für die Bearbeitung der Online-Aufgabe 0, 1, oder 2 Punkte.

I. Blaschzyk, T. Ehnes,
A. P. Nagy, S. Noshari,
I. Paul, M. Pressland,
D. Zimmermann

**4. Gruppenübung zur Vorlesung**
# Höhere Mathematik 1

M. Stroppel

Wintersemester 2019/20

## Präsenzübungen

**Aufgabe P 13.** *Polarkoordinaten*

Seien

$$z_1 = -1 + \sqrt{3}\mathrm{i}, \qquad z_2 = 1 - \mathrm{i}.$$

Berechnen Sie jeweils die Polarkoordinatendarstellung der folgenden komplexen Zahlen, und zeichnen Sie die Zahlen in der komplexen Zahlenebene.
Ordnen Sie diese Zahlen dann nach ihrem Argument.

**(a)** $z_2$,

**(b)** $z_1$,

**(c)** $z_1 \cdot z_2$,

**(d)** $\dfrac{z_2}{z_1^2}$,

**(e)** $z_1^3$.

**Aufgabe P 14.** *Komplexe Lösungen von Gleichungen*

Geben Sie jeweils alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der folgenden Gleichungen an.

**(a)** $z^7 + 2z^3 = 0$,

**(b)** $z^2 + (z + 11)\mathrm{i} = 3z - 2$,

**(c)** $(3 - 3\mathrm{i})z^5 = \sqrt{2}$.

**Aufgabe P 15.** *Koordinatensysteme*

Wir betrachten die folgenden Koordinatensysteme im $\mathbb{R}^2$:

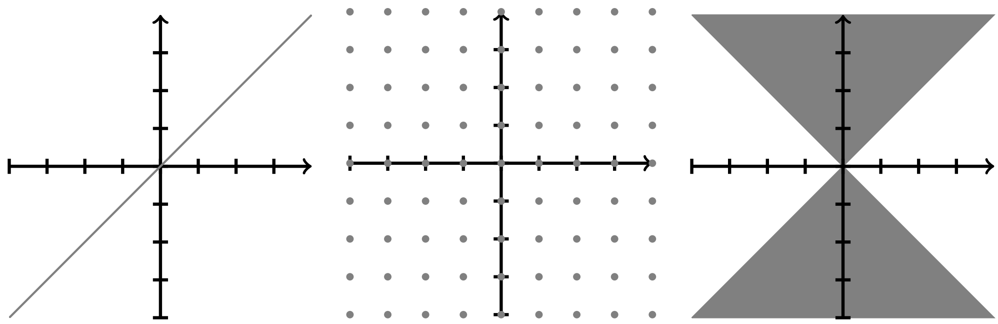
$$\mathbb{F} = \left(\binom{1}{1}; \binom{2}{1}, \binom{0}{-1}\right) \text{ und } \mathbb{G} = \left(\binom{3}{0}; \binom{1}{1}, \binom{1}{-1}\right).$$

Bestimmen Sie die Koordinaten ${}_{\mathbb{F}}x$ und ${}_{\mathbb{G}}x$ für

**(a)** $x = \binom{0}{0}$, **(b)** $x = \binom{1}{0}$, **(c)** $x = \binom{1}{1}$ und **(d)** $x = \binom{4}{1}$.

**Aufgabe P 16.** *Untervektorräume*

Auf welchen der nachfolgenden Abbildungen sind Untervektorräume des $\mathbb{R}^2$ angedeutet? Geben Sie jeweils an, welche Eigenschaften eines Untervektorraums erfüllt und welche verletzt werden.



**(a)** **(b)** **(c)**

## Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

**Aufgabe H 13.** *Polynomdivision*

Verwenden Sie Polynomdivision mit Rest, um für die nachfolgenden Polynome $f(X)$ und $g(X)$ jeweils Polynome $p(X)$ und $r(X)$ mit $f(X) = p(X)g(X) + r(X)$ zu bestimmen, wobei $r(X)$ kleineren Grad besitzt als $g(X)$.

**(a)** $f(X) = X - 5$ und $g(X) = X^3 - 2$;

**(b)** $f(X) = 6X^8 + 14X^7 - 2X^6 + 3X^5 - 29X^4 - 61X^3 - 124X^2 - 456X + 64$ und $g(X) = 3X^2 + 7X - 1$;

**(c)** $f(X) = X^4 - 2X^3 + 3X^2 - 4X + 5$ und $g(X) = 3X^2 - 7X$.

**Aufgabe H 14.** *Komplexe Lösungen von Gleichungen*

Geben Sie jeweils alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der folgenden Gleichungen an, und zeichnen Sie die Lösungsmenge in der komplexen Zahlenebene.

**(a)** $z^3 + 3\mathrm{i}z^2 + (1 + 6\mathrm{i})z = 2 + 9\mathrm{i}$,

**(b)** $(1 - \sqrt{3}\mathrm{i})z^6 = 4z^2$.

**Aufgabe H 15.** *Polarkoordinaten*

Wir betrachten die Menge

$$M = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \operatorname{Im}\left(\frac{z^3}{1+\mathrm{i}}\right) \geqq 0,\ |z - \mathrm{i}| \leqq 2 \right\}.$$

Skizzieren Sie die Menge $M$ in der komplexen Zahlenebene.

**Aufgabe H 16.** *Untervektorräume*

Es sei $\mathbb{C}^{2\times 2}$ die Menge aller komplexen $(2\times 2)$–Matrizen. Für alle komplexwertigen Matrizen $A = \left(\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{smallmatrix}\right)$ sowie $B = \left(\begin{smallmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{smallmatrix}\right)$ und für jede komplexe Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$ setzen wir

$$A + B := \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix} \text{ und } \lambda \cdot A := \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{pmatrix}.$$

Sie dürfen, ohne es beweisen zu müssen, annehmen, dass $\mathbb{C}^{2\times 2}$ auf diese Weise zu einem $\mathbb{C}$–Vektorraum wird. Überprüfen Sie

**(a)** für welche $\alpha \in \mathbb{C}$ die Teilmenge $\{\left(\begin{smallmatrix} \alpha & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{smallmatrix}\right) \mid a_{12},\, a_{21},\, a_{22} \in \mathbb{C}\}$ ein Untervektorraum von $\mathbb{C}^{2\times 2}$ ist;

**(b)** ob die Teilmenge $\{\left(\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{smallmatrix}\right) \mid a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in \mathbb{R}\}$ einen Untervektorraum von $\mathbb{C}^{2\times 2}$ bildet.

**Online-Aufgabe.**

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 14.11.–20.11.) auf folgender Webseite:

**http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test430/**

I. Blaschczyk, T. Ehnes,
A. P. Nagy, S. Noshari,
I. Paul, M. Pressland,
D. Zimmermann

**5. Gruppenübung zur Vorlesung**
# Höhere Mathematik 1

M. Stroppel

Wintersemester 2019/20

## Präsenzübungen

**Aufgabe P 17.** *Lineare Unabhängigkeit und Untervektorräume*

Gegeben seien $v_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix}2\\3\\0\\0\end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix}8\\-1\\6\\0\end{pmatrix}$, $v_4 = \begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\\-1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$.

Entscheiden und begründen Sie:

**(a)** Sind $v_1$, $v_2$ linear unabhängig? Bilden diese Vektoren eine Basis von $\mathbb{R}^4$ ?

**(b)** Sind $v_1$, $v_2$, $v_3$, $v_4$ linear unabhängig? Bilden diese Vektoren eine Basis von $\mathbb{R}^4$ ?

**(c)** Sind $v_1$, $0$, $v_2$ linear unabhängig?

**(d)** Sind $v_1$, $-v_1$ linear unabhängig?

**(e)** Bilden die Vektoren $v_1$, $v_2$, $v_3$, $v_4$, $v_4 + v_1$ eine Basis von $\mathbb{R}^4$?

**(f)** Bilden die Vektoren $v_1 + v_4$, $v_2 + v_4$, $v_3 + v_4$, $v_4$ eine Basis von $\mathbb{R}^4$?

**(g)** Liegt $v_2$ in der Ebene $\mathrm{L}(v_1, v_3)$?

**(h)** Ist $\{v_2 + x \mid x \in \mathrm{L}(v_1, v_3)\}$ ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^4$?

**Aufgabe P 18.** *Geraden und Ebenen*

Gegeben seien die folgenden Punkte in $\mathbb{R}^3$:

$$A = (1, -1, 1),\ B = (2, 0, 1),\ C = (0, -1, 2).$$

**(a)** Bestimmen Sie den Cosinus des Winkels, den die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ einschließen.

**(b)** Geben Sie die Ebene, die $A$, $B$ und $C$ enthält, in Parameterdarstellung an.

**(c)** Finden Sie den Punkt $D$ auf der Geraden durch $B$ und $C$ so, dass $\overrightarrow{AD}$ auf $\overrightarrow{BC}$ senkrecht steht.

**Aufgabe P 19.**

Entscheiden und begründen Sie, ob die folgenden Aussagen wahr sind.

**(a)** Die Kreislinie $\left\{v \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, |v| = 1\right\}$ ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$.

**(b)** Die Menge $\left\{\sum_{j=1}^{2} \alpha_j v_j \,\middle|\, \alpha_j \in \mathbb{R}\right\}$ mit $v_1 = (1, 2, -1)$ und $v_2 = (1, 0, -7)$ ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$.

**(c)** Die Menge $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + 3y - z \leqq 0\}$ ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$.

**(d)** Die Menge $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4x + 3y - z = 0\}$ ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$.

**Aufgabe P 20.**

Sei $V$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle\cdot|\cdot\rangle$ und $b_1, b_2 \in V$ so, dass

$$\langle b_1|b_1\rangle = 1,\ \langle b_1|b_2\rangle = 2,\ \langle b_2|b_2\rangle = 3.$$

Berechnen Sie:

**(a)** $\langle \alpha b_1 + b_2 | b_1 + \beta b_2\rangle$ für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$;

**(b)** $|b_1 + b_2|^2$.

## Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

**Aufgabe H 17.** *Ebenen und Geraden*

**(a)** Liegen die Geraden $g = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $h = \begin{pmatrix} 1 \\ -12 \\ 5 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ in einer Ebene?

**(b)** Zeigen Sie, dass das Viereck $ABCD$ mit $A = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 \\ 1/5 \\ -3/5 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ in einer Ebene liegt. Berechnen Sie die Kantenlängen des Vierecks $ABCD$. Berechnen Sie jeweils den Cosinus des Innenwinkels bei $A$ und $D$.

**Aufgabe H 18.** *Lineare (Un-)Abhängigkeit*

Gegeben seien die folgenden Vektoren aus $\mathbb{C}^3$: $a = \begin{pmatrix} 3+\mathrm{i} \\ -1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 2 \\ \mathrm{i} \\ -4+\mathrm{i} \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} 2+10\mathrm{i} \\ -4-\mathrm{i} \\ -4-11\mathrm{i} \end{pmatrix}$.

**(a)** Betrachten Sie in diesem Aufgabenteil $\mathbb{C}^3$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum. Geben Sie eine (möglichst einfache) Basis von $\mathbb{C}^3$ an. Zeigen Sie, dass $a$, $b$, $c$ linear unabhängig sind.

**(b)** Zeigen Sie, dass $a$, $b$, $c$ linear abhängig sind, wenn man $\mathbb{C}^3$ als $\mathbb{C}$-Vektorraum betrachtet. Geben Sie jeweils an, wie sich $a$, $b$, $c$ aus den beiden anderen Vektoren kombinieren lassen.

**Aufgabe H 19.**

Sei $V$ der Raum aller Polynomfunktionen auf $[0,1]$ mit Grad maximal $3$, d. h.

$$V = \{p\colon [0,1] \to \mathbb{R}\colon x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d \mid a,b,c,d \in \mathbb{R}\}.$$

Dieser Raum kann mit dem Skalarprodukt

$$\langle p|q\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)\,\mathrm{d}\,x$$

für $p,q \in V$ versehen werden. Gegeben seien nun folgende Polynome:

$$p_1(x) = x^3 + x, \quad p_2(x) = x^2 - 7, \quad p_3(x) = x^3 + x^2 + x + 1.$$

**(a)** Bestimmen Sie die Skalarprodukte $\langle p_1|p_2\rangle, \langle p_1|p_3\rangle$ und $\langle p_2|p_3\rangle$.

**(b)** Geben Sie ein Polynom der Form $ax^3 + bx^2$ aus $V$ mit $a \neq 0, b \neq 0$ an, dessen Norm gleich $1$ ist.

**Aufgabe H 20.**

Wir betrachten den Vektorraum $\mathbb{C}^{2\times 2}$ aller komplexer $2 \times 2$-Matrizen. Zeigen Sie, dass die Teilmenge

$$\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \,\middle|\, a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in \mathbb{C}, a_{11} + a_{12} + a_{21} + a_{22} = 0 \right\}$$

ein Untervektorraum von $\mathbb{C}^{2\times 2}$ ist.

**Online-Aufgabe.**

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 21.11.–27.11.) auf folgender Webseite:

**http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/**

I. Blaschczyk, T. Ehnes,
A. P. Nagy, S. Noshari,
I. Paul, M. Pressland,
D. Zimmermann

**6. Gruppenübung zur Vorlesung**

# Höhere Mathematik 1

M. Stroppel

Wintersemester 2019/20

## Präsenzübungen

**Aufgabe P 21.** *Basen*

Wir betrachten im Folgenden Vektoren in $\mathbb{R}^d$ für $d = 2$ bzw. $d = 3$.
Entscheiden Sie jeweils, ob die Vektoren eine Basis für $\mathbb{R}^d$ bilden.
Wenn keine Basis vorliegt: Können Sie durch Weglassen oder Hinzufügen von Vektoren eine Basis erhalten?

**(a)** $\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, **(b)** $\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$,

**(c)** $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$, **(d)** $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.

**Aufgabe P 22.** *Ebenen und Geraden*

Gegeben seien die Punkte $P = \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$ und $Q = \begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}$ im Raum $\mathbb{R}^3$ sowie die Vektoren

$$u = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} \text{ und } w = \begin{pmatrix}3\\3\\6\end{pmatrix}.$$

Entscheiden Sie, ob es sich bei den folgenden Parametrisierungen um Geraden oder Ebenen handelt und in welchem Verhältnis die beschriebenen Objekte zueinander stehen (Gleichheit, Parallelität, Orthogonalität, Winkel zwischen den Objekten).

**(a)** $A_1\colon x = P + \lambda u + \mu v, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

**(b)** $A_2\colon x = Q + \lambda u + \mu w, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

**(c)** $A_3\colon x = (P + Q) + \lambda v + \mu w, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

**Aufgabe P 23.** *Koordinatenvektoren*

Wir betrachten die Basis $B\colon \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ von $\mathbb{R}^3$.

(Sie dürfen ohne weitere Prüfung annehmen, dass es sich tatsächlich um eine Basis handelt.)

Bestimmen Sie die Koordinatenvektoren ${}_Bv$ und ${}_Bw$ von $v = \begin{pmatrix}3\\7\\1\end{pmatrix}$ und $w = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$.

**Aufgabe P 24.** *Lagrange-Polynome*

Wir betrachten die Polynome

$$f_1(X) = X(X-1)(X-2), \qquad f_2(X) = (X+1)(X-1)(X-2),$$
$$f_3(X) = X(X+1)(X-2), \qquad f_4(X) = X(X+1)(X-1).$$

**(a)** Zeigen Sie, dass $f_1, f_2, f_3, f_4$ im Vektorraum $\operatorname{Pol}_3 \mathbb{R}$ linear unabhängig sind.

**(b)** Finden Sie ein Polynom $g \in \operatorname{Pol}_3 \mathbb{R}$ so, dass

$$g(-1) = 2, \qquad g(0) = 2, \qquad g(1) = 4, \qquad g(2) = 3.$$

**(c)** Erklären Sie, warum die Lösung von Teil **(b)** eindeutig ist.

## Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

**Aufgabe H 21.** *Orthonormalbasen*

Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ 0 \\ x \end{pmatrix}$.

**(a)** Finden Sie eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^2$, die ein Vielfaches des Vektors $v = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ enthält.

**(b)** Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$, die ein Vielfaches von $f(v)$ enthält.

**Aufgabe H 22.** *Hessesche Normalform*

Wir betrachten die Ebene $E \subseteq \mathbb{R}^3$, die durch die Punkte $P = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$, $Q = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ und $R = \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ geht. Bestimmen Sie die Hessesche Normalform von $E$ und den Cosinus des Winkels zwischen $E$ und der Ebene $\left\{ \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_3 = 0 \right\}$.

**Aufgabe H 23.** *Lineare Abhängigkeit von Abbildungen*

Wir betrachten den Vektorraum $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ aller stetigen Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Die Funktionen $f_1, f_2, f_3 \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ seien gegeben durch

$$f_1(x) = \cos(x), \qquad f_2(x) = \sin(x), \qquad f_3(x) = \mathrm{e}^x.$$

**(a)** Als reeller Vektorraum enthält $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ die Abbildung $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3$ für $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$. Werten Sie diese Abbildung im Punkt $x_0 = 0$ aus.

**(b)** Zeigen Sie, dass die Vektoren $f_1, f_2, f_3$ linear unabhängig in $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ sind.

**(c)** Finden Sie eine Abbildung $f_4 \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ so, dass $f_1, f_2, f_3, f_4$ linear unabhängige Vektoren sind.

**Aufgabe H 24.** *Lagrange-Polynome*

Wir betrachten die Abbildung $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x^2 - \cos(\pi x)$. Finden Sie ein Polynom $p(x)$ von Grad $2$ so, dass $p(x) = f(x)$ für $x = 0$, $x = \frac{1}{2}$ und $x = 1$ gilt.

**Online-Aufgabe.**

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 28.11.–04.12.) auf folgender Webseite:

**http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test430/**

I. Blaschzyk, T. Ehnes,
A. P. Nagy, S. Noshari,
I. Paul, M. Pressland,
D. Zimmermann

**7. Gruppenübung zur Vorlesung**

# Höhere Mathematik 1

M. Stroppel

Wintersemester 2019/20

## Präsenzübungen

**Aufgabe P 25.** *Rechnen mit Matrizen*

Es sei $A = \left(\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ eine beliebige Matrix und es seien $s := \left(\begin{smallmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{smallmatrix}\right)$, $p := \left(\begin{smallmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{smallmatrix}\right)$ die Spalten dieser Matrix sowie $z := (a_{11}, a_{12})$ und $\ell := (a_{21}, a_{22})$ ihre Zeilen.

**(a)** Verifizieren Sie, dass für $x = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{C}^2$ die folgenden Gleichungen gelten:

$$Ax = x_1 s + x_2 p \text{ und } x^\intercal A = x_1 z + x_2 \ell.$$

**(b)** Folgern Sie, dass für die Standardbasis $\mathrm{e}_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\mathrm{e}_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ des $\mathbb{C}^2$ gilt: $A\mathrm{e}_1 = s$, $A\mathrm{e}_2 = p$, $\mathrm{e}_1^\intercal A = z$ und $\mathrm{e}_2^\intercal A = \ell$.

**(c)** Sei $B \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ eine weitere Matrix. Zeigen Sie: Die Matrix $BA$ besitzt die Spalten $Bs$, $Bp$ und $AB$ ist die Matrix mit Zeilen $zB$ und $\ell B$.

**Aufgabe P 26.** *Lineares Gleichungsystem*

Entscheiden Sie, ob die Mengen

$$M_1 := (1,1,1)^\intercal + \mathbb{R}(2,0,-1)^\intercal \text{ und } M_2 := (0,1,1)^\intercal + \mathbb{R}(2,1,5)^\intercal$$

in der Lösungsmenge des Gleichungsystems

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ -4x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

liegen. Bestimmen Sie eine Basis des Lösungsraums.

**Aufgabe P 27.** *Kreuzprodukt*

**(a)** Seien $a = (3,0,4)^\intercal,\ b = (2,2,1)^\intercal,\ c = (0,1,0)^\intercal \in \mathbb{R}^3$.
Berechnen Sie $a \times b, a \times c,\ b \times c,\ a \times (2a + 3b + 4c),\ \langle a \times b \,|\, c\rangle$.

**(b)** Entscheiden Sie, ob die folgenden Rechenregeln für alle Vektoren $x, y, z \in \mathbb{R}^3$ und alle reellen Zahlen $s, t \in \mathbb{R}$ korrekt oder falsch sind.
$x \times (sy + tz) = s(x \times y) + t(x \times z),\ x \times (y \times z) = (y \times x) \times z$

**(c)** Seien $x, y, z$ linear abhängige Vektoren aus $\mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$. Seien $x, y$ linear unabhängig. Warum ist $x \times y$ ungleich $0$ und orthogonal zu $z$?

**Aufgabe P 28.** *Matrixschreibweise von Gleichungssystemen*

Entscheiden Sie, welche der nachfolgenden Mengen $M_1$, $M_2$, $M_3$ und $M_4$ sich als Lösungsmengen einer Gleichung $Ax = b$ mit $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und $b \in \mathbb{R}^3$ darstellen lassen. Geben Sie in diesen Fällen jeweils eine Matrix $A$ und einen Vektor $b$ explizit an.

**(a)** $M_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle x \,|\, y\rangle = 0\}$ für $y = (1,0,2)^\intercal$.

**(b)** $M_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle x \,|\, y\rangle = 1\}$.

**(c)** $M_3 = \{(x_1, x_2, x_3)^\intercal \in \mathbb{R}^3 \mid \langle \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) \,|\, \left(\begin{smallmatrix} x_3 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right)\rangle = 0\}$

**(d)** $M_4 = M_1 \cap M_2$.

## Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

**Aufgabe H 25.** *Rechnen mit Matrizen*

Berechnen Sie die Potenzen $A^n, B^n, C^n, D^n$ für die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -\frac{2}{5} & -1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$.

**Aufgabe H 26.** *Lineares Gleichungssystem*

Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ zwei Parameter. Wir betrachten $A_{\alpha,\beta} := \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ -1 & 1 & \beta \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ und $b := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

**(a)** Bestimmen Sie $L_0 := \{x \in \mathbb{R}^3 | A_{\alpha,\beta}x = 0\}$ in Abhängigkeit von $\alpha$ und $\beta$.

**(b)** Bestimmen Sie $L_b := \{x \in \mathbb{R}^3 | A_{\alpha,\beta}x = b\}$ in Abhängigkeit von $\alpha$ und $\beta$.

**Aufgabe H 27.** *Gauß–Algorithmus I*

Bestimmen Sie mit Hilfe des Gauß–Algorithmus die Lösungen des reellen Gleichungssystems $Ax = 0$ für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -4 & 2 \\ 3 & -2 & -7 & 3 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe H 28.** *Gauß–Algorithmus II*

Wir betrachten das folgende reelle lineare Gleichungssytem.

$$S : \left\{ \begin{aligned} -x_1 + x_2 - 4x_3 - x_4 - 2x_5 &= 0 \\ x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 &= 3 \\ x_1 - 5x_2 + 9x_3 + 5x_4 + 10x_5 &= -6 \end{aligned} \right.$$

**(a)** Erstellen Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix für $S$. Bringen Sie diese mittels Algorithmus 3.7.3 in die in Satz 3.7.2 angegebene Form.

**(b)** Bestimmen Sie eine spezielle Lösung von $S$. Bestimmen Sie eine Basis des Lösungsraums des zugehörigen homogenen linearen Gleichungssytems $S_H$.

**(c)** Geben Sie die Lösungsmenge von $S$ an. Verwenden Sie dazu (b).

**Online-Aufgabe.**

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 05.12.–11.12.) auf folgender Webseite:

**http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/**

I. Blaschzyk, T. Ehnes,
A. P. Nagy, S. Noshari,
I. Paul, M. Pressland,
D. Zimmermann

**8. Gruppenübung zur Vorlesung**

# Höhere Mathematik 1

M. Stroppel

Wintersemester 2019/20

## Präsenzübungen

**Aufgabe P 29.** *Rang*

Berechnen Sie jeweils den Zeilen- und Spaltenrang der folgenden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 5 & 10 \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Welche dieser Matrizen sind invertierbar? Für die invertierbaren Matrizen, berechnen Sie die Inverse.

**Aufgabe P 30.** *Beschreibende Matrizen*

Es sei $V$ ein Vektorraum mit den Basen $B\colon b_1, b_2, b_3$ und $C\colon c_1, c_2, c_3$. Weiter sei die lineare Abbildung $\alpha\colon V \to V$ gegeben mit

$$\alpha(c_1) = 2b_2 - b_3, \quad \alpha(c_2) = b_1 + b_2, \quad \alpha(c_3) = 4b_1 + 2b_3.$$

**(a)** Bestimmen Sie ${}_B\alpha_C$. Ist $\alpha$ injektiv?

**(b)** Sei weiter $b_1 = 2c_1$, $b_2 = c_1 + 3c_2$ und $b_3 = -2c_1 + c_2 - 4c_3$. Bestimmen Sie ${}_C\alpha_C$.

**(c)** Bestimmen Sie ${}_B\alpha_B$.

**Aufgabe P 31.** *Polynomraum und lineare Abbildungen*

Sei $\varphi\colon \operatorname{Pol}_3 \mathbb{R} \to \operatorname{Pol}_3 \mathbb{R}$ die Abbildung $\varphi\colon p \mapsto p''$ (zweite Ableitung).

**(a)** Zeigen Sie, dass $\varphi$ eine lineare Abbildung ist.

**(b)** Sei $P\colon p_1, p_2, p_3, p_4$ die Basis von $\operatorname{Pol}_3 \mathbb{R}$ mit $p_1(x) = 1$, $p_2(x) = x$, $p_3(x) = x^2$ und $p_4(x) = x^3$. Bestimmen Sie die Matrix ${}_P\varphi_P$.

**(c)** Bestimmen Sie eine Basis von $\operatorname{Kern}(\varphi)$. Ist die Matrix ${}_P\varphi_P$ invertierbar?

**(d)** Bestimmen Sie eine Basis von $\operatorname{Bild}(\varphi)$.

**Aufgabe P 32.** *Wahr oder falsch?*

Seien $A$ und $B$ zwei invertierbare Matrizen von reellen Zahlen. Entscheiden Sie, ob die gegebenen Sätze wahr oder im Allgemeinen falsch sind.

**(a)** $A + B$ ist invertierbar.

**(b)** $AB$ ist invertierbar.

**(c)** $\lambda A$ ist invertierbar für alle $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$.

**(d)** $A - A^{-1}$ ist invertierbar.

## Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

**Aufgabe H 29.** *Kern und Bild*

Es sei $B\colon B_1, B_2, B_3, B_4$ die Basis von $\mathbb{R}^{2\times 2}$ mit

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Weiter sei $\alpha\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}\colon A \mapsto \alpha(A) = A + A^\intercal$.

**(a)** Bestimmen Sie die beschreibende Matrix ${}_B\alpha_B$ sowie deren Rang.

**(b)** Berechnen Sie $\dim \operatorname{Bild}(\alpha)$ sowie $\dim \operatorname{Kern}(\alpha)$.

**(c)** Bestimmen Sie eine Basis von $\operatorname{Bild}(\alpha)$.

**(d)** Bestimmen Sie eine Basis von $\operatorname{Kern}(\alpha)$.

**Aufgabe H 30.** *Linearität*

Welche der nachfolgenden Abbildungen sind $\mathbb{R}$-linear?

**(a)** $F\colon \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}\colon A \mapsto A^\intercal$,

**(b)** $G\colon \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}\colon A \mapsto \operatorname{Sp}(A^2)$ (wobei $\operatorname{Sp}(B) = \sum_{j=1}^{n} b_{jj}$ für $B = (b_{jk})_{1\leqq j,k\leqq n}$),

**(c)** $H\colon \operatorname{Pol}\mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon p \mapsto p(3)$,

**(d)** $K\colon \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^0(\mathbb{R})\colon f \mapsto f' + 2f$. ($f'$ ist die erste Ableitung von $f$)

**Aufgabe H 31.** *Lineare Abbildungen und beschreibende Matrizen I*

Sei $\varphi\colon \operatorname{Pol}_3\mathbb{C} \to \operatorname{Pol}_3\mathbb{C}$ die Abbildung $\varphi\colon p(x) \mapsto p(x - \mathrm{i})$.

**(a)** Zeigen Sie, dass $\varphi$ eine lineare Abbildung ist.

**(b)** Sei $P\colon p_1, p_2, p_3, p_4$ die Basis von $\operatorname{Pol}_3\mathbb{C}$ mit $p_1(x) = 1$, $p_2(x) = x$, $p_3(x) = x^2$ und $p_4(x) = x^3$. Bestimmen Sie die Matrix ${}_P\varphi_P$.

**(c)** Sei $Q\colon q_1, q_2, q_3, q_4$ die Basis von $\operatorname{Pol}_3\mathbb{C}$ mit $q_1(x) = 1$, $q_2(x) = x + 1$, $q_3(x) = x^2 + x + 1$ und $q_4(x) = x^3 + x^2 + x + 1$. Bestimmen Sie die Matrix ${}_P\varphi_Q$.

**Aufgabe H 32.** *Lineare Abbildungen und beschreibende Matrizen II*

Sei $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die lineare Abbildung gegeben durch

$$\varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4x_1 - 3x_2 \\ -3x_1 - 4x_2 \end{pmatrix}.$$

Sei $E$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^2$, und $B\colon v_1, v_2$ die Basis mit $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

**(a)** Bestimmen Sie die Matrix ${}_E\varphi_E$.

**(b)** Bestimmen Sie die Matrizen ${}_E\mathrm{id}_B$ und ${}_B\mathrm{id}_E$.

**(c)** Bestimmen Sie die Matrix ${}_B\varphi_B$.

**(d)** Geben Sie eine geometrische Beschreibung der Abbildung $\varphi$.

**Online-Aufgabe.**

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 12.12.–18.12.) auf folgender Webseite:

**http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test430/**

I. Blaschzyk, T. Ehnes,
A. P. Nagy, S. Noshari,
I. Paul, M. Pressland,
D. Zimmermann

**9. Gruppenübung zur Vorlesung**
# Höhere Mathematik 1

M. Stroppel

Wintersemester 2019/20

## Präsenzübungen

**Aufgabe P 33.** *Lösbarkeit von LGS*

Bestimmen Sie für die folgenden linearen Gleichungssysteme die Dimension des Lösungsraums über dem Körper $\mathbb{K}$, ohne eine konkrete Lösung zu berechnen. Entscheiden Sie jeweils, ob die Abbildung $x \mapsto Ax$ injektiv, surjektiv oder bijektiv ist.

**(a)** $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 11 \\ 13 \end{pmatrix}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, **(b)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ -2 & 0 \\ 3 & 19 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$,

**(c)** $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & \pi \\ 1 & 7 & 5 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \pi \end{pmatrix}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, **(d)** $A = \begin{pmatrix} 3i & 1+i \\ 9i & 3+3i \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 2i \\ 6i \end{pmatrix}$, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

**Aufgabe P 34.** *Orthogonale Matrizen*

Entscheiden Sie jeweils, ob die folgenden reellen Matrizen orthogonal sind, oder nicht.

**(a)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, **(b)** $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

**(c)** $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, **(d)** $D = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$.

**Aufgabe P 35.** *Multiplikationssatz*

Berechnen Sie die Determinanten der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & -4 & -1 \\ 2 & 1 & -4 & -1 \\ -3 & 2 & 8 & 3 \end{pmatrix}.$$

Warum ist $A$ invertierbar? Berechnen Sie $A^{-1}$. Ist $A$ orthogonal? Berechnen Sie die Determinante von $A^{-1}B$.

**Aufgabe P 36.** *Strategie zur Determinatenberechnung*

Sei $x = (x_1, x_2, x_3)^\intercal \in \mathbb{R}^3$. Wir betrachten

$$D_3(x) := \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{pmatrix}.$$

**(a)** Sei $\Delta_3(x) := \det D_3(x)$. Zeigen Sie, dass $\Delta_3(x) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)$.

**(b)** Bestimmen Sie die Menge $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid \Delta_3(x) \neq 0\}$.

## Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

**Aufgabe H 33.** *Invertieren von Blockmatrizen*

Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ invertierbar und sei $M = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 10 & 7 \\ 5 & -3 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

**(a)** Zeigen Sie, dass $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ gilt.

**(b)** Finden Sie geeignete Matrizen $A, B, C \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ so, dass $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{E}_2 & C \\ 0 & \mathrm{E}_2 \end{pmatrix}$ gilt.

**(c)** Berechnen Sie $M^{-1}$, indem Sie die in **(b)** gefundenen Blockmatrizen invertieren.

**Aufgabe H 34.** *Vom Nutzen geeigneter Koordinaten*

Sei $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch $\varphi \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 3y + 3z \\ -x + 2y - z \\ x - 3y \end{pmatrix}$. Weiterhin betrachten wir die Basis $B\colon \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, sowie die Standardbasis $E$ von $\mathbb{R}^3$.

**(a)** Zeigen Sie, dass $B$ tatsächlich eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist.

**(b)** Bestimmen Sie $A := {}_E\varphi_E$.

**(c)** Bestimmen Sie ${}_B\varphi_B$.

**(d)** Berechnen Sie $A^7$.

**Aufgabe H 35.** *Entwicklungssatz*

Wir betrachten, für $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^\intercal \in \mathbb{R}^4$, die Determinante

$$\Delta_4(x) := \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 \end{pmatrix}.$$

**(a)** Zeigen Sie, dass $\Delta_4(x) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1)\Delta_3(x_2, x_3, x_4)$. (Siehe **P 36**.)

**(b)** Berechnen Sie $\Delta_4(x)$.

**Aufgabe H 36.** *Matrix-Inverse*

Sei $x \in \mathbb{R}^3$ so, dass $\Delta_3(x) \neq 0$ (siehe **P 36**). Berechnen Sie die Inverse der Matrix $D_3(x)$.

**Online-Aufgabe.**

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 19.12.19–8.1.20) auf folgender Webseite:

**http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/**

I. Blaschzyk, T. Ehnes,
A. P. Nagy, S. Noshari,
I. Paul, M. Pressland,
D. Zimmermann

**10. Gruppenübung zur Vorlesung**
# Höhere Mathematik 1

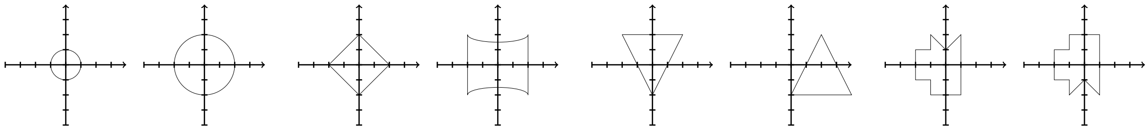
M. Stroppel

Wintersemester 2019/20

## Präsenzübungen

**Aufgabe P 37.** *Affine Abbildungen und Bewegungen*

In welchen der folgenden Bildpaaren entsteht die Figur auf der rechten Seite aus der Figur auf der linken Seite durch Anwenden einer affinen Abbildung bzw. (un-)eigentlichen Isometrie?



**(a)** **(b)** **(c)** **(d)**

**Aufgabe P 38.** *Drehungen*

Entscheiden Sie, welche der folgenden Matrizen eigentlich orthogonal sind.

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$C = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \quad D = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & -\sqrt{2} \\ 2 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{3} & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad F = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 2 & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie für die eigentlich orthogonalen unter diesen Matrizen jeweils den Drehwinkel der beschriebenen Drehung — oder wenigstens den Cosinus dieses Winkels.

**Aufgabe P 39.** *Koordinatensysteme*

Sei $\mathbb{E}$ das Standardkoordinatensystem für $\mathbb{R}^2$ und sei $P \in \mathbb{R}^2$ der Punkt mit ${}_{\mathbb{E}}P = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.
Weiter seien die Koordinatensysteme

$$\mathbb{F} = \left( \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \qquad \mathbb{G} = \left( \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

gegeben.

- **(a)** Skizzieren Sie die Koordinatensysteme $\mathbb{F}$ und $\mathbb{G}$, sowie den Punkt $P$ im Standardkoordinatensystem $\mathbb{E}$.
- **(b)** Bestimmen Sie ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$, ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$ und ${}_{\mathbb{F}}P$.
- **(c)** Bestimmen Sie ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{G}}$, ${}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{E}}$ und ${}_{\mathbb{G}}P$.
- **(d)** Bestimmen Sie ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{G}}$.
- **(e)** Als Plausibilitäts-Check („Probe“) Ihrer Antworten zu **(b)–(d)**:
  Überprüfen Sie, dass ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{G}}({}_{\mathbb{G}}P) = {}_{\mathbb{F}}P$.

**Aufgabe P 40.** *Orthonormierungsverfahren*

Es seien $b_1 = (3,5,0)^\mathsf{T}$, $b_2 = (-13,1,4)^\mathsf{T}$ und $b_3 = (-48,22,-1)^\mathsf{T}$. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis $F : f_1, f_2, f_3$ des $\mathbb{R}^3$ mit $\mathrm{L}(f_1) = \mathrm{L}(b_1)$ und $\mathrm{L}(f_1, f_2) = \mathrm{L}(b_1, b_2)$.

## Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

**Aufgabe H 37.** *Bewegungen*

In Koordinaten ${}_{\mathbb{E}}X = (x_1, x_2, x_3)^\intercal$ bezüglich des Standardkoordinatensystems $\mathbb{E}$ des $\mathbb{R}^3$ sei die Bewegung $\alpha\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$${}_{\mathbb{E}}\alpha(X) = \frac{1}{25}(25x_1, 7x_2 + 24x_3 + 90, 24x_2 - 7x_3 - 120)^\intercal.$$

**(a)** Finden Sie eine Matrix $A$ und einen Vektor $b$ mit ${}_{\mathbb{E}}\alpha(X) = A \cdot {}_{\mathbb{E}}X + b$ für alle $X \in \mathbb{R}^3$.

**(b)** Bestimmen Sie eine Ebene $E \subsetneqq \mathbb{R}^3$ so, dass $\alpha(X) = X$ für alle $X \in E$ gilt.

**(c)** Stellen Sie ein kartesisches Koordinatensystem $\mathbb{F}$ auf, in dem für alle $X \in \mathbb{R}^3$ gilt:

$${}_{\mathbb{F}}(\alpha(X)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot {}_{\mathbb{F}}X.$$

**Aufgabe H 38.** *Orthogonale Matrizen*

Es sei $t$ ein reeller Parameter und $A_t = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & t \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

**(a)** Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist $A_t$ orthogonal?

**(b)** Entscheiden Sie für jedes in **(a)** gefundene $t$, ob $A_t$ eigentlich oder uneigentlich ist.

**(c)** Für jedes in **(a)** gefundene $t$ betrachten wir die Abbildung $\alpha_t\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : x \mapsto A_t x$. Finden Sie jeweils die Fixpunktmenge $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha_t(x) = x\}$ dieser Abbildung.

**(d)** Geben Sie eine geometrische Beschreibung der Abbildung $\alpha_t$ von Teil **(c)**.

**Aufgabe H 39.** *Orthonormierungsverfahren*

Im $\mathbb{R}^4$ betrachten wir die Vektoren

$$b_1 = (-5, 3, 7, -7)^\intercal,\ b_2 = (1, 1, 0, 0)^\intercal,\ b_3 = (-2, 6, 4, 4)^\intercal \text{ und } b_4 = (-3, -1, 4, -2)^\intercal.$$

Zeigen Sie, dass $B : b_1, b_2, b_3, b_4$ eine Basis des $\mathbb{R}^4$ bildet und bestimmen Sie eine Orthonormalbasis $F : f_1, f_2, f_3, f_4$ des $\mathbb{R}^4$ derart, dass $\mathrm{L}(f_1) = \mathrm{L}(b_2)$, $\mathrm{L}(f_1, f_2) = \mathrm{L}(b_2, b_3)$ und $\mathrm{L}(f_1, f_2, f_3) = \mathrm{L}(b_2, b_3, b_4)$ gilt.

**Aufgabe H 40.** *Koordinatensysteme*

Wir verwenden das Standardkoordinatensystem $\mathbb{E}$ des $\mathbb{R}^3$ und betrachten die Punkte

$$P = (2, -1, 1)^\intercal,\ Q_1 = (3, 0, 1)^\intercal,\ Q_2 = (3, -1, 2)^\intercal,\ Q_3 = (2, -2, 0)^\intercal.$$

**(a)** Überprüfen Sie, dass $\mathbb{F} = (P; \overrightarrow{PQ_1}, \overrightarrow{PQ_2}, \overrightarrow{PQ_3})$ ein affines Koordinatensystem ist.

**(b)** Berechnen Sie ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$ und ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$.

**(c)** Sei $R \in \mathbb{R}^3$ der Punkt mit ${}_{\mathbb{F}}R = (4, 2, 1)^\intercal$. Berechnen Sie ${}_{\mathbb{E}}R$.

**(d)** Sei $\alpha\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die affine Abbildung mit ${}_{\mathbb{E}}\alpha(x) = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot {}_{\mathbb{E}}x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie eine Matrix $B$ und einen Vektor $v$ so, dass ${}_{\mathbb{F}}\alpha(x) = B \cdot {}_{\mathbb{F}}x + v$.

**Online-Aufgabe.**

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 09.01.–15.01.) auf folgender Webseite:

**http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test430/**

I. Blaschzyk, T. Ehnes,
A. P. Nagy, S. Noshari,
I. Paul, M. Pressland,
D. Zimmermann

**11. Gruppenübung zur Vorlesung**

**Höhere Mathematik 1**

M. Stroppel

Wintersemester 2019/20

## Präsenzübungen

**Aufgabe P 41.** *komplexe Eigenwerte*

Bestimmen Sie alle Eigenwerte $\lambda \in \mathbb{C}$ von $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, sowie deren algebraischen und geometrischen Vielfachheiten. Bestimmen Sie jeweils eine Basis der Eigenräume.
Ist $A$ diagonalisierbar?

**Aufgabe P 42.** *Eigenvektoren*

Es sei $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 & 0 & 4 \\ -3 & -5 & -2 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ und $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -67 \\ 19 \\ 7 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ -5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Entscheiden Sie, welche der gegebenen Vektoren Eigenvektoren von $A$ sind.
Was sind die zugehörigen Eigenwerte?
Bestimmen Sie für diese Eigenwerte die geometrischen Vielfachheiten.

**Aufgabe P 43.** *Spur, Rang und Eigenwerte*

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

**(a)** Berechnen Sie $\operatorname{Sp} A$.

**(b)** Berechnen Sie $\operatorname{Rg} A$.

**(c)** Was ist $\det A$?

**(d)** Welche Eigenwerte hat $A$, mit welchen algebraischen und geometrischen Vielfachheiten?

**Aufgabe P 44.** *Eigenwerte einer linearen Abbildung*

Sei $\varphi\colon \operatorname{Pol}_2 \mathbb{R} \to \operatorname{Pol}_2 \mathbb{R} : p \mapsto p' + p$, und sei $B : p_1, p_2, p_3$ die Basis von $\operatorname{Pol}_2 \mathbb{R}$ mit

$$p_1(x) = x^2 + 1, \ p_2(x) = x^2 + x + 1, \ p_3(x) = x + 1.$$

**(a)** Berechnen Sie die Matrix $A = {}_B\varphi_B$.

**(b)** Berechnen Sie die Eigenwerte von $A$, und die entsprechenden Eigenräume.

**(c)** Für welche $p \in \operatorname{Pol}_2 \mathbb{R}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $\varphi(p) = \lambda p$?

## Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

**Aufgabe H 41.** *komplexe Eigenwerte*

Bestimmen Sie alle Eigenwerte $\lambda \in \mathbb{C}$ von $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, sowie deren algebraischen und geometrischen Vielfachheiten. Bestimmen Sie jeweils eine Basis der Eigenräume. Ist $A$ diagonalisierbar?

**Aufgabe H 42.** *Eigenwerte I*

Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

**(a)** Bestimmen Sie die Eigenwerte von $A$.

**(b)** Bestimmen Sie die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten der Eigenwerte.

**(c)** Ist $A$ invertierbar?

**(d)** Ist $A$ diagonalisierbar? Bestimmen Sie in dem Fall eine Matrix $S$ so, dass $S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix ist.

**Aufgabe H 43.** *Eigenwerte II*

Sei

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 & 0 & -2 \\ 7 & 7 & 0 & 7 & 7 \\ -7 & -7 & 0 & -7 & -7 \\ -9 & -7 & -2 & -7 & -9 \\ 11 & 7 & 4 & 7 & 11 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

**(a)** Berechnen Sie $Av$.

**(b)** Berechnen Sie $\operatorname{Rg} A$.

**(c)** Welche Eigenwerte hat $A$, mit welchen algebraischen und geometrischen Vielfachheiten?

**Aufgabe H 44.** *Eigenwerte einer linearen Abbildung*

Sei $\varphi\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2} : M \mapsto M - M^\intercal$, und sei $B\colon B_1, B_2, B_3, B_4$ die Basis von $\mathbb{R}^{2\times 2}$ mit

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**(a)** Berechnen Sie die Matrix $A = {}_B\varphi_B$.

**(b)** Berechnen Sie die Eigenwerte von $A$, und die entsprechenden Eigenräume.

**(c)** Für welche $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $\varphi(M) = \lambda M$?

**Online-Aufgabe.**

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 16.01.20–22.01.20) auf folgender Webseite:

**http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/**

I. Blaschczyk, T. Ehnes,
A. P. Nagy, S. Noshari,
I. Paul, M. Pressland,
D. Zimmermann

**12. Gruppenübung zur Vorlesung**
**Höhere Mathematik 1**

M. Stroppel

Wintersemester 2019/20

## Präsenzübungen

**Aufgabe P 45.** *Modell: Kegelschnitte*

Sei $\mathcal{Q}$ der Doppelkegel, der gegeben ist durch die Gleichung $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$; im Modell dargestellt ist der Bereich $-\frac{7}{2} \leqq x_1, x_2, x_3 \leqq \frac{7}{2}$. Außerdem sind dargestellt die Ebenen mit den Gleichungen $x_1 + 2\,x_3 = 3$ (gelb), $x_1 - x_3 = 1$ (blau) und $x_1 = 1$ (grün).

**(a)** Welche Schnittkurven liefert der Doppelkegel jeweils in den drei Ebenen?

**(b)** Welche der folgenden Konfigurationen entstehen als Schnitt des Doppelkegels mit einer passenden Ebene?

- ein Punkt
- genau eine Gerade
- ein Paar schneidender Geraden
- ein Kreis
- die leere Menge
- ein Paar paralleler Geraden

**Aufgabe P 46.** *Koordinatentransformation von Quadriken*

Im Standardkoordinatensystem $\mathbb{E}$ sei $\mathcal{Q} = \left\{(x_1, x_2, x_3)^\intercal \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_1^2 - x_3^2 = 0\right\}$.

**(a)** Skizzieren Sie $\mathcal{Q}$.

**(b)** Es sei $\mathbb{F}$ das Koordinatensystem $\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}\right)$.

Bestimmen Sie eine Matrix $B$ und einen Vektor $b$ so, dass ${}_{\mathbb{E}}X = B \cdot {}_{\mathbb{F}}X + b$ gilt.

**(c)** Geben Sie die Matrixbeschreibung der Quadrik $\mathcal{Q}$ im Koordinatensystem $\mathbb{F}$ an.

**Aufgabe P 47.** *Diagonalisierbarkeit*

Welche der Matrizen $A = \begin{pmatrix}5 & 1 & 0\\0 & 5 & 0\\0 & 0 & -2\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}4 & 0 & 2\\-4 & -1 & -4\\-1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ und $C = \begin{pmatrix}-3 & 3 & -3\\-6 & 3 & -1\\0 & 0 & 2\end{pmatrix}$ sind komplex diagonalisierbar? Welche sind reell diagonalisierbar?

**Aufgabe P 48.** *Symmetrische Matrizen*

Es sei $A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\0 & 1 & -1\\2 & -1 & 1\end{pmatrix}$.

**(a)** Bestimmen Sie alle Eigenwerte von $A$.

**(b)** Finden Sie eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ bestehend aus Eigenvektoren von $A$.

**(c)** Ist $A$ positiv definit, negativ definit oder indefinit?

**Vorlesungsbefragung.**

Hier können Sie den Fragebogen zur Evaluation der Vorlesung ausfüllen:

**https://evasysw.uni-stuttgart.de/evasys/online.php?p=G6A23**

Hier können Sie den Fragebogen zur Evaluation der Vortragsübung ausfüllen:

**https://evasysw.uni-stuttgart.de/evasys/online.php?p=E7K1H**

## **Hausübungen** (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

**Aufgabe H 45.** *Diagonalisierbarkeit*

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei

$$A_\alpha = \frac{3}{2}\begin{pmatrix} \alpha^2+1 & 1-\alpha^2 & \alpha^2-1 \\ \alpha^2+1 & 1-\alpha^2 & \alpha^2-3 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

**(a)** Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von $A_\alpha$ für alle $\alpha$.

**(b)** Für welche $\alpha$ ist $A_\alpha$ diagonalisierbar? Geben Sie für solche $\alpha$ jeweils sämtliche Eigenwerte und Eigenräume von $A_\alpha$ an.

**Aufgabe H 46.** *Quadriken I*

Für $c \in \mathbb{R}$ sei

$$\mathcal{Q}_c = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_2x_3 + 2x_1 - 2x_2 + c = 0\}.$$

Bestimmen Sie für jedes $c \in \mathbb{R}$ die Matrix $A_{c,\text{erw}}$ und entscheiden Sie anhand dieser, ob es sich bei $\mathcal{Q}_c$ um eine kegelige, parabolische oder Mittelpunktsquadrik handelt.

**Aufgabe H 47.** *Quadriken II*

Im Standardkoordinatensystem $\mathbb{E}$ des $\mathbb{R}^2$ betrachten wir die Quadrik

$$\mathcal{Q} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 17x_1^2 - 12x_1x_2 + 8x_2^2 = 5\}.$$

**(a)** Geben Sie die Matrixbeschreibung $\mathcal{Q} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x^\intercal Ax + 2a^\intercal x + c = 0\}$ für eine symmetrische Matrix $A$, einen Vektor $a$ und eine Konstante $c$ an. Finden Sie anschließend eine Orthonormalbasis $f_1$, $f_2$ des $\mathbb{R}^2$, die aus Eigenvektoren von $A$ besteht.

**(b)** Formulieren Sie die Gleichung für $\mathcal{Q}$ im Koordinatensystem $\mathbb{F} = \left(\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right); f_1, f_2\right)$.

**(c)** Zeichnen Sie das Koordinatensystem $\mathbb{F}$ im Standardkoordinatensystem ein und skizzieren Sie in dieser Zeichnung außerdem $\mathcal{Q}$.

**Aufgabe H 48.** *Symmetrische Matrizen*

Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 5 & 3 & 4 \\ -4 & 3 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

**(a)** Bestimmen Sie alle Eigenwerte von $A$.

**(b)** Finden Sie eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^4$ bestehend aus Eigenvektoren von $A$.

**(c)** Ist $A$ positiv definit, negativ definit oder indefinit?

**Online-Aufgabe.**

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 23.01.–29.01.) auf folgender Webseite:

**http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test430/**

I. Blaschzyk, T. Ehnes,
A. P. Nagy, S. Noshari,
I. Paul, M. Pressland,
D. Zimmermann

**13. Gruppenübung zur Vorlesung**
**Höhere Mathematik 1**

M. Stroppel

Wintersemester 2019/20

## Präsenzübungen

**Aufgabe P 49.** *Euklidische Normalform – der Teufel im Detail*
Von den folgenden Gleichungen für $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ ist keine in euklidischer Normalform. Wo liegt jeweils der Fehler und wie müsste die zugehörige Normalform aussehen?

**(a)** $9x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 = 16$,

**(b)** $x_1^2 - 2x_3^2 + 2x_2 = 0$,

**(c)** $x_1^2 - 2x_2^2 + x_3 = 0$

**Aufgabe P 50.** *Hauptachsentransformation*
Wir betrachten den Quadrik

$$Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, -x_1^2 + 7x_2^2 - 6x_1x_2 + 14x_1 - 22x_2 - 17 = 0 \right\}.$$

**(a)** Geben Sie die Matrixbeschreibung von $Q$ an.

**(b)** Bestimmen Sie die euklidische Normalform und die Gestalt von $Q$.

**(c)** Geben Sie ein kartesisches Koordinatensystem $\mathbb{F}$ an, in welchem diese euklidische Normalform angenommen wird.

**(d)** Skizzieren Sie die Quadrik und alle benutzten Koordinatensysteme.

**Aufgabe P 51.** *Kegelschnitte in Quadriken*

**(a)** Skizzieren Sie für $c \in \{-1, 0, 1\}$ jeweils die Lösungsmengen der folgenden Gleichungen:

  **(i)** für $c^2 - 4x_3^2 + x_2 = 0$ in der $x_2x_3$-Ebene,

  **(ii)** für $x_1^2 - 4x_3^2 + c = 0$ in der $x_1x_3$-Ebene,

  **(iii)** für $x_1^2 - 4c^2 + x_2 = 0$ in der $x_1x_2$-Ebene

**(b)** Bestimmen Sie eine euklidische Normalform und die Gestalt der Quadrik

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1^2 - 4x_3^2 + x_2 = 0\}.$$

**Aufgabe P 52.** *Klassifizierung von Quadriken*
Wir betrachten die Quadrik

$$Q_{b,c} = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 2x_1^2 + 8x_2^2 - 2x_1x_2 + 2bx_1 + c \right\}$$

für Parameter $b, c \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie für jedes $b, c \in \mathbb{R}$ die Matrix $(A_{b,c})_{\mathrm{erw}}$ und entscheiden Sie anhand dieser, ob es sich bei $Q_{b,c}$ um eine kegelige, parabolische oder Mittelpunktsquadrik handelt.

## Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

**Aufgabe H 49.** *Quadrik skizzieren*

Bestimmen Sie eine euklidische Normalform der Quadrik

$$Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 3x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2 + 12x_1 - 4x_2 + 2 = 0 \right\}$$

und ermitteln Sie die zugehörige Koordinatentransformation. Bestimmen Sie anhand der Normalform die Gestalt der Quadrik und fertigen Sie eine Skizze der Quadrik in Standardkoordinaten an. Zeichnen Sie in Ihre Skizze auch das Koordinatensystem ein, bezüglich dessen die Quadrik Normalform hat.

**Aufgabe H 50.** *Quadrik klassifizieren*

Wir betrachten die Quadrik

$$Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 17x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 8x_1x_2 - 2x_2x_3 + 8x_1x_3 + 6x_1 + 12x_2 - 12x_3 + 81 = 0 \right\}.$$

**(a)** Geben Sie die Matrixbeschreibung von $Q$ an.

**(b)** Bestimmen Sie die euklidische Normalform und die Gestalt von $Q$.

**(c)** Geben Sie ein kartesisches Koordinatensystem $\mathbb{F}$ an, in welchem diese euklidische Normalform angenommen wird.

**Aufgabe H 51.** *Modellierung mit Quadriken*

Ein Tunnel in Form eines parabolischen Zylinders überspannt eine (unendlich lange) Straße in der $x_1x_2$-Ebene. Die Tunnelwand ist gegeben durch den Schnitt von $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 \geqq 0\}$ mit

$$Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 4x_1^2 + 16x_2^2 - 16x_1x_2 + 10x_3 = 30 \right\}.$$

**(a)** In welche Richtung verläuft die Straße? (Das heißt, geben Sie einen Vektor an, der parallel zur Straße verläuft)

**(b)** Wie hoch ist der Tunnel?

**(c)** Wie breit ist der Tunnel?

**Hinweis:** Die Fragen lassen sich nach einem Wechsel in ein geeignetes Koordinatensystem leicht beantworten.

**Aufgabe H 52.** *Metrische Informationen gewinnen*

Die Gestalt der Quadrik

$$Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_2x_3 - 2x_1x_3 + 2x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 0 \right\}$$

ist ein paralleles Ebenenpaar. Geben Sie jeweils die Hessesche Normalform der Ebenen $E_1 \neq E_2$ an, die in $Q$ liegen. Bestimmen Sie den Abstand zwischen $E_1$ und $E_2$.

**Online-Aufgabe.**

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 30.01.20–05.02.20) auf folgender Webseite:

**http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/**

I. Blaschzyk, T. Ehnes,
A. P. Nagy, S. Noshari,
I. Paul, M. Pressland,
D. Zimmermann

**14. Gruppenübung zur Vorlesung**
**Höhere Mathematik 1**

M. Stroppel



## Präsenzübungen

**Aufgabe P 53.** *Grenzwerte*

Gegeben sind die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch

$$a_n = 1 + \frac{1}{3^n};\; b_n = \cos(2n\pi) + \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{3^{n-1}};\; c_0 = 1,\, c_{n+1} = \frac{1}{2}c_n.$$

Zeigen Sie, dass jede der Folgen konvergent ist und geben Sie jeweils den Grenzwert an.

**Aufgabe P 54.** *Monotonie und Beschränktheit*

Untersuchen Sie die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jeweils auf Monotonie und Beschränktheit.
Finden Sie gegebenenfalls eine obere Schranke, eine untere Schranke bzw. beides.

**(a)** $a_n = \dfrac{n+2}{2n}$

**(b)** $a_n = n\cos(\pi n)$

**(c)** $a_n = 1 + \left(-\dfrac{2}{3}\right)^n$

**(d)** $a_n = \sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\sin\left(\dfrac{\pi n}{2}\right)$.

**Aufgabe P 55.** *Reihen*

Berechnen Sie jeweils den Grenzwert der Reihe.

**(a)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n}$

**(b)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{-n}+5^{-n}}{7}$

**(c)** $\displaystyle\sum_{n=5}^{\infty}5^{1-n}$.

**Aufgabe P 56.** *Alternierende Reihen*

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei definiert durch $a_n := (-1)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Welche der folgenden Reihen konvergieren? Bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert der Reihe.

**(a)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}a_{2k}$

**(b)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}a_{2k+1}$

**(c)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}a_k$

**(d)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{k}$.

## Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

**Aufgabe H 53.** *Folgen I*

Gegeben sind die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch

$$a_n = 5^n,\ b_n = \cos(\tfrac{\pi}{3} + 2\pi n),\ c_n = (-\tfrac{1}{2})^n$$
$$d_n = \tfrac{1}{n^2-2},\ e_n = (-1)^n + \tfrac{1}{2}.$$

**(a)** Untersuchen Sie, ob die Folgen beschränkt sind und finden Sie gegebenenfalls eine obere und/oder untere Schranke.

**(b)** Prüfen Sie, ob die Folgen (streng) monoton wachsend bzw. fallend sind.

**(c)** Bestimmen Sie alle Häufungspunkte der Folgen.

**(d)** Geben Sie für jeden Häufungspunkt eine Teilfolge an, die gegen diesen konvergiert.

**Aufgabe H 54.** *Häufungspunkte*

Wir setzen $a_0 := 0$ und definieren rekursiv für alle natürlichen Zahlen $n \geqq 1$:

$$a_n := \begin{cases} n, & \text{falls } a_{n-1} = 0, \\ a_{n-1} - 1, & \text{falls } a_{n-1} \geqq 1. \end{cases}$$

**(a)** Zeichnen Sie die Punkte $(n, a_n)^\top$ für $n \leqq 8$ im Standardkoordinatensystem ein.

**(b)** Finden Sie alle Häufungspunkte von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

**(c)** Bestimmen Sie $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$ und $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$.

**Aufgabe H 55.** *Folgen II*

Untersuchen Sie die untenstehenden Folgen auf Beschränktheit, Monotonie und Konvergenz. Geben Sie außerdem Grenzwerte an, sofern sie existieren.

**(a)** $\left(\sum\limits_{k=n}^{2n} \dfrac{3^k}{5^k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ **(b)** $\left(\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{k}}\right)^2\right)_{n\in\mathbb{N}}$

**(c)** $\left(\dfrac{6n^3 - 2n^2 + 4}{7n^3 + 4n^2 - 12n + 33}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ **(d)** $\left(\sum\limits_{k=0}^{2n} \sum\limits_{\ell=0}^{k} \dfrac{(-1)^k}{2^\ell}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

**Aufgabe H 56.** *$\varepsilon$–Kriterium*

Gegeben seien die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \dfrac{n}{2n+1}$ sowie $b_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{7}{6^k}$.

**(a)** Berechnen Sie den Grenzwert $a$ der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und geben Sie eine natürliche Zahl $N$ so an, dass alle Folgenglieder $a_n$ mit $n \geqq N$ in der $(10)^{-15}$–Umgebung von $a$ liegen.

**(b)** Verfahren Sie analog für die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

**Online-Aufgabe.**

Zu diesem Übungsblatt gibt es keine Online-Aufgabe.