PD Dr. R. Dietmann
Dipl.-Math. M. Pfeil

1. Gruppenübung zur Vorlesung

Prof. Dr. M. Stroppel

Höhere Mathematik II

Sommer 2007

Aufgabe P 1.

Seien $S_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{100k}$ und $\widetilde{S}_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{100k}$.

(a) Bestimmen Sie für $n \in \{1, \ldots, 8\}$ die n-ten Partialsummen S_n und $\widetilde{S}_n$ jeweils auf zwei Dezimalstellen genau und zeichnen Sie diese in ein Koordinatensystem ein.

(b) Sind die jeweiligen Reihen konvergent?

(c) Falls die jeweilige Reihe konvergiert, schätzen Sie den Fehler zwischen S_8 bzw. $\widetilde{S}_8$ und dem Wert der Reihe ab.

Aufgabe P 2.

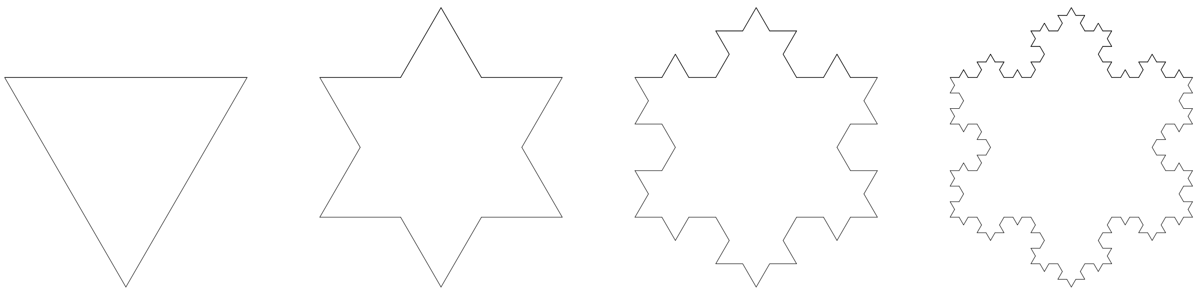
Skizzieren Sie den Graph der Funktionen f_i für $i \in \{1, 2, 3\}$ und untersuchen Sie die Funktionen jeweils auf Stetigkeit.

(a) $f_1 \colon \mathbb{R} \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{R} \colon x \mapsto x^3 - 2x + 6$

(b) $f_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \colon x \mapsto \begin{cases} \sqrt{x} & \text{für } x \in [0, +\infty) \\ \sqrt{-x} & \text{für } x \in (-\infty, 0) \end{cases}$

(c) $f_3 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \colon x \mapsto \begin{cases} \frac{\sin x}{|\sin x|} x & \text{für } x \in \mathbb{R} \smallsetminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Aufgabe P 3. *Koch-Schneeflocke*



Die Koch-Schneeflocke entsteht durch folgenden iterativen Prozess.

Ausgangsfigur ist ein gleichseitiges Dreieck mit Kantenlänge 1. Im n-ten Iterationsschritt setzt man dann in die Mitte einer Kante mit Kantenlänge a ein weiteres gleichseitiges Dreieck mit Kantenlänge $\frac{1}{3}a$ an.

(a) Sei b_n die Kantenlänge im n-ten Iterationsschritt und c_n die Anzahl der Kanten. Bestimmen Sie $b_1, \ldots, b_3$ und $c_1, \ldots, c_3$. Berechen Sie anschließend allgemein b_n und c_n.

(b) Bestimmen Sie den Umfang einer Koch-Schneeflocke.

(c) Bestimmen Sie den Flächeninhalt einer Koch-Schneeflocke.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 1.

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz.

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5+(-1)^k}{7^{k+2}}$

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k^2+2}-\sqrt{k^2+1}}{k}$ Hinweis: Erweitern Sie mit $\sqrt{k^2+2}+\sqrt{k^2+1}$.

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}+\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$

(d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$ Bestimmen Sie hier auch den Grenzwert.

Aufgabe H 2.

Untersuchen Sie, ob die folgende Funktion f in $x_0 \in \{-5, 0, 5\}$ stetig ist.

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \begin{cases} \dfrac{3x^2-13x-10}{x-5} & \text{für } x \in \mathbb{R} \smallsetminus \{5\} \\ 17 & \text{sonst} \end{cases}$$

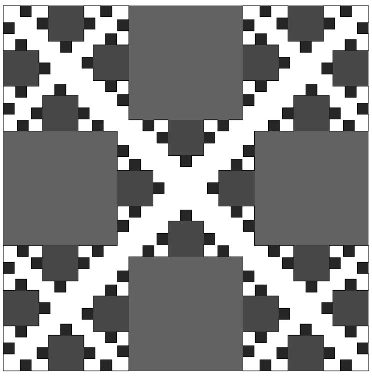
Aufgabe H 3. *Fliesenlegen*

Ein Quadrat Q mit Kantenlänge 1 soll durch kleinere Quadrate ausgefüllt werden, und zwar nach folgendem Prinzip.

Es ist $q \in \mathbb{R}$ mit $q \geqq 0$ fixiert. Im n-ten Schritt wird dann in die Mitte einer jeden Kante ein Quadrat mit Kantenlänge q^n angelegt.

(a) Wie muss q gewählt werden, damit Überschneidungen der Quadrate vermieden werden?

(b) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von q den von den Quadraten ausgelegten Flächeninhalt. Wie muss q gewählt werden, damit das Quadrat Q vollständig ausgefüllt wird?



PD Dr. R. Dietmann
Dipl.-Math. M. Pfeil

2. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik II

Sommer 2007

Prof. Dr. M. Stroppel

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 4.
Gegeben ist die Potenzreihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$ mit

$$a_k = \begin{cases} \left(1+\frac{1}{k}\right)^{k^2} & \text{für } k = 3n \\ 1 & \text{für } k = 3n+1 \\ \frac{5}{k} & \text{für } k = 3n+2 \end{cases}, \quad n \in \mathbb{N}$$

(a) Bestimmen Sie die Häufungspunkte der Folge $\left(\sqrt[k]{|a_k|}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ und $\overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|a_k|}$ bzw. $\underline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|a_k|}$.

(b) Bestimmen Sie damit den Konvergenzradius der Potenzreihe.

Aufgabe H 5.
Gegeben ist die Folge $\left(\frac{1}{n} e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{8}n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

(a) Untersuchen Sie die Folge auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

(b) Skizzieren Sie die Folgenglieder in der komplexen Zahlenebene.

Aufgabe H 6.
Bestimmen Sie die Konvergenzkreise der komplexen Potenzreihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^k}{k!} z^k \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k k}{2k+1} (z-\mathrm{i})^{2k+1}.$$

Aufgabe H 7.
Die Hyperbelfunktionen *Cosinus hyperbolicus* und *Sinus hyperbolicus* sind durch die Zuordnungen

$$\cosh(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{und} \quad \sinh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

definiert. Im Folgenden werden nur reelle Argumente betrachtet.

(a) Geben Sie von $\cosh$ und $\sinh$ den maximalen Definitionsbereich und den Wertebereich an.

(b) Untersuchen Sie die beiden hierdurch gewonnenen Funktionen auf Symmetrie zur y-Achse ($f(x) = f(-x)$) und zum Ursprung ($f(x) = -f(-x)$).

(c) Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen.

(d) Geben Sie die beiden Funktionen jeweils als Potenzreihe um den Entwicklungspunkt 0 an und bestimmen deren Konvergenzradien.

(e) Beweisen Sie, dass unabhängig von x das folgende Additionstheorem gilt:

$$(\cosh(x))^2 - (\sinh(x))^2 = 1.$$

PD Dr. R. Dietmann
Dipl.-Math. M. Pfeil

3. Gruppenübung zur Vorlesung

Prof. Dr. M. Stroppel

Höhere Mathematik II

Sommer 2007

Aufgabe P 4.

Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen:

(a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^k x^k$ **(b)** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^5 5^k x^k$

(c) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k(k+1)}$ **(d)** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{2^{k^2}} x^k$

(e) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(2+(-1)^k\right)^{-k} x^k$ **(f)** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^k x^{2k}$

Aufgabe P 5.

(a) Untersuchen Sie mit Hilfe des Differenzenquotienten, ob die Funktion f an der Stelle $x=0$ und die Funktion g an den Stellen $x=0$ und $x=-3$ differenzierbar ist.

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:x\mapsto \begin{cases} \sqrt{x} & \text{für } x\in[0,+\infty) \\ -\sqrt{-x} & \text{für } x\in(-\infty,0) \end{cases}$$
$$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:x\mapsto x\,|x|+|x+3|$$

(b) Setzen Sie die Funktionen f und g an der Stelle $x=0$ stetig fort und untersuchen Sie mit Hilfe des Differenzenquotienten, ob die beiden Funktionen an dieser Stelle differenzierbar sind.

$$f\ :\ \mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}:x\mapsto x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$
$$g\ :\ \mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}:x\mapsto x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

Aufgabe P 6.

Gegeben ist die Funktion $f\ :\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}:x\mapsto\sin(2x)$.

(a) Bestimmen Sie die Potenzreihe der Funktion und deren Konvergenzradius.

(b) Bestimmen Sie mit dem Differenzenquotienten und der Potenzreihe die Ableitung f'.

(c) Welchen Wert erhält man, wenn man in die Potenzreihe $x=\pi/4$ einsetzt? Wie viele Summanden der Reihenentwicklung sind zu berücksichtigen, um $f(1/2)=\sin(1)$ auf fünf Dezimalstellen zu bestimmen?

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 8.

Berechnen Sie die Ableitungen von

(a) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3 \cos x$

(b) $f_2 : (0, \infty) \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}}$

(c) $f_3 : (0, \infty) \to \mathbb{R} : x \mapsto x^x$

(d) $f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto |x^3|$

(e) $f_5 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 2007$

(f) $f_6 : (1, \infty) \to \mathbb{R} : x \mapsto \ln(\ln(x))$

nach x.

Aufgabe H 9.

Seien f und g jeweils n-mal differenzierbar. Zeigen Sie durch vollständige Induktion folgende Formel für die n-te Ableitung von fg:

$$(f(x)g(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x).$$

Aufgabe H 10.

(a) Zeigen Sie

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Hinweis: Die Potenzreihe der Exponentialfunktion ist hier nützlich.

(b) Beweisen Sie durch Rückgriff auf die Definition der Ableitung:

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x.$$

PD Dr. R. Dietmann
Dipl.-Math. M. Pfeil

4. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik II

Prof. Dr. M. Stroppel

Sommer 2007

Aufgabe P 7. *Grenzwerte*

Berechnen Sie folgende Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{(\sin x)^2}-\dfrac{1}{x^2}\right)$

(b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos 2x}-\sqrt{\cos x}}{x^2}$

(c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-x^2}-1+x^2}{x^4}$

(d) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{1}{x+1}\right)$

Aufgabe P 8. *Anwendung des Mittelwertsatzes*

(a) Sei

$$P_n(x)=\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\right)^n (x^2-1)^n\,,$$

also die n-te Ableitung von $(x^2-1)^n$.

Zeigen Sie: $P_n(x)$ ist ein Polynom vom Grade n.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes: Das Polynom $P_n(x)$ hat im Intervall $(-1,1)$ genau n Nullstellen.

Aufgabe P 9. *Stetige Fortsetzung und Differenzierbarkeit*

Sei

$$f\colon (0,+\infty)\to\mathbb{R}\colon x\mapsto x^2\frac{e^x}{(e^x-1)^2}.$$

(a) Setzen Sie f stetig nach $x=0$ fort.

(b) Zeigen Sie, dass f streng monoton fallend ist und folgern Sie mit (a), dass f eine Umkehrfunktion g besitzt. Was ist der Definitionsbereich von g?

(c) Zeigen Sie, dass g in $(0,1)$ differenzierbar ist und berechnen Sie $g'(\frac{e}{(e-1)^2})$.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 11. *Optimierung*

Gegeben ist das folgenden Problem. Sie entwerfen ein Rohr mit rechteckigem Querschnitt, das eine feste Querschnittsfläche A erhalten soll.

(a) Sie wollen eine möglichst geringe Oberfläche erzielen, indem Sie den Umfang der Querschnittsfläche minimieren.

(b) Sie wollen eine möglichst große Oberfläche erzielen, indem Sie den Umfang der Querschnittsfläche maximieren.

Lassen sich Ihre theoretisch gewonnenen Erkenntnisse vernünftig in die Praxis umsetzen?

Aufgabe H 12. *Differentiation von Umkehrfunktionen*

Untersuchen Sie, ob für die Funktion $f\colon\ [0,\pi] \to \mathbb{R}\colon x \mapsto (\cos x)^3$ auf dem Intervall $[0,\pi]$ eine Umkehrabbildung $f^{-1}\colon f([0,\pi]) \to [0,\pi]$ existiert.

Berechnen Sie, falls die Umkehrabbildung existiert und f^{-1} in $f(x_0)$ differenzierbar ist, die Ableitung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,y}\ f^{-1}(y)\Big|_{y=f(x_0)}$$

mit Hilfe der Formel $\sin x = \sqrt{1-(\cos x)^2}$.

Für welche x gilt diese Formel?

Aufgabe H 13. *Grenzwerte*

Prüfen Sie, ob die folgenden Grenzwerte existieren, und bestimmen Sie diese gegebenfalls:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x} \qquad \lim_{x\to 0+0}\frac{\sin x+\cos x}{x} \qquad \lim_{x\to +\infty}\frac{\ln(x^3+1)}{\ln(x^5)}$$

Aufgabe H 14. *Taylorpolynom und Restglied*

Gegeben sind die Funktionen $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}\colon x\mapsto \dfrac{x}{e^x}$ und $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}\colon x \mapsto x\,3^x$.

Bestimmen Sie $T_3(f,x,0)$, also das Taylorpolynom der Stufe 3 um den Entwicklungspunkt 0 und das Restglied nach Lagrange $R_3(f,x,0)$ für die Funktion f.

Berechnen Sie auch $T_2(g,x,1)$ und $R_2(g,x,1)$.

PD Dr. R. Dietmann
Dipl.-Math. M. Pfeil

5. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik II

Sommer 2007

Prof. Dr. M. Stroppel

Aufgabe P 10. *unbestimmte Integrale*

(a) Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale:

$$\int \left(x^4 + 3x^2 + x - 5\right) \,\mathrm{d}\,x \qquad\qquad \int (\cos x + \sin x) \,\mathrm{d}\,x$$

(b) Bestimmen Sie das folgende unbestimmte Integral und die Stammfunktion, die an der Stelle 1 den Wert 3 annimmt:

$$\int \left(e^{2x-2} + \frac{3}{x^2}\right) \mathrm{d}\,x$$

Aufgabe P 11. *Partielle Integration*
Berechnen Sie:

(a) $\displaystyle\int_0^2 (x-1)\,e^x \,\mathrm{d}\,x$ **(b)** $\displaystyle\int x^2 \cos(2x) \,\mathrm{d}\,x$

Aufgabe P 12. *Integration durch Substitution*
Berechnen Sie:

(a) $\displaystyle\int_0^4 2\,x\,\sqrt{x^2+9} \,\mathrm{d}\,x$ **(b)** $\displaystyle\int 3\,x^2\,e^{x^3+1} \,\mathrm{d}\,x$

Aufgabe P 13. *Taylorpolynom*

(a) Sei $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R} : x \mapsto \ln(\cos x)$. Berechnen Sie $T_2(f, x, 0)$ das Taylorpolynom der Stufe 2 mit Entwicklungspunkt 0.

(b) Gegeben ist $g : \left[-\frac{1}{2}, 1\right] \to \mathbb{R} : x \mapsto e^x \ln(1+x)$. Bestimmen Sie $T_3(g, x, 0)$. Führen Sie dabei das Problem auf bekannte Taylor- beziehungsweise Potenzreihen zurück.

Aufgabe P 14.
Bestimmen Sie:

(a) $\displaystyle\int e^x \sin x \,\mathrm{d}\,x$ **(b)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{16-x^2}} \,\mathrm{d}\,x$

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 15. *Stammfunktionen*

Berechnen Sie:

(a) $\displaystyle\int \frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}\,x\,,$

(b) $\displaystyle\int (\sin x)^3\,\mathrm{d}\,x$

(c) $\displaystyle\int \frac{7x^6+5x^4}{x^7+x^5+1}\,\mathrm{d}\,x\,,$

(d) $\displaystyle\int \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}\,x\,.$

Aufgabe H 16. *Taylorreihe*

Entwickeln Sie die Funktion

$$f:(-1,1)\to\mathbb{R}:x\mapsto\frac{1}{1-x^2}$$

in ihre Taylorreihe zum Entwicklungspunkt 0. Für welche x konvergiert diese gegen $f(x)$?

Aufgabe H 17. *Kurvendiskussion*

Gegeben sei die Funktion

$$f:D\to\mathbb{R}:x\mapsto\frac{x^3-2x^2+x}{x^2-1}.$$

Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich D, alle Nullstellen und Pole von f, alle lokalen und globalen Extrema, das asymptotische Verhalten für $x\to+\infty$ und $x\to-\infty$, und untersuchen Sie außerdem f auf Stetigkeit, Differenzierbarkeit und Monotonie. Fertigen Sie anschließend eine Skizze des Graphen von f an.

PD Dr. R. Dietmann
Dipl.-Math. M. Pfeil

6. Gruppenübung zur Vorlesung

Prof. Dr. M. Stroppel

Höhere Mathematik II

Sommer 2007

Aufgabe P 15. *Partialbruchzerlegung*
Berechnen Sie

$$\int_1^2 \frac{\mathrm{d}\,x}{x^2+x}.$$

Aufgabe P 16. *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung*

(a) Welcher Gleichung genügt ein Kreis vom Radius r mit Ursprung $(0,0)$?

(b) Beschreiben Sie die obere Hälfte des Kreises als Graph einer Funktion.

(c) Bereits aus der Schule ist die Formel $A = \pi r^2$ für den Flächeninhalt A eines Kreises vom Radius r bekannt. Beweisen Sie diese Formel nun unter Verwendung der Integralrechung!
Hinweis: Es ist hilfreich, zunächst einen Viertelkreis zu betrachten.

Aufgabe P 17. *Integration durch Substitution*
Berechnen Sie:

(a) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cos(x)\, e^{\sin(x)}\ \mathrm{d}\,x$

(b) $\displaystyle\int_1^{e^\pi} \frac{\big(\ln(x)\big)^n}{x}\ \mathrm{d}\,x$ mit $n \in \mathbb{N}$

Aufgabe P 18. *Riemann-Integral*
Zeigen Sie unter Rückgriff auf die Definition des Riemann-Integrals, daß gilt:

$$\int_a^b x\ \mathrm{d}\,x = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)\,.$$

Zur Vereinfachung der Argumentation können Sie zunächst eine *äquidistante* Partition von $[a,b]$ verwenden (alle Teilintervalle haben dieselbe Breite) und sich dann überlegen, wie man für eine beliebige Partition argumentiert.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 18. *Integration mit Partialbruchzerlegung*
Bestimmen Sie:
(a) $\displaystyle\int \frac{x}{x+1}\,\mathrm{d}\,x$ **(b)** $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-3x+2}\,\mathrm{d}\,x$ **(c)** $\displaystyle\int \frac{5x}{x^3-2x^2+x-2}\,\mathrm{d}\,x$

Aufgabe H 19. *Rotationskörper*
Der Graph der Funktion $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}\colon x\mapsto 2x^3-6x^2-2x+6$ schließt mit der x-Achse eine Fläche A ein. Das Volumen des durch Rotation des Graphen um die x-Achse eingeschlossenen Körpers ist

$$V=\pi\int_a^b (f(x))^2\,\mathrm{d}\,x\,.$$

Berechnen Sie den Flächeninhalt von A und das Volumen V des Körpers, der durch Rotation der Fläche A um die x-Achse entsteht.

Aufgabe H 20. *Ober- und Untersumme*
Bestimmen Sie mit der Partition $P=\{0,1/N,2/N,\ldots,1\}$ mit $N\in\mathbb{N}$ des Intervalls $[0,1]$ die Unter- und Obersumme der Funktion $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}\colon x\mapsto x^3$. Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}\,x\,,$$

indem Sie $N\to+\infty$ gehen lassen (das heißt, dass die Feinheit der Partition gegen Null geht). Dazu kann folgende Formel verwendet werden:

$$\sum_{k=1}^{N}k^3=\frac{N^2\,(N+1)^2}{4}$$

Zusatz: Beweisen Sie diese Formel mit vollständiger Induktion.

Aufgabe H 21. *Mittelwertsatz der Integralrechnung*

(a) Ist der Mittelwertsatz der Integralrechnung auf $f\colon [-2,2]\to\mathbb{R}\colon x\mapsto x^3-x+5$ anwendbar? Finden Sie alle $\xi\in[-2,2]$, für die gilt: $\displaystyle\int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}\,x=4\,f(\xi)$.

(b) Gegeben sind die Funktionen

$$f\colon [0,1]\to\mathbb{R}\colon x\mapsto\frac{1}{\sqrt{x+1}}\qquad\text{und}\qquad g\colon [0,1]\to\mathbb{R}\colon x\mapsto\sqrt{x}.$$

Begründen Sie mit Hilfe des erweiterten Mittelwertsatzes der Integralrechnung die folgende Abschätzung:

$$\int_0^1\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}\,x\leqq\frac{2}{3}\,.$$

PD Dr. R. Dietmann
Dipl.-Math. M. Pfeil

7. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik II

Sommer 2007

Prof. Dr. M. Stroppel

Aufgabe P 19. *Uneigentliche Integrale*

Berechnen Sie die uneigentlichen Intgerale:

(a) $18\int\limits_{0}^{+\infty} x\,e^{-3\,x}\,\mathrm{d}\,x$ **(b)** $\int\limits_{1+0}^{3} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}\,\mathrm{d}\,x$

Aufgabe P 20. *Gamma-Funktion*

Die *Gamma-Funktion* ist definiert durch

$$\Gamma\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}\colon \alpha \mapsto \int\limits_{0+0}^{+\infty} e^{-t}\,t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}\,t\,.$$

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass dieses uneigentliche Integral in der Tat für alle $\alpha > 0$ konvergiert.

(a) Zeigen Sie mit partieller Integration die Funktionalgleichung $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$.

(b) Berechnen Sie $\Gamma(1)$.

(c) Leiten Sie damit für $n \in \mathbb{N}$ die Identität $\Gamma(n+1) = n!$ her. Anschaulich bedeutet dies, dass die Gamma-Funktion eine Fortsetzung der Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{N}\colon n \mapsto (n-1)!$ ist.

Aufgabe P 21. *Niveaulinie und achsenparalleler Schnitt*

Gegeben ist die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto -4x^2 - y^2\,.$$

Skizzieren Sie die Niveaulinien für $t \in \{-4, 0, 4\}$ sowie die achsenparallelen Schnitte für $x_0 \in \{-1, 0, 1\}$.

Aufgabe P 22.

Berechnen Sie den Grenzwert der folgenden Reihe:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{5}\right)^k$$

Hinweis: Dabei hilft Ihnen die gliedweise Integration der geometrischen Reihe und Einsetzen des richtigen Wertes weiter.

Aufgabe P 23. *Uneigentliche Integrale*

Untersuchen Sie, ob die folgenden uneigentliche Integrale konvergieren:

(a) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1-\cos(x)}{x^3}\,\mathrm{d}\,x$ **(b)** $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{x}\,e^{-x}\,\mathrm{d}\,x$ **(c)** $\int\limits_{0+0}^{2} \frac{1+\cos(x)^2}{x^2}\,\mathrm{d}\,x$

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 22. *Uneigentliche Integrale*

(a) Existiert das uneigentliche Integral

$$\int_2^\infty \frac{\mathrm{d}\,x}{x\,(\ln x)^2} \quad ?$$

(b) Zeigen Sie: Die Funktion $f\colon [1, +\infty) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x\,(\ln x)^2$ ist streng monoton wachsend.

(c) Konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\,(\ln n)^2} \ ?$$

Aufgabe H 23. *Potenzreihen*

(a) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2\, x^n \ ?$$

(b) Finden Sie für diese x einen geschlossenen Ausdruck für die Reihe.
Hinweis: Beispiel 3.8.8 im Skript ist dafür hilfreich.

Aufgabe H 24. *Anwendung der Definition des Riemann-Integrals*
Zeigen Sie:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \ln 2.$$

Höhere Mathematik II

Sommer 2007

Aufgabe P 24. *Topologie*

(a) Gegeben seien die Mengen

$$M_1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$$

und

$$M_2 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqq 1\} .$$

Skizzieren Sie M_1 und M_2 und untersuchen Sie die beiden Mengen darauf, ob sie offen, abgeschlossen oder kompakt sind.

(b) Zeigen Sie: Der Schnitt zweier und die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen ist wieder offen. Was ist mit dem Schnitt beliebig vieler offener Mengen?

(c) Gibt es Mengen, die weder offen noch abgeschlossen sind?

Aufgabe P 25. *Stetigkeit*

Untersuchen Sie die folgenden beiden Funktionen $f_1, f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f_1 : (x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

und

$$f_2 : (x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

auf Stetigkeit.

Aufgabe P 26. *Partielle Ableitungen*

Gegeben seien die Funktionen $f_1, f_2 : \mathbb{R}\backslash\{0\} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f_1 : (x,y) \mapsto \ln \sqrt{x^2 + y^2}$$

und

$$f_2 : (x,y) \mapsto \arctan \frac{y}{x}.$$

Berechnen Sie jeweils die ersten und zweiten partiellen Ableitungen.
Welchen Wert hat $(f_j)_{xx} + (f_j)_{yy}$?

Aufgabe P 27. *Uneigentliche Integrale*

Konvergiert die unendliche Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k,$$

so folgt $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$. Wenn das uneigentliche Integral

$$\int_0^{\infty} f(x) \,\mathrm{d}\, x$$

existiert, folgt dann in analoger Weise $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$?

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 25. *Gradient und Richtungsableitung*

Bestimmen Sie von den folgenden Funktionen den Gradienten und die Richtungsableitung im Punkt x_0 und Richtung v, dabei soll a immer eine positive Zahl und $|v| = 1$ sein:

(a) $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x^2 - y^2$, $\quad x_0 = (1, 2)$, $\quad v = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, a\right)^{\mathsf{T}}$

(b) $f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x, y, z) \mapsto \sin(x^2) + z\, e^y$, $\quad x_0 = (0, 0, 1)$, $\quad v = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, a\right)^{\mathsf{T}}$

(c) $f_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x, y, z) \mapsto e^x\, y\, z$, $\quad x_0 = (1, 1, 1)$, $\quad v = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, a\right)^{\mathsf{T}}$

Bestimmen Sie in **(a)** die Richtung und den Wert des steilsten Anstiegs.

Aufgabe H 26. *Nullstellenmenge*

Bestimmen Sie die Nullstellenmenge und die Vorzeichenverteilung der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x\, y\, (y - \alpha)\, \left(-4 + 4x^2 + y^2\right)$$

in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$. Wieviele Extrema treten für unterschiedliche α mindestens auf und in welchen Bereichen kommt welcher Typ vor?

Hinweis: Die genaue Lage und die Funktionswerte an den Extremstellen sind nicht gefragt.

Aufgabe H 27. *Stetigkeit*

Gegeben sind die Funktionen

$$f\colon \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \to \mathbb{R}\colon (x, y) \mapsto \frac{x^2 + y^2}{2\, y}$$
$$g\colon \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \to \mathbb{R}\colon (x, y) \mapsto \frac{-x^2\, y + y^3}{2\, y}$$

(a) Geben Sie Zähler und Nenner von f und g jeweils in Multiindexnotation an.

(b) Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen f und g. Verwenden Sie dazu als Hilfsmittel Niveaulinien und achsenparallele Schnitte.

(c) Sind f und g stetig? Lassen sich f und g stetig auf $\mathbb{R}^2$ fortsetzen?

PD Dr. R. Dietmann
Dipl.-Math. M. Pfeil

9. Gruppenübung zur Vorlesung

Prof. Dr. M. Stroppel

Höhere Mathematik II

Sommer 2007

Aufgabe P 28. *Taylorpolynom*

Es sei $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto 3\,x^2\,y - y^3$.

Bestimmen Sie das Taylorpolynom $T_2\big(g,(x_0,y_0),(1,1)\big)$ im Punkt (x_0,y_0) der Stufe 2 um den Entwicklungspunkt $(1,1)$.

Zusatz: Bestimmen Sie auch das Taylorpolynom $T_3\big(g,(x_0,y_0),(0,0)\big)$.

Aufgabe P 29. *kritische Punkte und Schmiegquadrik*

Gegeben ist die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto x^2\,y^4 - 16\,x^2 - y^4 + 16\,.$$

(a) Skizzieren Sie jeweils die Mengen der Punkte $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, für die $f(x,y) = 0$, $f(x,y) > 0$ beziehungsweise $f(x,y) < 0$ gilt.

(b) Berechnen Sie $\operatorname{grad} f$ und $\mathrm{H}f$.

(c) Bestimmen Sie den Typ der Schmiegquadrik an den Graph von f im Punkt $(0,0)$.

(d) Geben Sie alle kritischen Punkte von f an (d. h. Punkte mit $\operatorname{grad} f = 0$) und skizzieren Sie die Menge der kritischen Punkte.

(e) Bestimmen Sie alle Extrema von f.

Aufgabe P 30. *Extremstellen*

Gegeben ist die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto \frac{x\,(1-y^2)}{x^2+1}\,.$$

(a) Berechnen Sie $\operatorname{grad} f$ und $\mathrm{H}f$.

(b) Bestimmen Sie alle Extrema von f.

Aufgabe P 31. *Taylorpolynom*

(a) Berechnen Sie das Taylorpolynom $T_2\big(f,(x_0,y_0),(1,1)\big)$ der Funktion

$$f\colon\ (0,+\infty) \times (0,+\infty) \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto x^y\,.$$

(b) Verwenden Sie die Entwicklung aus Teil (a), um $1.05^{1.02}$ näherungsweise zu berechnen. Vergleichen Sie dieses Ergebnis mit dem exakten Ergebnis.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 28. *Differenzierbarkeit*
Untersuchen Sie die folgenden beiden Funktionen $f_1, f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ auf Differenzierbarkeit:

(a)

$$f_1(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(b)

$$f_2(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Aufgabe H 29. *Taylorreihe*

(a) Entwickeln Sie die Funktion

$$f_1(x,y) = x^2 \sin\frac{xy}{2}$$

nach der Taylorformel um den Entwicklungspunkt $(1, \pi)$ bis inklusive Termen zweiter Ordnung.

(b) Entwickeln Sie die Funktion

$$f_2(x,y) = y^4 - 3xy^2 + x^3$$

um den Entwicklungspunkt $(1,1)$ in ihre Taylorreihe.

Aufgabe H 30. *Extremwertproblem*
Die Fläche F eines symmetrischen trapezförmigen Kanalquerschnitts sei gegeben. Wie müssen der Böschungswinkel α und die Höhe h gewählt werden, damit der benetzte Umfang möglichst klein wird?

PD Dr. R. Dietmann
Dipl.-Math. M. Pfeil

10. Gruppenübung zur Vorlesung

Prof. Dr. M. Stroppel

Höhere Mathematik II

Sommer 2007

Aufgabe P 32. *Hessematrix*

Sei A eine reelle $n \times n$-Matrix und $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die durch

$$x \mapsto x^{\mathsf{T}} A\, x$$

definierte Funktion. Berechnen Sie die Hessematrix $\mathrm{H}f\,(x)$.

Hinweis: Wenn Ihnen der allgemeine Fall zunächst zu schwer erscheint, behandeln Sie zuerst die Spezialfälle $n = 1$ und $n = 2$.

Aufgabe P 33. *Determinante der Hessematrix und Sattelpunkte*

Sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ zwei Mal stetig partiell differenzierbar, und die Hessematrix von f an einer Stelle x habe negative Determinante. Folgt daraus wie im zweidimensionalen Fall, dass x ein Sattelpunkt ist?

Aufgabe P 34. *Extrema unter Nebenbedingungen: Scheitelpunkte*

Bestimmen Sie die Scheitelpunkte der Ellipse mit der Gleichung

$$x^2 + xy + y^2 = 5\,,$$

also die Punkte mit größtem oder kleinstem Abstand zum Mittelpunkt der Ellipse (das ist hier der Ursprung).

Aufgabe P 35. *Extrema unter Nebenbedingungen: arithmetisches vs. geometrisches Mittel*

Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{j=1}^{n} x_j^2 = x_1^2 \cdot x_2^2 \cdot \ldots \cdot x_n^2$$

gegeben.

(a) Maximieren Sie f unter der Nebenbedingung

$$x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1.$$

(b) Folgern Sie die Ungleichung

$$(a_1 \cdot \ldots \cdot a_n)^{1/n} \leqq \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}$$

zwischen dem geometrischen und dem arithmetischen Mittel für beliebige positive reelle Zahlen $a_1\,, \ldots\,, a_n\,.$

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 31. *Optimierung am Tetraeder*
Wir betrachten das Tetraeder mit den Ecken $A = (0, 0, 0)$, $B = (2, 0, 0)$, $C = (0, 3, 0)$ und $D = (0, 0, 4)$.

(a) Bestimmen Sie eine Funktion f, die zu einem Punkt $P = (x, y, z)$ die Summe der Quadrate der Abstände von den vier Eckpunkten angibt.

(b) Finden Sie den Punkt R_1 im Raum, in dem die Funktion f ihr Minimum annimmt.

(c) Suchen Sie den Punkt R_2, der in der Ebene mit der Gleichung

$$x + y + z = 0$$

liegt und unter allen Punkten dieser Ebene die Funktion f minimiert.

Aufgabe H 32. *Jacobi-Matrizen*
Es seien die Funktionen

$$f_1 : D_1 \to \mathbb{R}^3 : x \mapsto \begin{pmatrix} e^x \cos(x) \\ e^x \sin(x) \\ e^x \end{pmatrix}, \qquad f_2 : D_2 \to \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{x}}{y^2 - 1} \\ \ln(x^2 + y^2) \end{pmatrix},$$

mit einer geeigneten Menge $D_1 \subseteqq \mathbb{R}$ und $D_2 \subseteqq \mathbb{R}^2$ als Definitionsbereich gegeben.

(a) Bestimmen Sie die maximalen Definitionsbereiche D_1 und D_2.

(b) Bestimmen Sie die Jacobi-Matrizen $\mathrm{J}f_1(x)$ und $\mathrm{J}f_2(x, y)$.

Aufgabe H 33. *Extrema unter Nebenbedingungen: Reduktion auf eindimensionale Probleme*
Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto xy + x\,.$$

Untersuchen Sie f auf Extrema unter der Nebenbedingung

$$x^2 + y^2 = 1\,.$$

(a) Verwenden Sie zuerst die Lagrange-Multiplikator-Methode.

(b) Führen Sie jetzt das Extremwertproblem auf ein eindimensionales zurück, indem Sie die Nebenbedingung nach einer Variablen auflösen und dies in die Funktion einsetzen.

Hinweis: Beim Auflösen der Nebenbedingung wird eine Fallunterscheidung nötig. Die Randstellen der beiden dann betrachteten Bereiche müssen gesondert untersucht werden.

Höhere Mathematik II

Sommer 2007

Aufgabe P 36. *Mehrdimensionale Kettenregel*

Gegeben sind die Funktionen

$$f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2:\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}x_1\,x_2\\ \dfrac{x_2}{x_3}\end{pmatrix}\qquad\text{und}\qquad g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^4:\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}1\\y_1+y_2\\\sin(y_1)\\\ln(y_2)\end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Jacobi-Matrizen $Jf\,(x_1,x_2,x_3)$ und $Jg\,(y_1,y_2)$.

(b) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix der Komposition $J\,(g\circ f)\,(x_1,x_2,x_3)$ allgemein und im Punkt $\left(\frac{\pi}{e},e,1\right)$.

Aufgabe P 37. *Rotation, Divergenz und Potentialfunktion*

Gegeben sei die Funktion

$$f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3:\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}-4\,x_1\,x_2\\6\,x_2-\alpha\,x_1^2-x_3^2\\-2\,x_2\,x_3\end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie $\operatorname{rot} f$ und $\operatorname{div} f$.

(b) Bestimmen Sie alle Werte von α, für die die Funktion f ein Potential besitzt.
Berechnen Sie in diesen Fällen das Potential.

Aufgabe P 38. *Tangente und Tangentialebene*

Die Funktion f sei gegeben durch

$$f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\colon\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\mapsto x_1^3+x_2^3+3\,x_1\,x_2\,.$$

(a) Man bestimme alle (x_1,x_2) mit

$$\operatorname{grad} f\,(x_1,x_2)=0\,.$$

(b) Wie lautet die Gleichung der Tangentialebene an den Graphen

$$\left\{(x_1,x_2,f(x_1,x_2))\,\middle|\,(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2\right\}$$

von f im Punkt $(1,1,f(1,1))$?

(c) In welche Richtung wird ein Ball auf dem Graphen von f rollen, wenn man ihn im Punkt $(1,1,5)$ loslässt ?

(d) Man bestimme die Tangente an die Höhenlinie

$$\left\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2\,\middle|\,f\,(x_1,x_2)=5\right\}$$

im Punkt $(1,1)$.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 34.
Es sei die Funktion

$$f\colon D \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^2\, y \\ \frac{1}{z\,y} \sin(x\,z)\, e^y \end{pmatrix}$$

mit einer geeigneten Menge $D \subseteq \mathbb{R}^3$ als Definitionsbereich gegeben.

(a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich D.

(b) Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix $\mathrm{J}f\,(x, y, z)$.
Hinweis: Die Jacobi-Matrix kann nicht auf ganz D über die partiellen Ableitungen bestimmt werden.

Aufgabe H 35.
Wir betrachten die Fläche $F \subseteq \mathbb{R}^3$, die durch die folgende Gleichung gegeben ist:

$$F\colon f(x, y, z) = x^2 + y^2 - x - y - xy + 1 - \frac{3}{16}(x^2 + y^2)^2 + z^2 = 0$$

(a) Bestimmen Sie die Tangentialebene E an die Fläche F im Punkt $(a, a, 0)$ mit $a = \frac{-1-\sqrt{1+2\sqrt{3}}}{\sqrt{3}}$.
Hinweis: Rechnen Sie mit a und setzen Sie den Wert erst ein, wenn es nötig ist.

(b) Bestimmen Sie alle Punkte von F, die von E den maximalen Abstand haben und geben Sie diesen Abstand an.
Hinweis: Formulieren Sie das Problem als Berechnung von Extrema unter Nebenbedingungen und benutzen Sie die Methode der Lagrangemultiplikatoren. Bei der Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems könnte es hilfreich sein, zwischendurch den Wert von $(x^2 + y^2)$ zu berechnen und einzusetzen.

Aufgabe H 36.
Entscheiden Sie, für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ die folgende Funktion ein Potential hat:

$$f\ :\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \alpha^2\, y^2 - z\, e^x \\ 2\, x\, y + 2\alpha \\ -e^x \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie in allen diesen Fällen das jeweilige Potential.

PD Dr. R. Dietmann
Dipl.-Math. M. Pfeil

12. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik II

Prof. Dr. M. Stroppel

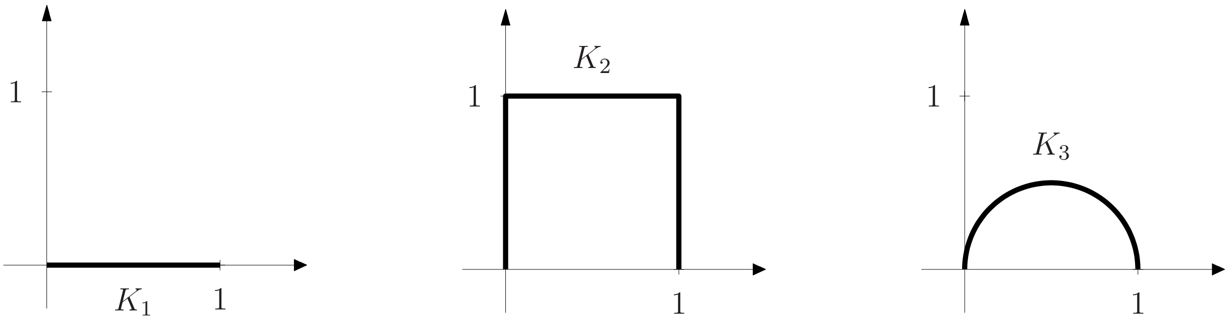
Sommer 2007

Aufgabe P 39. *Parametrisierung, Kurvenintegrale*

Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_K \left(x^2+y^2\right) \mathrm{d}\, s$$

über die unten skizzierten Wege K_1, K_2 und K_3 vom Punkt $(0,0)$ zum Punkt $(1,0)$.



Aufgabe P 40. *Potential, Kurvenintegral*

Gegeben ist das Vektorfeld

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1^2+\alpha x_3 \\ \alpha x_2 - x_3 \\ x_1 - x_2 + e^{\alpha x_3} \end{pmatrix} .$$

(a) Bestimmen Sie, für welche Werte von $\alpha \in \mathbb{R}$ die Funktion f ein Potential besitzt und berechnen Sie dieses.

(b) Wir betrachten den Weg K, der parametrisiert wird durch

$$C\colon \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to K\colon t \mapsto \left(\ (\cos(t))^3\ ,\ \ (\sin(t))^3\ ,\ \ 0\ \right)^\intercal .$$

Dies ist der von $P=(1,0,0)^\intercal$ nach $Q=(0,1,0)^\intercal$ führende Zweig der Astroide

$$\left\{ (x_1,x_2,x_3)^\intercal \ \middle|\ x_1^{2/3}+x_2^{2/3}=1,\ x_3=0 \right\} .$$

Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_K f(x)\,\mathrm{d}\,x$ von f für beliebiges α längs K.

(c) Berechnen Sie $\int_K f(x)\,\mathrm{d}\,x$ für $\alpha = 1$ auf eine zweite Art.

Aufgabe P 41. *Kurvenintegrale*

Bestimmen Sie die folgenden Kurvenintegrale längs K:

(a) $\int_K (x_1^2+x_2)\,\mathrm{d}\,s$ mit $C\colon [0,1] \to K\colon t \mapsto \left(\ t\ ,\ \ \cosh(t)\ \right)^\intercal$
Zusatz: Skizzieren Sie die Kurve K in einem Koordinatensystem.

(b) $\int_K \sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}\,\mathrm{d}\,s$ mit $C\colon [0,2\pi] \to K\colon t \mapsto \left(\ t\cos(t)\ ,\ \ t\sin(t)\ ,\ \ t\ \right)^\intercal$
Zusatz: Beschreiben Sie die Gestalt der Kurve K.

Die folgenden Aufgaben behandeln Stoff, der teilweise erst nach der letzten Gruppenübung in der Vorlesung behandelt wird, deswegen aber nicht unwichtig ist.

Aufgabe P 42.
Gegeben sind die Vektorfelder:

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon (x,y) \mapsto (-y,x)$$
$$g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon (x,y) \mapsto (x,y)$$

(a) Veranschaulichen Sie die beiden Vektorfelder mittels einer Skizze.

(b) Bestimmen Sie von f und g jeweils die Jacobi-Matrix, die Divergenz und die Rotation.

(c) Die geschlossene Kurve K sei gegeben durch die Parametrisierung

$$C\colon [0,2\pi] \to K\colon t \mapsto \big(\cos(t), \sin(t)\big)\,.$$

Bestimmen Sie von f und g jeweils Zirkulation längs K und Ausfluss durch K.

Aufgabe P 43. *Potential mittels Kurvenintegral*

(a) Gegeben seien die drei Punkte

$$P_1 = (0,0,0), \quad P_2 = (a,0,0), \quad P_3 = (a,b,0), \quad P_4 = (a,b,c)\,.$$

Finden Sie Parametrisierungen C_i von Kurven, welche vom Punkt P_i zum Punkt P_{i+1} laufen.

(b) Berechnen Sie ein Potential des Vektorfeldes

$$g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon (x,y,z) \to \big(\sin(z),\ 2\,y\,z,\ x\,\cos(z) + y^2\big)^{\mathsf{T}}$$

indem Sie die Wegintegrale über C_1, C_2 und C_3 summieren.

Aufgabe P 44. *Potential, Kurvenintegral*
Gegeben ist das Vektorfeld

$$f\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3\colon\ (x,\ y,\ z) \mapsto \left(\alpha\frac{z}{x},\ \frac{z}{y},\ \ln(xy)\right)^{\mathsf{T}}$$

mit $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Berechnen Sie $\operatorname{rot} f$ und $\operatorname{div} f$.

(b) Bestimmen Sie, für welche Werte von α die Funktion f ein Potential besitzt und berechnen Sie dieses.

(c) Berechnen Sie jeweils für $\alpha = 0$ und $\alpha = 1$ das Kurvenintegral von f längs K, wobei K parametrisiert wird durch

$$C\colon [-1,1] \to K\colon t \mapsto \left(\ e^{(t^2)},\ \ 1,\ \ \sin(\pi t)\ \right)^{\mathsf{T}}.$$