Dr. A. App
Dipl.-Math. B. Krinn

1. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik II

Prof. Dr. M. Stroppel

Sommer 2008

Aufgabe P 1. *Konvergenz von Reihen*

Wir betrachten die Reihen $S := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{100\,k}$ und $\widetilde{S} := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{100\,k}$.

(a) Bestimmen Sie für $n \in \{1, \ldots, 8\}$ jeweils die n-ten Partialsummen

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{100\,k} \quad \text{und} \quad \widetilde{S}_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{100\,k}$$

auf zwei Dezimalstellen genau und zeichnen Sie diese in ein Koordinatensystem ein.

(b) Sind die jeweiligen Reihen konvergent?

(c) Falls die jeweilige Reihe konvergiert, schätzen Sie den Fehler zwischen S_8 bzw. $\widetilde{S}_8$ und dem Wert der Reihe ab.

Aufgabe P 2. *Konvergenzkriterien für Reihen*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Reihen konvergieren.

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2 + (-1)^k}{(k+1)!}$

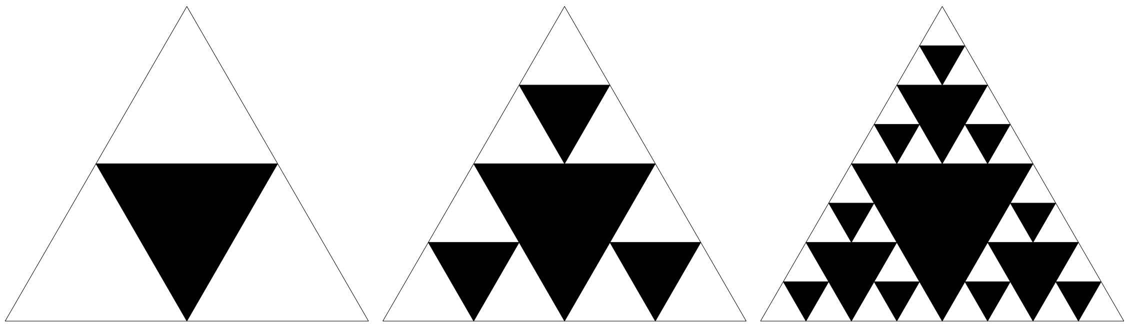
(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{13}{4k^2 + 6k}$

(c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}$

(d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{((-1)^k + 1)3^{k+2}}{4^{k-1}}$

Aufgabe P 3. *Sierpinski-Dreieck*

Wir betrachten die folgende geometrische Figur: In einem gleichseitigen Dreieck der Seitenlänge eins wird durch Verbinden der Seitenmittelpunkte ein kleineres (auch gleichseitiges) schwarzes Dreieck konstruiert. Die dabei frei bleibende Fläche besteht aus drei ebenfalls gleichseitigen Dreiecken. Nun wird jedem dieser drei Dreiecke auf dieselbe Art und Weise ein kleineres schwarzes Dreieck einbeschrieben. Der Prozess wird iteriert. Berechnen Sie die Gesamtfläche aller so entstehenden schwarzen Dreiecke.



Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 1. *Konvergenz und Grenzwerte von Reihen*
Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und geben Sie den Grenzwert an, falls er existiert.

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{5^{k+1}}$

(b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{\sqrt{5^k}(k+2)}$

(c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{(2k+1)(2k+3)}$

Aufgabe H 2. *Konvergenzkriterien*
Bei welchen der folgenden Reihen können Sie mit dem Leibniz-, dem Quotienten- oder dem Wurzelkriterium eine Aussage über die Konvergenz treffen?

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}\right)^n$

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n\cos(n\pi)}{n^2+1}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{2^n}$

Aufgabe H 3. *Stetigkeit*
Gegeben sind die folgenden Funktionen $f_i \colon D_i \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, 4$:

$$f_1(x) = \begin{cases} e^{1/x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}, \qquad f_2(x) = \operatorname{sign}(x) := \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

$$f_3(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x^3-x}, & |x| \neq 1 \\ 1, & |x| = 1 \end{cases} \qquad f_4(x) = \sqrt{\sin(x)}$$

(a) Bestimmen Sie jeweils den maximalen Definitionsbereich $D_i \subseteq \mathbb{R}$, für den die angegebene Abbildungsvorschrift sinnvoll ist.

(b) Untersuchen Sie alle Funktionen f_i auf (links-/rechtsseitige) Stetigkeit in jedem Punkt von D_i.

Dr. A. App
Dipl.-Math. B. Krinn

2. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik II

Prof. Dr. M. Stroppel

Sommer 2008

Aufgabe P 4. *Funktionsgraphen*

Zeichnen Sie die Graphen der folgenden Funktionen in ein Koordinatensystem ein:

(a) $f_1 \colon [0,9] \to \mathbb{R} \colon x \mapsto \sqrt{x}$

(b) $f_2 \colon [-1,3] \to \mathbb{R} \colon x \mapsto 2^x$

(c) $f_3 \colon [0,5] \to \mathbb{R} \colon x \mapsto (x+1)^2 - 5$

(d) $f_4 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \colon x \mapsto \begin{cases} 3\,x+3\,, & x < -1 \\ (x+1)^2\,, & -1 \leqq x \leqq 1 \\ 6 - \frac{1}{x}\,, & x > 1 \end{cases}$

Welche dieser Funktionen besitzen eine Umkehrfunktion? Geben Sie die Definitions- und Wertebereiche der Umkehrfunktionen an.

Aufgabe P 5. *Stetigkeit*

Betrachtet wird die Funktion $f \colon [1,4] \to \mathbb{R} \colon x \mapsto \sqrt{x}$.

(a) Berechnen Sie für jedes $\varepsilon > 0$ ein passendes $\delta > 0$ so, dass gilt

$$\forall x \in [1, 1+\delta] \colon \quad |f(x) - f(1)| < \varepsilon.$$

(b) Finden Sie für jeden Punkt $x_0 \in [1,4]$ und für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so, dass die Bedingung

$$\forall x \in [1,4] \colon \ (|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$$

erfüllt ist.

(c) Betrachtet wird nun die Funktion $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 2 \\ 2, & x = 2 \end{cases}$$

Können Sie auch hier ein δ wie in **(b)** finden?

(d) Was hat das Ganze mit Stetigkeit zu tun?

Aufgabe P 6. *Konvergenz von Reihen*

Untersuchen Sie, welche der folgenden Reihen konvergieren:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \tan\left(\frac{1}{n}\right)$

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 4. *Intervallhalbierungsmethode*

Bestimmen Sie näherungsweise die Lösung von $\cos(x) = x$. Wenden Sie dazu die Intervallhalbierungsmethode auf die Funktion $f(x) = \cos(x) - x$ mit dem Startintervall $[0, \pi/2]$ so lange an, bis die Intervalllänge kleiner als 0.05 ist.

Aufgabe H 5. *Konvergenzkreise*

Bestimmen Sie die Konvergenzkreise der folgenden komplexen Potenzreihen:

(a) $\sum_{k=0}^{\infty}(5z)^k$

(b) $\sum_{k=0}^{\infty}(k^2+k+1)(z-i)^k$

(c) $\sum_{k=1}^{\infty}k^{-k}(z-2+\sqrt{3}i)^k$

(d) $\sum_{k=1}^{\infty}k!(z+1)^k$

Aufgabe H 6. *Hyperbelfunktionen*

Die Hyperbelfunktionen *Cosinus hyperbolicus* und *Sinus hyperbolicus* sind durch die Zuordnungen

$$\cosh(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{und} \quad \sinh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

definiert. Im Folgenden seien nur reelle Argumente betrachtet.

(a) Geben Sie von $\cosh$ und $\sinh$ jeweils den maximalen Definitionsbereich und den Wertebereich an.

(b) Untersuchen Sie die beiden hierdurch gewonnenen Funktionen auf Symmetrie zur y-Achse $\big(f(x) = f(-x)\big)$ und zum Ursprung $\big(f(x) = -f(-x)\big)$.

(c) Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen.

(d) Geben Sie die Potenzreihen dieser Funktionen um den Entwicklungspunkt 0 an und bestimmen Sie deren Konvergenzradien.

(e) Beweisen Sie, dass unabhängig von x das folgende Additionstheorem gilt:

$$(\cosh(x))^2 - (\sinh(x))^2 = 1\,.$$

Zusatz: Verallgemeinern Sie die Ergebnisse, indem Sie die Definitionsbereiche in $\mathbb{C}$ bestimmen.

Aufgabe P 7. *Potenzreihe*

Die reelle Funktion f sei durch die Zuordnung $x \mapsto e^{-x}$ gegeben.

(a) Geben Sie den maximalen Definitionsbereich sowie den Wertebereich von f an.

(b) Bestimmen Sie die Umkehrfunktion f^{-1} sowie deren Definitions- und Wertebereich

(c) Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen f und f^{-1}.

(d) Bestimmen Sie die Potenzreihe von f um den Entwicklungspunkt 0 und geben Sie deren Konvergenzradius an.

(e) Berechnen Sie damit $\frac{1}{e}$ auf zwei Dezimalstellen genau. Verwenden Sie hierzu eine geeignete Fehlerabschätzung.

Aufgabe P 8.

(a) Untersuchen Sie mit Hilfe des Differenzenquotienten, ob die Funktion f an der Stelle $x = 0$ und die Funktion g an den Stellen $x = 0$ und $x = -3$ differenzierbar ist.

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} \sqrt{x} & \text{für } x \in [0, +\infty) \\ -\sqrt{-x} & \text{für } x \in (-\infty, 0) \end{cases}$$
$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x\,|x| + |x+3|$$

(b) Setzen Sie die Funktionen f und g an der Stelle $x = 0$ stetig fort und untersuchen Sie mit Hilfe des Differenzenquotienten, ob die beiden Funktionen an dieser Stelle differenzierbar sind.

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} : x \mapsto x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$
$$g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

Aufgabe P 9.

Berechnen Sie auf zwei verschiedene Weisen den Grenzwert $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos(x) - 1}{x^2}$:

(a) Ohne die Verwendung von Potenzreihen (*Hinweis*: Erweitern Sie mit $\cos(x)+1$ und gehen Sie analog zu **1.12.7** vor.)

(b) Indem Sie die Potenzreihe für $\cos$ verwenden

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 7. *Ableitungen*

Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen. Hierbei kann die Tabelle **2.2.5** benutzt werden. Alle anderen Rechenschritte sind zu begründen.

(a) $f_1(x) = \cos(x^3 + 5e^x + \pi)$

(b) $f_2(x) = e^{\arctan(\cos(x))}$

(c) $f_3(x) = \sin(x)\cos(x)\tan(x)$

(d) $f_4(x) = \dfrac{\cos(x) - (\sin(x))^2\cos(x)}{\dfrac{(\sin(x))^2}{(\tan(x))^2}}$

(e) $f_5(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}\,\dfrac{x^4-1}{x+1}\ln(x^3)$

Aufgabe H 8. *Potenzreihe*

Bestimmen Sie die Potenzreihe der Funktion

$$f\colon \mathbb{R}\setminus\left\{\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right\} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{1}{1-2x^2}$$

um den Entwicklungspunkt 0 und berechnen Sie, für welche x diese konvergiert.

Hinweis: Betrachten Sie die geometrische Reihe zum Vergleich.

Aufgabe H 9. *Kosinus- und Sinusfunktion*

(a) Zeigen Sie für $z \in \mathbb{C}$ mit Hilfe der *Formel von Euler und de Moivre*

$$\cos(z) = \frac{e^{\mathrm{i}z} + e^{-\mathrm{i}z}}{2} \quad \text{und} \quad \sin(z) = \frac{e^{\mathrm{i}z} - e^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}\,.$$

(b) Beweisen Sie für $z \in \mathbb{C}$ das folgende Additionstheorem:

$$(\cos(z))^2 + (\sin(z))^2 = 1\,.$$

Aufgabe P 10. *Umkehrfunktion der Kosinus-Funktion*

(a) Schränken Sie die Kosinus-Funktion $\cos$ im Definitionsbereich so auf ein geeignetes Intervall ein, daß die Umkehrfunktion *Arkuskosinus* $\arccos$ existiert und skizzieren Sie diese.

(b) Berechnen Sie $\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\arccos(x)\right|_{x=x_0}$ mit Hilfe der Ableitung der Umkehrfunktion.

(c) Zeigen Sie $\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(x)$.

Aufgabe P 11. *Potenzreihen und Differentialgleichungen*

Die Funktionen f und g sind durch ihre Potenzreihen

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad \text{und} \quad g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$$

gegeben.

Bestimmen Sie die Koeffizienten a_k und b_k so, dass die Differentialgleichungen $f'' = -f$ und $g'' = -g$ mit den Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 & \qquad f'(0) &= 1 \\ g(0) &= 1 & \qquad g'(0) &= 0 \end{aligned}$$

erfüllt werden.

Wie heißen die Funktionen f und g?

Aufgabe P 12. *Anwendung des Mittelwertsatzes*

(a) Sei

$$P_n(x) = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\right)^n (x^2-1)^n\,,$$

also die n-te Ableitung von $(x^2-1)^n$.

Zeigen Sie: $P_n(x)$ ist ein Polynom vom Grad n.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes: Das Polynom $P_n(x)$ hat im Intervall $(-1, 1)$ genau n Nullstellen.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 10. *Umkehrfunktionen der Hyperbel-Funktionen*
In Aufgabe H6 wurden

$$\cosh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{und} \quad \sinh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

definiert.

(a) Schränken Sie die Funktion $\cosh$ im Definitionsbereich so auf ein geeignetes Intervall ein, daß die Umkehrfunktion *Areakosinus Hyperbolicus* arcosh existiert und skizzieren Sie diese.

(b) Berechnen Sie $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} \operatorname{arcosh}(x)\Big|_{x=x_0}$ mit Hilfe der Ableitung der Umkehrfunktion.

(c) Zeigen Sie, dass für alle x in den jeweiligen Definitionsbereichen gilt:

$$\operatorname{arcosh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) \quad \text{und} \quad \operatorname{arsinh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) .$$

Hinweis: Substituieren Sie hierzu $\tilde{x} := e^x$ in der Definition von $\cosh$ und $\sinh$.

(d) Bestimmen Sie nun anhand dieser Formeln erneut die Ableitungen $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} \operatorname{arcosh}(x)\big|_{x=x_0}$ und $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} \operatorname{arsinh}(x)\big|_{x=x_0}$. Verifizieren Sie damit Ihr Ergebnis, das Sie über die Ableitung der Umkehrfunktion gewonnen haben.

Aufgabe H 11. *Regel von l´Hospital*
Berechnen Sie folgende Grenzwerte - falls möglich mit der Regel von l'Hospital:

(a) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x-1}{\ln(x)}$ **(b)** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x^2}$ **(c)** $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x}\right)$

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\sin(x)}$ **(e)** $\lim\limits_{x\to\infty} \tanh(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sinh(\mathrm{x})}{\cosh(x)}$ **(f)** $\lim\limits_{x\to 0+0} x^x = \lim\limits_{x\to 0+0} e^{\ln(x^x)}$

Aufgabe H 12. *Taylorpolynome*
Berechnen Sie für die beiden Funktionen

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^5 - x \quad \text{und} \quad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sin(2x)$$

die Taylorpolynome $T_5(f, x, 1)$ und $T_4(g, x, \frac{\pi}{4})$ sowie die zugehörigen Restglieder.

5. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik II

Sommer 2008

Aufgabe P 13. *Stammfunktionen*

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\displaystyle\int 3x^5 + 7x^4 + 2x^2 + 9x + 2 \,\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x) + x \,\mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int \frac{2\cos(x)\sin(x)}{(\cos(x))^2} \,\mathrm{d}x$

(d) $\displaystyle\int (3x+1)e^{2x} \,\mathrm{d}x$

Aufgabe P 14. *partielle Integration*

Zeigen Sie, daß für eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ gilt:

$$\int_a^b x f''(x) \,\mathrm{d}x = bf'(b) - f(b) + f(a) - af'(a)\,.$$

Aufgabe P 15. *Taylorreihe*

In Beispiel **2.6.11** der Vorlesung wurde die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x \leqq 0 \end{cases}$$

betrachtet. Das Taylorpolynom dieser Funktion soll nun berechnet werden. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(a) Zeigen Sie, dass für alle $x_0 > 0$ und für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\right)^n f(x)\Big|_{x=x_0} = P\left(\frac{1}{x_0}\right)\exp\left(-\frac{1}{x_0^2}\right)$$

Wobei P ein Polynom ist.

(b) Berechnen Sie alle Ableitungen von f an der Stelle 0 und stellen Sie die Taylorreihe $T(f, x, 0)$ auf.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 13. *Taylorreihe*

(a) Berechnen Sie die Ableitung n-ter Ordnung für die Funktion

$$f\colon \left(-\frac{b}{a}, \infty\right) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto f(x) = \ln(ax+b),\ a, b > 0.$$

(b) Bestimmen Sie die Taylorreihe der Funktion f um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

(c) Welchen Konvergenzradius hat diese Reihe?

Aufgabe H 14. *partielle Integration*

(a) Es ist $f\colon D \subseteqq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie mit partieller Integration

$$\int 1 \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = \big[xf(x)\big] - \int xf'(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

(b) Berechnen Sie damit die unbestimmten Integrale

$$\int \ln(x)\ \mathrm{d}\,x\,, \qquad \int \arctan(x)\ \mathrm{d}\,x\,, \qquad \int \arcsin(x)\ \mathrm{d}\,x\,.$$

Aufgabe H 15. *Newtonverfahren*
Gesucht wird eine Lösung der Gleichungen

$$\sin(x) = e^x - 2 \qquad \text{und} \qquad \cos(x) = x.$$

Wählen Sie einen geeigneten Startwert und führen Sie jeweils vier Näherungsschritte mit dem Newtonverfahren zur Bestimmung der Lösung durch.

Dr. A. App
Dipl.-Math. B. Krinn

6. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik II

Sommer 2008

Prof. Dr. M. Stroppel

Aufgabe P 16. *Flächeninhalt*

(a) Welcher Gleichung genügt ein Kreis vom Radius r mit Ursprung $(0,0)$?

(b) Beschreiben Sie die obere Hälfte des Kreises als Graph einer Funktion.

(c) Bereits aus der Schule ist die Formel $A = \pi r^2$ für den Flächeninhalt A eines Kreises vom Radius r bekannt. Beweisen Sie diese Formel nun unter Verwendung der Integralrechung!

Hinweis: Es ist hilfreich, zunächst einen geeigneten Teil des Kreises zu betrachten.

Aufgabe P 17. *Ober- und Untersumme*

Berechnen Sie für die Funktionen

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x+1 \quad \text{und} \quad g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x^2$$

jeweils die Ober- und Untersumme über das Intervall $[1,2]$ bezüglich der Partitionen

$$P_n := \left\{1, 1+\frac{1}{n}, \dots, 1+\frac{n-1}{n}, 2\right\}.$$

Aufgabe P 18. *Universalsubstitution für trigonometrische Integrale*

(a) Zeigen Sie, dass für $x \in \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ bei Verwendung der „*Universalsubstitution*" $u\colon x \mapsto \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ gilt:

$$u'(x) = \frac{1+\big(u(x)\big)^2}{2}, \qquad \sin(x) = \frac{2u(x)}{1+\big(u(x)\big)^2}, \qquad \cos(x) = \frac{1-\big(u(x)\big)^2}{1+\big(u(x)\big)^2}.$$

Hinweis: $\sin(x) = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)$ und $\cos(x) = \left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 - \left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2$.

(b) Führen Sie damit folgende Integrale auf rationale Integranden zurück:

$$\int \frac{1}{\sin(x)}\,\mathrm{d}\,x, \qquad \int \frac{1}{1-\cos(x)}\,\mathrm{d}\,x, \qquad \int \frac{1+\sin(x)}{\sin(x)(1+\cos(x))}\,\mathrm{d}\,x.$$

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 16. *Integration durch Substitution*

(a) Es sei f eine stetig differenzierbare Funktion mit Wertebereich $\mathbb{R}^+$. Berechnen Sie

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}\,\mathrm{d}\,x\,.$$

(b) Berechnen Sie die bestimmten Integrale

$$\int_{3/5}^{4/5} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}\,x\,,\qquad \int_{e}^{e^2} \frac{1}{x\sqrt{\ln(x)}}\,\mathrm{d}\,x\,,\qquad \int_{0}^{\pi/2} \sqrt{1-\sin(x)}\,\mathrm{d}\,x\,.$$

Aufgabe H 17. *Universalsubstitution für trigonometrische Integrale*

Berechnen Sie mit Hilfe von P 18 folgende bestimmte Integrale:

$$\int_{\pi/3}^{2\pi/3} \frac{1}{\sin(x)}\,\mathrm{d}\,x\,,\qquad \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{1}{1-\cos(x)}\,\mathrm{d}\,x\,,\qquad \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{1+\sin(x)}{\sin(x)(1+\cos(x))}\,\mathrm{d}\,x\,.$$

Aufgabe H 18. *Integrale rationaler Funktionen*

Berechnen Sie die Integrale

(a)

$$\int \frac{3x^3+3x^2-11x+7}{(x^2-2x+1)(x^2+1)}\,\mathrm{d}\,x.$$

(b)

$$\int_0^5 \frac{2x^4+3x^3+9x^2+5x+7}{1+x^2}\,\mathrm{d}\,x$$

Dr. A. App
Dipl.-Math. B. Krinn

7. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik II

Sommer 2008

Prof. Dr. M. Stroppel

Aufgabe P 19. *Uneigentliche Integrale*

(a) Bestimmen Sie die Grenzwerte $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sin\big(\frac{1}{x}\big)$ und $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\big(1+\frac{1}{x}\big)$.

(b) Für welche α konvergieren folgende uneigentliche Integrale?

$$\int_1^{+\infty}\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{\alpha}\mathrm{d}\,x \qquad \int_1^{+\infty}\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)^{\alpha}\mathrm{d}\,x$$

Hinweis: Vergleichen Sie mit dem Integral $\int\limits_1^{+\infty}\frac{1}{x^{\alpha}}\,\mathrm{d}\,x$.

Aufgabe P 20. *Anwendung der Definition des Riemann-Integrals*
Zeigen Sie:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=\ln 2.$$

Aufgabe P 21. *Potenzreihe I*
Gegeben ist die Funktion

$$f:(-\rho,\rho)\to\mathbb{R} \;:\; x\mapsto\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(2x)^{2k+1}}{2k+1},$$

wobei ρ den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(2x)^{2k+1}}{2k+1}$ bezeichnet.

(a) Geben Sie den Wert von ρ an.

(b) Geben Sie einen geschlossenen Ausdruck für die Ableitung f' an:

(c) Geben Sie einen geschlossenen Ausdruck für f an:

Aufgabe P 22. *Potenzreihe II*

(a) Für welche $x\in\mathbb{R}$ konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty}n^2\,x^n\ ?$$

(b) Finden Sie für diese x einen geschlossenen Ausdruck für die Reihe.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 19. *Uneigentliche Integrale*
Untersuchen Sie folgende uneigentliche Integrale auf Konvergenz:

(a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^5}}\,\mathrm{d}\,x$ **(b)** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin(x)}\,\mathrm{d}\,x$ **(c)** $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\,(\ln(x))^\alpha}\,\mathrm{d}\,x$

Aufgabe H 20. *Gamma-Funktion*
Die *Gamma-Funktion* ist definiert durch

$$\Gamma\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}\colon \alpha \mapsto \int_{0+0}^{+\infty} e^{-t}\,t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t\,.$$

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass dieses uneigentliche Integral in der Tat für alle $\alpha > 0$ konvergiert.

(a) Zeigen Sie mit partieller Integration die Funktionalgleichung $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$.

(b) Berechnen Sie $\Gamma(1)$.

(c) Leiten Sie damit für $n \in \mathbb{N}$ die Identität $\Gamma(n+1) = n!$ her. Anschaulich bedeutet dies, dass die Gamma-Funktion eine Fortsetzung der Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{N}\colon n \mapsto n!$ auf $\mathbb{R}^+$ ist.

Aufgabe H 21.
Es sei $f\colon [a-b, a+b] \to \mathbb{R}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion, die punktsymmetrisch zu a ist, das heißt für alle $c \in [0,b]$ gilt $f(a-c) = -f(a+c)$. Beweisen Sie, dass für alle $d \in [0,b]$ gilt:

$$\int_{a-d}^{a+d} f(x)\,\mathrm{d}x = 0\,.$$

Dr. A. App
Dipl.-Math. B. Krinn

8. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik II

Sommer 2008

Prof. Dr. M. Stroppel

Aufgabe P 23. *Mengen*

Gegeben sind die Mengen

$$
\begin{aligned}
M_1 &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, x>0,\ x\leqq 1-y^2\right\}\,,\\
M_2 &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, |x|<\pi,\ |y|\leqq|\sin(x)|\right\}\,,\\
M_3 &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, x\in\mathbb{Q}\right\}\,,\\
M_4 &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, \exists\,\alpha,\beta\in\mathbb{R}:(x,y)=\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\alpha^k,\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k)!}\beta^{2k}\right)\right\}\,.
\end{aligned}
$$

(a) Skizzieren Sie M_1, M_2, M_3, M_4.

(b) Bestimmen Sie für $i\in\{1,2,3,4\}$ jeweils das Innere M_i°, den Rand ∂M_i und den Abschluss $\overline{M_i}$.

(c) Welche der Mengen M_i ist beschränkt, welche konvex?

Aufgabe P 24. *Funktionen mehrerer Veränderlicher*

Gegeben sind die Funktionen

$$
\begin{aligned}
f\colon \mathbb{R}\times(\mathbb{R}\setminus\{0\})\to\mathbb{R}\colon (x,y)&\mapsto \frac{x^2+y^2}{2y}\\
g\colon \mathbb{R}\times(\mathbb{R}\setminus\{0\})\to\mathbb{R}\colon (x,y)&\mapsto \frac{-x^2y+y^3}{2y}
\end{aligned}
$$

(a) Geben Sie Zähler und Nenner von f und g jeweils in Multiindexnotation an.

(b) Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen f und g. Verwenden Sie dazu als Hilfsmittel Niveaulinien und achsenparallele Schnitte.

(c) Sind f und g stetig? Lassen sich f und g stetig auf $\mathbb{R}^2$ fortsetzen?

Aufgabe P 25. *Stetigkeit in mehreren Variablen*

Wir untersuchen die Funktion

$$
f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\colon\quad (x,y)\mapsto\begin{cases}\dfrac{2\,x\,y^2}{x^2+y^4} & \text{falls } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{falls } (x,y)=(0,0)\end{cases}.
$$

(a) Betrachten Sie die Einschränkung von f auf einer beliebigen Ursprungsgeraden. Ist diese Einschränkung stetig?

(b) Ist f stetig?

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 22. *Integralkriterium*
Zeigen Sie mit Hilfe des Integralkriteriums, dass die folgende Reihe für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\alpha > 1$ konvergiert (vgl. Aufgabe H 19 (c)):

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\,(\ln(k))^{\alpha}}\,.$$

Aufgabe H 23. *Niveaulinien*
Skizzieren Sie für die folgenden Funktionen jeweils die Niveaulinien zu den Niveaus $-1, 0, 1$ und 2 sowie die Funktionen selbst.

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto x^2 + 2y^2 \qquad g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto \cos(x^2 + y^2)$$

Aufgabe H 24.
Gegeben ist die Funktion

$$p\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto x^3y - xy^3 - xy\,.$$

(a) Skizzieren Sie die Mengen:

$$\begin{aligned} G_0 &= \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\big|\, p\big((x,y)\big) = 0\big\} \\ G_+ &= \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\big|\, p\big((x,y)\big) > 0\big\} \\ G_- &= \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\big|\, p\big((x,y)\big) < 0\big\} \end{aligned}$$

(b) Gegeben sind die Vektoren $v_1 = (1,0)$ und $v_2 = (0,1)$. Bestimmen Sie in den Punkten $P_0 = (2,0)$, $P_1 = (1,0)$ und $P_2 = (0,1)$ jeweils die Ableitungen von p in Richtung v_1 und v_2 mit Hilfe eines Differentialquotienten.

Dr. A. App
Dipl.-Math. B. Krinn

9. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik II

Prof. Dr. M. Stroppel

Sommer 2008

Aufgabe P 26. *partielle Ableitungen*

(a) berechnen Sie alle ersten partiellen Ableitungen der Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \sin(x_1 x_3) e^{x_2^2 + x_4^4}.$$

(b) Berechnen Sie alle zweiten partiellen Ableitungen und stellen Sie die Hesse-Matrix $\mathrm{H}f$ auf. Welche Besonderheit hat diese Matrix?

Aufgabe P 27. *Taylorpolynom*

Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto 3x^2y - y^3$.

(a) Bestimmen Sie die Tangentialebene im Punkt $(1, 1, f(1,1))$ and den Graphen von f.

(b) Berechnen Sie das Taylorpolynom $T_2\big(f, (x_0, y_0), (1,1)\big)$ im Punkt (x_0, y_0) der Stufe 2 um den Entwicklungspunkt $(1,1)$.

(c) *Zusatz:* Bestimmen Sie auch das Taylorpolynom $T_3\big(f, (x_0, y_0), (0,0)\big)$ im Punkt (x_0, y_0) der Stufe 3 um den Entwicklungspunkt $(0,0)$.

Aufgabe P 28. *Schmiegquadrik*

Gegeben ist die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto x^2\, y^4 - 16\, x^2 - y^4 + 16\,.$$

(a) Skizzieren Sie jeweils die Mengen der Punkte $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, für die $f(x,y) = 0$, $f(x,y) > 0$ beziehungsweise $f(x,y) < 0$ gilt.

(b) Berechnen Sie $\operatorname{grad} f$ und $\mathrm{H}f$.

(c) Bestimmen Sie den Typ der Schmiegquadrik an den Graph von f im Punkt $(0,0)$.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 25. *Taylorreihe*

(a) Entwickeln Sie die Funktion
$$f_1(x,y) = x^2 \sin\frac{xy}{2}$$
nach der Taylorformel um den Entwicklungspunkt $(1,\pi)$ bis inklusive Termen zweiter Ordnung.

(b) Entwickeln Sie die Funktion
$$f_2(x,y) = y^4 - 3xy^2 + x^3$$
um den Entwicklungspunkt $(1,1)$ in ihre Taylorreihe.

Aufgabe H 26. *Schmiegquadrik*
Gegeben ist die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto \sin(x+y)$.

(a) Berechnen Sie $\operatorname{grad} f$ und $\mathrm{H}f$.

(b) Bestimmen Sie die Schmiegquadrik an den Graph von f in den Punkten $(0,0)$ und $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$.

Aufgabe H 27. *Richtungsableitung*
Es sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion und $v \in \mathbb{R}^n \backslash \{\vec{0}\}$ sowie $\tilde{v} = \frac{v}{\|v\|}$. Zeigen Sie, dass die *Ableitung längs* v von f im Punkt $a \in \mathbb{R}^n$ gerade das $\|v\|$-fache der *Richtungsableitung* von f in Richtung $\tilde{v}$ im Punkt a ist.

Aufgabe H 28. *Scheinklausur*
Bearbeiten Sie die erste Scheinklausur HM-II vom Sommersemester 2006 (ohne Abgabe):
`www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/HM-Stroppel-08/scheinklausuren/060617.pdf`

Dr. A. App
Dipl.-Math. B. Krinn

10. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik II

Prof. Dr. M. Stroppel

Sommer 2008

Aufgabe P 29. *Tetraeder des Grauens*

Wir betrachten das Tetraeder mit den Ecken $A = (0, 0, 0)$, $B = (2, 0, 0)$, $C = (0, 3, 0)$ und $D = (0, 0, 4)$.

(a) Bestimmen Sie eine Funktion f, die zu einem Punkt $P = (x, y, z)$ die Summe der Quadrate der Abstände von den vier Eckpunkten angibt.

(b) Finden Sie den Punkt R_1 im Raum, in dem die Funktion f ihr Minimum annimmt.

(c) Suchen Sie den Punkt R_2, der in der Ebene mit der Gleichung

$$x + y + z = 0$$

liegt und unter allen Punkten dieser Ebene die Funktion f minimiert sowie den Punkt auf der Kugel mit der Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

der den kleinsten Abstand hat.

Aufgabe P 30. *Extrema*

Gegeben ist die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x, y) \mapsto x^2y^2 - x^2 - y^2 + 1\,.$$

(a) Skizzieren Sie jeweils die Mengen der Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, für die $f(x, y) = 0$, $f(x, y) > 0$ beziehungsweise $f(x, y) < 0$ gilt.

(b) Berechnen Sie $\operatorname{grad} f$ und $\mathrm{H}f$.

(c) Bestimmen Sie den Typ der Schmiegquadrik an den Graph von f im Punkt $(0, 0)$.

(d) Geben Sie alle kritischen Punkte von f an (d. h. Punkte mit $\operatorname{grad} f = 0$).

(e) Bestimmen Sie alle Extrema von f.

(f) Schränken Sie f auf den Einheitskreis $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ bzw. die Gerade $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$ ein und untersuchen Sie unter diesen Nebenbedingungen f erneut auf Extrema.

Aufgabe P 31. *Ausgleichsgerade*

Eine Messreihe ergab an den Stellen $x = 0, 1, 2, 3$ die Punkte $P_1 = (0, 5)$, $P_2 = (1, 4)$, $P_3 = (2, 4)$, $P_4 = (3, 1)$. Finden Sie die Gleichung der Geraden g, die die quadratischen Abstände zu den Messpunkten minimiert, also $\sum\limits_i (g(x_i) - y_i)^2$ minimiert (Hierbei sind mit (x_i, y_i) die gemessenen Punkte gemeint).

Zusatz: Bestimmen sie die Gleichung der Parabel, die im oben genannten Sinn optimal liegt.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 29. *Tangente und Tangentialebene*
Die Funktion f sei gegeben durch

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto x_1^3 + x_2^3 + 3\,x_1\,x_2\,.$$

(a) Man bestimme alle (x_1, x_2) mit

$$\operatorname{grad} f\,(x_1, x_2) = 0\,.$$

(b) Wie lautet die Gleichung der Tangentialebene an den Graphen

$$\big\{(x_1, x_2, f(x_1, x_2))\,\big|\ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\big\}$$

von f im Punkt $(1, 1, f(1, 1))$?

(c) In welche Richtung wird ein Ball auf dem Graphen von f rollen, wenn man ihn im Punkt $(1, 1, 5)$ loslässt ?

(d) Man bestimme die Tangente an die Höhenlinie

$$\big\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\,\big|\ f\,(x_1, x_2) = 5\big\}$$

im Punkt $(1, 1)$.

Aufgabe H 30. *Definitheit*
Es sind die folgenden Matrizen gegeben:

$$A := \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad B := \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & -6 \\ -2 & -3 & 4 \\ -6 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad C := \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Untersuchen Sie die zugehörigen quadratischen Formen q_A, q_B und q_C auf Definitheit. Berechnen Sie die Hessematrix der Abbildung $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x^T A x$ sowie die Jacobimatrix der Abbildung $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon x \mapsto Ax$.

Aufgabe H 31. *Jacobi-Matrizen*
Gegeben sind die Funktionen

$$f\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2\colon (x, y, z) \mapsto \begin{pmatrix} \ln(x) + y \\ yz \end{pmatrix}$$

und

$$g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon (s, t) \mapsto \begin{pmatrix} s^2 + t^2 \\ te^s \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Jacobi-Matrizen $\mathrm{J}f(x, y, z)$ und $\mathrm{J}g(s, t)$.

(b) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix der Komposition $\mathrm{J}(g \circ f)(x, y, z)$.

Dr. A. App
Dipl.-Math. B. Krinn

11. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik II

Sommer 2008

Prof. Dr. M. Stroppel

Aufgabe P 32. *Vektorfeld*

Gegeben ist das Vektorfeld:

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2xe^{-y} \\ -x^2e^{-y}+1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix, die Divergenz und die Rotation von f.

(b) Untersuchen Sie, ob f ein Potential besitzt. Bestimmen Sie gegebenenfalls ein Potential.

Aufgabe P 33. *Potential*

Gegeben sei das Vektorfeld

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \dfrac{z\alpha y}{y^2+z^2x^2} \\ \dfrac{-2zx(y^2-z^2x^2)}{y^4-(zx)^{2\alpha}} \\ \dfrac{2xy}{y^2+z^2x^2} \end{pmatrix}.$$

Für welche Werte von α besitzt dieses Feld ein Potential? Berechnen Sie dieses.

Aufgabe P 34. *Identitäten für Differentialoperatoren*

Verifizieren Sie für stetig differenzierbare Funktionen $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ und $g, h\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ folgende Identitäten:

(a) $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = 0$

(b) $\operatorname{grad}(g \bullet h) = (\mathrm{J}g)^\intercal h + (\mathrm{J}h)^\intercal g$

(c) $\operatorname{rot}(fg) = f \operatorname{rot} g - g \times \operatorname{grad} f$

Die obigen Identitäten gelten übrigens auch für ebene Vektorfelder, wenn man für Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^2$ mit $a = (a_1, a_2)$ und $b = (b_1, b_2)$ definiert $a \times b := a_1b_2 - a_2b_1$.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 32. *Eselsbrücken*

Das Spatprodukt dreier Vektoren $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ ist definiert als $a \bullet (b \times c)$. Aus der Beziehung $a \bullet (b \times c) = \det(a, b, c)$ ergibt sich:

$$a \bullet (b \times c) = c \bullet (a \times b) = -b \bullet (a \times c)\,.$$

Es seien die beiden stetig differenzierbaren Vektorfelder $f, g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben.

Unbedachte Verwendung der durch die „Nabla-Schreibweise" gegebenen Eselsbrücken könnte nun zu der irrigen Annahme führen $\operatorname{div}(f \times g)$, $g \bullet \operatorname{rot} f$ und $-f \bullet \operatorname{rot} g$ stimmten überein, da ja scheinbar „$\nabla \bullet (f \times g)$", „$g \bullet (\nabla \times f)$" und „$-f \bullet (\nabla \times g)$" übereinstimmen.

Zeigen Sie, dass gilt:

$$\operatorname{div}(f \times g) = (g \bullet \operatorname{rot} f) - (f \bullet \operatorname{rot} g)\,.$$

Insbesondere bedeutet dies im Allgemeinen:

$$g \bullet \operatorname{rot} f \neq \operatorname{div}(f \times g) \neq -f \bullet \operatorname{rot} g\,.$$

Geben Sie hierzu ein konkretes Gegenbeispiel an und widerlegen Sie somit den aus der „Nabla-Schreibweise" gewonnenen Trugschluss.

Diskutieren Sie die Frage, warum die *„Merkregeln"* mit der „Nabla-Schreibweise" nicht zum Rechnen geeignet sind.

Aufgabe H 33. *Potentiale*

Untersuchen Sie, ob die folgenden Vektorfelder ein Potential besitzen und berechnen Sie dieses (falls es existiert).

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{x} \\ \frac{1}{y} \\ \frac{2}{z} \end{pmatrix} \quad g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{-2x^2y+z}{x^2y} \\ \frac{-z}{xy^2} \\ \frac{1}{xy} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe H 34. *Jacobi-Matrix und Richtungsableitung*

Es sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion und

$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n\colon t \mapsto tv = \begin{pmatrix} tv_1 \\ \vdots \\ tv_n \end{pmatrix}$$

mit $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

(a) Berechnen Sie $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(g(t))\Big|_{t=0}$.

(b) Vergleichen Sie das Ergebnis mit $\partial_v f(0)$, d. h. der Ableitung von f längs v im Punkt 0.

Aufgabe P 35. *Potential, Kurvenintegral*

Gegeben ist das Vektorfeld

$$f\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3\colon\ (x,\ y,\ z) \mapsto \left(\alpha\frac{z}{x},\ \frac{z}{y},\ \ln(xy)\right)^{\mathsf{T}}$$

mit $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Berechnen Sie $\operatorname{rot} f$ und $\operatorname{div} f$.

(b) Bestimmen Sie, für welche Werte von α die Funktion f ein Potential besitzt und berechnen Sie dieses.

(c) Berechnen Sie jeweils für $\alpha = 0$ und $\alpha = 1$ das Kurvenintegral von f längs K, wobei K parametrisiert wird durch

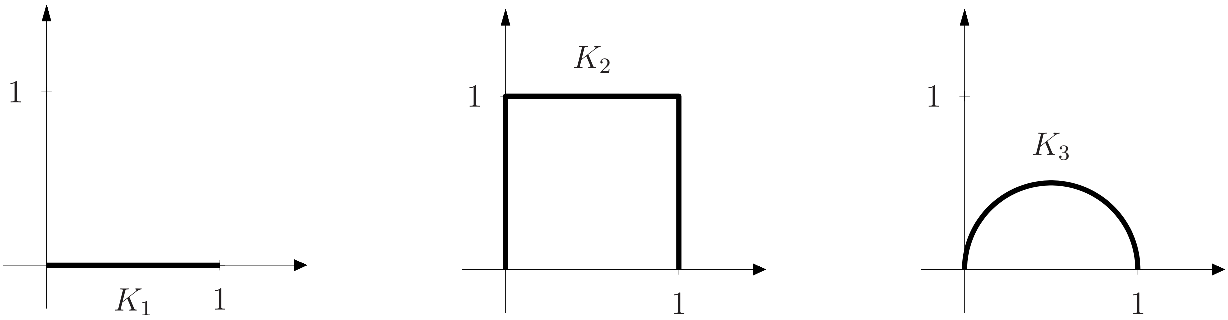
$$C\colon [-1,1] \to K\colon t \mapsto \left(\ e^{(t^2)},\ \ 1,\ \ \sin(\pi t)\ \right)^{\mathsf{T}}.$$

Aufgabe P 36. *Parametrisierung, Kurvenintegrale*

Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_K \left(x^2+y^2\right) \mathrm{d}\, s$$

über die unten skizzierten Wege K_1, K_2 und K_3 vom Punkt $(0,0)$ zum Punkt $(1,0)$.



Aufgabe P 37. *Kurvenintegrale*

Skizzieren Sie die Kurve $C\colon\ [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \begin{pmatrix}\cos^3 t\\ \sin^3 t\end{pmatrix}$. Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int\limits_C f\,\mathrm{d}\,x$ mit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (u,v) \mapsto \begin{pmatrix}v\cosh(uv)\\ u\cosh(uv)\end{pmatrix}$.

Aufgabe P 38. *Kurvenintegrale*

(a) Gegeben sei die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(2,0)\} \to \mathbb{R} \,:\, (x_1,x_2) \mapsto \frac{x_1}{(x_1-2)^2 + x_2^2}.$$

Weiter sei K_1 die obere Hälfte eines Kreises um $(2,0)$ mit Radius 2. Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_{K_1} f(s)\,\mathrm{d}\,s.$$

(b) Gegeben sei das Vektorfeld

$$g\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^2 \,:\, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x_1 \ln(x_2) \\ x_1^2\, x_2^{-1} \end{pmatrix}.$$

Weiter sei K_2 der Graph der Funktion $h\colon [-1,1] \to \mathbb{R}\colon t \mapsto e^t$, der von $(-1, \frac{1}{e})$ bis $(1,e)$ durchlaufen wird. Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_{K_2} g(x)\,\mathrm{d}\,x.$$

Aufgabe P 39. *Kurvenintegrale*
Gegeben ist das folgende Vektorfeld:

$$f_\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \sin(z) \\ \alpha y z \\ x\cos(z) + y^2 \end{pmatrix} \text{ mit } \alpha \in \mathbb{R}$$

(a) Für welches $\alpha \in \mathbb{R}$ hat dieses Vektorfeld ein Potential ?

(b) Bestimmen Sie in diesem Fall ein Potential.

(c) Gegeben ist die Kurve K mit der Parametrisierung $C(\varphi) = (\cos\varphi, \sin\varphi, \varphi)^T$ mit $0 \leqq \varphi \leqq \frac{3\pi}{2}$. Berechnen Sie das Kurvenintegral entlang K für $\alpha = 0$.

(d) Berechnen Sie das Kurvenintegral entlang K für $\alpha = 2$.

Aufgabe P 40. *Zusammenhang zwischen Differentialoperatoren*
Zeigen Sie für zwei zweimal stetig differenzierbare Funktionen $F, G\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ die Beziehung

$$\operatorname{div}\big(\operatorname{grad} F \times \operatorname{grad} G\big) = 0\,.$$

Hinweis: In Aufgabe H32 haben Sie $\operatorname{div}(f \times g)$ bestimmt.

Dr. A. App
Dipl.-Math. B. Krinn

12. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik II

Prof. Dr. M. Stroppel

Sommer 2008

Aufgabe P 35. *Potential, Kurvenintegral*

Gegeben ist das Vektorfeld

$$f\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3\colon\ (x,\ y,\ z) \mapsto \left(\alpha\frac{z}{x},\ \frac{z}{y},\ \ln(xy)\right)^\intercal$$

mit $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Berechnen Sie $\operatorname{rot} f$ und $\operatorname{div} f$.

(b) Bestimmen Sie, für welche Werte von α die Funktion f ein Potential besitzt und berechnen Sie dieses.

(c) Berechnen Sie jeweils für $\alpha = 0$ und $\alpha = 1$ das Kurvenintegral von f längs K, wobei K parametrisiert wird durch

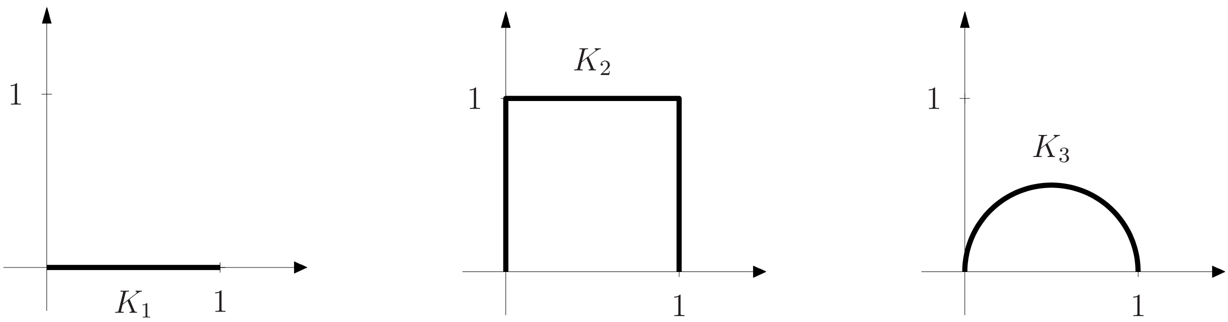
$$C\colon [-1,1] \to K : t \mapsto \left(\ e^{\left(t^2\right)},\ \ 1\,,\ \ \sin(\pi t)\ \right)^\intercal .$$

Aufgabe P 36. *Parametrisierung, Kurvenintegrale*

Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_K \left(x^2 + y^2\right) \mathrm{d}\, s$$

über die unten skizzierten Wege K_1, K_2 und K_3 vom Punkt $(0,0)$ zum Punkt $(1,0)$.



Aufgabe P 37. *Kurvenintegrale*

Skizzieren Sie die Kurve $C\colon\ [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto \begin{pmatrix} \cos^3 t \\ \sin^3 t \end{pmatrix}$. Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int\limits_C f \,\mathrm{d}\, x$ mit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (u,v) \mapsto \begin{pmatrix} v\cosh(uv) \\ u\cosh(uv) \end{pmatrix}$.

Aufgabe P 38. *Kurvenintegrale*

(a) Gegeben sei die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(2,0)\} \to \mathbb{R} \,:\, (x_1, x_2) \mapsto \frac{x_1}{(x_1-2)^2 + x_2^2}.$$

Weiter sei K_1 die obere Hälfte eines Kreises um $(2,0)$ mit Radius 2. Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_{K_1} f(s)\,\mathrm{d}\,s.$$

(b) Gegeben sei das Vektorfeld

$$g\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^2 \,:\, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x_1 \ln(x_2) \\ x_1^2\, x_2^{-1} \end{pmatrix}.$$

Weiter sei K_2 der Graph der Funktion $h\colon [-1,1] \to \mathbb{R}\colon t \mapsto e^t$, der von $(-1, \frac{1}{e})$ bis $(1,e)$ durchlaufen wird. Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_{K_2} g(x)\,\mathrm{d}\,x.$$

Aufgabe P 39. *Kurvenintegrale*
Gegeben ist das folgende Vektorfeld:

$$f_\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \sin(z) \\ \alpha y z \\ x\cos(z) + y^2 \end{pmatrix} \text{ mit } \alpha \in \mathbb{R}$$

(a) Für welches $\alpha \in \mathbb{R}$ hat dieses Vektorfeld ein Potential ?

(b) Bestimmen Sie in diesem Fall ein Potential.

(c) Gegeben ist die Kurve K mit der Parametrisierung $C(\varphi) = (\cos\varphi, \sin\varphi, \varphi)^T$ mit $0 \leqq \varphi \leqq \frac{3\pi}{2}$. Berechnen Sie das Kurvenintegral entlang K für $\alpha = 0$.

(d) Berechnen Sie das Kurvenintegral entlang K für $\alpha = 2$.

Aufgabe P 40. *Zusammenhang zwischen Differentialoperatoren*
Zeigen Sie für zwei zweimal stetig differenzierbare Funktionen $F, G\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ die Beziehung

$$\operatorname{div}\big(\operatorname{grad} F \times \operatorname{grad} G\big) = 0\,.$$

Hinweis: In Aufgabe H32 haben Sie $\operatorname{div}(f \times g)$ bestimmt.