Präsenzübungen

Aufgabe P 1. *Konvergenzkriterien für Reihen*

Untersuchen Sie, ob die folgenden Reihen konvergieren

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1}$

(b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2+k+1}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{4^n}$

(d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{-9k-10}{10k}\right)^k$

Aufgabe P 2. *Stetigkeit*

(a) Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Stetigkeit und skizzieren Sie die zugehörigen Funktionsgraphen.

(i) $f\colon \mathbb{R} \to [0,1]\colon x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } |x| > 1 \\ 1-|x| & \text{für } |x| \leqq 1 \end{cases}$

(ii) $g\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}\colon x \mapsto n$ falls $x \in [(n-1), n)$ für $n \in \mathbb{N}$.

(b) Unter welchen Bedingungen an die Parameter $\alpha, \omega \in \mathbb{R}$ ist die folgende Funktion stetig in dem Punkt $x_0 = 0$?

$$h\colon \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \begin{cases} x^\alpha \cos\frac{1}{x} & \text{für } x > 0 \\ \omega & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

Aufgabe P 3. *Grenzwerte von Reihen*

Berechnen Sie die Grenzwerte der folgenden Reihen.

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k}$

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{4^k}$

(d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-3)^k}{4^k}$

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 1.

Für $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist die Reihe

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1} j! + \pi a^j}{a^j \cdot j!}$$

gegeben.

(a) Untersuchen Sie die Reihe in Abhängigkeit von dem Parameter a auf Konvergenz und Divergenz.

(b) Berechnen Sie im Fall, dass die Reihe konvergiert, auch den Wert der Reihe.

Aufgabe H 2. *Konvergenzkriterien*

Untersuchen Sie, ob die folgenden Reihen konvergieren.

(a) $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \left(\frac{1}{j}\right)^{\frac{1}{3}}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n+1} + \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$

(c) $\displaystyle\sum_{j=3}^{\infty} \frac{j+2}{j^2-4}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$

Aufgabe H 3. *Grenzwerte von Reihen*

Berechnen Sie die Grenzwerte der folgenden Reihen.

(a) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{4}{3^{k-1}}$

(b) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\ln\left(\frac{k+1}{k}\right)}{\ln(k+1)\ln(k)}$

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$

(d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2+(-1)^k}{(k+1)!}$

Hinweis:

- $\displaystyle\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2(k+2)}$
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!} = e^{\alpha}$ für $\alpha \in \mathbb{R}$

Aufgabe P 4. *Fehlerrechnung und Stetigkeit*

Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x^2$ und ein $x_0 \in \mathbb{R}^+$.

(a) Berechnen Sie für $0 < \delta < x_0$ die maximale Abweichung ε des Ergebnisses von f, falls ein beliebiger Wert $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ anstatt x_0 eingesetzt wird. Daher berechnen Sie

$$\varepsilon(\delta) := \sup_{x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]} |f(x) - f(x_0)|.$$

(b) Berechnen Sie den Funktionsgrenzwert $\lim\limits_{\delta \to 0} \varepsilon(\delta)$.

(c) Wiederholen Sie (a) und (b) mit $x_0 = 1$ für die Funktion

$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } x < 1, \\ 1 & \text{für } x \geqq 1. \end{cases}$$

(d) Was hat das Ganze mit Stetigkeit zu tun?

Aufgabe P 5.

Gegeben ist die Menge

$$L := \left\{ k \cdot \frac{\pi}{2} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

und die folgenden Abbildungen:

$$\begin{aligned}
f &\colon \mathbb{R} \smallsetminus L \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{x}{\sin(2x)} \\
g &\colon \mathbb{R} \smallsetminus L \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{\sin(2x)}{|\sin(2x)|} \cos(x) \\
h &\colon \mathbb{R} \smallsetminus L \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \left(\frac{\sin(2x)}{|\sin(2x)|} + 1 \right) \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \\
l &\colon L \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \sin(2x)
\end{aligned}$$

(a) Skizzieren Sie die Graphen der gegebenen Funktionen.

(b) Untersuchen Sie anhand der Skizzen die Funktionen auf Stetigkeit.

(c) Bestimmen Sie für f, g und h an Stellen $x_0 \in L$ die rechtsseitigen und linksseitigen Grenzwerte.

(d) An welchen Stellen $x_0 \in L$ lassen sich f, g und h linksseitig stetig ergänzen, wo rechtsseitig? An welchen Stellen kann man sie stetig ergänzen?

Aufgabe P 6.

(a) Gegeben sei das Polynom $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x^4 + x^3 - 6x^2 - 5x + 5$. Bestimmen Sie die Anzahl der Nullstellen. Begründen Sie Ihr Ergebnis.

(b) Wieviele Lösungen besitzt die Gleichung

$$2^x = 4x\,?$$

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 4.

Es sind $f\colon M \to \mathbb{R}$ und $g\colon M \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Zeigen Sie:

(a) $f + g\colon M \to \mathbb{R}\colon x \mapsto f(x) + g(x)$ ist stetig.

(b) $f \cdot g\colon M \to \mathbb{R}\colon x \mapsto f(x) \cdot g(x)$ ist stetig.

Zusatz: Zusätzlich gelte $g(M) \subseteqq M$. Zeigen Sie mit Hilfe konvergenter Folgen: Die Komposition $f \circ g\colon M \to \mathbb{R}\colon x \mapsto f(g(x))$ ist stetig.

Aufgabe H 5. *Umkehrabbildung*

Gegeben seien die folgenden Funktionen

$$f\colon \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{x}{x^2 - 1}, \qquad g\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{1}{2x} + \sqrt{\frac{1}{4x^2} + 1}.$$

(a) Berechnen Sie $f(g(x))$.

(b) Ist g auf Grund von (a) die Inverse zu f? Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) Untersuchen Sie unter welchen Einschränkungen g die Inverse zu f ist.

Aufgabe H 6.

(a) Laut Vorlesung gilt $\sin(x) \leqq x$ für $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Bestimmen Sie die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, für welche gilt: $|\sin(x)| \leqq |x|$.

(b) Sei $x \in \mathbb{C}$. Verwenden Sie die Identitäten $\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ und $\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ um zu zeigen, dass

$$\sin(x) \pm \sin(y) = 2 \sin\left(\frac{x \pm y}{2}\right) \cos\left(\frac{x \mp y}{2}\right).$$

Obige Identitäten müssen nicht bewiesen werden.

(c) Zeigen mit Hilfe der ε–δ-Bedingung die Stetigkeit von $\sin$, wobei $x \in \mathbb{R}$.

(d) Zeigen Sie die Stetigkeit von $\cos$.
Hinweis: Es gilt $\cos(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$.

(e) Bestimmen Sie die maximalen Definitionsbereiche $D \subseteqq \mathbb{R}$ der Funktionen $\tan$ und $\cot$. Beweisen Sie die Stetigkeit dieser Funktionen in ihren jeweiligen Definitionsbereichen.

Hinweis: Für die Bearbeitung einer Teilaufgabe ist es oftmals hilfreich, die Ergebnisse *anderer* Teilaufgaben zu berücksichtigen.

Aufgabe P 7.

(a) Gegeben ist die Potenzreihe

$$L(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \,.$$

Bestimmen Sie den Konvergenzradius dieser Potenzreihe.

(b) Bestimmen Sie die Werte der folgenden Reihen:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n2^n} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{i^k}{2^{k+1}k!}\pi^k \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} \frac{(\sqrt{3}-2+i)^n}{2^n}$$

Hinweis: Es gilt $L(x) = \ln(1+x)$.

Aufgabe P 8.

Bestimmen Sie die Konvergenzradien und Entwicklungspunkte der folgenden Potenzreihen. Geben Sie an, für welche $z \in \mathbb{R}$ die Reihen konvergieren:

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{2n}$ **(b)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(n^4 - 4n^3\right)(z-3i)^n$

Aufgabe P 9.

(a) Zeigen Sie

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

(b) Beweisen mit Hilfe des Differenzenquotients:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} e^x = e^x \,.$$

Aufgabe P 10.

Es sind die folgenden Funktionen gegeben:

$$f\colon \mathbb{R} \smallsetminus \{-\tfrac{1}{3}\} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{3x+1}{|3x+1|}(6x^2 - 23x + 20)$$
$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto 18x^3 - 9x^2 - 5x + 2$$

Bestimmen Sie mit Hilfe der Intervallhalbierungsmethode, falls möglich, jeweils eine Nullstelle im Intervall $[0,2]$ und im Intervall $[-1,3]$. Geben Sie die Nullstellen x_n bis auf eine Genauigkeit von $0{,}3$ an, das heißt: Es gibt ein $x \in U_{0,3}(x_n)$ so, dass $f(x) = 0$ respektive $g(x) = 0$.
Zusatz: Bestimmen Sie *alle* Nullstellen von f und g bis auf eine Genauigkeit von $0{,}3$. Skizzieren Sie die Graphen der beiden Funktionen und bestimmen Sie deren Wertebereiche. Eine Kurvendiskussion, bei der insbesondere Hoch- und Tiefpunkte bestimmt werden, kann dabei helfen.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 7. *Potenzreihen*

Bestimmen Sie die Konvergenzradien und Entwicklungspunkte der folgenden Potenzreihen. Geben Sie an, für welche $z \in \mathbb{R}$ die Reihen konvergieren:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n! \cdot z^n$

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{n!}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 5^{\frac{n}{2}} z^n$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n!(z+2-\sqrt{2}i)^n$

(f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}(z^2-2z+1)\right)^n$

Aufgabe H 8.

Formen Sie die folgenden Reihen so um, dass die Terme aus $\sin$, $\cos$ und $\exp$ Funktionen bestehen. Benutzen Sie die Rechenregeln für Potenzreihen aus 1.14.11.

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ mit $a_n := \begin{cases} \dfrac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{n!} & \text{für } n \text{ gerade} \\ \dfrac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n!} & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{n+k+1}}{(n-k)!\,(2k+1)!} \right)$

(c) $\displaystyle 2\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{x^{4k-2}}{(4k-2)!} + \frac{x^{4k-1}}{(4k-1)!} \right)$

Aufgabe H 9.

Gegeben sind folgende Identitäten:

- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\log_a x}{x^k} = 0,$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1,$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0+0} x^k \log_a x = 0$ für $a > 0$ und $k > 0$ sowie
- $e^{\ln x} = x$ für $x > 0$.

Diese müssen nicht gezeigt werden. Bestimmen Sie hiermit:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^{1/x}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0+0} x^{\sin(x)}$

Präsenzübungen

Aufgabe P 11.

(a) Bilden Sie von den im Folgenden gegebenen Funktionen jeweils die erste und zweite Ableitung:

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto 2^x - 4x \qquad\qquad g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto e^{\cos(x)+\sin(x)}$$

(b) Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{\sin x} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\sin^2 x} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{\ln(1+x)} \qquad \lim_{x\to\infty} x^3 e^{-x^2}$$

Aufgabe P 12.

Gegeben ist die Funktion

$$\tanh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$$

(a) Zeigen Sie: $(\cosh(x))^2 - (\sinh(x))^2 = 1$

(b) Bestimmen Sie die Ableitung von $\tanh$. Verwenden Sie dazu die Ableitungen von $\sinh$ und $\cosh$ sowie die bekannten Differentiationsregeln.

(c) Untersuchen Sie $\tanh$ auf Nullstellen und Extremalstellen. Bestimmen Sie $\lim\limits_{x\to+\infty} \tanh$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} \tanh$. Nutzen Sie die so gewonnenen Erkenntnisse, um den Graphen von $\tanh$ zu skizzieren und den Wertebereich zu bestimmen.

(d) Berechnen Sie die Ableitung von artanh; diese Funktion ist definiert als die Umkehrfunktion von $\tanh$. Skizzieren Sie den Graphen von artanh und geben Sie den Definitionsbereich und Wertebereich an.

Aufgabe P 13.

Seien f und g jeweils n-mal differenzierbar. Zeigen Sie durch vollständige Induktion folgende Formel für die n-te Ableitung von fg:

$$(f(x)g(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x).$$

Aufgabe P 14.

Untersuchen Sie, an welchen Stellen die folgenden Funktionen differenzierbar sind:

(a) $g_\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } x \leqq 0 \\ x^\alpha & \text{für } x > 0 \end{cases}$ wobei $\alpha \in \mathbb{R}$.

(b) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } x \in \mathbb{Q} \\ x^2 & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 10.

(a) Bestimmen Sie jeweils den maximalen Definitionsbereich $D \subsetneqq \mathbb{R}$ und berechnen Sie die ersten beiden Ableitungen der durch die folgenden Ausdrücke definierten Funktionen:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} \qquad g(x) = \ln\left(1-x^4\right)$$

$$h(x) = \arccos\left(\frac{1}{x}\right) \qquad k(x) = x\left(\sin(\ln x) - \cos(\ln x)\right)$$

(b) Berechnen die folgende Grenzwerte:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\tan x}{1-\cos x} \qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\tan(3x)}{\tan(5x)}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\cosh x}{e^x} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\ln^2(1+3x) - 2\sin^2 x}{1-e^{-x^2}}$$

Hinweis: $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} \arccos x = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Aufgabe H 11.

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke, indem sie jeweils explizit eine Formel für die n-te Ableitung bestimmen. Beweisen Sie Ihre Resultate mit vollständiger Induktion sowie den bekannten Differentiationsregeln.

(a) $\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\right)^n \ln(x)$, wobei $x > 0$

(b) $\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\right)^n a^x$, wobei $a, x > 0$

(c) $\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\right)^n \frac{1}{a+bx}$, wobei $x \neq -\frac{a}{b}$

Hinweis: Die Identität $\exp(\ln x) = x$ für $x > 0$ könnte sich als nützlich erweisen.

Aufgabe H 12.

In der folgenden Aufgabe beschränken wir uns auf die reellen Zahlen.

(a) Geben Sie an, wo $\cosh$ streng monoton wächst und wo $\cosh$ streng monoton fällt. Bestimmen Sie Maxima und Minima von $\cosh$. Untersuchen Sie $\lim\limits_{x\to+\infty} \cosh(x)$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} \cosh(x)$. Skizzieren Sie den Graphen von $\cosh$.

(b) Finden Sie (möglichst sinnvolle) Gebiete D, wo es möglich ist, eine Umkehrfunktion arcosh_D zum darauf eingeschränkten $\cosh|_D$ anzugeben. Geben Sie jeweils Definitions- und Wertebereiche dieser Umkehrfunktionen an und skizzieren Sie die Graphen der Umkehrfunktionen. Bestimmen Sie auch jeweils die Ableitungen $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} \operatorname{arcosh}_D(x)$.

(c) Sei nun $\operatorname{arcosh} = \left(\cosh|_{\mathbb{R}_0^+}\right)^{-1}$. Beweisen Sie die folgenden Identitäten:

$$\operatorname{arsinh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

$$\operatorname{arcosh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \quad \text{für } x \geqq 1$$

Hinweis: Satz 2.4.6 aus der Vorlesung kann dabei helfen.

Präsenzübungen

Aufgabe P 15. *Kurvendiskussion*

Die Funktion f sei gegeben durch die folgende Zuordnungsvorschrift:

$$f(x) = x^2 - 2|x| + 1\,.$$

(a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich von f in $\mathbb{R}$ und untersuchen Sie die so gewonnene Funktion auf Stetigkeit.

(b) Untersuchen Sie den Graphen von f auf Symmetrie.

(c) Bestimmen Sie die Nullstellen von f.

(d) Bestimmen Sie die Extremalstellen von f, sowie jeweils deren Typ und die zugehörigen Funktionswerte.

(e) Bestimmen Sie die Wendepunkte von f.

(f) Skizzieren Sie den Graphen von f.

Aufgabe P 16. *„Approximation des Sinus"*

(a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom $T_3(\sin, x, 0)$ und das zugehörige Restglied nach Lagrange $R_3(\sin, x, 0)$.

(b) Skizzieren Sie die Graphen der Taylorpolynome $T_0(\sin, x, 0)$, $T_1(\sin, x, 0)$, $T_2(\sin, x, 0)$ und $T_3(\sin, x, 0)$. Vergleichen Sie diese mit dem Graphen von $\sin$. Was fällt Ihnen auf?

(c) In Anwendungen wird oft die folgende Approximation verwendet: „Für kleine Winkel ist $\sin(x) \approx x$". Wie ist dies zu rechtfertigen? Schätzen Sie den Fehler dieser Approximation für $x \in \{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\}$ ab. Diskutieren Sie die Frage, was ist „ein kleiner Winkel".

Aufgabe P 17.

Es sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie alle differenzierbaren Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die die Differentialgleichung

$$f' = \alpha f\,,$$

erfüllen. Das heißt, es soll gelten

$$f'(x) = \alpha f(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Sei nun f eine solche Funktion.

(a) Bestimmen Sie für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ die n-te Ableitung $f^{(n)}$ und schließen Sie dabei induktiv, dass f beliebig oft stetig differenzierbar ist.

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe von (a) die Taylorreihe $T(f, x, 0)$.

(c) Machen Sie eine Probe, indem Sie sich vergewissern, dass $T(f, x, 0)$ die Differentialgleichung erfüllt, das heißt $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}T(f, x, 0) = \alpha \cdot T(f, x, 0)$.

Zusatz:

(d) Zeigen Sie, für beliebige $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Taylorreihe $T(f, x, 0)$ gegen $f(x)$ (und damit ist f explizit bekannt).

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 13. *Kurvendiskussion*

Die Funktion f sei gegeben durch die Zuordnungsvorschrift $f(x) = \ln(3x^2 + 2x + 1)$.

(a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich von f in $\mathbb{R}$ und untersuchen Sie die Funktion auf Stetigkeit.

(b) Untersuchen Sie den Graphen von f auf Symmetrie.

(c) Bestimmen Sie die Nullstellen von f.

(d) Bestimmen Sie die Extremalstellen von f, sowie jeweils deren Typ und die zugehörigen Funktionswerte.

(e) Bestimmen Sie die Wendepunkte von f.

(f) Skizzieren Sie den Graphen von f.

Aufgabe H 14.

Bestimmen Sie mit Hilfe des Potenzreihenansatzes $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$f'' = f$$

mit den Anfangswerten $f(0) = 0$ und $f'(0) = 1$. Benutzen Sie dazu das folgende Vorgehen:

(a) Bestimmen Sie die Potenzreihe von f' und f'' durch „gliedweises differenzieren“ (vgl. Bemerkung 2.2.6 und Satz 3.8.4).

(b) Bestimmen Sie die Koeffizienten a_0 und a_1 indem Sie die Anfangswerte in die Potenzreihe einsetzen.

(c) Setzen Sie die Potenzreihe in die Differentialgleichung ein. Mit Hilfe des Eindeutigkeitssatzes für Potenzreihen 2.6.9 erhalten Sie aus der so gewonnenen Gleichung Bedingungen an die Koeffizienten a_n der Potenzreihe. Berechnen Sie a_n für kleine $n \in \mathbb{N}$ und versuchen Sie damit die Potenzreihe von f und somit f zu identifizieren.

Hinweis: Sie können versuchen, eine allgemeine Formel für a_n zu raten und diese dann mit vollständiger Induktion zu beweisen. Vergleichen Sie diese mit den Koeffizienten der Exponentialreihe. Wie sieht andererseits die Potenzreihe von $\sinh$ aus?

Aufgabe H 15. *„Approximation der Wurzel“*

Es sei $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \sqrt{x}$.

(a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom $T_2(f, x, 1)$.

(b) Skizzieren Sie die Graphen von f sowie der Taylorpolynome $T_0(f, x, 1)$, $T_1(f, x, 1)$ und $T_2(f, x, 1)$.

(c) Geben Sie ein geeignetes Taylorpolynom an, um die Approximation „$\sqrt{x} \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x$“, wenn „$x \approx 1$“, das heißt für $x \in [1 - \delta, 1 + \delta]$ und $0 < \delta < 1$, zu rechtfertigen. Schätzen Sie für $\delta = \frac{1}{8}$ mit Hilfe eines geeigneten Restgliedes den Betrag des Fehler dieser Approximation ab.

Hinweis: Es hilft, den Fehler für $x \in [1, 1+\delta]$ und $x \in [1-\delta, 1]$ getrennt abzuschätzen.

Aufgabe P 18.
Bestimmen Sie:

(a) $\displaystyle\int (2x+1)^2 \,\mathrm{d}\,x$ **(b)** $\displaystyle\int x^2\cos(x)\,\mathrm{d}\,x$

(c) $\displaystyle\int (\cos(x))^2 \,\mathrm{d}\,x$ **(d)** $\displaystyle\int \ln(x)\,\mathrm{d}\,x$

Machen Sie in allen Fällen eine Probe.

Aufgabe P 19.
Berechnen Sie die Werte der folgenden Integrale:

(a) $\displaystyle\int_0^1 x^2e^x\,\mathrm{d}\,x$ **(b)** $\displaystyle\int_4^5 \frac{1}{x^2-5x+6}\,\mathrm{d}\,x$

(c) $\displaystyle\int_0^\pi (\sin(x))^2\,\mathrm{d}\,x$ **(d)** $\displaystyle\int_0^\pi \sin(x)\cdot\cos(x)\,\mathrm{d}\,x$

Machen Sie in allen Fällen eine Probe.

Aufgabe P 20.

(a) Zeigen Sie, dass für $x \in \mathbb{R} \smallsetminus \{(2k+1)\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ bei Verwendung der „*Universalsubstitution*“ $u\colon x \mapsto \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ gilt:

$$u'(x) = \frac{1+\big(u(x)\big)^2}{2}, \qquad \sin(x) = \frac{2u(x)}{1+\big(u(x)\big)^2}, \qquad \cos(x) = \frac{1-\big(u(x)\big)^2}{1+\big(u(x)\big)^2}.$$

Hinweis: $\sin(x) = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x}{2}\right)$ und $\cos(x) = \left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 - \left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2$.

(b) Führen Sie damit folgende Integrale auf rationale Integranden zurück:

$$\int \frac{1}{\sin(x)}\,\mathrm{d}\,x, \qquad \int \frac{1}{1-\cos(x)}\,\mathrm{d}\,x, \qquad \int \frac{1+\sin(x)}{\sin(x)(1+\cos(x))}\,\mathrm{d}\,x.$$

Aufgabe P 21.
Es sei $c \in \mathbb{R}$. Gegeben sind die Funktionen

$$F\colon \mathbb{R}\smallsetminus\{0\} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \ln(|x|)$$

und

$$G\colon \mathbb{R}\smallsetminus\{0\} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \begin{cases} \ln(-x)+c & \text{für } x<0 \\ \ln(x) & \text{für } x>0 \end{cases}.$$

(a) Skizzieren Sie die Graphen von F und G.

(b) Zeigen Sie:

$$F'(x) = G'(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}\smallsetminus\{0\}$.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 16.

Bestimmen Sie die Mengen von Stammfunktionen:

(a) $\int (\sin(x))^2 + (\tan(x))^2 + (\cos(x))^2 \,\mathrm{d}\,x$

(b) $\int (\sin(x) - \cos(x))^2 \,\mathrm{d}\,x$

(c) $\int \frac{18x^5 + 9}{2x^6 + 6x + 19} \,\mathrm{d}\,x$

(d) $\int \sqrt{1 - \sin(x)} \,\mathrm{d}\,x$

(e) Machen Sie in allen Fällen eine Probe durch Ableiten.

Aufgabe H 17.

In Abhängigkeit von $a, b \in \mathbb{R}^+$ ist

$$f_{a,b} \colon (0, \tfrac{\pi}{2}) \to \mathbb{R} \colon x \mapsto \frac{1}{a + b\tan(x)}$$

gegeben. Bestimmen Sie in Abhängigkeit von a, b die Menge der Stammfunktionen

$$\int f_{a,b} \,\mathrm{d}\,x \,.$$

Hinweis: Sie können hierfür die Substitution $t = \tan(x)$ verwenden und anschließend eine Partialbruchzerlegung durchführen.

Aufgabe H 18.

(a) Zeigen Sie per vollständiger Induktion, dass gilt:

$$\int x^n e^x \,\mathrm{d}\,x = \left[\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \frac{n!}{k!} x^k e^x\right]$$

(b) Zeigen Sie, dass für beliebige $m, n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\int_0^{2\pi} \sin(mx) \cdot \cos(nx) \,\mathrm{d}\,x = 0 \,.$$

Präsenzübungen

Aufgabe P 22.

Finden Sie eine Partialbruchzerlegung für die folgenden Brüche:

(a) $\dfrac{x+1}{x^2-4}$ **(b)** $\dfrac{x+1}{x^2+4}$ **(c)** $\dfrac{1}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}$

Aufgabe P 23.

Skizzieren Sie die Graphen der folgenden Funktionen und berechnen Sie, falls möglich, jeweils die Fläche zwischen dem Graphen und der x-Achse.

(a) $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto xe^{-x^2}$

(b) $g\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x^3e^{-x^2}$

(c) $h\colon [-2,2] \setminus \{-1,+1\} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \dfrac{1}{|1-x^2|}$

Aufgabe P 24.

(a) Sei $a \in \mathbb{R}$ und $f\colon [-a,a] \to \mathbb{R}$ eine gerade Funktion, das heißt für alle $x \in [-a,a]$ gilt $f(-x) = f(x)$. Zeigen Sie:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}\,x = 2\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}\,x\,.$$

(b) Sei $b \in \mathbb{R}$ und $g\colon [-b,b] \to \mathbb{R}$ eine ungerade Funktion, das heißt für alle $x \in [-b,b]$ gilt $g(-x) = -g(x)$. Zeigen Sie:

$$\int_{-b}^{b} g(x)\,\mathrm{d}\,x = 0\,.$$

Aufgabe P 25.

(a) Geben Sie den Definitionsbereich von $\tan$ an.

(b) Skizzieren Sie den Graphen von $\tan$.

(c) Untersuchen Sie, ob die folgenden uneigentlichen Integrale existieren:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \tan(x)\,\mathrm{d}\,x \qquad \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \tan(x)\,\mathrm{d}\,x \qquad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \tan(x)\,\mathrm{d}\,x$$

(d) Bestimmen Sie

$$\lim_{\beta\to\frac{\pi}{2}} \int_{-\beta}^{\beta} \tan(x)\,\mathrm{d}\,x\,.$$

(e) Diskutieren Sie Ihre Ergebnisse (auch im Hinblick auf P 24(b)).

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 19.

Bestimmen Sie, falls möglich, die folgenden uneigentlichen Integrale:

(a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left|\frac{e^{ix}}{1+x^2}\right| \mathrm{d}\,x$ **(b)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x} \mathrm{d}\,x$

(c) $\displaystyle\int_0^3 \frac{x+1}{x^2-1} \mathrm{d}\,x$ **(d)** $\displaystyle\int_{-2}^0 \frac{1}{\sqrt{|x+1|}} \mathrm{d}\,x$

Aufgabe H 20.

Es sei

$$\Gamma(x) := \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t} \mathrm{d}\,t\,.$$

Verwenden Sie im Folgenden ohne Beweis, dass

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}\,x = \sqrt{2\pi}$$

gilt. Bestimmen Sie (für $a \in \mathbb{R}$ und $\sigma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$):

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right) \mathrm{d}\,x$ **(b)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}\,x$

(c) $\Gamma(1)$ **(d)** $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$

Beweisen Sie außerdem

(e) $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

Hinweis: Versuchen Sie, die Integrale durch geschicktes Umformen auf eine Form mit bekannten oder berechenbaren Termen zu bringen. Insbesondere wird sich die oben angegebene Identität als nützlich erweisen.

Aufgabe H 21.

Berechnen Sie die folgenden Integrale. Nutzen Sie dabei die Symmetrien der Funktionen.

(a) $\displaystyle\int_{-1}^1 x^2 e^{x^2} \sin(x^3) \mathrm{d}\,x$

(b) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{|x|}{1+|x|} \mathrm{d}\,x$

(c) $\displaystyle\int_0^{\pi} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \cos(2x)\sin(3x) \mathrm{d}\,x$

P. Engel, T. Pfrommer
S. Poppitz, Dr. I. Rybak

8. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 2

Sommersemester 2009

Prof. Dr. M. Stroppel
Prof. Dr. N. Knarr

Aufgabe P 26. *Funktionen in mehreren Veränderlichen*

Es sind $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto x^2 - y^2$ und $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto \sin(x^2+y^2)$ gegeben.

(a) Skizzieren Sie jeweils die Niveaulinien der Funktionen zu den Niveaus $-1, 0, 1$ und 2. Skizzieren Sie mit Hilfe der Niveaulinien und achsenparalleler Schnitte die Graphen.

(b) Weiter sind die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben mit $a_n := \left(\frac{1}{n}\sin(n), \frac{1}{n}\cos(n)\right)$ und $b_n := \left(\frac{2}{n}, \frac{3}{n}\right)$. Bestimmen Sie

$$\lim_{n\to+\infty} f(a_n), \qquad \lim_{n\to+\infty} f(b_n), \qquad \lim_{n\to+\infty} g(a_n), \qquad \lim_{n\to+\infty} g(b_n).$$

Aufgabe P 27. *Integration und Differentiation von Potenzreihen*

(a) Beweisen Sie mit Hilfe von Satz 3.8.4 aus der Vorlesung, das für $x \in (-1,1)$ gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = \ln(1+x).$$

(b) Bestimmen Sie die Konvergenzradien der Potenzreihen

$$P(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} \quad \text{und} \quad Q(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2-n} x^n.$$

Finden Sie jeweils eine „geschlossene Form“ der Potenzreihe innerhalb ihres Konvergenzkreises, das heißt, stellen Sie dort P beziehungsweise Q dar als Produkt, Summe oder Komposition „bekannter“ Funktionen – als bekannt sind dabei die Funktionen aus 2.2.5 beziehungsweise 3.1.7 des Skripts anzunehmen.

Aufgabe P 28. *Integral-Kriterium*

(a) Existiert das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2}\,\mathrm{d}\,x$?

(b) Zeigen Sie $f\colon [1,+\infty) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x(\ln x)^2$ ist streng monoton wachsend.

(c) Konvergiert die Reihe $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$?

Aufgabe P 29. *Grenzwertkriterium*

Es sei $\alpha \in (1,+\infty)$ ein fest gewählter Parameter.

(a) Bestimmen Sie die Grenzwerte $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\sin\left(\tfrac{1}{x}\right)$ und $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\tfrac{1}{x}\right)$.

(b) Berechnen Sie das uneigentliche Integral

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x.$$

(c) Was lässt sich daraus für die Konvergenz der folgenden uneigentlichen Integrale herleiten?

$$\int_1^{+\infty} \left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)^\alpha \mathrm{d}x \qquad \int_1^{+\infty} \left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)^\alpha \mathrm{d}x$$

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 22. *Konvergenzverhalten uneigentlicher Integrale*

Untersuchen Sie folgende uneigentliche Integrale auf Konvergenz (ohne sie zu berechnen):

(a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{x^4+2x^2+1}\,\mathrm{d}\,x$

(b) $\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}\,x$

(c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x-1}{x^3+1}\,\mathrm{d}\,x$

(d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^4+1}}\,\mathrm{d}\,x$

Aufgabe H 23. *Geschlossene Form*

Bestimmen Sie für die folgenden Reihen den Konvergenzradius und eine geschlossene Form im Inneren des Konvergenzkreises. Der Begriff „geschlossene Form“ ist zu verstehen, wie in Aufgabe P 27(b).

(a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n(n-1)}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n^2-2}{n(n-1)(n-2)}x^n$

Aufgabe H 24. *Niveaulinien & achsenparallele Schnitte*

Skizzieren Sie die Niveaulinen für die Werte c der folgenden Funktionen. Verwenden Sie zur Unterscheidung verschiedene Farben. Skizzieren Sie weiter achsenparallele Schnitte für $x_0 = a$ und $y_0 = b$.

(a) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto x^2+y^2-2\,|y|$
mit $c \in \{-1, -\frac{1}{2}, 0, 1\}$ und $a \in \{1,2\}$, $b \in \{1,2\}$.

(b) $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto x\sin(y)$
mit $c \in \{0,1\}$ und $a \in \{0,1\}$, $b \in \{\frac{\pi}{2}, \pi\}$.

Präsenzübungen

Aufgabe P 30. *Partielle Ableitungen*

Berechnen Sie alle ersten partiellen Ableitungen der folgenden Funktionen:

(a) $f\colon \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto \dfrac{xy}{x^2+y^2}$

(b) $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon (x,y,z) \mapsto \exp\left(\sin(x)\cos\left(\dfrac{z}{1+y^2}\right)\right)$

Aufgabe P 31. *Konvergenz mehrdimensionaler Folgen*

Untersuchen Sie die Folgen auf Konvergenz:

(a) $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

(b) $\left(\frac{1}{n}, n\right)_{n\in\mathbb{N}}$

(c) $\left(\frac{1}{n}\sin(n), \frac{1}{n}\cos(n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$

(d) $\left(\sin(n\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}), \frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Aufgabe P 32. *Stetigkeit*

Untersuchen Sie die folgenden beiden Funktionen $f_1, f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f_1 : (x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

und

$$f_2 : (x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

auf Stetigkeit.

Aufgabe P 33.

Gegeben ist folgende Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f : (x,y) \mapsto \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Berechnen Sie $f_x(x,y)$ und leiten Sie $f_x(0,y)$ nach y ab. Bestimmen Sie nun $f_y(x,y)$ und leiten $f_y(x,0)$ nach x ab. Was stellen Sie fest?

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 25. *Partielles Ableiten*

Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich der durch die folgenden Zuordnungsvorschriften zu definierenden Funktionen.

$$\begin{aligned} f\colon (x,y,z) &\mapsto e^{x+y}xz \\ g\colon (x,y,z) &\mapsto x^3y^2z \\ h\colon (x,y) &\mapsto \arctan\left(\frac{x}{y}\right). \end{aligned}$$

Berechnen Sie jeweils alle partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung.

Aufgabe H 26. *Ableitung längs eines Vektors*

Gegeben sind die Punkte $a = \Big(0,-1,1\Big)$, $b = \Big(-\frac{\pi}{2},\pi,3\Big)$, $c = \Big(\sqrt{\pi},\sqrt{\pi},\sqrt{\pi}\Big)$, die Vektoren $v = \Big(1,2,-3\Big)$ und $w = \Big(7,5,3\Big)$, sowie die Funktionen

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon (x,y,z) &\mapsto x^2+y^2-z^2\,, \\ g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon (x,y,z) &\mapsto \sin(x)\cos(y)z^2\,, \\ h\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon (x,y,z) &\mapsto \sin(x+y^2+z^3)\,. \end{aligned}$$

Berechnen Sie $\partial_v f(a)$, $\partial_w f(a)$, $\partial_v g(b)$,$\partial_w g(b)$, $\partial_v h(c)$ und $\partial_w h(c)$.

Aufgabe H 27. *Stetigkeit*

Es soll gezeigt werden, dass

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{|x|+|y|}\right) & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

stetig ist. Verwenden Sie dazu das folgende Vorgehen:

(a) Begründen Sie mit Hilfe von Satz 4.2.8, dass f in Stellen $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ stetig ist.

(b) Schließen Sie mit Hilfe von Definition 4.2.6 (ε–δ-Kriterium) auf die Stetigkeit von f in $(0,0)$.

Präsenzübungen

Aufgabe P 34. *Taylorpolynom*
Es sei
$$g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto 3x^2y - y^3 .$$
Bestimmen Sie das Taylorpolynom $T_2\big(g,(x_0,y_0),(1,1)\big)$ im Punkt (x_0,y_0) der Stufe 2 um den Entwicklungspunkt $(1,1)$.
Zusatz: Bestimmen Sie das Taylorpolynom $T_3\big(g,(x_0,y_0),(0,0)\big)$ im Punkt (x_0,y_0) der Stufe 3 um den Entwicklungspunkt $(0,0)$.
Bestimmen Sie das Taylorpolynom $T_3\big(g,(x_0,y_0),(1,1)\big)$ im Punkt (x_0,y_0) der Stufe 3 um den Entwicklungspunkt $(1,1)$.

Aufgabe P 35. *Extrema*
Gegeben ist die Funktion
$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto x^2y^2 - x^2 - y^2 + 1 .$$

(a) Skizzieren Sie jeweils die Mengen der Punkte $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, für die $f(x,y) = 0$, $f(x,y) > 0$ beziehungsweise $f(x,y) < 0$ gilt.

(b) Berechnen Sie $\operatorname{grad} f$ und $\mathrm{H}f$.

(c) Bestimmen Sie den Typ der Schmiegquadrik an den Graph von f im Punkt $(0,0)$.

(d) Geben Sie alle kritischen Punkte von f an (d.h. Punkte mit $\operatorname{grad} f = 0$).

(e) Bestimmen Sie alle Extrema von f.

Zusatz:

(f) Schränken Sie f auf den Einheitskreis $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = 1\}$ bzw. die Gerade $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x = y\}$ ein und untersuchen Sie unter diesen Nebenbedingungen f erneut auf Extrema.

Aufgabe P 36. *Mengen in $\mathbb{R}^2$ – Inneres, Abschluss, Rand, Beschränktheit, Konvexität*
Gegeben sind die Mengen
$$\begin{aligned}
M_1 &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x > 0,\ x \leqq 1 - y^2\right\} ,\\
M_2 &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, |x| < \pi,\ |y| \leqq |\sin(x)|\right\} ,\\
M_3 &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x \in \mathbb{Q}\right\} ,\\
M_4 &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \exists\, \alpha,\beta \in \mathbb{R} : (x,y) = \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \alpha^k, \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\beta^{2k}\right)\right\} .
\end{aligned}$$

(a) Skizzieren Sie M_1, M_2, M_3, M_4.

(b) Bestimmen Sie für $i \in \{1,2,3,4\}$ jeweils das Innere M_i°, den Rand ∂M_i und den Abschluss $\overline{M_i}$.

(c) Welche der Mengen M_i ist beschränkt, welche konvex?

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 28. *partielle Ableitungen und Taylorpolynome*

Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto x^2 + y^2 - 2|x|$.

(a) Untersuchen Sie an welchen Stellen die Funktion f differenzierbar bzw. zweimal differenzierbar ist. Berechnen Sie dort alle ersten und zweiten partiellen Ableitungen.

(b) Berechnen Sie, falls möglich, die Taylorpolynome zweiter Stufe in den Punkten $(1,0)$, $(0,0)$ und $(-1,0)$.

Aufgabe H 29. *Extrema*

Gegeben ist die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto e^{2x+3y}(8x^2 - 6xy + 3y^2)\,.$$

(a) Geben Sie den Wertebereich von f an.

(b) Berechnen Sie $\operatorname{grad} f$ und $\mathrm{H}f$.

(c) Geben Sie alle kritischen Punkte von f an (d.h. Punkte mit $\operatorname{grad} f = 0$).

(d) Bestimmen Sie den Typ der Schmiegquadrik an den Graph von f in den kritischen Punkten.

(e) Bestimmen Sie alle Extrema von f.

Aufgabe H 30. *Extrema auf eingeschränktem Gebiet*

Untersuchen Sie die Funktion

$$u\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto \sin(x) + \sin(y) - \sin(x+y)$$

im Inneren des von der x-Achse, der y-Achse und der Geraden $x + y = 2\pi$ begrenzten Gebietes auf Extremwerte. Gehen Sie dabei ausführlich auf die Anzahl der kritischen Punkte innerhalb dieses Gebiets ein.

Zusatz zum Knobeln:

Untersuchen Sie die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon (x,y,z) \mapsto \sin(x) + \sin(y) + \sin(z) - \sin(x+y+z)$$

im Inneren jenes Gebietes auf Extremwerte, welches von der x–y-Ebene, der y–z-Ebene, der x–z-Ebene und der durch die Gleichung $x + y + z = 2\pi$ gegebenen Ebene begrenzt wird. Gehen Sie dabei ausführlich auf die Anzahl der kritischen Punkte innerhalb dieses Gebiets ein.

Präsenzübungen

Aufgabe P 37. *Extremalproblem mit Nebenbedingung*
Bestimmen Sie und klassifizieren Sie die lokalen Extrema von

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y)^\intercal \mapsto x^2 - 2(y+1)^2$$

mit Hilfe der Lagrange-Multiplikatoren-Methode auf der Menge

$$M = \left\{(x,y)^\intercal \in \mathbb{R}^2 \mid\ x^2 + 4y^2 = 1\right\}.$$

Aufgabe P 38. *Extremwerte*
Sei $D = \left\{(x,y)^\intercal \in \mathbb{R}^2 \mid\ x^2 + y^2 \leqq 1 \text{ und } y \geqq 0\right\}$ und

$$f\colon D \to \mathbb{R}\colon (x,y)^\intercal \mapsto (2-x^2)(1+y)$$

gegeben.

(a) Skizzieren Sie den Definitionsbereich D von f.

(b) Überlegen Sie sich, dass jede stetige Funktion $D \to \mathbb{R}$ Extrema annimmt.

(c) Berechnen Sie das globale Minimum und das globale Maximum von f in D.

Aufgabe P 39. *Ableiten in Polarkoordinaten*
Es sei eine Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \smallsetminus \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \to \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

gegeben. Weiter wird eine Funktion

$$\hat{f}\colon \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto f\begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

definiert.

(a) Zeigen Sie, dass die folgende Gleichung gilt:

$$\begin{pmatrix} \hat{f}_r \\ \hat{f}_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -r\sin(\varphi) & r\cos(\varphi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix}$$

(b) Folgern Sie mit (a), dass folgendes gilt:

$$\nabla f := \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\frac{1}{r}\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \frac{1}{r}\cos(\varphi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{f}_r \\ \hat{f}_\varphi \end{pmatrix}$$

Hinweis: Achten Sie darauf, dass Sie zwischen Zeilen- und Spaltenvektoren unterscheiden.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 31. *Extrema unter Nebenbedingungen*

Berechnen Sie alle kritischen Stellen der Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon (x,y,z)^\intercal \mapsto x^2 + y(z-1)$$

unter der Nebenbedingung

$$\left\{(x,y,z)^\intercal \in \mathbb{R}^3 \mid\ x^2+y^2 = 1 \quad \text{und} \quad z = 2x - y + 1\right\}.$$

Bestimmen Sie weiter, ob es sich dabei um lokale Maxima oder lokale Minima handelt.

Aufgabe H 32. *Differentiationsregeln*

Berechnen Sie die Jacobi-Matrizen der durch folgende Zuordnungsvorschriften gegebenen Funktionen direkt und unter Verwendung der Kettenregel. Untersuchen Sie Definitions- und Wertebereich aller dabei auftretenden Funktionen.

(a) $f(x,y) = f_2(f_1(x,y))$
mit $f_1(x,y) = x^2 + y^2$ und $f_2(t) = \sin(t)$,

(b) $g(t) = g_2(g_1(t))$
mit $g_1(t) = (\sin(t),\, \cos(t))^\intercal$ und $g_2(x,y) = (xy,\, x^3,\, y^2)^\intercal$,

(c) $h(x,y,z) = h_1(h_2(x,y,z))$
mit $h_1(u,v) = (uv,\, u+v,\, \sin(u+v))^\intercal$ und $h_2(x,y,z) = (x+y,\, y+z)^\intercal$,

(d) $k(x,y) = k_1(k_2(x,y))$
mit $k_1(u,v,t) = (u+v+t,\, uv-t)^\intercal$, $k_2(x,y) = (2xy,\, x+y,\, x^2)^\intercal$.

Aufgabe H 33. *Extrema ohne und mit Nebenbedingung*

Gegeben ist die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto (x^2+y^2+z^2-1)^2\,.$$

(a) Bestimmen Sie die kritischen Punkte von f. Entscheiden welchen Typ die kritischen Punkte besitzen, d.h. ob es lokale, absolute Maxima beziehungsweise Minima sind, oder ob Sattelpunkte vorliegen.

(b) Bestimmen Sie die Extrema von f unter der Nebenbedingung

$$\left\{(x,y,z)^\intercal \in \mathbb{R}^3 \mid\ (x-1)^2 + y^2 + z^2 = 1\right\}$$

und entscheiden Sie, ob es sich um lokale oder absolute Minima oder Maxima handelt.

Hinweis: Kritische Punkte müssen nicht isoliert liegen. Es kann also durchaus vorkommen, dass man die kritischen Punkte nur mit Hilfe einer oder mehrerer Gleichungen beschreiben kann. In solchen Fällen sollen die Gleichungen derart vereinfach werden, dass man unmittelbar die Gestalt der Menge der kritischen Punkte ablesen kann.

Aufgabe P 40. *Potential und Kurvenintegrale*
Gegeben ist die Funktion

$$v\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon\ (x,y)^{\mathsf{T}} \mapsto \left(x^2, xy\right)^{\mathsf{T}}$$

und die Parametrisierung der Kurve K durch

$$C\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2\colon \alpha \mapsto (\cos(\alpha), \sin(\alpha))^{\mathsf{T}}\ .$$

(a) Entscheiden Sie, ob v ein Potential besitzt.

(b) Berechnen Sie $\displaystyle\int_K v \bullet \mathrm{d}\,x$.

Aufgabe P 41. *Parametrisierung von Kurven*
Gegeben sind die Mengen

$$K_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid\ x^2+y^2=1 \text{ und } z=x\} \quad \text{und} \quad K_2 = \{(t^2,t^3) \mid\ t \in [-1,1]\}\ .$$

(a) Skizzieren Sie die Mengen K_1 und K_2.

(b) Finden Sie jeweils eine Parametrisierung für K_1 und K_2.

(c) Zeichnen Sie Anfangs- und Endpunkte sowie die Orientierung der von Ihnen gewählten Parametrisierung in die Skizze ein.

(d) Entscheiden Sie, ob es sich bei den Kurven K_1 und K_2 um geschlossene Kurven handelt.

Aufgabe P 42. *Gefahrenpotential wackeliger Eselsbrücken*
Das Spatprodukt dreier Vektoren $a,b,c \in \mathbb{R}^3$ ist bekanntlich definiert als $a \bullet (b \times c)$. Aus der Beziehung $a \bullet (b \times c) = \det(a,b,c)$ ergibt sich:

$$a \bullet (b \times c) = c \bullet (a \times b) = -b \bullet (a \times c)\,.$$

Es seien die beiden stetig differenzierbaren Vektorfelder $f,g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben. Unreflektiertes naives Einsetzen und unbedachte Verwendung der durch die „Nabla-Schreibweise“ gegebenen Eselsbrücken könnte nun zu der irrigen Annahme führen $\operatorname{div}(f \times g)$, $g \bullet \operatorname{rot} f$ und $-f \bullet \operatorname{rot} g$ stimmten überein, da ja scheinbar „$\nabla \bullet (f \times g)$“, „$g \bullet (\nabla \times f)$“ und „$-f \bullet (\nabla \times g)$“ übereinstimmen.

Zeigen Sie, dass gilt:

$$\operatorname{div}(f \times g) = (g \bullet \operatorname{rot} f) - (f \bullet \operatorname{rot} g)\,.$$

Insbesondere bedeutet dies im Allgemeinen:

$$g \bullet \operatorname{rot} f \neq \operatorname{div}(f \times g) \neq -f \bullet \operatorname{rot} g\,.$$

Geben Sie hierzu ein konkretes Gegenbeispiel an und widerlegen Sie somit den aus der „Nabla-Schreibweise“ gewonnenen Trugschluss.

Diskutieren Sie die Frage, warum die *Merkregeln* mit der „Nabla-Schreibweise“ nicht zum Rechnen geeignet sind.

Hausübungen

Aufgabe H 34. *Quer durch's Vektorfeld*
In Abhängigkeit von $b \in \mathbb{R}$ ist das folgende Vektorfeld gegeben:

$$v_b \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : (x,y,z)^\intercal \mapsto \left(2x, 3z^2+z, 1+6yz+by\right)^\intercal .$$

Ferner sei abhängig von $\gamma \in (0,\infty)$ eine Kurve K_γ gegeben:

$$C : [0,\gamma] \to \mathbb{R}^3 : t \mapsto (2\sin(t), \cos(2t), \cos(t))^\intercal .$$

(a) Wählen Sie b so, dass v_b ein Potential besitzt und berechnen Sie ein solches.

(b) Finden Sie das kleinstmögliche γ so, dass die Kurve K_γ geschlossen ist.

(c) Berechnen Sie $\int_{K_\pi} v_b \bullet \mathrm{d}\,x$ für $b=0$ und $b=1$.
Hinweis: Die Verwendung von Symmetrien sowie das Additionstheorem $\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\beta)\cos(\alpha)$ können hierbei viel Arbeit ersparen.

Aufgabe H 35. *Potential und Kurvenintegrale*
Gegeben ist ein Vektorfeld

$$v \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \colon (x,y,z)^\intercal \mapsto \exp(-x^2-y^2-z^2)(x,y,z)^\intercal$$

und in Abhängigkeit von $\beta \in [0,2\pi]$ eine Kurve K_β, parametrisiert durch

$$C_\beta \colon [0,\beta] \to \mathbb{R}^3 \colon \alpha \mapsto (\cos(\alpha)\cos(2\alpha), \sin(\alpha)\cos(2\alpha), \sin(2\alpha))^\intercal .$$

(a) Berechnen Sie ein Potential zu dem Vektorfeld v.

(b) Berechnen Sie für $\beta \in [0,2\pi]$ das Integral $\int_{K_\beta} v \bullet \mathrm{d}\,x$.

Aufgabe H 36. *Kurvenintegrale reellwertiger Funktionen*

(a) Gegeben ist die Funktion $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \colon (x,y)^\intercal \mapsto x$. Berechnen Sie das Kurvenintegral von f längs der Ellipse beschrieben durch die Gleichung $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$.

(b) Durch $C \colon [0,\pi/2] \to \mathbb{R}^2 \colon t \mapsto \left((\cos(t))^3, (\sin(t))^3\right)^\intercal$ sei ein Draht parametrisiert. Er besitze die Massendichte $\varrho(C(t)) = \sin(t)$. Erläutern Sie, warum die Gesamtmasse des Drahtes durch $\int_C \varrho(x)\,\mathrm{d}\,x$ angemessen beschrieben wird, und berechnen Sie diese.

Aufgabe H 37. *Zirkulation und Ausfluss*
Gegeben ist die Ellipse $K = \{(x,y)^\intercal \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{4}x^2 + 4y^2 = 1\}$ und die Vektorfelder:

$$f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \colon (x,y)^\intercal \mapsto (-y, x+2)^\intercal$$
$$g \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \colon (x,y)^\intercal \mapsto (xy, -yx)^\intercal$$

(a) Geben Sie eine geschlossene doppelpunktfreie Parametrisierung $C \colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$ der Ellipse K an.

(b) Bestimmen Sie jeweils Zirkulation längs K und Ausfluss durch K für f und g.