A. Kirchhoff,
T. Pfrommer,
M. Kutter, Dr. I. Rybak

1. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 2

Prof. Dr. M. Stroppel
Prof. Dr. A. Sändig

Sommersemester 2010

Präsenzübungen

Aufgabe P 1. *Konvergenz in metrischen Räumen*

Untersuchen Sie die nachstehenden Folgen auf Konvergenz in $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$. Wählen Sie hierzu zunächst eine geeignete Metrik aus $\{\rho_1, \rho_2, \rho_\infty\}$ aus.

(a) $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}^2\colon n \mapsto a_n := \left(\frac{3+\sin n}{n}, \frac{2+\cos n}{n}\right)$

(b) $b\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}^3\colon n \mapsto b_n := \left(\frac{3+\sin n}{n}, \frac{2+\cos n}{n}, \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{5j}\right)$

Aufgabe P 2. *Konvergenzkriterien*

Untersuchen Sie, ob die folgenden Reihen konvergieren.

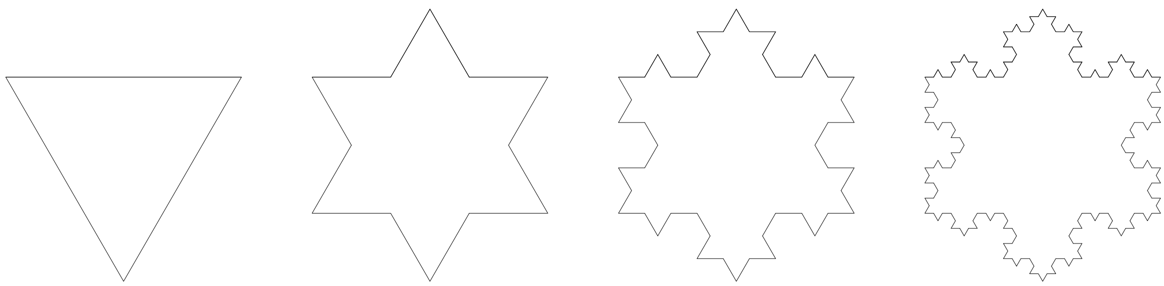
(a) $\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \left(\frac{1}{j}\right)^{\frac{1}{3}}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n+1} + \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$

(c) $\sum_{j=3}^{\infty} \frac{j+2}{j^2-4}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$

Aufgabe P 3. *Koch-Schneeflocke*



Die Koch-Schneeflocke entsteht durch folgenden iterativen Prozess. Ausgangsfigur ist ein gleichseitiges Dreieck mit Kantenlänge 1. Im n-ten Iterationsschritt setzt man dann in die Mitte einer Kante mit Kantenlänge a ein weiteres gleichseitiges Dreieck mit Kantenlänge $\frac{1}{3}a$ an.

(a) Sei b_n die Kantenlänge im n-ten Iterationsschritt und c_n die Anzahl der Kanten. Bestimmen Sie b_1, b_2, b_3 und c_1, c_2, c_3. Berechen Sie anschließend allgemein b_n und c_n.

(b) Bestimmen Sie den Umfang einer Koch-Schneeflocke.

(c) Bestimmen Sie den Flächeninhalt einer Koch-Schneeflocke.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 1. *Konvergenzkriterien für Reihen*

Untersuchen Sie, ob die folgenden Reihen konvergieren:

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1}$

(b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2+k+1}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{4^n}$

(d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{-9k-10}{10k}\right)^k$

Aufgabe H 2. *Stetigkeit*

Betrachtet wird die Funktion $f\colon [1,4] \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \sqrt{x}$.

(a) Berechnen Sie für jedes $\varepsilon > 0$ ein passendes $\delta > 0$ so, dass gilt

$$\forall x \in [1, 1+\delta]\colon \quad |f(x) - f(1)| < \varepsilon.$$

(b) Finden Sie für jeden Punkt $x_0 \in [1,4]$ und für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so, dass die Bedingung

$$\forall x \in [1,4]\colon\ (|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$$

erfüllt ist.

(c) Betrachtet wird nun die Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 2 \\ 2, & x = 2 \end{cases}$$

Können Sie auch hier ein δ wie in **(b)** finden?

(d) Was hat das Ganze mit Stetigkeit zu tun?

Aufgabe H 3. *Konvergenz in metrischen Räumen*

Auf der Menge $\mathcal{C}^0([0,1])$ der reellwertigen stetigen Funktionen auf dem Intervall $[0,1]$ verwenden wir die durch $\rho_\infty(f,g) := \max\left\{|f(t) - g(t)| \,\middle|\, t \in [0,1]\right\}$ festgelegte Metrik ρ_∞. Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{C}^0([0,1])$ wird definiert durch

$$f_n(t) = \sqrt{t^2 + \frac{1}{n}} \quad \text{für } t \in [0,1].$$

Überprüfen Sie, ob die Folge konvergiert und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert.

Präsenzübungen

Aufgabe P 4. *Stetigkeit*

Gegeben ist die Menge

$$L := \left\{ k \cdot \frac{\pi}{2} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

und die folgenden Abbildungen:

$$\begin{aligned}
f &\colon \mathbb{R} \smallsetminus L \to \mathbb{R} \colon x \mapsto \frac{x}{\sin(2x)} \\
g &\colon \mathbb{R} \smallsetminus L \to \mathbb{R} \colon x \mapsto \frac{\sin(2x)}{|\sin(2x)|} \cos(x) \\
h &\colon \mathbb{R} \smallsetminus L \to \mathbb{R} \colon x \mapsto \left(\frac{\sin(2x)}{|\sin(2x)|} + 1 \right) \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \\
l &\colon L \to \mathbb{R} \colon x \mapsto \sin(2x)
\end{aligned}$$

(a) Skizzieren Sie die Graphen der gegebenen Funktionen.

(b) Untersuchen Sie anhand der Skizzen die Funktionen auf Stetigkeit.

(c) Bestimmen Sie für f, g und h an Stellen $x_0 \in L$ die rechtsseitigen und linksseitigen Grenzwerte.

(d) An welchen Stellen $x_0 \in L$ lassen sich f, g und h linksseitig stetig ergänzen, wo rechtsseitig? An welchen Stellen kann man sie stetig ergänzen?

Aufgabe P 5. *Umkehrfunktionen*

Zeichnen Sie die Graphen der folgenden Funktionen in ein Koordinatensystem ein:

(a) $f_1 \colon [0, 9] \to \mathbb{R} \colon x \mapsto \sqrt{x}$

(b) $f_2 \colon [-1, 3] \to \mathbb{R} \colon x \mapsto 2^x$

(c) $f_3 \colon [0, 5] \to \mathbb{R} \colon x \mapsto (x+1)^2 - 5$

(d) $f_4 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \colon x \mapsto \begin{cases} 3\,x + 3\,, & x < -1 \\ (x+1)^2\,, & -1 \leqq x \leqq 1 \\ 6 - \frac{1}{x}\,, & x > 1 \end{cases}$

Welche dieser Funktionen besitzen eine Umkehrfunktion?
Bei welchen können Sie dies durch Änderung des Definitions- oder Zielbereichs erreichen?
Geben Sie die Definitions- und Wertebereiche der Umkehrfunktionen an.

Aufgabe P 6. *Nullstellen*

(a) Gegeben sei die Polynomfunktion $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \colon x \mapsto x^4 + x^3 - 6x^2 - 5x + 5$.
Bestimmen Sie die Anzahl der (reellen) Nullstellen. Begründen Sie Ihr Ergebnis.

(b) Wie viele (relle) Lösungen besitzt die Gleichung

$$2^x = 4x\,?$$

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 4. *Stetigkeit*

Bestimmen Sie möglichst große Teilmengen von $\mathbb{R}$, auf denen die folgenden Definitionen sinnvoll sind:

(a) $f_1\colon x \mapsto \dfrac{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{x^2|x-1|}$

(b) $f_2\colon x \mapsto \ln\left(\ln(1+x^2)\right)$

(c) $f_3\colon x \mapsto \dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}$

(d) $f_4\colon x \mapsto \dfrac{3x^4+6x^3-27x^2-6x+24}{x^3-2x^2-x+2}$

(e) $f_5\colon x \mapsto \dfrac{\cos(3x)}{\sin(2x)}$

(f) $f_6\colon x \mapsto \dfrac{x-a}{|x-b|}$ wobei $a,b \in \mathbb{R}$

Untersuchen Sie diese Funktionen auf Stetigkeit, und bestimmen Sie jeweils die links- und rechtsseitigen Grenzwerte an den Lücken in den Definitionsbereichen.
An welchen dieser Lücken sind die Funktionen stetig fortsetzbar?

Aufgabe H 5. *Stetigkeit und Folgen*

Sei $f\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$ stetig und $f(x) < x$ für alle $x > 0$. Für die reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gelte $a_n > 0$ und $a_{n+1} \leqq f(a_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und bestimmen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Aufgabe H 6. *Funktionsgrenzwerte*

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte, ohne die Regel von l'Hospital zu verwenden:

(a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-2}{x^2-3x+2}$

(b) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin(x)-\cos(x)}{\cos(2x)}$

(c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{5x^2}{1-x^2} + 2^{\frac{1}{x}}\right)$

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{x}{\sin(3x)} - \dfrac{\sin(x)}{x}\right)$

(e) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sqrt{ax}-x}{x-a}, \quad a \in \mathbb{R}$

(f) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x+a} - \sqrt{x-b}\right), \quad a,b \in \mathbb{R}$

A. Kirchhoff,
T. Pfrommer,
M. Kutter, Dr. I. Rybak

3. Gruppenübung zur Vorlesung
Höhere Mathematik 2

Prof. Dr. M. Stroppel
Prof. Dr. A. Sändig

Sommersemester 2010

Präsenzübungen

Aufgabe P 7. *Potenzreihen*

Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen:

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k (x-3)^k$

(b) $\sum_{k=1}^{\infty} k^5 5^k x^k$

(c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k\,(k+1)}$

(d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{2^{k^2}} x^k$

(e) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(2+(-1)^k\right)^{-k} x^k$

(f) $\sum_{k=1}^{\infty} k^k x^{2k}$

Skizzieren Sie jeweils den Konvergenzkreis.

Aufgabe P 8. *Differenzierbarkeit*

(a) Untersuchen Sie mit Hilfe des Differenzenquotienten, ob die Funktion f an der Stelle $x_0 = 0$ und die Funktion g an den Stellen $x_0 = 0$ und $x_1 = -3$ differenzierbar ist.

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} \sqrt{x} & \text{für } x \in [0, +\infty) \\ -\sqrt{-x} & \text{für } x \in (-\infty, 0) \end{cases}$$
$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x\,|x| + |x+3|$$

(b) Setzen Sie die Funktionen f und g an der Stelle $x_0 = 0$ stetig fort und untersuchen Sie mit Hilfe des Differenzenquotienten, ob die beiden Funktionen an dieser Stelle differenzierbar sind.

$$f \,:\, \mathbb{R} \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{R} : x \mapsto x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$
$$g \,:\, \mathbb{R} \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

Aufgabe P 9. *Trigonometrische Funktionen*

(a) Zeigen Sie mit Hilfe der Formel von Euler und de Moivre, dass für alle $z \in \mathbb{C}$ die folgenden Gleichungen gelten

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

(b) Verifizieren Sie damit für $z \in \mathbb{C}$ die bekannte Identität $(\sin z)^2 + (\cos z)^2 = 1$.

(c) Zeigen Sie, dass für alle $z, w \in \mathbb{C}$ die folgenden Additionstheoreme gelten:

$$\begin{aligned} \cos(z+w) &= (\cos z)(\cos w) - (\sin z)(\sin w) \\ \sin(z+w) &= (\cos z)(\sin w) + (\sin z)(\cos w) \end{aligned}$$

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 7. *Potenzreihen*

Bestimmen Sie die Konvergenzradien und Entwicklungspunkte der folgenden Potenzreihen:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{2^n\, n}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^2(z-1+2i)^n$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4)^n z^{2n}}{2n!}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+\sqrt{2}-i)^n}{n!}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{2^n} z^n$

(f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \left(z^2+4z+4\right)^n$

Skizzieren Sie jeweils den Konvergenzkreis. Geben Sie an, für welche $z \in \mathbb{R}$ die Reihen konvergieren.

Aufgabe H 8. *Ableitungen*

Berechnen Sie für folgende Funktionen die Ableitung nach x:

(a) $f_1 : (0, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R} : x \mapsto \dfrac{1}{\tan x}$

(b) $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sinh(\sqrt{1+x^2})$

(c) $f_3 : (0, \infty) \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt[3]{x}\ln(1+x^4)$

(d) $f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \dfrac{x^2-1}{x^4+1}e^x$

(e) $f_5 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \dfrac{\sin(x)\cos(x)}{1+(\sin(x))^2}$

(f) $f_6 : (0, \pi) \to \mathbb{R} : x \mapsto (\sin(x))^x$

Aufgabe H 9. *Fibonacci-Zahlen*

Die Folge (a_n) der Fibonacci-Zahlen ist definiert durch

$$a_0 := 1, \quad a_1 := 1, \quad a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie: Für den Konvergenzradius ρ der Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

gilt $\rho \geqq \frac{1}{2}$.

Präsenzübungen

Aufgabe P 10. *Funktionsgrenzwerte*

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte mit der Regel von l'Hospital

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x-1}{x^2+1}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(2x)}{\sin(5x)}$

(c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{x^3}$

(d) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{e^x}$

(e) $\lim\limits_{x\to 0+0} x^2 \ln(x)$

(f) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{\ln(x)} - \dfrac{1}{x-1}\right)$

Aufgabe P 11. *Differentiation von Umkehrfunktionen*

(a) Untersuchen Sie, ob für die Funktion $f\colon\ [0,\pi] \to \mathbb{R}\colon x \mapsto (\cos x)^3$ auf dem Intervall $[0,\pi]$ eine Umkehrabbildung $f^{-1}\colon f([0,\pi]) \to [0,\pi]$ existiert.

(b) Berechnen Sie, falls die Umkehrabbildung existiert und f^{-1} in $f(x_0)$ differenzierbar ist, die Ableitung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,y}\ f^{-1}(y)\Bigg|_{y=f(x_0)}$$

mit Hilfe der Formel $\sin x = \sqrt{1-(\cos x)^2}$.

(c) Für welche x gilt diese Formel?

Aufgabe P 12. *Potenzreihen*

Berechnen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen und bestimmen Sie jeweils eine geschlossene Darstellung.

Hinweis: Führen Sie die Potenzreihen durch Integration auf Reihen mit bekannter Darstellung zurück und differenzieren Sie anschließend.

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{k!} x^{2k}$

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (k+1) 2^k x^k$

(c) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} (9k^2+9k+2)(-3)^k x^{3k}$

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 10. *Funktionsgrenzwerte*

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte mit der Regel von l'Hospital

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^4}$

(b) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\tan(3x)}{\tan(x)}$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x\sin(x)} - \dfrac{1}{x^2}\right)$

(d) $\lim\limits_{x\to 1-0} \ln(x)\ln(1-x)$

(e) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{x\,(e^x+1) - 2\,(e^x-1)}{x^2}\right)$

Aufgabe H 11. *Taylorpolynom*

Für ein festes $k \in \mathbb{N}$ ist das Intervall $I := [-2\pi k, 2\pi k]$ gegeben. Weiter ist auf I die Funktion $\sin\big|_I \colon I \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \sin(x)$ definiert.

(a) Überprüfen Sie, ob die Funktion $\sin\big|_I$ die Voraussetzungen des Satzes von Taylor in dem Intervall I erfüllt.

(b) Bestimmen Sie das Taylorpolynom $T_5(\sin\big|_I, x, 0)$.

(c) In anwendungsbezogenen Vorlesungen wird Ihnen häufig eine Aussage der Form „*für kleine Winkel können wir* $\sin(x)$ *durch* x *ersetzen*" begegnen. Darf man das wirklich? Was sind „*kleine Winkel*"? Stellen Sie diese an sich gewagte Behauptung auf ein solides mathematisches Fundament, indem Sie sich das Restglied $R_2(\sin\big|_I, x, 0)$ anschauen.

Aufgabe H 12. *Umkehrfunktion der Cosinus-Funktion*

(a) Schränken Sie die Cosinus-Funktion $\cos$ im Definitionsbereich so auf ein geeignetes Intervall ein, daß die Umkehrfunktion *Arcuscosinus* $\arccos$ existiert und skizzieren Sie diese.

(b) Berechnen Sie $\left.\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\arccos(x)\right|_{x=x_0}$ mit Hilfe der Ableitung der Umkehrfunktion.

(c) Zeigen Sie $\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(x)$.

Präsenzübungen

Aufgabe P 13. *Kurvendiskussion*
Die Funktion f sei gegeben durch die folgende Zuordnungsvorschrift:

$$f(x) = x^2 - 2|x| + 1\,.$$

(a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich von f in $\mathbb{R}$ und untersuchen Sie die so gewonnene Funktion auf Stetigkeit.

(b) Untersuchen Sie den Graphen von f auf Symmetrie.

(c) Bestimmen Sie die Nullstellen von f.

(d) Bestimmen Sie die Extremalstellen von f, sowie jeweils deren Typ und die zugehörigen Funktionswerte.

(e) Skizzieren Sie den Graphen von f.

Aufgabe P 14. *Stammfunktion*
Für welche Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$ ist

$$F(x) = ae^{x^2}\ln(2+3x^4) + b\arcsin(2+3x^4)$$

eine Stammfunktion von

$$f(x) = \frac{60e^{x^2}x^3}{2+3x^4} + 10e^{x^2}x\ln(2+3x^4)$$

Aufgabe P 15. *Integrale*
Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\displaystyle\int 2x^5 + 4x^3 - x + 1 \,\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int |x| \,\mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(x) \,\mathrm{d}x$

(d) $\displaystyle\int x^2 e^{-\frac{x}{2}} \,\mathrm{d}x$

(e) $\displaystyle\int \frac{2\cos(x)\sin(x)}{(\cos(x))^2} \,\mathrm{d}x$

(f) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{-|x|}\cos(kx) \,\mathrm{d}x$ für $k \in \mathbb{Z}$

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 13. *Taylorpolynome*

Sei $f\colon \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) : x \mapsto \arctan x$.

(a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom 3. Stufe $T_3(f, x, x_0)$ bezüglich des Entwicklungspunktes $x_0 = 0$.

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe von T_3 eine Näherung für $\arctan 0.1$.

(c) Untersuchen Sie das Restglied $R_3(f, x, 0)$, um eine Schranke für den Fehler $|f(0.1) - T_3(f, 0.1, 0)|$ zu erhalten.

Aufgabe H 14. *Potenzreihen und Differentialgleichungen*

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$f' = \alpha f\,,$$

wobei $\alpha \in \mathbb{R}$ ist. Eine Lösung dieser Differentialgleichung ist eine differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, für die gilt

$$f'(x) = \alpha f(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Sei nun f eine solche Funktion.

(a) Bestimmen Sie für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ die n-te Ableitung $f^{(n)}$ und schließen Sie dabei induktiv, dass f beliebig oft stetig differenzierbar ist.

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe von (a) die Taylorreihe $T(f, x, 0)$ und anschließend deren Konvergenzradius.

(c) Machen Sie eine Probe, indem Sie sich vergewissern, dass $T(f, x, 0)$ die Differentialgleichung erfüllt, das heißt $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}T(f, x, 0) = \alpha \cdot T(f, x, 0)$.

(d) Welche Reihe erhalten Sie für den Anfangswert $f(0) = 1$?

Aufgabe H 15. *Kurvendiskussion*

Die Funktion f sei gegeben durch

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{(1-x)^2}\,.$$

(a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich von f in $\mathbb{R}$ und untersuchen Sie das Verhalten von f an dessen Rändern (gegebenenfalls in $\pm\infty$). Überprüfen Sie die Funktion auf Stetigkeit.

(b) Untersuchen Sie f auf Symmetrie.

(c) Bestimmen Sie alle Nullstellen von f.

(d) Berechnen Sie f', sowie Art und Lage aller Extremalstellen von f. Bestimmen Sie außerdem die Tangente an den Graphen von f im Punkt $x = 0$.

(e) Bestimmen Sie alle Wendepunkte von f.

(f) Skizzieren Sie den Graphen von f.

Präsenzübungen

Aufgabe P 16. *Partialbruchzerlegung*
Finden Sie eine Partialbruchzerlegung für die folgenden Brüche:

(a) $\dfrac{x+1}{x^2-4}$

(b) $\dfrac{x+1}{x^2+4}$

(c) $\dfrac{7x-15}{x^3-2x^2+5x}$

(d) $\dfrac{1}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}$

Aufgabe P 17. *Integrale*
Berechnen Sie die folgenden Integrale

(a) $\displaystyle\int \sin^2 x \cos^3 x \,\mathrm{d}\,x$

(b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(3x) \,\mathrm{d}\,x$

(c) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x-4}{x^2-5x+6} \,\mathrm{d}\,x$

(d) $\displaystyle\int \frac{7x-15}{x^3-2x^2+5x} \,\mathrm{d}\,x$

Machen Sie in allen Fällen eine Probe.

Aufgabe P 18. *Geschlossene Form*
Bestimmen Sie die Konvergenzradien der Potenzreihen

$$P(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} \quad \text{und} \quad Q(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2-n} x^n \,.$$

Finden Sie jeweils eine „geschlossene Form" der Potenzreihe innerhalb ihres Konvergenzkreises, das heißt, stellen Sie dort P beziehungsweise Q dar als Produkt, Summe oder Komposition „bekannter" Funktionen – als bekannt sind dabei die Funktionen aus 2.2.5 beziehungsweise 3.1.7 des Skripts anzunehmen.

Aufgabe P 19. *Universalsubstitution*
Zeigen Sie, dass für $x \in \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ bei Verwendung der „*Universalsubstitution*" $u\colon x \mapsto \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ gilt:

$$u'(x) = \frac{1+\left(u(x)\right)^2}{2}\,, \qquad \sin(x) = \frac{2u(x)}{1+\left(u(x)\right)^2}\,, \qquad \cos(x) = \frac{1-\left(u(x)\right)^2}{1+\left(u(x)\right)^2}\,.$$

Hinweis: $\sin(x) = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x}{2}\right)$ und $\cos(x) = \left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 - \left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2$.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 16. *Integrale*

Berechnen Sie die folgenden Integrale

(a) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}\,x$

(b) $\displaystyle\int \sqrt{2-x^2}\,\mathrm{d}\,x$

(c) $\displaystyle\int \frac{5x+2}{x^2+2x+10}\,\mathrm{d}\,x$

(d) $\displaystyle\int_2^3 \frac{2x^2-5x+1}{x^3-2x+x}\,\mathrm{d}\,x$

(e) $\displaystyle\int_1^2 \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}\,x$

(f) $\displaystyle\int_{-1}^1 xe^{x^2}\sin(x^2)\,\mathrm{d}\,x$

Machen Sie in allen Fällen eine Probe.

Aufgabe H 17. *Geschlossene Form*

Bestimmen Sie für die folgenden Reihen den Konvergenzradius und eine geschlossene Form im Inneren des Konvergenzkreises. Der Begriff „geschlossene Form" ist zu verstehen, wie in Aufgabe P 18.

(a) $x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + \cdots$

(b) $1 \cdot 2x + 2 \cdot 3x^2 + 3 \cdot 4x^3 + \cdots$

Aufgabe H 18. *Integration für Fortgeschrittene*

Verwenden Sie die Resultate der Universalsubstitution aus Aufgabe P 19 um folgende Integrale zu berechnen

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos(x)}\,\mathrm{d}\,x$

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin(x)\cos(x)}\,\mathrm{d}\,x$

Präsenzübungen

Aufgabe P 20. *Uneigentliche Integrale*

Bestimmen Sie, falls möglich, die folgenden uneigentlichen Integrale:

(a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x}\,\mathrm{d}\,x$

(b) $\displaystyle\int_0^3 \frac{x+1}{x^2-1}\,\mathrm{d}\,x$

(c) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left|\frac{e^{ix}}{1+x^2}\right|\,\mathrm{d}\,x$

Aufgabe P 21. *Konvergenzverhalten uneigentlicher Integrale*

Untersuchen Sie folgende uneigentliche Integrale auf Konvergenz (ohne sie zu berechnen):

(a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{x^4+2x^2+1}\,\mathrm{d}\,x$

(b) $\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}\,x$

(c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^4+1}}\,\mathrm{d}\,x$

Aufgabe P 22. *Gamma-Funktion*

Die *Gamma-Funktion* ist definiert durch

$$\Gamma\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}\colon \alpha \mapsto \int\limits_{0+0}^{+\infty} e^{-t}\, t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}\,t\,.$$

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass dieses uneigentliche Integral in der Tat für alle $\alpha > 0$ konvergiert.

(a) Zeigen Sie mit partieller Integration die Funktionalgleichung $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$.

(b) Berechnen Sie $\Gamma(1)$.

(c) Leiten Sie damit für $n \in \mathbb{N}$ die Identität $\Gamma(n+1) = n!$ her. Anschaulich bedeutet dies, dass die Gamma-Funktion eine Fortsetzung der Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{N}\colon n \mapsto (n-1)!$ ist.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 19. *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung*
Zeigen Sie dass für alle $x \geqq 0$ folgende Ungleichung gilt:

$$\ln(1+x) \geqq \frac{3}{2} \cdot \frac{x(x+6)}{(x+3)^2} .$$

Betrachten Sie hierfür die Ableitung der linken und der rechten Seite, und verwenden Sie den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

Aufgabe H 20. *Uneigentliche Integrale*
Bestimmen Sie, falls möglich, die folgenden uneigentlichen Integrale:

(a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x}{2}} \,\mathrm{d}\,x$

(b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2+x} \,\mathrm{d}\,x$

(c) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \,\mathrm{d}\,x$

(d) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} \,\mathrm{d}\,x$

Aufgabe H 21. *Bogenlänge und Rotationsfläche*
Sei $r > 0$. Skizzieren Sie die Kurve

$$f\colon (-r,r) \to \mathbb{R} \quad x \mapsto r\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{r^2}\right)},$$

bestimmen Sie ihre Bogenlänge

$$s = \int_{-r}^{r} \sqrt{1+(f'(x))^2}dx,$$

sowie die Rotationsfläche

$$A = 2\pi \int_{-r}^{r} f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}dx.$$

Das Ergebnis sollte aus der Schule bekannt sein.

Präsenzübungen

Aufgabe P 23. *Multiindizes*
Stellen Sie die folgenden Polynomfunktionen in Multiindex-Notation $\sum\limits_{|j| \leqq k} a_j x^j$ dar.

(a) $f\colon (x_1, x_2) \mapsto x_1^3 + 3x_1^2 x_2 - x_2^3$

(b) $g\colon (x_1, x_2, x_3) \mapsto x_1^3 x_2^2 x_3$

(c) $h\colon (x_1, x_2, x_3) \mapsto x_1^2 x_3^2 - 4x_1 x_2^3 + 6x_3 - 13$

Aufgabe P 24. *Konvergenz mehrdimensionaler Folgen*
Untersuchen Sie die Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert:

(a) $\left(\frac{1}{n}, \frac{n+1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

(b) $\left(\frac{1}{n}, n\right)_{n\in\mathbb{N}}$

(c) $\left(\sin\left(\frac{\pi n}{2} + \frac{1}{n}\right), \frac{\cos(n)}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Aufgabe P 25. *Stetigkeit*
Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Stetigkeit:

(a) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{xy} & xy \neq 0 \\ 1 & xy = 0 \end{cases}$

(b) $g\colon (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto \frac{\sin(xy)}{x}$

(c) $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 22. *Konvergenz mehrdimensionaler Folgen*

Untersuchen Sie die angegebenen Folgen in $\mathbb{R}^2$ auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert:

(a) $$\left(\sin\left(\pi n + \frac{1}{n}\right), \sin\left(2\pi n + \frac{2}{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(b) $$\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} n + \frac{1}{n}\right), \sin\left(\pi n + \frac{2}{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(c) $$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{-1}{2^k}, \pi \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\pi^{2k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

Aufgabe H 23. *Funktionen in mehreren Veränderlichen*

Es ist die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto \sin(x^2+y^2)$ gegeben.

(a) Skizzieren Sie die Niveaulinien von f zu den Niveaus $-1, 0$ und 1. Skizzieren Sie mit Hilfe der Niveaulinien und achsenparalleler Schnitte den Graphen.

(b) Weiter sind die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben mit $a_n := \left(\frac{1}{n}\sin(n), \frac{1}{n}\cos(n)\right)$ und $b_n := \left(\frac{2}{n}, \sqrt{\frac{\pi}{2}+\frac{3}{n}}\right)$. Bestimmen Sie

$$\lim_{n\to+\infty} f(a_n), \qquad \lim_{n\to+\infty} f(b_n).$$

Aufgabe H 24. *Funktionen in mehreren Veränderlichen*

Gegeben sind die Funktionen

$$f\colon (\mathbb{R}\setminus\{0\}) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto \frac{x^3 - xy^2}{2x}$$
$$g\colon (\mathbb{R}\setminus\{0\}) \times (\mathbb{R}\setminus\{0\}) \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto \frac{x^3 - xy^2}{2xy}$$

(a) Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen f und g. Verwenden Sie dazu als Hilfsmittel Niveaulinien und achsenparallele Schnitte.

(b) Sind f und g stetig? Lassen sich f und g stetig auf $\mathbb{R}^2$ fortsetzen?

Präsenzübungen

Aufgabe P 26. *Partielle Ableitungen*

Berechnen Sie alle ersten partiellen Ableitungen der folgenden Funktionen.

(a) $f(x,y) = 2x + y^2 + 4$

(b) $g(x,y) = \dfrac{x}{y}, \quad y \neq 0$

(c) $h(x,y) = (\sin(x+y))^2 - (\sin x)^2 + (\sin y)^2$

(d) $p(x,y,z) = xe^{-yz}$

(e) $q(x_1,x_2,x_3,x_4) = \sin(x_1 x_3)e^{x_2^2+x_4^4}$

Aufgabe P 27. *Partielle Ableitungen*

Gegeben ist folgende Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f : (x,y) \mapsto \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Berechnen Sie $f_x(x,y)$ und leiten Sie $f_x(0,y)$ nach y ab. Bestimmen Sie nun $f_y(x,y)$ und leiten $f_y(x,0)$ nach x ab. Was stellen Sie fest?

Aufgabe P 28. *Taylorpolynom*

Es sei $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \colon (x,y) \mapsto 3x^2y - y^3$.

(a) Bestimmen Sie die Tangentialebene im Punkt $(1,1,f(1,1))$ and den Graphen von f.

(b) Stellen Sie die Hesse-Matrix $\mathrm{H}f$ auf.

(c) Berechnen Sie das Taylorpolynom $T_2\big(f,(x_0,y_0),(1,1)\big)$ im Punkt (x_0,y_0) der Stufe 2 um den Entwicklungspunkt $(1,1)$.

(d) *Zusatz:* Bestimmen Sie auch das Taylorpolynom $T_3\big(f,(x_0,y_0),(0,0)\big)$ im Punkt (x_0,y_0) der Stufe 3 um den Entwicklungspunkt $(0,0)$.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 25. *Partielle Ableitungen*

Die reellen Funktionen f_1, f_2, f_3, f_4 sind durch die folgenden Zuordnungsvorschriften gegeben:

$$f_1\colon (x,y) \mapsto \ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right), \qquad f_2\colon (x,y) \mapsto \arctan\left(\frac{y}{x}\right),$$
$$f_3\colon (u,v) \mapsto e^{uv}, \qquad f_4\colon (r,\varphi) \mapsto r\sqrt{\cos(2\varphi)}.$$

(a) Bestimmen Sie für $i \in \{1,2,3,4\}$ den maximalen Definitionsbereich $D_i \subseteqq \mathbb{R}^2$ der Funktion f_i.

(b) Berechnen Sie von den gegebenen Funktionen jeweils die ersten und zweiten partiellen Ableitungen.

Aufgabe H 26. *Taylorpolynom*

(a) Berechnen Sie das Taylorpolynom $T_2\big(f,(x,y),(1,1)\big)$ der Funktion

$$f\colon\ (0,+\infty)\times(0,+\infty) \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto x^y.$$

(b) Verwenden Sie die Entwicklung aus Teil **(a)**, um $1.05^{1.02}$ näherungsweise zu berechnen. Vergleichen Sie dieses Ergebnis mit dem exakten Ergebnis.

Aufgabe H 27. *Differenzierbarkeit*

Gegeben ist die Funktion:

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{2x^2y^2}{x^4+y^4} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) Skizzieren Sie die Mengen:

$$G_0 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, f(x,y) = 0\right\}$$
$$G_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, f(x,y) = 1\right\}$$

(b) Bestimmen und skizzieren Sie für $c \in \mathbb{R}$ die Niveaulinie $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, f(x,y) = c\right\}$.

(c) Bestimmen Sie für alle $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ die partiellen Ableitungen $f_x(x_0,y_0)$, $f_y(x_0,y_0)$, $f_{xy}(x_0,y_0)$, $f_{yx}(x_0,y_0)$, $f_{xx}(x_0,y_0)$ und $f_{yy}(x_0,y_0)$.

(d) Untersuchen Sie die Funktion f auf totale Differenzierbarkeit.

A. Kirchhoff,
T. Pfrommer,
M. Kutter, Dr. I. Rybak

10. Gruppenübung zur Vorlesung
Höhere Mathematik 2
Sommersemester 2010

Prof. Dr. M. Stroppel
Prof. Dr. A. Sändig

Präsenzübungen

Aufgabe P 29. *Standortbestimmung*

Auf einem Firmengelände befinden sich die Standorte $P_i = (a_i, b_i)$, $i = 1, \ldots, N$. Es soll ein Zentrallager $P = (x, y)$ so errichtet werden, dass die Transportkosten, die proportional zum Quadrat des Abstands von P zu P_i sind, minimal werden. Die Transportkostenfunktion ist also

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^{N} c_i^2((x - a_i)^2 + (y - b_i)^2),$$

wobei durch die positiven Faktoren c_i^2 berücksichtigt wird, dass manche Standorte öfter angefahren werden als andere. Berechnen Sie die optimalen Koordinaten (x, y) von P.

Aufgabe P 30. *Extrema*

Gegeben ist die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x, y) \mapsto x^2y^2 - x^2 - y^2 + 1\,.$$

(a) Skizzieren Sie jeweils die Mengen der Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, für die $f(x, y) = 0$, $f(x, y) > 0$ beziehungsweise $f(x, y) < 0$ gilt.

(b) Berechnen Sie $\operatorname{grad} f$ und $\mathrm{H}f$.

(c) Berechnen Sie $T_2(f, (x, y), (0, 0))$ und bestimmen Sie den Typ der Schmiegquadrik an den Graph von f im Punkt $(0, 0)$.

(d) Geben Sie alle kritischen Punkte von f an (d.h. Punkte mit $\operatorname{grad} f = 0$).

(e) Bestimmen Sie alle Extrema von f.

Aufgabe P 31. *Extremalproblem mit Nebenbedingung*

Bestimmen Sie und klassifizieren Sie die lokalen Extrema von

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x, y)^\mathsf{T} \mapsto x^2 - 2(y + 1)^2$$

mit Hilfe der Lagrange-Multiplikatoren-Methode auf der Menge

$$M = \{(x, y)^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 4y^2 = 1\}\,.$$

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 28. *Extrema*

Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y) = \sin(x)\sin(y)\sin(x+y)\,, \quad 0 < x < \pi,\ 0 < y < \pi.$$

(a) Berechnen Sie $\operatorname{grad} f$ und $\mathrm{H}f$.

(b) Geben Sie alle kritischen Punkte von f an (d.h. Punkte mit $\operatorname{grad} f = 0$).

(c) Berechnen Sie an allen kritischen Stellen $(\hat{x},\hat{y})$ das Taylorpolynom $T_2(f,(x,y),(\hat{x},\hat{y}))$ und bestimmen Sie den Typ der Schmiegquadrik an den Graph von f in den kritischen Punkten.

(d) Bestimmen Sie alle Extrema von f.

(e) Geben Sie den Wertebereich von f an.

Aufgabe H 29. *Extrema unter Nebenbedingungen*

Es soll eine Konservendose mit vorgegebenen Volumen $V_0 > 0$ hergestellt werden. Die Dose wird als idealer Zylinder mit Höhe h, Deckel- bzw. Bodenradius r und Volumen V angenommen. Um Materialkosten zu sparen stellt sich folgende Optimierungsaufgabe: Man bestimme r und h so, dass die gesamte Zylinderoberfläche minimal wird unter der Nebenbedingung, dass $V = V_0$ gilt. Zur Lösung dieser Aufgabe soll die Multiplikatormethode nach Lagrange verwendet werden.

(a) Geben Sie die Gesamtoberfläche des Zylinders in Abhängigkeit von r und h an.

(b) Formulieren Sie die Nebenbedingung $V = V_0$ als Nullstellenbedingung $g(r,h) = 0$ mit Hilfe einer Funktion $g(r,h)$ in Abhängigkeit von r und h.

(c) Geben Sie das Gleichungssystem an, auf das die Multiplikatormethode nach Lagrange führt. Berechnen Sie alle reellen Lösungen dieses Gleichungssystems.

Aufgabe H 30. *Kugel- und Zylinderkoordinaten*

(a) Sei $D_1 = \{(r,\varphi,\psi)^\top | 0 < r < \infty, 0 \leqq \varphi < 2\pi, 0 \leqq \psi \leqq \pi\}$ und

$$f_1\colon D_1 \to \mathbb{R}^3\colon \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ \psi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r\cos(\varphi)\sin(\psi) \\ r\sin(\varphi)\sin(\psi) \\ r\cos(\psi) \end{pmatrix}.$$

Man nennt f_1 Parametrisierung von $\mathbb{R}^3 \smallsetminus (0,0)$ durch Kugelkoordinaten. Berechnen Sie die Jacobimatrix von f_1 und deren Determinante.

(b) Sei $D_2 = \{(r,\varphi,z)^\top | 0 < r < \infty, 0 \leqq \varphi < 2\pi, z \in \mathbb{R}\}$ und

$$f_2\colon D_2 \to \mathbb{R}^3\colon \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix}.$$

Man nennt f_2 Parametrisierung von $\mathbb{R}^3 \smallsetminus (0,0)$ durch Zylinderkoordinaten. Berechnen Sie die Jacobimatrix von f_2 und deren Determinante.

Präsenzübungen

Aufgabe P 32. *Differentiationsregeln*

Berechnen Sie die Jacobi-Matrizen der folgenden Felder direkt und unter Verwendung der Kettenregel. Untersuchen Sie Definitions- und Wertebereich aller dabei auftretenden Funktionen.

(a) $f(x,y) = f_2(f_1(x,y))$
mit $f_1(x,y) = x^2 + y^2$ und $f_2(t) = \sin(t)$,

(b) $g(t) = g_2(g_1(t))$
mit $g_1(t) = (\sin(t),\, \cos(t))^\intercal$ und $g_2(x,y) = (xy,\, x^3,\, y^2)^\intercal$.

Aufgabe P 33. *Ableiten in Polarkoordinaten*

Es sei eine Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \smallsetminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \to \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto f(x,y)$$

gegeben. Weiter wird eine Funktion

$$g\colon \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

definiert.

(a) Zeigen Sie, dass die folgende Gleichung gilt:

$$\begin{pmatrix} (f\circ g)_r \\ (f\circ g)_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -r\sin(\varphi) & r\cos(\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_x \circ g \\ f_y \circ g \end{pmatrix}$$

(b) Folgern Sie mit (a), dass folgendes gilt:

$$(\nabla f)\circ g := \begin{pmatrix} f_x \circ g \\ f_y \circ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\frac{1}{r}\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \frac{1}{r}\cos(\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (f\circ g)_r \\ (f\circ g)_\varphi \end{pmatrix}$$

Hinweis: Achten Sie darauf, dass Sie zwischen Zeilen- und Spaltenvektoren unterscheiden.

Aufgabe P 34. *Rotation, Divergenz und Potentialfunktion*

Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -4\,x_1\,x_2 \\ 6\,x_2 - \alpha\,x_1^2 - x_3^2 \\ -2\,x_2\,x_3 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie $\operatorname{rot} f$ und $\operatorname{div} f$.

(b) Bestimmen Sie alle Werte von α, für die die Funktion f ein Potential besitzt.
Berechnen Sie in diesen Fällen das Potential.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 31. *Differentiationsregeln*

Berechnen Sie die Jacobi-Matrizen der folgenden Felder direkt und unter Verwendung der Kettenregel. Untersuchen Sie Definitions- und Wertebereich aller dabei auftretenden Funktionen.

(a) $f(x,y,z) = f_2(f_1(x,y,z))$
mit $f_1(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 1$ und $f_2(t) = \ln(t)$,

(b) $g(x,y,z) = g_2(g_1(x,y,z))$
mit $g_1(x,y,z) = (x+y,\, x-z)^\intercal$ und $g_2(u,v) = (uv,\, \cos(u+v),\, \sin(u-v))^\intercal$,

(c) $h(t) = h_2(h_1(t))$
mit $h_1(t) = (\cos t,\, \sin t)^\intercal$ und $h_2(x,y) = (x^2,\, xy,\, y^2)^\intercal$.

Aufgabe H 32. *Potential*

Gegeben ist das Vektorfeld

$$f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x\ln(y) \\ \alpha^2 \dfrac{x^2}{y} + \alpha\beta z e^{-y} \\ e^{-y} \end{pmatrix}$$

mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(a) Für welche α und β besitzt das Vektorfeld ein Potential?

(b) Bestimmen Sie für die oben bestimmten α und β die Menge *aller* Potentiale.

Aufgabe H 33. *Gradient, Jacobi-Matrix und Rotation*

Gegeben ist die Funktion $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto x^2y^2$.

(a) Bestimmen Sie $\nabla h(x,y)$.

(b) Berechnen Sie den Funktionswert der Funktion $\tilde{h}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon (x,y) \mapsto \nabla h(x,y)$ in den Punkten $(\pm 1, \pm 1)^\intercal$, $(\pm 2, \pm\frac{1}{2})^\intercal$, $(\pm\frac{1}{2}, \pm 2)^\intercal$ und skizzieren Sie damit die Niveaulinie $h(x,y) = 1$.

(c) Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix $\mathrm{J}\tilde{h}(x,y)$.

(d) Für eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x,y) \mapsto \big(f_1(x,y), f_2(x,y)\big)$ ist die *Rotation* $\operatorname{rot} f$ durch folgende Zuordnung definiert:

$$\operatorname{rot} f(x,y) := \frac{\partial}{\partial x} f_2(x,y) - \frac{\partial}{\partial y} f_1(x,y)\,.$$

Bestimmen Sie $\operatorname{rot}\tilde{h}(x,y)$.

A. Kirchhoff,
T. Pfrommer,
M. Kutter, Dr. I. Rybak

12. Gruppenübung zur Vorlesung
Höhere Mathematik 2

Prof. Dr. M. Stroppel
Prof. Dr. A. Sändig

Sommersemester 2010

Präsenzübungen

Aufgabe P 35. *Gefahrenpotential wackeliger Eselsbrücken*

Das Spatprodukt dreier Vektoren $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ ist definiert als $a \bullet (b \times c)$. Aus der Beziehung $a \bullet (b \times c) = \det(a, b, c)$ ergibt sich:

$$a \bullet (b \times c) = c \bullet (a \times b) = -b \bullet (a \times c)\,.$$

Ersetzt man hier a formal durch ∇, so könnte dies zu der irrigen Annahme führen, dass für zwei stetig differenzierbare Vektorfelder $f, g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die Ausdrücke $\operatorname{div}(f \times g)$, $g \bullet \operatorname{rot} f$ und $-f \bullet \operatorname{rot} g$ übereinstimmen, da ja scheinbar „$\nabla \bullet (f \times g)$“, „$g \bullet (\nabla \times f)$“ und „$-f \bullet (\nabla \times g)$“ übereinstimmen.

Zeigen Sie, dass gilt:

$$\operatorname{div}(f \times g) = (g \bullet \operatorname{rot} f) - (f \bullet \operatorname{rot} g)\,.$$

Insbesondere bedeutet dies im Allgemeinen:

$$g \bullet \operatorname{rot} f \neq \operatorname{div}(f \times g) \neq -f \bullet \operatorname{rot} g\,.$$

Geben Sie hierzu ein konkretes Gegenbeispiel an und widerlegen Sie somit den aus der „Nabla-Schreibweise“ gewonnenen Trugschluss.

Diskutieren Sie die Frage, warum die *Merkregeln* mit der „Nabla-Schreibweise“ nicht zum Rechnen geeignet sind.

Aufgabe P 36. *Zirkulation und Ausfluss*

Gegeben ist die Ellipse $K = \{(x, y)^\intercal \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{4}x^2 + 4y^2 = 1\}$ und die Vektorfelder:

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon (x, y)^\intercal \mapsto (-y, x + 2)^\intercal$$
$$g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon (x, y)^\intercal \mapsto (xy, -yx)^\intercal$$

(a) Geben Sie eine geschlossene doppelpunktfreie Parametrisierung $C\colon\ [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ der Ellipse K an.

(b) Bestimmen Sie jeweils Zirkulation längs K und Ausfluss durch K für f und g.

Aufgabe P 37. *Kurvenintegrale reellwertiger Funktionen*

(a) Gegeben ist die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x, y)^\intercal \mapsto x$. Berechnen Sie das Kurvenintegral von f längs der Ellipse beschrieben durch die Gleichung $x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1$.

(b) Durch $C\colon [0, \pi/2] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \big((\cos(t))^3, (\sin(t))^3\big)^\intercal$ sei eine Kurve parametrisiert, die durch einen Draht ausgefüllt wird, der die Massendichte $\varrho(C(t)) = \sin(t)$ besitzt. Erläutern Sie, warum die Gesamtmasse des Drahtes durch $\displaystyle\int_C \varrho(x)\,\mathrm{d}\,s$ angemessen beschrieben wird, und berechnen Sie diese.

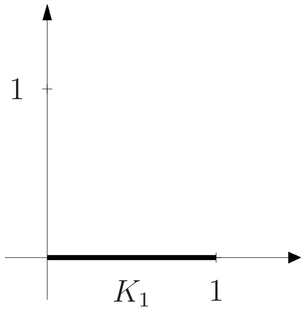
Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

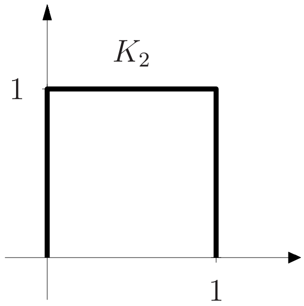
Aufgabe H 34. *Parametrisierung, Kurvenintegrale*

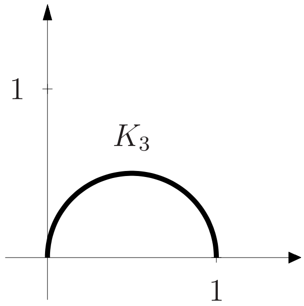
Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_K \left(x^2 + y^2\right) \mathrm{d}\, s$$

über die unten skizzierten Wege K_1, K_2 und K_3 vom Punkt $(0,0)$ zum Punkt $(1,0)$.







Aufgabe H 35. *Potential mittels Kurvenintegral*

(a) Gegeben seien die vier Punkte

$$P_1 = (0,0,0), \quad P_2 = (a,0,0), \quad P_3 = (a,b,0), \quad P_4 = (a,b,c)\,.$$

Finden Sie für $i \in \{1,2,3\}$ Parametrisierungen C_i von Kurven, welche vom Punkt P_i zum Punkt P_{i+1} laufen.

(b) Berechnen Sie ein Potential des Vektorfeldes

$$g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon (x,y,z) \to \left(\sin(z),\ 2\,y\,z,\ x\,\cos(z) + y^2\right)^{\mathsf{T}}$$

indem Sie die Wegintegrale über C_1, C_2 und C_3 summieren.

Aufgabe H 36. *Kurvenintegrale*

Bestimmen Sie die folgenden Kurvenintegrale längs K:

(a) $\int_K (x_1^2 + x_2)\,\mathrm{d}\,s$ mit $C\colon\ [0,1] \to K\colon t \mapsto \left(\ t\,,\ \ \cosh(t)\ \right)^{\mathsf{T}}$
Zusatz: Skizzieren Sie die Kurve K in einem Koordinatensystem.

(b) $\int_K \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\,\mathrm{d}\,s$ mit $C\colon\ [0,2\pi] \to K\colon t \mapsto \left(\ t\,\cos(t)\,,\ \ t\,\sin(t)\,,\ \ t\ \right)^{\mathsf{T}}$
Zusatz: Skizzieren Sie die Kurve K in einem Koordinatensystem.

Präsenzübungen

Schöne Ferien!

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 37. *Potentiale und Kurvenintegrale*

Gegeben ist das Vektorfeld

$$f\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \alpha \dfrac{z}{x} \\ \dfrac{z}{y} \\ \ln(xy) \end{pmatrix}$$

mit $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Berechnen Sie $\operatorname{rot} f$ und $\operatorname{div} f$.

(b) Bestimmen Sie, für welche Werte von α die Funktion f ein Potential besitzt und berechnen Sie dieses.

(c) Berechnen Sie jeweils für $\alpha = 0$ und $\alpha = 1$ das Kurvenintegral von f längs K, wobei K folgende Parametrisierung besitzt:

$$C\colon [-1,1] \to K\colon t \mapsto \begin{pmatrix} e^{(t^2)} \\ 1 \\ \sin(\pi t) \end{pmatrix}.$$

Aufgabe H 38. *Wegabhängigkeit von Kurvenintegralen*

Gegeben seien die Vektorfelder

$$f_1\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}, \quad f_2\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix},$$

sowie die Kurven

$$C_1\colon [-1,1] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C_2\colon [0,\pi] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \begin{pmatrix} -\cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}.$$

(a) Skizzieren Sie die Kurven C_1 und C_2 in der Ebene.

(b) Berechnen Sie die Kurvenintegrale von f_1 längs C_1 bzw. C_2, sowie die Kurvenintegrale von f_2 längs C_1 bzw. C_2. Warum sind die Ergebnisse jeweils verschieden?

Aufgabe H 39. *Wahl der Parametrisierung*

Eine Ellipse K habe den Mittelpunkt $(-2,3)$. Die Länge ihrer großen Halbachse sei 4 und verlaufe parallel zur x_2-Achse. Die Länge ihrer kleinen Halbachse sei 1. Ferner sei das Vektorfeld v definiert durch

$$v\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon (x_1, x_2)^\intercal \mapsto \left(2x_1x_2, x_2^2\right)^\intercal$$

(a) Parametrisieren Sie die Ellipse durch eine Abbildung $C\colon [0,a] \to \mathbb{R}^2$ mit $a \in \mathbb{R}$ und $a > 0$.

(b) Berechnen Sie $\displaystyle\int_K v \bullet \mathrm{d}\,x$.