Präsenzübungen

Aufgabe P 1. *Konvergenzkriterien für Reihen*

Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten der Reihen

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$, **(b)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3^n}$, **(c)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$, **(d)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$, **(e)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\,3^n}{n^n}$.

Aufgabe P 2. *Reihenwert*

Zeigen Sie, dass die folgende Reihe konvergiert, und bestimmen Sie ihren Grenzwert:

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{4\cdot 6}+\frac{1}{5\cdot 7}+\dots$$

Hinweis: Geben Sie die allgemeine Form der Summanden a_n an und schreiben Sie diese mit Hilfe der Partialbruchzerlegung um.

Aufgabe P 3. *ε-δ-Kriterium*

Zeigen Sie mit Hilfe des ε-δ-Kriteriums, dass die folgenden Funktionen in den angegebenen Positionen stetig sind.

(a) $f(x) = 5x - 3$ in $x_0 = 1$, **(b)** $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ in $x_0 = 0$

Aufgabe P 4. *Leibniz-Kriterium*

Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = 1/n + (-1)^n/\sqrt{n}$ eine alternierende Folge mit Grenzwert 0 ist, aber die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergiert. Warum kann es zu Schwierigkeiten kommen, wenn man die Aufgabe mit dem Leibniz-Kriterium lösen möchte?

Hinweis: Fassen Sie jeweils 2 Folgeglieder zu einem zusammen. Finden Sie dann eine divergente Minorante.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 1. *Konvergenzkriterien für Reihen*

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz:

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^{n/2}}{n^n}$, **(b)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{\binom{2n}{n}}$, **(c)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^2}{2^{\ln n}}$, **(d)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{\sqrt{n}}$.

Aufgabe H 2. *Grenzwerte von Reihen*

Zeigen Sie, dass die folgenden Reihen die angegebenen Grenzwerte haben:

(a) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n}{7^n} = \frac{7}{10}$$

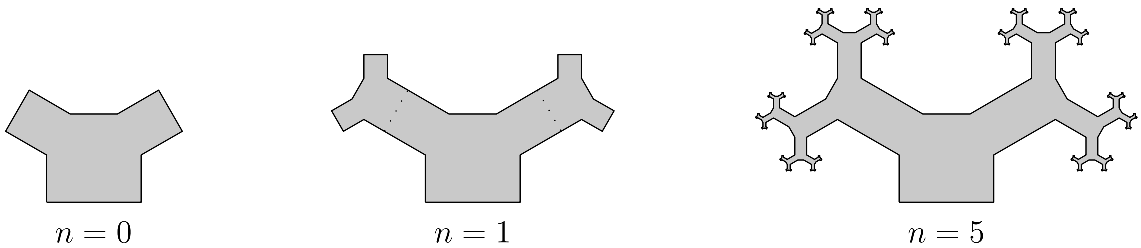
(b) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n + (-3)^n}{7^n} = \frac{11}{5}$$

(c) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n\,(n+1)\,(n+2)} = \frac{5}{4}$$

(d) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+1}{(2n-1)\,2n\,(2n+1)\,(2n+2)} = \frac{1}{4}$$

Aufgabe H 3. *Fraktaler Baum*

Der fraktale Baum entsteht durch skaliertes Duplizieren der links dargestellten Grundfigur und Anlegen dieser an die “Arme“ links und rechts (wie in der Mitte zu erkennen). Die Grundfigur hat 9 Seiten der Länge 1 und eine Grundseite der Länge 2.



(a) Geben Sie eine Formel für den Umfang U_n der Figur, die nach n Schritten entstanden ist, an.

(b) Was können Sie über die Konvergenz der unendlichen Reihe $(U_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ aussagen?

Aufgabe H 4. *Stetigkeit*

Zeigen Sie, dass die folgende Funktion in $x = 1$ unstetig ist.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x^2-1} & \text{für } -5 \leqq x \leqq 5,\ x \neq 1 \\ 0 & \text{für } x = 1 \end{cases}$$

Präsenzübungen

Aufgabe P 5. *Stetige Fortsetzung*
Untersuchen Sie, ob

$$f\colon x \mapsto \frac{x^2 - x}{x^2 - 3x + 2}$$

an den Nullstellen des Nenners stetig fortsetzbar ist.

Aufgabe P 6. *Funktionsgrenzwerte*
Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion

$$f\colon x \mapsto \frac{x^3 - 2x^2}{x - 1}$$

für $x \nearrow 1, x \searrow 1, x \to \infty$ und $x \to -\infty$. Überprüfen Sie den Zähler auf Nullstellen und skizzieren Sie den Graphen der Funktion.

Aufgabe P 7. *Umkehrfunktionen*
Zeichnen Sie die Graphen der folgenden Funktionen in ein Koordinatensystem ein:

(a) $f_1\colon [-1,3] \to \mathbb{R}\colon x \mapsto 2^x$

(b) $f_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \begin{cases} 3\,x + 3\,, & x < -1 \\ (x+1)^2\,, & -1 \leqq x \leqq 1 \\ 6 - \frac{1}{x}\,, & x > 1 \end{cases}$

Prüfen Sie ob diese Funktionen eine Umkehrfunktion besitzen, bzw. ob dies durch Änderung des Definitions- oder Zielbereichs erreicht werden kann. Geben Sie ggf. die Definitions- und Wertebereiche der Umkehrfunktionen an.

Aufgabe P 8. *Nullstellen*
Gegeben sei ein Polynom $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ mit reellen Koeffizienten und $a_n \neq 0$. Zeigen Sie:

(a) Ist n ungerade, so hat p mindestens eine reelle Nullstelle.

(b) Ist n gerade und $a_0 a_n < 0$, so hat p mindestens zwei verschiedene reelle Nullstellen.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 5. *Funktionsgrenzwerte*

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte (ohne die Regel von l'Hospital zu verwenden).

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{3x+2}}{\sqrt{x}}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{x}{\sin(2x)} + \dfrac{\sin(x)}{2x}\right)$

Aufgabe H 6. *Funktionsuntersuchungen*

Bestimmen Sie den Definitions- und Wertebereich der folgenden Funktionen und untersuchen Sie diese auf (einseitige) Stetigkeit und hebbare Definitionslücken.

(a) $f_1\colon x \mapsto \dfrac{x^2+1}{\sqrt{4-x^2}}$

(b) $f_2\colon x \mapsto \dfrac{x^3-2x^2-x+2}{x^4-2x^3-3x^2+8x-4}$

(c) $f_3\colon x \mapsto \dfrac{\ln(\sin x)}{1+\cos x}$

Aufgabe H 7. *Gleichheitsproblem*

Gegeben sind die Funktionen

$$f\colon \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto (1-x^2)\tan x \quad \text{und} \quad g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto -x\,.$$

Zeigen Sie, dass die Gleichung $f(x) = g(x)$ mindestens drei Lösungen im Intervall $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ hat.

Hinweis: Untersuchen Sie das Verhalten von f für $x \to \pi/2 - 0$ und $x \to -\pi/2 + 0$ und werten Sie f an $x = \pm 1$ aus.

Präsenzübungen

Aufgabe P 9. *Potenzreihen*

Bestimmen Sie die Konvergenzradien und Entwicklungspunkte der folgenden Potenzreihen:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{2^n\, n}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^2 (z-1+2\mathrm{i})^n$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4)^n z^{2n}}{(2n)!}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+\sqrt{2}-\mathrm{i})^n}{n!}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{2^n} z^n$

(f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \left(z^2+4z+4\right)^n$

Skizzieren Sie jeweils den Konvergenzkreis. Geben Sie an, für welche $z \in \mathbb{R}$ die Reihen konvergieren.

Aufgabe P 10. *Exponentialfunktion*

(a) Zeigen Sie:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Hinweis: Die Potenzreihe der Exponentialfunktion ist hier nützlich.

(b) Beweisen Sie mit Hilfe des Differenzenquotienten:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} e^x = e^x\,.$$

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 8. *Konvergenzradien von Potenzreihen*

Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ für

(a) $a_n = n^2$

(b) $a_n = (1 - 1/n)^{n^2}$

(c) $a_n = n^{n/2}$

(d) $a_n = \text{Anzahl der Teiler von } n$

Hinweis: Denken Sie bei **(d)** an den Sandwichsatz.

Aufgabe H 9. *Produkt von Potenzreihen*

Wandeln Sie das Reihenprodukt

$$\left(1 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}}\, x^k\right) \sum_{\ell=0}^{\infty} x^{\ell}$$

in eine Reihe der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

um. Bestimmen Sie die Konvergenzradien der drei auftretenden Potenzreihen. Ist dies mit der in 1.14.11 stehenden Aussage vereinbar?

Aufgabe H 10. *Additionstheoreme*

Bestätigen Sie mit Hilfe der Formel von Euler und de Moivre die Beziehungen

(a) $2\cos(8x)\cos(5x) = \cos(3x) + \cos(13x)$

Hinweis: Betrachten Sie $\exp(8\mathrm{i}x)$, $\exp(-8\mathrm{i}x)$, $\exp(5\mathrm{i}x)$ und $\exp(-5\mathrm{i}x)$

(b) $4(\sin(x))^3 = 3\sin(x) - \sin(3x)$

Präsenzübungen

Aufgabe P 11. *Differenzierbarkeit*

Untersuchen Sie mit Hilfe des Differenzenquotienten, ob die Funktion f an der Stelle $x_0 = 3$ und die Funktion g an der Stelle $x_0 = 2$ differenzierbar sind.

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{x}{x-2} & \text{für } x > 3 \\[2ex] -\frac{2}{3}x^2 + 9 & \text{für } x \leqq 3 \end{cases}$$

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x\,|x-2|\,.$$

Aufgabe P 12. *Ableitungen*

Gegeben sei die Funktion

$$u(x) = a\exp(2x) + b\,\exp(x)(\sin x + \cos x), \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass u Lösung der Differentialgleichung $u''' - 4u'' + 6u' - 4u = 0$ ist, und bestimmen Sie a und b so, dass $u(0) = 0$ und $u'(\frac{\pi}{2}) = \exp(\pi)$.
Überlegen Sie, ob man für beliebige $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ die Parameter a und b so auswählen kann, dass $u(0) = \alpha$ und $u'(\frac{\pi}{2}) = \beta$ gilt.

Aufgabe P 13. *Leibnizformel*

Seien f und g jeweils n-mal differenzierbar. Zeigen Sie durch vollständige Induktion folgende Formel für die n-te Ableitung von fg:

$$(f(x)g(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x).$$

Bestimmen Sie die 100-te Ableitung von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^4 \exp(x)$.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 11. *Ableitungen*

Berechnen Sie für die Funktion f die Ableitung nach x:

(a) $f(x) = \sin(x^2)$

(b) $f(x) = \exp(-1/x^2)$

(c) $f(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x+1}}$

(d) $f(x) = (1+x^2)^{\sin(x)}$

(e) $f(x) = \sin(x)\cos(x)\tan(x)$

(f) $f(x) = \dfrac{x \ln x}{\exp(x)}$

Aufgabe H 12. *Umkehrfunktion*

Der *Cotangens* ist definiert durch

$$\cot\colon (0,\pi) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}.$$

Zeigen Sie, dass $\cot$ bijektiv ist und skizzieren Sie $\cot$. Die Umkehrfunktion ist der sogenannte *Arcuscotangens* $\operatorname{arccot}\colon \mathbb{R} \to (0,\pi)$. Skizzieren Sie mit Hilfe der Skizze von $\cot$ nun auch arccot. Zeigen Sie, dass für die Ableitung

$$\operatorname{arccot}'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$$

gilt.

Aufgabe H 13. *Legendre-Polynome*

Sei für $n \in \mathbb{N}_0$ das Polynom

$$P_n(x) = \left(\frac{1}{n!2^n}(x^2-1)^n\right)^{(n)}$$

als die n-te Ableitung von $\frac{1}{n!2^n}(x^2-1)^n$ gegeben.

(a) Bestimmen Sie $P_0(x), P_1(x), P_2(x)$ und $P_3(x)$.

(b) Zeigen Sie, dass die folgende Gleichung gilt:

$$P'_{n+1}(x) = xP'_n(x) + (n+1)P_n(x).$$

Hinweis: Zeigen Sie mit Hilfe der Leibnizformel aus der Aufgabe P 13, dass

$$P_{n+1}(x) = xP_n(x) + \frac{n}{n!2^n}\left((x^2-1)^n\right)^{(n-1)}$$

und leiten Sie anschließend ab.

Präsenzübungen

Aufgabe P 14. *Funktionsgrenzwerte*

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte mit der Regel von l'Hospital.

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{\ln(x)}}$

(b) $\lim\limits_{x\to0+0} \sin(x)\ln(x)$

(c) $\lim\limits_{x\to1} \left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{\ln(x)}\right)$

Aufgabe P 15. *Taylorpolynome*

(a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom
- der Stufe 10 in $x_0 = 1$ von $f(x) = x^4 - 3x + 2$
- der Stufe 3 in $x_0 = 0$ von $f(x) = \arccos(x)$

(b) Sei $T_2(f, x, 2)$ das Taylorpolynom der Stufe 2 in $x_0 = 2$ von

$$f(x) = \frac{5}{12}x^5 - \frac{5}{8}x^4 + 2x^2.$$

Bestimmen Sie das Restglied nach Lagrange $R_2(f, x, 2)$. Geben Sie eine Abschätzung für den Fehler $\left|f(x) - T_2(f, x, 2)\right|$ für $x \in [1, 3]$ an.

Aufgabe P 16. *Newton-Verfahren*

Gegeben ist das Polynom $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

(a) Bestimmen Sie die lokalen Extremstellen von f.

(b) Skizzieren Sie den Funktionsgraphen.

(c) Bestimmen Sie mit Hilfe des Newton-Verfahrens (s. Abschnitt 2.9.1) Näherungen für die Nullstellen von f. Führen Sie dabei jeweils 3 Iterationsschritte aus.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 14. *Funktionsgrenzwerte*

(a) Berechnen Sie $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x^2)-1}{x^3\sin(x)}$

- mit Hilfe der Potenzreihendarstellungen,
- mit der Regel von l'Hospital.

(b) Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$.

Kann man auch in diesem Fall die Regel von l'Hospital anwenden?
Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe H 15. *Taylorpolynome*

(a) Schätzen Sie den Fehler ab, den man macht, wenn man für $|x| < 0.5$

- die Funktion $\sin(x)$ durch x
- die Funktion $\sin(x)$ durch $x - \frac{1}{3!}x^3$

ersetzt.

Hinweis: Schauen Sie sich die Potenzreihenentwicklung von $\sin(x)$ an.

(b) Wieviel Summanden der Potenzreihenentwicklung um den Punkt $x_0 = 0$ braucht man, um $\sin(x)$ für $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$ mit einer Genauigkeit von 10^{-15} zu berechnen?

Aufgabe H 16. *Kurvendiskussion*
Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right).$$

(a) Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist f definiert?

(b) Untersuchen Sie f auf Symmetrie, Nullstellen, lokale Extrema und Wendepunkte.

(c) Bestimmen Sie die links- und rechtsseitigen Grenzwerte von f und f' an den Stellen 1 und -1. Wie verhält sich f für $|x| \longrightarrow +\infty$?

(d) Zeichnen Sie den Graph der Funktion f.

Präsenzübungen

Aufgabe P 17. *Rotationskörper*
Berechnen Sie

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 \,\mathrm{d}\,x\,, \quad S = \pi \int_a^b x(f(x))^2 \,\mathrm{d}\,x\,, \quad T = \frac{\pi}{2} \int_a^b (f(x))^4 \,\mathrm{d}\,x$$

für $f(x) = \sqrt{1-x^2}\,,\ a = 0\,,\ b = 1\,.$
Hinweis: Für den Körper, dessen Randfläche durch Rotation des Graphen einer positiven Funktion $f(x)$ um die x-Achse entsteht, beschreibt V das Volumen, S/V die x-Koordinate des Schwerpunkts und T das Trägheitsmoment bei Rotation um die x-Achse. Sie bestimmen hier diese Größen für eine Halbkugel.

Aufgabe P 18. *Lineare Substitution*
Berechnen Sie

(a) $\displaystyle\int_1^2 (3x-4)^5 \,\mathrm{d}\,x\,,$ **(b)** $\displaystyle\int_1^2 5^{(3x-4)} \,\mathrm{d}\,x\,.$

Aufgabe P 19. *Integration mit Substitution*
Berechnen Sie

(a) $\displaystyle\int_0^1 f(x) \,\mathrm{d}\,x\,,$ **(b)** $\displaystyle\int_{-3}^{-2} f(x) \,\mathrm{d}\,x\,,$ **(c)** $\displaystyle\int_{-2}^{0} f(x) \,\mathrm{d}\,x\,,$

wobei $f(x) = (6+6x)\sqrt{x^2+2x+1}$ ist.

Aufgabe P 20. *Integration mit Partialbruchzerlegung?*
Berechnen Sie folgende Integrale:

(a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x+1}{x^2+1} \,\mathrm{d}\,x\,,$ **(b)** $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^2-5x+4} \,\mathrm{d}\,x\,,$ **(c)** $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x}{x^6+1} \,\mathrm{d}\,x\,.$

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 17. *Stammfunktionen und Integrale*
Bestimmen Sie Stammfunktionen F zu

(a) $\dfrac{1}{x(x+1)}$, **(b)** $\dfrac{2u}{\sqrt{1+u^2}}$

und berechnen Sie

(c) $\displaystyle\int_1^3 \frac{4\ln(x)}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}\,x$, **(d)** $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{2\sin(x)\cos(x)}{\sqrt{1+(\sin(x))^2}}\,\mathrm{d}\,x$.

Aufgabe H 18. *Integration durch Partialbruchzerlegung*
Berechnen Sie den Wert der folgenden Integrale:

(a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{2x+3}{2x-1}\,\mathrm{d}\,x$, **(b)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^3+1}\,\mathrm{d}\,x$, **(c)** $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x^3-2x^2-x+2}{(x^2+2x+5)^2}\,\mathrm{d}\,x$.

Aufgabe H 19. *Unterschiedliche Integrationsmethoden*
Bestimmen Sie

(a) $\displaystyle\int_1^3 x^2\ln(x)\,\mathrm{d}\,x$, **(b)** $\displaystyle\int_0^{\pi^2} \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}\,x$, **(c)** $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}\,x}{1-x^2}$.

Präsenzübungen

Aufgabe P 21. *Uneigentliche Integrale*

Untersuchen Sie die nachfolgenden Integrale auf Konvergenz und berechnen Sie gegebenenfalls ihre Werte

(a) $\displaystyle\int_1^4 \frac{\mathrm{d}\,x}{\sqrt{4-x}}$, **(b)** $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}\,\mathrm{d}\,x$, **(c)** $\displaystyle\int_0^{\infty} x^2 e^{-x/2}\,\mathrm{d}\,x$.

Aufgabe P 22. *Reihenentwicklung*

(a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius ρ von

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-3)^k\, x^k$$

und geben Sie eine geschlossene Form von

$$f:(-\rho,\rho)\to\mathbb{R}:\, x\mapsto\sum_{k=0}^{\infty}(-3)^k\, x^k$$

an.

(b) Geben Sie die Stammfunktionen von f als geschlossene Form und als Reihe an.

Aufgabe P 23. *Konvergenzverhalten mittels Integral bestimmen*

Bestimmen Sie das Konvergenzverhalten der Reihe

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k(\ln k)^{\gamma}}$$

in Abhängigkeit von $\gamma\in\mathbb{R}$.

Hinweis: Verwenden Sie Satz 3.8.1 und substituieren sie geschickt.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 20. *Uneigentliche Integrale*

Untersuchen Sie die nachfolgenden Integrale auf Konvergenz.

(a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{8}{x^4+4}\,\mathrm{d}\,x$, **(b)** $\displaystyle\int_{\pi/4}^{+\infty} e^{-x}\cdot\cos x\,\mathrm{d}\,x$

(c) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^5}}\,\mathrm{d}\,x$, **(d)** $\displaystyle\int_1^{+\infty} (\sin(1/x))^{1/3}\,\mathrm{d}\,x$

Hinweis: Denken Sie an das Majorantenkriterium 3.7.5.

Aufgabe H 21. *Reihendarstellung von Funktionen*

(a) Bestimmen Sie ohne Hilfe der Taylorformel für $f(x) = \ln(x^2+4)$ formal eine Reihenentwicklung und geben Sie das größtmögliche offene Intervall $(a,b) \subseteqq \mathbb{R}$ an, auf dem die von Ihnen gefundene Reihe f tatsächlich darstellt.

Hinweis Stellen Sie f' als Reihe dar und integrieren Sie anschließend.

(b) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihe:

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)(k+2)\,x^k$$

Welche Funktion stellt diese auf ihrem Konvergenzkreis dar?

Aufgabe H 22. *Reihendarstellung eines Integralwerts*

Für $m,n \in \mathbb{N}$ gilt die folgende Integralformel

$$\int_0^1 x^m \cdot (\ln x)^n \,\mathrm{d}\,x = (-1)^n \frac{n!}{(m+1)^{n+1}}.$$

Zeigen Sie mit dieser Formel, dass

$$\int_0^1 x^x \,\mathrm{d}\,x = -\sum_{k=1}^{\infty}(-k)^{-k} = 1 - 1/4 + 1/27 - 1/256 \pm ...$$

gilt.

Hinweis: Schreiben Sie die zu integrierende Funktion mit Hilfe der $\exp$-Funktion geeignet um und verwenden Sie die Exponentialreihe.

Präsenzübungen

Aufgabe P 24. *Graph einer Funktion*
Wir betrachten $f\colon D \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto \sqrt{4-x^2-y^2}$.

(a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich $D \subseteqq \mathbb{R}^2$ und den Wertebereich W von f.

(b) Zeichnen Sie die achsenparallelen Schnitte für $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, sowie die Niveaulinien zur Höhe c für $c \in \{0, 1/2, 1, 2\}$.

(c) Skizzieren Sie den Graph $\Gamma(f)$ und markieren Sie die Menge

$$\mathcal{S} := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in D,\, y = -x,\, 0 \leqq z \leqq f(x,y)\} \ .$$

Aufgabe P 25. *Stetige Fortsetzbarkeit*
Welche der folgenden auf $\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(0,0)\}$ stetigen Funktionen sind in den Ursprung stetig fortsetzbar?

(a) $f(x,y) = \dfrac{x-y}{|x|+|y|}$, **(b)** $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$, **(c)** $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$.

Aufgabe P 26. *Etwas Topologie*
Bestimmen Sie für die folgenden Mengen M_j jeweils die Menge M_j° aller inneren Punkte sowie den Abschluss $\overline{M_j}$ der Menge:

(a) $M_1 = (1,2] \times [3,4) \subseteqq \mathbb{R}^2$, **(b)** $M_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x(x+1) > 0\}$.

Hinweis: Machen Sie eine Skizze.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 23. *Nullstellenmenge skizzieren*

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ beliebig.

(a) Bestimmen Sie die Nullstellenmenge $\mathcal{N} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = 0\}$ von

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto xy(y-\alpha)(-4+4x^2+y^2)$$

in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$.

(b) Fertigen Sie jeweils eine Skizze der Nullstellenmenge für $\alpha \in \{-1,0,1,2\}$.

Aufgabe H 24. *Stetigkeit*

Überprüfen Sie die folgenden Behauptungen:

(a)

$$f\colon \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto \frac{2x^2y}{x^2+y^2}$$

wird durch $f(0,0) := 0$ auf ganz $\mathbb{R}^2$ stetig fortgesetzt.

(b) Für

$$f\colon \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto \frac{xy^3}{x^2+4y^6}$$

existiert $\lim\limits_{x\to 0} f(x,\alpha x)$ für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$, aber f lässt sich nicht auf $\mathbb{R}^2$ stetig fortsetzen.

Aufgabe H 25. *Partielle Ableitungen von Polynomen aus $\mathbb{R}^2$*

Gegeben seien Polynome $p\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vom Totalgrad $\leqq 2$,

$$p(x,y) = a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2$$

mit Koeffizienten $a,b,c,d,e,f \in \mathbb{R}$.
Welche dieser Polynome erfüllen die folgenden Bedingungen?

(a) $\dfrac{\partial p}{\partial x}(x,y) = 0$, **(b)** $\dfrac{\partial^2 p}{(\partial x)^2}(x,y) = 0,\ \dfrac{\partial^2 p}{(\partial y)^2}(x,y) = 0$,

(c) $\dfrac{\partial^2 p}{(\partial x)^2}(x,y) + \dfrac{\partial^2 p}{(\partial y)^2}(x,y) = 1,\ \dfrac{\partial^2 p}{\partial x\,\partial y} = 1$.

Aufgabe H 26. *Plot eines Funktionsgraphen*

Es sei

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto y^2 \cdot e^{-x^2-y^2}$$

gegeben.

(a) Visualisieren Sie $\Gamma(f)$ mit einem Computerprogramm Ihrer Wahl.

(b) Bestimmen Sie die Nullstellenmenge von f. Zeichnen Sie diese, sowie die beiden Punkte $M_+ = (0,1,f(0,1))$ und $M_- = (0,-1,f(0,-1))$ *von Hand* in Ihren Plot ein.

Präsenzübungen

Aufgabe P 27.
Bestimmen Sie für

$$f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}\colon (x, y) \mapsto f(x, y) = x \exp(\sqrt{y})$$

die Ableitung längs des Vektors $v = (\cos\varphi, \sin\varphi)^\mathsf{T}$ für $\varphi \in \mathbb{R}$.
Ist dies eine Richtungsableitung?
Für welchen Winkel φ wird $\partial_v f(2, 3)$ maximal?

Aufgabe P 28.
Bestimmen Sie für die Funktion

$$f\colon \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 2x + y > 0\} \to \mathbb{R}\colon (x, y) \mapsto f(x, y) = \ln \sqrt{\frac{2x + y}{3}}$$

die lineare Taylor-Approximation $T_1(f, (x, y), (1, 1))$ um den Entwicklungspunkt $(1, 1)$ und berechnen Sie damit näherungsweise $f(1.03, 0.95)$.

Aufgabe P 29.
Bestimmen Sie für die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}\colon x \to f(x) = f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sin(x_1 + 2x_2 + x_3^3 + x_4/4)$$

die partiellen Ableitungen

(a) $\mathrm{D}^{(0,1,0,1)} f(x)$, **(b)** $\mathrm{D}^{(1,1,1,1)} f(x)$, **(c)** $\mathrm{D}^{(4,3,2,1)} f(x)$,

(d) $\mathrm{D}^{(1,0,1,0)} \left(\mathrm{D}^{(0,1,0,1)} f\right)(x)$, **(e)** $\mathrm{D}^{(4,2,2,0)} \left(\mathrm{D}^{(0,1,0,1)} f\right)(x)$.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 27.

Bestimmen Sie den Gradienten ∇f und die Richtungsableitung $\partial_v f(x_0)$ im Punkt x_0 in Richtung v in den folgenden Fällen:

(a) $f(x,y) = x^2 - y^2$, $\quad x_0 = (1,2)$, $\quad v = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^\mathsf{T}$

(b) $f(x,y,z) = \sin(x^2) + ze^y$, $\quad x_0 = (0,0,1)$, $\quad v = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)^\mathsf{T}$

(c) $f(x,y,z) = e^x yz$, $\quad x_0 = (1,1,1)$, $\quad v = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^\mathsf{T}$.

Bestimmen Sie in **(c)** die Richtung und den Wert des steilsten Anstiegs an der Stelle x_0.

Aufgabe H 28.

Bestimmen Sie mit Hilfe einer linearen Approximation Näherungswerte für

(a) $2.05^{1.9}$ $\quad$ **(b)** $\sqrt{1.1^2 + 1.9^2 + 2.05^2}$ $\quad$ **(c)** $\dfrac{e^{0.05}}{2.1}$.

Benutzen Sie dazu jeweils ein Taylor-Polynom (erster Stufe) mit dem nächstgelegenen ganzzahligen Entwicklungspunkt.

Aufgabe H 29.

Bestimmen Sie alle flachen Punkte des Graphen der Funktion

$$f(x,y) = x^3 - 3xy^2 - 3x^2 + 3y^2 + 4x + y - 1\,.$$

Welchen Typ haben die anderen Punkte?
Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene an den Punkt $(1,1,f(1,1))$ und die Matrixdarstellung der Schmiegquadrik im Punkt $(2,0,f(2,0))$.

Präsenzübungen

Aufgabe P 30.

Bestimmen Sie für die Funktion

$$f(x,y) = x^4 + x^2y^2 - x^2$$

alle Punkte $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $f(x,y) = 0$ und skizzieren Sie die Gebiete mit $f(x,y) > 0$ und $f(x,y) < 0$. Bestimmen Sie alle kritischen Punkte sowie deren Typ.

Aufgabe P 31.

Bestimmen Sie mit der Methode von Lagrange das Minimum der Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon (x,y,z) \mapsto f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$$

unter der Nebenbedingung

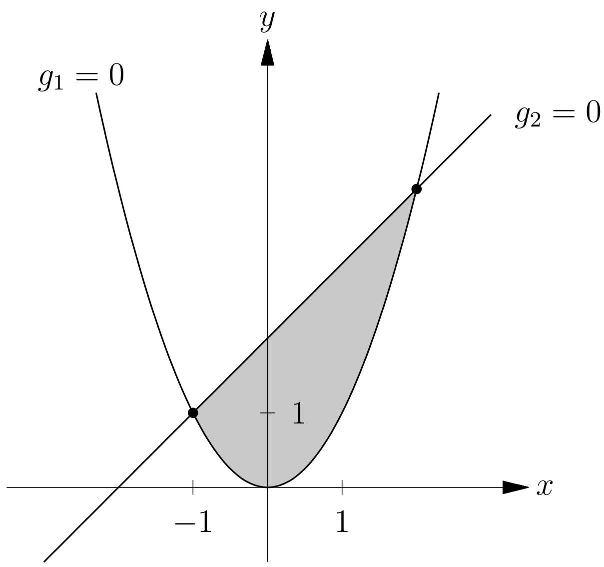
$$ax + by + cz = d\,, \quad a,b,c,d \in \mathbb{R}.$$

Interpretieren Sie das Ergebnis geometrisch.

Aufgabe P 32.

Bestimmen Sie das Minimum der Funktion $f(x,y) = 3x - 2y$ auf dem grauen Bereich

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid g_1(x,y) = y - x^2 \geqq 0 \wedge g_2(x,y) = 2 + x - y \geqq 0\}\,.$$



Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 30.
Gegeben ist die Funktion

$$f(x, y) = (x - 2y^2 + 3)(x - 5)\,.$$

Bestimmen und skizzieren Sie die Gebiete in der x-y-Ebene, in denen f positiv bzw. negativ ist. Bestimmen Sie alle kritischen Punkte sowie deren Typ.

Aufgabe H 31.
Ein Tetraeder hat die Ecken

$$A = (0, 0, 0)\,, \quad B = (2, 0, 0)\,, \quad C = (0, 3, 0)\,, \quad D = (0, 0, 4)\,.$$

(a) Bestimmen Sie den Raumpunkt P, für den die Summe S der Quadrate der Entfernungen von den Ecken des Tetraeders minimal ist, und berechnen Sie S.

(b) Wo liegt der gesuchte Punkt, wenn man zusätzlich fordert, dass er auf der Kugel mit der Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ liegen soll?

Aufgabe H 32.
Bestimmen Sie mit Hilfe von Lagrange-Multiplikatoren den Abstand der Geraden

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x - 1\}$$

von der Parabel

$$P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2 + 2\}\,.$$

Hinweis: Es ist der Abstand zwischen zwei Punkten $P_1 = (x_1, y_1)$ und $P_2 = (x_2, y_2)$ zu minimieren, von denen der eine die Geradengleichung und der andere die Parabelgleichung erfüllt – die zu minimierende Funktion hat also vier Variablen.

Präsenzübungen

Aufgabe P 33. *Kettenregel*

Bestimmen Sie die Jacobimatrix für die folgenden Funktionen, jeweils auf zwei Arten: einmal direkt und einmal unter Verwendung der Kettenregel.

(a) $f(x,y) = f_2(f_1(x,y))$ mit $f_1(x,y) = x^2 + y^2$ und $f_2(t) = \cos(t)$.

(b) $g = g_2 \circ g_1$ mit $g_1(t) = \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$ und $g_2(x,y) = \begin{pmatrix} xy \\ x^3 \\ y^2 \end{pmatrix}$.

(c) $f(x,y,z) = f_2(f_1(x,y,z))$ mit $f_1(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2 + y \\ y + z^2 \end{pmatrix}$ und $f_2(r,s) = e^{rs}$.

Aufgabe P 34. *Vektorfeld*

Gegeben ist das Vektorfeld:

$$f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2xe^{-y} \\ -x^2 e^{-y} + 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix $\mathrm{J}f\,(x,y)$ von f.

(b) Untersuchen Sie, ob f ein Potential besitzt.
Bestimmen Sie gegebenenfalls ein Potential und machen Sie die Probe.

Aufgabe P 35. *Potential*

Gegeben sei das Vektorfeld

$$f \colon (\mathbb{R}^+)^2 \to \mathbb{R}^2 \colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \dfrac{6x}{y^2 + x^2} \\ \dfrac{\alpha y}{y^2 + x^2} \end{pmatrix}.$$

Für welche Werte von α besitzt dieses Feld ein Potential? Berechnen Sie dieses. Machen Sie die Probe.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 33. *Ableiten in Polarkoordinaten*
Es sei eine Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \smallsetminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \to \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto f(x,y)$$

gegeben. Weiter wird eine Funktion

$$g\colon \mathbb{R}^+ \times [0,2\pi) \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

definiert.

(a) Zeigen Sie, dass die folgende Gleichung gilt:

$$\begin{pmatrix} (f\circ g)_r \\ (f\circ g)_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -r\sin(\varphi) & r\cos(\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_x \circ g \\ f_y \circ g \end{pmatrix}$$

(b) Folgern Sie mit (a), dass folgendes gilt:

$$(\nabla f)\circ g := \begin{pmatrix} f_x \circ g \\ f_y \circ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\frac{1}{r}\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \frac{1}{r}\cos(\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (f\circ g)_r \\ (f\circ g)_\varphi \end{pmatrix}$$

Aufgabe H 34. *Kettenregel*
Gegeben sind die Funktionen

$$f\colon (\mathbb{R}^+)^3 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1\,x_2 \\ \dfrac{x_2}{x_3} \end{pmatrix} \quad \text{und}$$

$$g\colon (\mathbb{R}^+)^2 \to \mathbb{R}^4\colon \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ y_1 + y_2 \\ \sin(y_1) \\ \ln(y_2) \end{pmatrix} .$$

(a) Bestimmen Sie die Jacobi-Matrizen $\mathrm{J}f\,(x_1,x_2,x_3)$ und $\mathrm{J}g\,(y_1,y_2)$.

(b) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix der Komposition $\mathrm{J}(g\circ f)\,(x_1,x_2,x_3)$ direkt und mit Hilfe der Kettenregel.

Aufgabe H 35. *Potential*
Gegeben ist das Vektorfeld

$$f\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 8x\,\ln(y) + e^{-y} \\ \alpha^2\,\dfrac{x^2}{y} + \alpha\beta x\,e^{-y} \end{pmatrix}$$

mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(a) Für welche α und β besitzt das Vektorfeld ein Potential?

(b) Bestimmen Sie für die oben bestimmten α und β die Menge *aller* Potentiale.

Hinweis: Ohne Probe taugt die schönste Rechnung nix.

Präsenzübungen

Aufgabe P 36. *Potential*
In Abhängigkeit von $b \in \mathbb{R}$ ist das folgende Vektorfeld gegeben:

$$v_b \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : (x,y,z) \mapsto \big(2x, 3z^2 + z, 1 + 6yz + by\big)^\intercal .$$

Wählen Sie b so, dass v_b ein Potential besitzt und berechnen Sie ein solches.

Aufgabe P 37. *Kurvenintegral*
Gegeben sei eine Kurve K_γ über $[0,\gamma]$, mit $\gamma \in (0,+\infty)$:

$$C : [0,\gamma] \to \mathbb{R}^3 : t \mapsto (2\sin(t), \cos(2t), \cos(t))^\intercal .$$

(a) Finden Sie das kleinstmögliche γ so, dass die Kurve K_γ geschlossen ist.

(b) Berechnen Sie für das Vektorfeld v_1 aus Aufgabe P36, $\displaystyle\int_{K_\pi} v_1 \bullet \mathrm{d}\,x$.

Aufgabe P 38. *Parametrisierung von Kurven*
Gegeben Sei die folgende Kurve im $\mathbb{R}^3$:

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid\ x^2 + y^2 = 1 \text{ und } z = x\} .$$

(a) Skizzieren Sie die Kurve K.

(b) Finden Sie eine Parametrisierung für K.

(c) Zeichnen Sie Anfangs- und Endpunkte sowie die Orientierung der von Ihnen gewählten Parametrisierung in die Skizze ein.

Aufgabe P 39.
Zeigen Sie, dass für eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ die Identität $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = 0$ gilt.

Hausübungen

Aufgabe H 36. *Potential, Kurvenintegral*

Gegeben ist das Vektorfeld

$$f\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3\colon\ (x,\ y,\ z) \mapsto \left(\alpha\frac{z}{x},\ \frac{z}{y},\ \ln(xy)\right)^\intercal$$

mit $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Berechnen Sie $\operatorname{rot} f$ und $\operatorname{div} f$.

(b) Bestimmen Sie, für welche Werte von α die Funktion f ein Potential besitzt und berechnen Sie ein solches.

(c) Berechnen Sie jeweils für $\alpha = 0$ und $\alpha = 1$ das Kurvenintegral von f längs K, wobei K parametrisiert wird durch

$$C\colon [-1,1] \to K\colon t \mapsto \left(\ e^{(t^2)},\ \ 1,\ \ \sin(\pi t)\ \right)^\intercal .$$

Aufgabe H 37. *Kurvenintegrale reellwertiger Funktionen*

Durch den Kreis $K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} = 1\right\}$ sei ein Draht, mit konstanter Massendichte $\varrho(x,y) = 3$, beschrieben.

(a) Geben Sie 2 mögliche Parametrisierungen des Drahtes an.

(b) Berechnen Sie die Masse des Drahtes, die durch das Kurvenintegral $\displaystyle\int_K \varrho(s)\,\mathrm{d}\,s$ gegeben ist.

Aufgabe H 38. *Identität für Differentialoperatoren*

Verifizieren Sie für stetig differenzierbare Funktionen $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ und $g,h\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ folgende Identitäten:

(a) $\operatorname{grad}(g \bullet h) = (\mathrm{J}g)^\intercal h + (\mathrm{J}h)^\intercal g$

(b) $\operatorname{rot}(fg) = f \operatorname{rot} g - g \times \operatorname{grad} f$

Die obigen Identitäten gelten übrigens auch für ebene Vektorfelder, wenn man für Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^2$ mit $a = (a_1, a_2)$ und $b = (b_1, b_2)$ definiert $a \times b := a_1b_2 - a_2b_1$.