Präsenzübungen

Aufgabe P 49. *Konvergenzkriterien für Reihen*

Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten der Reihen

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$, **(b)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3^n}$, **(c)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$, **(d)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$.

Aufgabe P 50. *Leibniz-Kriterium*

Betrachtet wird die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k-1}$.

(a) Konvergiert die gegebene Reihe?

(b) Bestimmen für $n \in \{1, 2, 3\}$ jeweils die n-ten Partialsummen

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{2k-1} .$$

Bis zu welchem $n \in \mathbb{N}$ muss summiert werden, damit S_n vom Wert der Reihe weniger als $\frac{1}{6}$ entfernt ist?

(c) Ist die Reihe absolut konvergent?

Aufgabe P 51. *ε-δ-Kriterium*

Zeigen Sie mit Hilfe des ε-δ-Kriteriums, dass die folgenden Funktionen in den angegebenen Stellen stetig sind.

(a) $f(x) = 5x - 3$ in $x_0 = 1$, **(b)** $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ in $x_0 = 0$

Aufgabe P 52. *Leibniz-Kriterium*

Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ eine alternierende Folge mit Grenzwert 0 ist, aber die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergiert.
Warum kann das Leibniz-Kriterium nicht angewandt werden?
Hinweis: Betrachten Sie die Partialsummen

$$S_k := \sum_{n=1}^{k} \left(\frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right) .$$

Schätzen Sie $1 + S_{2k+1}$ mit Partialsummen der harmonischen Reihe nach unten ab.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 46. *Konvergenz von Reihen*

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)^n$ **(b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n\,(n+2)}}$ **(c)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n!}{(3n)!}$

Aufgabe H 47. *Grenzwerte von Reihen*

Bestimmen Sie die Grenzwerte folgender Reihen.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n+1}}{2\cdot 4^n}$ **(b)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)^k}$ für $n \in \mathbb{N}$ **(c)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-2}{(n+2)(n+3)}$

Hinweis: Zeigen Sie für **(c)** zunächst, dass $\displaystyle\frac{1}{(n+2)(n+3)}=\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}$ gilt.

Aufgabe H 48. *Stetigkeit (Umgebungen)*

Skizzieren Sie die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}\colon x\mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } x \leqq -1 \\ \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n & \text{für } -1 < x \leqq 0 \\ x^2+1 & \text{für } 0 < x \end{cases}.$$

Bestimmen Sie mit Hilfe von Umgebungen, ob die Funktion f an den Stellen $x_1 = 1$, $x_2 = 0$ und $x_3 = -1$ stetig ist.

Aufgabe H 49. *Iteration*

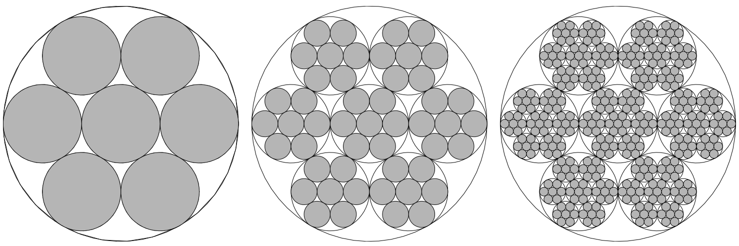
Zu Beginn (Schritt 0) wird ein Kreis vom Radius r_0 betrachtet. Diesem werden sieben gleiche Kreise maximaler Größe einbeschrieben, so dass es nur Berührungen, aber keine Überschneidungen gibt. Dieser Prozess wird wiederholt (iteriert).

(a) Bestimmen Sie die Anzahl a_n und die Radien r_n der im Schritt $n \in \mathbb{N}$ neu entstehenden Kreise.

(b) Geben Sie die Gesamtlänge s_n der Ränder aller Kreise an, die in jedem Schritt neu entstehen. Bestimmen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$.

(c) Geben Sie die Gesamtlänge aller Ränder an, die bis zum Schritt n entstanden sind.

(d) Geben Sie die Gesamtfläche der im Schritt $n \in \mathbb{N}$ neu entstehenden Kreise an. Bestimmen Sie den Grenzwert dieser Gesamtfläche für $n \to \infty$.



Präsenzübungen

Aufgabe P 53. *Stetige Fortsetzung*
Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich M der Funktion

$$f\colon M \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{x^2 - x}{x^2 - 3x + 2},$$

und untersuchen Sie das Verhalten von f für $x \to 1-0$, $x \to 1+0$, $x \to 2-0$, $x \to 2+0$, $x \to \infty$, $x \to -\infty$. An welchen Stellen ist f stetig fortsetzbar? Skizzieren Sie den Graphen der Funktion.

Aufgabe P 54. *Funktionsgrenzwerte*

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x^2+1} - \sqrt{3x^2-2}$

(b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^2 - 5x + 3}{3x^2 - 5x + 2}$

Aufgabe P 55. *Gleichheitsproblem*
Gegeben sind die Funktionen

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto e^x, \qquad g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x + 2.$$

Skizzieren Sie die Funktionen mit Hilfe einer geeigneten Wertetabelle im Intervall $[-2, 2]$. Begründen Sie mit Hilfe der Funktionswerte, wieviele Schnittpunkte die beiden Graphen mindestens aufweisen.

Aufgabe P 56. *Komplexe Wurzeln*
Gegeben ist die Funktion w, die $z \in \mathbb{C}$ auf diejenige komplexe Quadratwurzel von z abbildet, deren Argument kleiner als π ist.

(a) Berechnen Sie w an den Stellen $z \in \{0, 1, \mathrm{i}, -1, -\mathrm{i}\}$.

(b) Suchen Sie in der komplexen Zahlenebene zu jedem $\delta > 0$ ein $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - 1| < \delta$ und $|w(z) - w(1)| > 1$ (Skizze!).

(c) Ist w stetig?

Hinweis: Eine interaktive Darstellung des komplexen Wurzelziehens finden Sie unter
http://www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/HM-Stroppel-Material/

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Hausübungen Teil 1, empfohlener Bearbeitungszeitraum: 24. – 30. April

Aufgabe H 50. *Stetige Fortsetzung*

Geben Sie für jede der folgenden Funktionen den maximalen Definitionsbereich $D \subseteqq \mathbb{R}$ an und untersuchen Sie ihr Verhalten an den Rändern von D (inklusive $-\infty$ und $+\infty$).

(a) $f(x) = \dfrac{x^4 + 2x^2 - 3}{x^3 - 2x^2 - x + 2}$

(b) $g(x) = \sin\left(\frac{1}{x^2-1}\right)$

(c) $h(x) = \cos(\sqrt{x}) + \sqrt{\cos(x)}$

An welchen Punkten in $\mathbb{R}$ und mit welchen Funktionswerten lassen sich die Funktionen (einseitig) stetig fortsetzen?

Aufgabe H 51. *Stetigkeit*

Bestimmen Sie die rellen Parameter a, b und c so, dass die folgenden Funktionen auf ganz $\mathbb{R}$ stetig sind.

(a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{ax}{1+x^2}\,, & \text{für } x \leqq 1 \\[2ex] \dfrac{x^3-1}{6(1-x)}\,, & \text{für } x > 1 \end{cases}$, **(b)** $g(x) = \begin{cases} b\sin x\,, & \text{für } x < \pi/2 \\ 2\,, & \text{für } x = \pi/2 \\ \dfrac{c}{\pi}x\,, & \text{für } x > \pi/2 \end{cases}$

Aufgabe H 52. *Funktionsgrenzwerte*

(a) Bestimmen Sie folgende Funktionsgrenzwerte.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\sin(x))^2 - 5\sin(x)\cos(x/2)}{\dfrac{x^2-3x}{5x^3+4} + \dfrac{5x^3+4}{x^2-3x}} \qquad \lim_{x\to 0-0} \sin(x)/x^2 \qquad \lim_{x\to 0-0} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\tan(x)}$$

(b) Bestimmen Sie, für welche $a \in \mathbb{R}^+, b \in \mathbb{R}$ der Grenzwert

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x-5} - \sqrt{ax+b}$$

in $\mathbb{R}$ existiert.

Aufgabe H 53. *Gleichheitsproblem*

Gegeben sind die Funktionen

$$f\colon (\pi, \pi) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \left(4 - x^2\right) \tan\left(\frac{x}{2}\right) \quad \text{und} \quad g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto -x\,.$$

Zeigen Sie, dass die Gleichung $f(x) = g(x)$ mindestens drei Lösungen im Intervall $(-\pi, \pi)$ hat.

Hinweis: Untersuchen Sie das Verhalten von f für $x \to \pi - 0$ und $x \to -\pi + 0$ und werten Sie f an $x = \pm 2$ aus.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Hausübungen Teil 2, empfohlener Bearbeitungszeitraum: 1. - 7. Mai

Aufgabe H 54. *Konvergenzkreise*

Bestimmen Sie jeweils den Konvergenzradius ρ der folgenden Reihen und untersuchen Sie das Konvergenzverhalten in den Randpunkten des Konvergenzintervals für $z \in \mathbb{R}$. Skizzieren Sie die Konvergenzkreise.

(a) $\sum\limits_{j=0}^{\infty} \left(\dfrac{2j^2+j-1}{3j^2+2j+17}\right)^j z^j$ **(b)** $\sum\limits_{k=0}^{\infty} k!(z+1-\mathrm{i})^k$

(c) $\sum\limits_{\ell=3}^{\infty} \left(\dfrac{3\ell+(-1)^\ell\,\ell}{2\ell+1}\right)^\ell z^\ell$ **(d)** $\sum\limits_{m=0}^{\infty} z^{m!}$

Aufgabe H 55. *Auswertung Exponentialfunktion*

(a) Berechnen Sie $e^{\mathrm{i}\pi}$.

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe eines geeigneten elektronischen Hilfmittels für $n \in \{1, 2, \ldots, 10\}$ die Summe

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{(\mathrm{i}\pi)^k}{k!}\,.$$

(c) Bestimmen Sie das minimale n, für welches $|s_n - s_\infty| < 10^{-2}$ ist.

Aufgabe H 56. *Summe und Produkt von Potenzreihen*

Gegeben sind auf jeweils maximalen Definitionsbereichen $M_f, M_g \subseteqq \mathbb{C}$ die Funktionen

$$f\colon M_f \to \mathbb{C}\colon x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} x^n\,, \qquad g\colon M_g \to \mathbb{C}\colon z \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)^{1/2} z^k}{2^k}\,.$$

Bestimmen Sie die Konvergenzradien von f und g sowie M_f und M_g. Geben Sie die Potenzeihen von $u = f + g$, $v = f \cdot g$ und deren Konvergenzradien an.

Aufgabe H 57. *Trigonometrische Funktionen*

(a) Geben Sie die Exponentialschreibweise $re^{\mathrm{i}\varphi}$, $r \geqq 0$, $\varphi \in [0, 2\pi)$ der Zahlen $w := \sqrt{3}+\mathrm{i}$ und $z := 2^{-6}w^7$ an.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe der Formel von Euler und de Moivre, dass für alle $z \in \mathbb{C}$ die folgenden Gleichungen gelten.

$$2\cos(z) = e^{\mathrm{i}z} + e^{-\mathrm{i}z} \qquad 2\mathrm{i}\sin(z) = e^{\mathrm{i}z} - e^{-\mathrm{i}z}$$

(c) Verifizieren Sie die Additionstheoreme mit Hilfe von **(b)** für alle $z, w \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} 1 &= \big(\sin(z)\big)^2 + \big(\cos(z)\big)^2 \\ \sin(z+w) &= \cos(z)\sin(w) + \sin(z)\cos(w). \end{aligned}$$

Präsenzübungen

Aufgabe P 57. *Differenzierbarkeit*
Skizzieren Sie folgende Funktionen.

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} \sqrt{x} & \text{für } x \in [0, +\infty) \\ -\sqrt{-x} & \text{für } x \in (-\infty, 0) \end{cases}$$
$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x\,|x| + |x-1|$$

Untersuchen Sie mit Hilfe des Differenzenquotienten, ob die Funktion f an der Stelle $x_0 = 0$ und die Funktion g an den Stellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 1$ differenzierbar ist.

Aufgabe P 58. *Ableitungen*
Berechnen Sie die Ableitung folgender Funktionen.

(a) $f(x) = \mathrm{e}^{-1/x^2}$ **(b)** $g(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x+1}}$

(c) $h(x) = x^{\sin(x)}$ **(d)** $k(x) = \tan\left(\mathrm{e}^x\right)$

Aufgabe P 59. *Differentiation von Umkehrfunktionen*

(a) Untersuchen Sie, ob für die Funktion

$$f\colon\ [0, \pi] \to \mathbb{R}\colon x \mapsto (\cos x)^3$$

auf dem Intervall $[0, \pi]$ eine Umkehrabbildung $f^{-1}\colon f\left([0, \pi]\right) \to [0, \pi]$ existiert.

(b) Berechnen Sie an allen Stellen x_0, für die f^{-1} in $f(x_0)$ differenzierbar ist, die Ableitung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,y}\ f^{-1}(y)\Big|_{y=f(x_0)} .$$

Hinweis: Der Zusammenhang $\sin(x) = \sqrt{1 - \big(\cos(x)\big)^2}$ kann hilfreich sein. Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt diese Formel?

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 58. *Differenzierbarkeit*

Untersuchen Sie mit Hilfe des Differenzenquotienten, ob die Funktion f an der Stelle $x_0 = 0$ und die Funktion g an den Stellen $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$ differenzierbar sind.

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{x}{x+1} & \text{für } x \geqq 0 \\ \frac{1}{2}(x+1)^2 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto |x-1|^3 + x|x+1|$$

Aufgabe H 59. *Ableitungen*

Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich sowie die erste und zweite Ableitung der Funktionen

(a) $f(x) = \ln\big(\tan(x)\big)$, **(b)** $g(x) = \dfrac{x^2+1}{\sqrt{x^2-4}}$, **(c)** $h(x) = \big(\ln(x)\big)^x$.

Aufgabe H 60. *Differentiation der Umkehrfunktion*

(a) Bestimmen Sie Definitions- und Wertebereich der Funktion

$$f\colon D \to W : x \to \ln(1 + e^x)$$

und ihrer Umkehrfunktion f^{-1}. Bestimmen Sie die Ableitung von f^{-1}.

(b) Zeigen Sie, dass jede der folgenden Funktionen f auf dem Intervall $(-1, 1)$ eine Umkehrfunktion f^{-1} besitzt, und berechnen Sie deren Ableitung jeweils an der angegebenen Stelle $y = y_0$.

$$\textbf{(i)} \quad f(x) = x^3 + x + 1\,, \ \ y_0 = 1 \qquad \textbf{(ii)} \quad f(x) = \frac{1-x}{1+x}\,, \ \ y_0 = \frac{1}{3}$$

Aufgabe H 61. *Lineare Funktionen*

Die Funktion f sei an einer Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$ differenzierbar und genüge für alle $x, y \in \mathbb{R}$ der Gleichung $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

(a) Zeigen Sie mit Hilfe des Differenzenquotienten, dass f auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar und die Ableitung konstant ist.

Hinweis: Verwenden Sie $x = (x - x_0) + x_0$, um den Differenzenquotienten geeignet umzuformen.

(b) Beweisen Sie, dass eine Konstante $a \in \mathbb{R}$ existiert mit $f(x) = ax$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Hinweis: Verwenden Sie folgende Umformung des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung:

$$f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0)\,, \quad \xi \in (x, x_0)$$

Präsenzübungen

Aufgabe P 60. *Regel von l'Hospital*

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte.

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+\sin(3x)}{2x-\sin(x)}$ **(b)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\sin(x))^2}{\ln\big(\cos(x)\big)}$ **(c)** $\lim\limits_{x\to\pi/2-0} (\cos x)^{(x-\pi/2)}$

Aufgabe P 61. *Approximation des Sinus*

(a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom $T_3(\sin, x, 0)$ und das zugehörige Restglied nach Lagrange $R_3(\sin, x, 0)$.

(b) Skizzieren Sie die Graphen der Taylorpolynome $T_0(\sin, x, 0)$, $T_1(\sin, x, 0)$, $T_2(\sin, x, 0)$ und $T_3(\sin, x, 0)$. Vergleichen Sie diese mit dem Graphen von $\sin$.

(c) Bestimmen Sie eine möglichst gute obere Schranke für $|\sin(x) - x|$ durch Abschätzung des Restglieds $R_1(\sin, x, 0)$ für $x \in \{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\}$.

(d) Bestimmen Sie eine möglichst gute obere Schranke für $|\sin(x) - x|$ durch Abschätzung des Restglieds $R_2(\sin, x, 0)$ für $x \in \{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\}$.
Vergleichen Sie dieses Resultat mit **(c)** und der Skizze.

(e) In Anwendungen wird oft die folgende Approximation verwendet: „Für kleine Winkel ist $\sin(x) \approx x$“. Für welche x ist dies zu rechtfertigen?

Aufgabe P 62. *Grenzen der Regel von l'Hospital*

In Aufgabe **H 52** haben Sie folgende Funktionsgrenzwerte berechnet:

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\sin(x))^2 - 5\sin(x)\cos(x/2)}{\dfrac{x^2-3x}{5x^3+4} + \dfrac{5x^3+4}{x^2-3x}} = 0$

(b) $\lim\limits_{x\to 0-0} \dfrac{\sin(x)}{x^2} = -\infty$

(c) $\lim\limits_{x\to 0-0} \dfrac{x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\tan(x)} = 0$

Welche Probleme treten bei (dem Versuch) der Anwendung der Regel von l'Hospital auf?

Aufgabe P 63. *Verkettung von Taylorreihen*

Bestimmen Sie für die Funktionen

(a) $\big(g(x)\big)^2$ **(b)** $g\big(g(x)\big)$

mit

$$g(x) = x - 3x^2$$

die ersten zwei von Null verschiedenen Terme ihrer Taylor-Entwicklung zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 62. *Regel von l'Hospital*

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte.

(a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{\ln(x)}{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$

(b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6^x-3^x}{2x}$

(c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\cosh(x)-2}{\big(\sin(x)\big)^2}$

(d) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\big(\sin(x)-\cos(x)\big)^{\tan(x)}$

Aufgabe H 63. *Taylor-Entwicklung*

Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen die Taylorpolynome der Stufe 3 zum angegebenen Entwicklungspunkt x_0 .

(a) $f(x)=1+2x+3x^2$, $\quad x_0=2$

(b) $g(x)=e^{-x}\sin(x)$, $\quad x_0=0$

(c) $h(x)=\sqrt{x-3}$, $\quad x_0=4$

Verwenden Sie in Teil **(c)** die binomische Reihe.

Aufgabe H 64. *Approximationsfehler*

Gegeben ist die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^+\to\mathbb{R}\colon x\mapsto \ln(x)\,.$$

(a) Geben Sie eine Formel für die n-te Ableitung von f für $n\geqq 1$ an und beweisen Sie diese mit Hilfe einer vollständigen Induktion.

(b) Bestimmen Sie eine obere Schranke für den Fehler des Taylor-Polynoms der Stufe n von f mit Entwicklungspunkt $x_0=10$ auf dem Intervall $[10,11]$.

Aufgabe H 65. *Taylorentwicklung mittels Potenzreihen*

Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen die Taylor-Polynome der Stufe 3 zum Entwicklungspunkt $x_0=0$, indem Sie bekannte Potenzreihen verwenden.

$$\begin{aligned} f_1(x) &= e^x-1\\ f_2(x) &= (x-1)^2\\ f_3(x) &= (x-1)^2(e^x-1) \end{aligned}$$

Präsenzübungen

Aufgabe P 64. *Kurvendiskussion*

Gegeben sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x^3 - x$. Führen Sie eine Kurvendiskussion durch, d.h.
1) Geben Sie den maximalen Wertebereich an.
2) Testen Sie auf Symmetrie.
3) Bestimmen Sie die Nullstellen.
4) Berechnen Sie mögliche lokale Extrema.
5) Gibt es Wendepunkte?
6) Wie ist das Verhalten an den Rändern des Definitionsbereiches?
7) Fertigen Sie eine Skizze an.

Aufgabe P 65. *Extrema*

Untersuchen Sie, ob folgende Funktionen an der Stelle $x = 0$ ein lokales Extremum haben.

(a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x^{10}$

(b) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x^6 - x^5$

(c) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x^5 - x^4$

(d) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x^{2012}$

(e) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x^2(x-1)(x+2)$

Aufgabe P 66. *Integration*

Berechnen Sie

(a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^3 - x \,\mathrm{d}\,x$ **(b)** $\displaystyle\int 2^x \,\mathrm{d}\,x$ **(c)** $\displaystyle\int \frac{\sinh x}{\cosh x} \,\mathrm{d}\,x$ **(d)** $\displaystyle\int \ln(x) \,\mathrm{d}\,x$

Kann man das Resultat aus (a) auch ohne Rechnung erhalten?

Aufgabe P 67. *Taylor*

Bestimmen Sie für die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \displaystyle\int_0^x t \cdot \exp t \,\mathrm{d}\,t$ das Taylorpolynom $T_4(f, x, 0)$ der vierten Stufe um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$. Geben Sie eine Potenzreihe von f an.
(Dies ist eine Prüfungsaufgabe vom 27.02.2012, HM 1/2 für Ingenieurstudiengänge.)

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 66. *Kurvendiskussion*

Gegeben sei $f\colon D \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \begin{cases} |x+2| & \text{falls} \quad x \leqq -1 \\ -x^2+2 & \text{falls} \quad -1 < x < 1 \\ (x-2)^2(\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}) & \text{falls} \quad 1 \leqq x \end{cases}$.

Führen Sie eine Kurvendiskussion von f durch, wobei Sie mindestens die folgenden Punkte bearbeiten sollen:
maximaler Definitionsbereich, maximaler Wertebereich, Stetigkeit, Differenzierbarkeit, Nullstellen, lokale Extrema, Verhalten an den Rändern des Definitionsbereichs, Skizze.

Aufgabe H 67. *Integration*

Berechnen Sie

(a) $\displaystyle\int (\sin(x))^2 \,\mathrm{d}\,x$ **(b)** $\displaystyle\int x^2 \cdot \sin(x) \,\mathrm{d}\,x$

(c) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos(x)\cdot\sin(x)} \,\mathrm{d}\,x$ **(d)** $\displaystyle\int 2\,\frac{\sinh((x+1)^2)\cdot(x+1)}{\cosh((x+1)^2)} \,\mathrm{d}\,x$

Aufgabe H 68.

Sei K ein (geometrischer) Körper. Wenn es eine (Höhen-)Richtung gibt, zu der jeder senkrechte Schnitt Kreisgestalt hat und sich der Radius $r = r(h)$ stetig in Abhängigkeit von der Höhe h ausdrücken lässt, so gilt für das Volumen

$$V(K) = \pi \int_a^b (r(h))^2 \,\mathrm{d}\,h,$$

wobei a die minimale und b die maximale Höhenausdehnung des Körpers seien.

Betrachten Sie einen Körper mit $r(h) = 2 - \cos(h)$ und einer minimalen Höhe $a = 0$ und einer maximalen Höhe $b = 2\pi$.
Skizzieren Sie den Körper und berechnen Sie das Volumen. Stellen Sie eine Gleichung für die Höhe b auf, bei der $75\,\%$ des Volumens erreicht werden. Können Sie diese Gleichung (ohne elektronische Hilfsmittel) lösen? Gibt es eine Lösung?

Aufgabe H 69. *Taylor*

(a) Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \cos(x)$ hat die folgenden Eigenschaften:
- $f'' = -f$
- $f(0) = 1$
- $f'(0) = 0$

Weisen Sie nach, dass die Funktion f durch diese Eigenschaften eindeutig bestimmt ist. Stellen Sie dazu die Taylorreihe $T(f, x, 0)$ auf und zeigen Sie, dass diese gegen f konvergiert.

Hinweis: Verwenden Sie $A_x := \sup\{f(\xi) | 0 \leqq \xi \leqq |x|\}$ und $B_x := \sup\{f'(\xi) | 0 \leqq \xi \leqq |x|\}$.

(b) Gegeben sei die Funktion $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \displaystyle\int_0^x \cos(t^2)\,\mathrm{d}\,t$.

Entwickeln Sie die Funktion F unter Verwendung der Potenzreihe aus (a) in eine Potenzreihe um $x_0 = 0$.
(Dazu brauchen Sie die Funktion F selbst nicht zu berechnen.)

Präsenzübungen

Aufgabe P 68. *Integration durch Substitution*

Berechnen Sie durch geeignete Substitution die folgenden reellen Integrale:

(a) $\displaystyle\int x\,\mathrm{e}^{1-x^2}\,\mathrm{d}\,x$

(b) $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} \cos(x)\,\mathrm{e}^{\sin(x)}\,\mathrm{d}\,x$

(c) $\displaystyle\int \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}\,x$

Hinweis: Substitution $x = \sinh(t)$

Aufgabe P 69. *partielle Integration und Partialbruchzerlegung*

Man bestimme die folgenden Integrale:

(a) $\displaystyle\int \mathrm{e}^x \cos(2x)\;\mathrm{d}\,x$

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2(x+1)}\;\mathrm{d}\,x$

Aufgabe P 70. *Integration durch Partialbruchzerlegung*

Man berechne die folgenden Integrale:

(a) $\displaystyle\int \frac{x}{x+1}\;\mathrm{d}\,x$

(b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^4-4}\;\mathrm{d}\,x$

(c) $\displaystyle\int \left(\frac{x^2+4}{x^4-16} + \frac{x}{x^4-16}\right)\mathrm{d}\,x$

Aufgabe P 71. *Ein nützlicher Integrationstrick*

(a) Sei f eine differenzierbare Funktion. Zeigen Sie mit partieller Integration

$$\int f(x)\,\mathrm{d}\,x = \Big[x\,f(x)\Big] - \int x\,f'(x)\;\mathrm{d}\,x.$$

(b) Berechen Sie mit Hilfe partieller Integration und anschließender Substitution:

$$\int_0^1 \arctan(x)\,\mathrm{d}\,x.$$

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 70. *Integration gebrochen rationaler Funktionen*

Man berechne die Integrale

(a) $\displaystyle\int \frac{4x}{(x-1)^2(x+1)^2}\,\mathrm{d}\,x$

(b) $\displaystyle\int \frac{x^2}{1+x^3}\,\mathrm{d}\,x$

(c) $\displaystyle\int \frac{x}{(x^2+2x+3)^3}\,\mathrm{d}\,x$

(d) $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^4}\,\mathrm{d}\,x$

Hinweis: Es mag helfen, den Nenner zuerst komplex zu faktorisieren.

Aufgabe H 71. *krummlinig berandete Flächen*

Gegeben sind die Funktionen $f\colon [0,2] \to \mathbb{R}\colon x \mapsto -x^2+2x$ und $g_\alpha\colon [0,2] \mapsto \mathbb{R}\colon x \mapsto 2x+\alpha$ für $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie die Teilmenge $I \subsetneqq \mathbb{R}$ der Elemente α, für welche

$$\{x \in [0,2] \mid f(x) = g_\alpha(x)\} \neq \emptyset\,.$$

Geben Sie für jedes $\alpha \in I$ die Menge $\{x \in [0,2] \mid f(x) = g_\alpha(x)\}$ explizit an.

(b) Die Graphen von f und g_α für $\alpha \in I$ schließen die Fläche F_α ein. Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche F_α.

Aufgabe H 72. *Integration durch Substitution*

Berechnen Sie

(a) $\displaystyle\int \sin(\ln x)\,\mathrm{d}\,x$

(b) $\displaystyle\int \frac{(\arctan x)^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}\,x$

(c) $\displaystyle\int (\ln x)^2\,\mathrm{d}\,x$

Präsenzübungen

Aufgabe P 72. *uneigentliche Integrale*

Prüfen Sie auf Konvergenz und berechnen Sie (falls möglich). Skizzieren Sie den Graphen und die zugehörige Fläche.

(a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}\,x$

(b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}\,x$

(c) $\displaystyle\int_0^{\pi} \tan(x)\,\mathrm{d}\,x$

(d) $\displaystyle\int_0^{1} \arcsin(x)\,\mathrm{d}\,x$, für die Umkehrfunktion $\arcsin\colon [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

Hinweis: Partielle Integration, die Ableitung von $\arcsin(x)$ ist $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Aufgabe P 73. *geometrische Interpretation von Integralen*

Gegeben sei der Einheitskreis in der Ebene mit Mittelpunkt im Ursprung. Parametrisieren Sie den oberen Bogen ($y \geqq 0$) als Graphen einer Funktion f.

(a) Welche geometrische Bedeutung hat das Integral über f von -1 bis 1? Berechnen Sie es.

(b) Berechnen Sie nun $\displaystyle\pi\int_{-1}^{1} (f(x))^2\,\mathrm{d}\,x$. Welche geometrische Bedeutung hat dies?

Aufgabe P 74. *Ober- und Untersummen*

Es sei $n \in \mathbb{N}$. Wir betrachten die Partition $\{\frac{0}{n}, \frac{1}{n}, \cdots, \frac{n}{n}\}$ von $[0,1]$. Bilden Sie zu dieser Partition die Ober- und Untersumme zur Funktion $f(x) = x$. Konvergieren diese Summen für $n \to \infty$? Falls ja, gegen welchen Wert? Vergleichen Sie diesen mit $\int_0^1 x\,\mathrm{d}\,x$.

Aufgabe P 75. *uneigentliche Integrale und Funktionsgrenzwerte*

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige, monoton fallende Funktion mit $f(x) \geqq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Zeigen Sie: Wenn $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}\,x$ konvergiert, so gilt $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 73. *uneigentliche Integrale*

Konvergieren folgende Integrale? Berechnen Sie sie (falls möglich).

(a) $\displaystyle\int_{-2}^{+\infty} 3^{-x}\,\mathrm{d}\,x$ **(b)** $\displaystyle\int_0^1 \ln(x)\,\mathrm{d}\,x$ **(c)** $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{x^2-4}\,\mathrm{d}\,x$

und **(d)** $\displaystyle\int_0^1 \arccos(x)\,\mathrm{d}\,x$, für die Umkehrfunktion des Cosinus $\arccos\colon [-1,1] \to [0,\pi]$

Aufgabe H 74. *uneigentliche Integrale*

(a) Hat die Fläche, die von den Graphen der Funktionen $f(x) = \arctan(x)$ und $g(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x}$ und der Geraden $x = 1$ eingeschlossen wird, endlichen Inhalt? Berechnen Sie ihn gegebenenfalls.

(b) Konvergiert das Integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2)\,\mathrm{d}\,x$?

(c) Konvergiert $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{(\cos(x)-\sin(x))^2}{x^2}\,\mathrm{d}\,x$?

Aufgabe H 75. *Ober- und Untersumme*

(a) Zeigen Sie mit Hilfe von vollständiger Induktion, dass $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2}{4}(n+1)^2$ gilt.

(b) Es sei $y > 0$ und $f\colon [0,y] \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x^3$. Berechnen Sie mittels Ober- und Untersummen $\displaystyle\int_0^y f(x)\,\mathrm{d}\,x$.
Wählen Sie dabei die Partitionen so, dass der Abstand zwischen zwei benachbarten Teilungspunkten immer gleich ist.

Aufgabe H 76. *Funktionsanpassung*

Es sei f ein Polynom vom Grad $\leqq 5$ mit folgenden Eigenschaften:

- für alle $c \in \mathbb{R}$ gilt $\displaystyle\int_{-c}^{c} f(x)\,\mathrm{d}\,x = 0$
- $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}\,x = -\frac{1}{6}$
- $\displaystyle\int_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}\,x = \frac{9}{2}$
- $f'(1) = 0$

Bestimmen Sie f und fertigen Sie eine Skizze an.

Präsenzübungen

Aufgabe P 76. *Funktionen in mehreren Veränderlichen, Niveaumengen*

(a) Skizzieren Sie die Niveaulinien der Funktionen

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y)^\intercal \mapsto x^2+y^2 \text{ und } \quad g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y)^\intercal \mapsto \cos(\sqrt{x^2+y^2})$$

zu den Niveaus $c=0$, $c=-1$ und $c=2$. Skizzieren Sie den Graphen von f.

(b) Bestimmen Sie die Nullstellenmenge und die Vorzeichenverteilung der Funktion

$$h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y)^\intercal \mapsto y\left(x^2-y-1\right)(y-1)^2\left(x^2+y^2+2y\right).$$

Aufgabe P 77. *Stetigkeit*

Lassen sich die folgenden Funktionen im Ursprung stetig fortsetzen?

(a) $f_1\colon \mathbb{R}^2 \smallsetminus (0,0)^\intercal \to \mathbb{R}\colon (x,y)^\intercal \mapsto \dfrac{x-y}{|x|+|y|}$

(b) $f_2\colon \mathbb{R}^2 \smallsetminus (0,0)^\intercal \to \mathbb{R}\colon (x,y)^\intercal \mapsto \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$

Aufgabe P 78. *Potenzreihen*

(a) Berechnen Sie den Konvergenzradius ρ und die Ableitung der Funktion

$$f\colon (-\rho,\rho) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2k+1} x^{2k+1}$$

(b) Finden Sie eine geschlossene Darstellung für f'.

(c) Finden Sie eine geschlossene Darstellung für f.

Aufgabe P 79. *Integralkriterium*

Für welche Werte von $\gamma \in \mathbb{R}_+$ konvergiert die folgende Reihe?

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\,(\ln k)^\gamma}$$

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 77. *Potenzreihen*

(a) Berechnen Sie den Konvergenzradius ρ und die ersten zwei Ableitung der Funktion

$$f\colon (-\rho,\rho) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+2)(2k+1)} x^{2k+2}$$

(b) Finden Sie eine geschlossene Darstellung für f''.

(c) Finden Sie eine geschlossene Darstellung für f.

(d) Zeigen Sie unter Verwendung der Potenzreihe für f', dass

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

Aufgabe H 78. *Stetigkeit*

Lassen sich die folgenden Funktionen im Ursprung stetig fortsetzen?

(a) $f_1\colon \mathbb{R}^2 \smallsetminus \left\{(0,0)^\intercal\right\} \to \mathbb{R}\colon (x,y)^\intercal \mapsto \dfrac{x+y^2}{x^2+y^2}$

(b) $f_2\colon \mathbb{R}^2 \smallsetminus \left\{(0,0)^\intercal\right\} \to \mathbb{R}\colon (x,y)^\intercal \mapsto \dfrac{x^4-y^4}{x^2+2y^2}$

Aufgabe H 79. *Γ-Funktion und Stirling-Formel*

Die Γ-Funktion (siehe 3.7.12) ist definiert durch

$$\Gamma\colon\ (0,+\infty) : \mathbb{R}\colon x \mapsto \int_{0+0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{x-1} \,\mathrm{d}\, t.$$

(a) Zeigen Sie, dass Γ für alle $x \in (0,+\infty)$ die Gleichung $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ erfüllt.

(b) Zeigen Sie, dass für jede natürliche Zahl n die Gleichung $\Gamma(n+1) = n!$ gilt.

(c) Zeigen Sie durch Betrachtung geeigneter Ober- beziehungsweise Untersummen, dass für jede natürliche Zahl n gilt:

$$\int_{2}^{n+1} \ln(x-1)\,\mathrm{d}\,x \leqq \sum_{k=1}^{n} \ln(k) \leqq \int_{1}^{n+1} \ln(x)\,\mathrm{d}\,x$$

(d) Zeigen Sie, dass für jede natürliche Zahl n gilt:

$$\mathrm{e}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \leqq n! \leqq \mathrm{e}\left(\frac{n+1}{\mathrm{e}}\right)^{n+1}$$

Hinweis: Dies ist eine (leicht vereinfachte) Version der sogenannten Stirling-Formel, die oft in der Form $n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$ auftaucht.

Präsenzübungen

Aufgabe P 80. *partielle Ableitungen*

Berechnen Sie den Gradienten und die Hesse-Matrix folgender Funktionen.

(a) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto (x+y)^2$

(b) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto \exp(xy)$

(c) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon (x,y,z) \mapsto z^2\cos(x)\sin(y)$

(d) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon (x,y,z) \mapsto (x+z)^2(y+a)^2$, wobei $a \in \mathbb{R}$

Des Weiteren berechnen Sie $\dfrac{\partial^{11}}{\partial z\,\partial x\,\partial y\,\partial x\,\partial z\,\partial x\,\partial y\,\partial y\,\partial z\,\partial x\,\partial y} z^2\cos(x)\sin(y)$.

Aufgabe P 81. *kompakt, beschränkt, abgeschlossen, offen, konvex*

Überprüfen Sie, ob die Mengen A bis E abgeschlossen, beschränkt, offen, kompakt bzw. konvex sind.

(a) $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 4\}$

(b) $B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$

(c) $C := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x,y) \in B \wedge y < 1\}$

(d) $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x,y) \in B \wedge y \leqq 2\}$

(e) $E := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqq 1\} \smallsetminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 \leqq 1\}$

Aufgabe P 82. *kritische Stellen, Richtungsableitung*

Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto x^4 - 2x^2 + y^2$.

(a) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen bis zweiter Ordnung.

(b) Berechnen Sie die Richtungsableitung in Richtung $\frac{1}{\sqrt{5}}(1,2)$ an der Stelle $(1,0)$.

(c) Berechnen Sie die kritischen Stellen von f.

Aufgabe P 83. *Taylor*

Gegeben seien die Funktionen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto x^2y^5\exp(x)$
und $g\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto y\ln(x)$.
Berechnen Sie

(a) $T_2(f,(x,y),(0,0))$

(b) $T_2(g,(x,y),(1,1))$

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 80. *kritische Stellen*

Berechnen Sie die kritischen Stellen folgender Funktionen.

(a) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto \frac{1}{3}x^3 + x^2y^2 - 3xy^4$

(b) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto \exp(x)(y^2 + x^2y)$

(c) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon (x,y,z) \mapsto x^3 + x^2y - 2xyz + yz^2 + z^3$

(d) $f\colon (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})^3 \to \mathbb{R}\colon (x,y,z) \mapsto \sin(x)\cos(y)\tan(z)$

Aufgabe H 81. *Richtungsableitung, Taylor*

Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon (x,y,z) \mapsto \exp(yz)(\cosh(x) + (y+z)^2)$.

(a) Bestimmen Sie an der Stelle $(1,1,1)$ die Ableitungen der Funktion f in die Richtungen $\frac{1}{\sqrt{5}}(0,1,2)^\intercal$ und $\frac{1}{\sqrt{5}}(0,2,1)^\intercal$.

(b) Berechnen Sie $T_1(f,(x,y,z),(0,1,0)$ und $T_2(f,(x,y,z),(0,1,0))$.
Welchen Fehler weist die Näherung von f durch $T_1(f,(x,y,z),(0,1,0))$ bzw. durch $T_2(f,(x,y,z),(0,1,0))$ an der Stelle $(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ auf?

(c) Bestimmen Sie (unabhängig von (a) und (b)) mit Hilfe einer linearen Approximation einen Näherungswert für $\sqrt{1{,}1^2 + 2{,}1^2 + 1{,}9^2}$. Benutzen Sie dazu ein Taylor-Polynom der Stufe eins einer passenden Funktion g mit dem nächsten ganzzahligen Entwicklungspunkt.

Aufgabe H 82. *geometrische Interpretation, Rotationsfläche*

Gegeben sei $f\colon D \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto \cos(x^2+y^2)$ mit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leqq 2\pi\}$.

(a) Berechnen Sie den Gradienten von f.

(b) Der Graph von f kann als Bild einer Abbildung

$$g\colon [0,2\pi] \times [0,2\pi) \to \mathbb{R}^3\colon (r,\varphi) \mapsto (r\cos\varphi, r\sin\varphi, h(r))^\intercal$$

dargestellt werden, wobei r für den Radius und φ für den Winkel der Polarkoordinaten stehen. Die Abbildung g parametrisiert so eine Rotationsfläche.
Geben Sie $h(r)$ so an, dass der Graph von f mit dem Bild von g übereinstimmt.

(c) Bilden Sie die partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned} \partial_r g(r,\varphi) &= \left(\tfrac{\partial}{\partial r}g_1(r,\varphi), \tfrac{\partial}{\partial r}g_2(r,\varphi), \tfrac{\partial}{\partial r}g_3(r,\varphi)\right)^\intercal \quad \text{und} \\ \partial_\varphi g(r,\varphi) &= \left(\tfrac{\partial}{\partial \varphi}g_1(r,\varphi), \tfrac{\partial}{\partial \varphi}g_2(r,\varphi), \tfrac{\partial}{\partial \varphi}g_3(r,\varphi)\right)^\intercal . \end{aligned}$$

Für welche (r,φ) sind diese linear unabhängig?

(d) Sei $T_{(r,\varphi)}g := \{g(r,\varphi) + \lambda\partial_r g(r,\varphi) + \mu\partial_\varphi g(r,\varphi) \mid \lambda,\mu \in \mathbb{R}\}$. Überprüfen Sie, ob es sich hierbei um die Tangentialebene im Punkt (r,φ) an das Bild von g handelt, indem Sie die Tangentialebenen des Graphen von f betrachten.

Präsenzübungen

Aufgabe P 84. *Extrema*
Bestimmen Sie die Nullstellenmenge und die lokalen Extrema der Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y)^\intercal \mapsto y(y+1)\left(x^2+y^2+2y\right)$$

sowie deren Typ.

Aufgabe P 85. *Extrema unter Nebenbedingungen*
Bestimmen Sie die Punkte des Kreises mit Radius 1 um den Ursprung, auf dem die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y)^\intercal \mapsto xy$$

ihre maximalen und minimalen Werte annimmt.

Aufgabe P 86. *Parametrisierung*
Berechnen Sie die Extrema der Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y)^\intercal \mapsto x^2-y^2$$

unter der Nebenbedingung

$$x^2+y^2=1\,.$$

Gehen Sie dazu folgendermaßen vor:

- Die Nebenbedingung kann als $y^2 = 1 - x^2$ geschrieben werden. Ersetzen Sie y^2 im Funktionsterm von f und untersuchen Sie die entstehende Funktion in einer Veränderlichen auf Extrema.
- Benutzen Sie die Multiplikatormethode von Lagrange.
- Vergleichen Sie die Ergebnisse.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 83. *kritische Stellen*

Bestimmen Sie die lokalen Extremstellen der Funktionen

$$\begin{aligned} f &: (0,2\pi)\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R} &&: (x,y,z)^\intercal \mapsto \sin(x)(\cosh(y+z)+z^2) \qquad \text{und} \\ g &: U_2\left(\left(1,\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right)^\intercal\right)\to\mathbb{R} &&: (x,y,z)^\intercal \mapsto x^2+2y^2+2z^2-x^2yz \end{aligned}$$

sowie deren Typ.

Aufgabe H 84. *Taylor-Polynom*

In der Relativitätstheorie wird die Energie E eines Teilchens der Masse m in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit beschrieben durch

$$E\colon \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}\colon v\mapsto E(v)=\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{\langle v\,|v\rangle}{c^2}}},$$

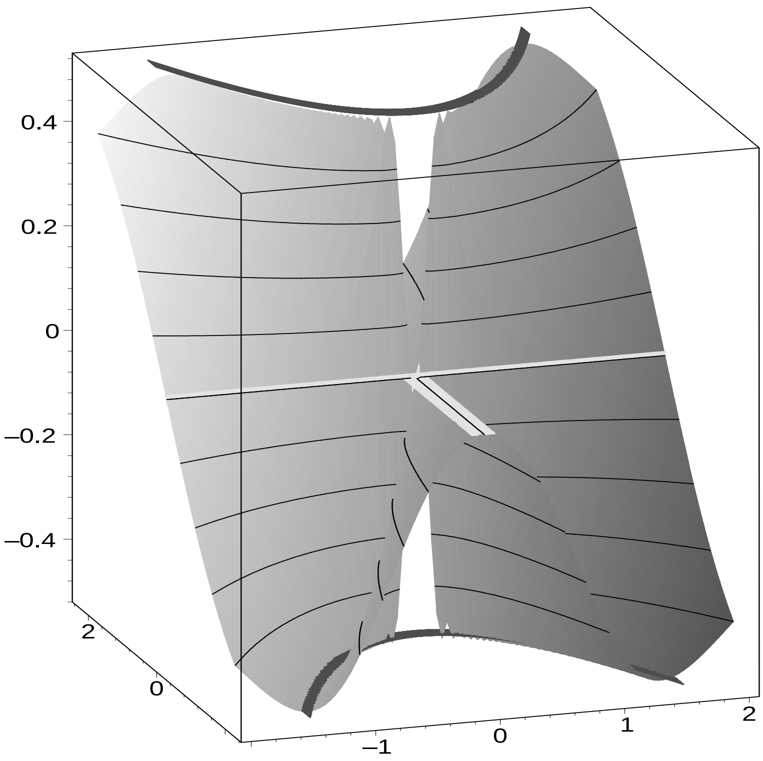
wobei $v=(v_1,v_2,v_3)^\intercal$ die Geschwindigkeit und c die Lichtgeschwindigkeit bezeichnet. Berechnen Sie das Taylorpolynom der Funktion E der Stufe 2 zum Entwicklungspunkt $v=(0,0,0)$.

Aufgabe H 85. *kritische Stellen*

Bestimmen Sie die kritischen Stellen der Funktion

$$f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\colon (x,y)^\intercal\mapsto\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{für } (x,y)^\intercal\neq(0,0)^\intercal\\ 0 & \text{für } (x,y)^\intercal=(0,0)^\intercal\end{cases}$$

und deren Typ.
Skizze:



Aufgabe H 86. *Optimierung unter Nebenbedingungen*

Im $\mathbb{R}^2$ sollen auf dem Kreis mit Radius 1 um den Ursprung n Punkte so verteilt werden, dass das von diesen Punkten gebildete n-Eck maximalen Flächeninhalt hat. Bestimmen Sie die Anordnung der Punkte, indem Sie ein Optimierungsproblem aufstellen und dieses lösen.

Hinweis: Bilden Sie die Verbindungsgeraden von den Punkten zum Mittelpunkt des Kreises und untersuchen Sie die Winkel zwischen diesen Geraden.

Präsenzübungen

Aufgabe P 87. *Gradientenfeld*

Überprüfen Sie, ob es sich um ein Gradientenfeld handelt.

(a) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon (x,y)^\mathsf{T} \mapsto (2x + \mathrm{e}^x, 2y)^\mathsf{T}$

(b) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon (x,y)^\mathsf{T} \mapsto (\cos(2x)\cos(x+y^2), 2y\cos(2x)\cos(x+y^2))^\mathsf{T}$

(c) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon (x,y)^\mathsf{T} \mapsto (y\sinh(y), (xy+1)\cosh(y) + x\sinh(y))^\mathsf{T}$

Aufgabe P 88. *Potential*

Sie haben in der obigen Aufgabe P 87 überprüft, welche Felder Gradientenfelder sind. Bestimmen Sie zu diesen das zugehörige Potential.

Aufgabe P 89. *Kettenregel*

Berechnen Sie die Jacobi-Matrizen der Funktionen

$$f\colon \quad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \big((x+y)^2 + y^4\big) \qquad \text{und}$$

$$g\colon \quad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad : \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2u+v+7 \\ v^2+u \end{pmatrix}$$

sowie die Jacobi-Matrix der Verknüpfung $f \circ g$ an der Stelle $(1,0)^\mathsf{T}$.

Aufgabe P 90. *Differentiationsregeln*

Seien $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ zwei stetig differenzierbare Funktionen. Die Funktion g habe keine Nullstelle in D, weiter sei a ein Punkt im Inneren von D. Außerdem sei $h\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein zweimal stetig differenzierbares Vektorfeld, und sei $b \in \mathbb{R}^3$.
Rechnen Sie folgende Gleichungen nach.

(a) $\operatorname{grad}(f+g)(a) = \operatorname{grad} f(a) + \operatorname{grad} g(a)$

(b) $\operatorname{grad}\left(\dfrac{f}{g}\right)(a) = \dfrac{g(a)\operatorname{grad} f(a) - f(a)\operatorname{grad} g(a)}{g(a)^2}$

(c) $\operatorname{grad}\operatorname{div} h(b) - \operatorname{rot}\operatorname{rot} h(b) = (\Delta h_1(b), \Delta h_2(b), \Delta h_3(b))^\mathsf{T}$

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 87. *Gradientenfeld*

Gegeben sei das Vektorfeld $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ durch

$$(x,y,z)^\intercal \mapsto \left(\frac{7y+2xz+6x^2y^3+\alpha x^3y^2z}{1+x^2y^2}, \frac{7x-\alpha y+6x^3y^2-2x^2y^3}{1+x^2y^2}, \frac{\alpha}{2}+x^2\right)^\intercal,$$

mit $\alpha \in \mathbb{R}$.
Für welche α ist g ein Gradientenfeld?

Aufgabe H 88. *Jacobimatrix, Kugelkoordinaten*

Gegeben sei $f\colon D \to f(D) \subseteqq \mathbb{R}^3\colon (r,\alpha,\beta)^\intercal \mapsto (r\cos(\alpha)\cos(\beta), r\cos(\alpha)\sin(\beta), r\sin(\alpha))^\intercal$.
Wählen Sie eine möglichst große offene Teilmenge $D \subseteqq \mathbb{R}^3$ so, dass f injektiv ist.
Berechnen Sie die Jacobimatrix von f. Berechnen Sie außerdem die Determinante der Jacobimatrix der Umkehrfunktion von f an der Stelle $(x,y,z)^\intercal = (1,1,1)^\intercal$.

Aufgabe H 89. *Divergenz, Rotation, Potential*

Berechnen Sie die Divergenz, die Rotation und, falls möglich, das Potential folgender Vektorfelder.

(a) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon (x,y,z)^\intercal \mapsto (x^2, y^2, -z^2)^\intercal$

(b) $f\colon \mathbb{R}^3_+ \to \mathbb{R}^3\colon (x,y,z)^\intercal \mapsto (yx^{y-1}\sin(z), x^y\ln(x)\sin(z), x^y\cos(z))^\intercal$

(c) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon (x,y)^\intercal \mapsto (\exp(xy), \cos(xy))^\intercal$

(d) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon (x,y,z)^\intercal \mapsto \left(\frac{x}{y^2+1}, \frac{y}{z^2+1}, \frac{z}{x^2+1}\right)^\intercal$

Aufgabe H 90. *geometrische Bedeutung des Gradienten*

Gegeben sei eine Wendelfläche als Graph der Funktion

$$f\colon D \to \mathbb{R}\colon (x,y)^\intercal \mapsto \arctan\left(\frac{y}{x}\right),$$

wobei $D = \{(x,y)^\intercal \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leqq 4 \wedge x > 0\}$. Ein Wassertropfen kriecht, bedingt durch die Schwerkraft, auf dieser Wendelfläche in einer Bahn mit konstantem Abstand zur z-Achse. Die Schwerkraft sei in Richtung $(0,0,-1)^\intercal$ gerichtet.
Um die Bahn des Tropfen nachzuvollziehen, betrachten Sie eine Kurve in D, die durch $u\colon (0,\pi) \to D\colon t \mapsto (\sin(t), \cos(t))$ gegeben ist, und bilden diese Kurve unter f ab. Berechnen Sie den Gradienten von f und werten diesen an der Stelle $u(t)$ aus. Vergleichen Sie ihr Ergebnis mit $\dot{u}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}u(t)$. Berechnen Sie $\dot{c}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}(\sin(t), \cos(t), f(u(t)))$. Dies ist die Tangente der Kurve, die der Tropfen auf dem Graphen beschreibt.

Präsenzübungen

Aufgabe P 91. *Parametrisierung von Kurven*

Seien die Punkte $E = (-1,0), F = (0,1)$ und $G = (1,0)$ in $\mathbb{R}^2$ gegeben. Geben Sie jeweils eine Parametrisierung $C\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ einer Kurve an, die die angegebenen Bedingungen erfüllt.

(a) Es ist $C(0) = E$, $C(1) = F$, und C parametrisiert eine Strecke.

(b) Es ist $C(0) = E$, $C(1) = G$, und C parametrisiert einen Streckenzug, der F enthält.

(c) Es ist $C(0) = E$, $C(1) = G$, der Punkt F liegt auf der Kurve, und diese ist ein Kreisbogen.

(d) Sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ein Vektorfeld mit Potential $U : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x_1 + x_2$. Sei K die in (a) parametrisierte Kurve. Berechnen Sie $\displaystyle\int_K g(x) \bullet \mathrm{d}\,x$.

Aufgabe P 92. *Potential und Kurvenintegrale*

Gegeben ist das Vektorfeld $v\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon\ (x_1, x_2)^\intercal \mapsto (x_1^2, x_1)^\intercal$ und die Parametrisierung der Kurve K durch $C\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2\colon \alpha \mapsto (\cos(\alpha), \sin(\alpha))^\intercal$.

(a) Entscheiden Sie, ob v ein Potential besitzt.

(b) Berechnen Sie $\displaystyle\oint_K v(x) \bullet \mathrm{d}\,x$.

Aufgabe P 93. *Länge von Kurven*

Berechnen Sie die Länge folgender Kurven. Skizzieren Sie die Kurven.

(a) $C\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$

(b) $C\colon [0, (2\pi)^{1/2}] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t^2) \\ \sin(t^2) \end{pmatrix}$

(c) $C\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3\colon t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t/\pi \end{pmatrix}$

Aufgabe P 94. *Parameterintegrale*

Gegeben ist für $n \in \mathbb{N}_0$ die Besselfunktion

$$J_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\sin(t) - nt)\,\mathrm{d}\,t\ .$$

Zeigen Sie, dass $y(x) = J_n(x)$ die folgende Differentialgleichung erfüllt.

$$x^2 y''(x) + xy'(x) + (x^2 - n^2)y(x) = 0.$$

Hausübungen (Abgabe bis spätestens 31.7.2012 in einer Sprechstunde):

Aufgabe H 91. *Längenberechnung und Kurvenintegrale skalarer Funktionen*
Gegeben sei die skalare Funktion

$$f\colon (\mathbb{R} \smallsetminus \{0\}) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon (x,y,z) \mapsto \frac{2y}{x} + 1$$

und die Kurve

$$C\colon [1,3] \to \mathbb{R}^3\colon t \mapsto \left(2t, t^2, \frac{1}{3}t^3\right)^\intercal .$$

Berechnen Sie die Kurvenintegrale $\int_C f(s)\,\mathrm{d}\,s$ und $\int_C 1\,\mathrm{d}\,s$. Begründen Sie mittels einer Abschätzung der Integranden, welcher Integralwert der größere von beiden ist.

Aufgabe H 92. *Kurvendiskussion*
Gegeben sei die Kurve mit der Parameterdarstellung

$$C\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \left(\frac{3t}{1+t^3}, \frac{3t^2}{1+t^3}\right)^\intercal .$$

(a) Man bestimme die Tangente an C in $C(1)$. Man bestimme alle Punkte auf C mit Tangente in Richtung einer der Koordinatenachsen. Skizze!

(b) Es sei S die Strecke mit den Endpunkten $A = (0,0)$ und $B = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$. Man bestimme den Flächeninhalt der durch C und S eingeschlossenen Fläche.
Hinweis: Man kann $\mathrm{d}\,y = y'(t)\,\mathrm{d}\,t$ verwenden.

Aufgabe H 93. *Potential, Kurvenintegral*
Gegeben sei das Gradientenfeld $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon (x,y)^\intercal \mapsto (2x+y, x+1)^\intercal$.

(a) Bestimmen Sie ein Potential für g. Entscheiden Sie, ob dieses Potential eine harmonische Funktion ist.

(b) Berechnen Sie das Kurvenintegral von g über den Halbkreis von $(0,-1)^\intercal$ nach $(0,1)^\intercal$ mit Radius 1 durch $(1,0)^\intercal$ ohne das Potential zu verwenden.

(c) Berechnen Sie das Kurvenintegral von g über die Strecke von $(0,-1)^\intercal$ nach $(0,1)^\intercal$ ohne das Potential zu verwenden.

(d) Bestätigen Sie die Resultate aus (b) und (c) mit Hilfe des Potentials.

Aufgabe H 94. *Kurvenintegral, Potential*

(a) Es sei das Vektorfeld v gegeben durch

$$v\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x_1x_2^2x_3^2 + 1 \\ 2x_1^2x_2x_3^2 + 1 \\ 2x_1^2x_2^2x_3 + 1 \end{pmatrix} .$$

Geben Sie ein Potential von v an, falls ein solches existiert.

(b) Ferner sei ein Weg in $\mathbb{R}^3$ gegeben

$$C\colon [0,1] \to \mathbb{R}^3\colon t \mapsto \begin{pmatrix} e^t + t^2 \\ t^2 \\ t^2 + 1 \end{pmatrix} .$$

Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_C v(x) \bullet \mathrm{d}\,x$.

Hinweis: Benutzen Sie das Potential.

(c) Es sei das Vektorfeld w gegeben durch

$$w\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x_1x_2^2x_3^2 + 1 + x_2 \\ 2x_1^2x_2x_3^2 + 1 \\ 2x_1^2x_2^2x_3 + 1 \end{pmatrix} .$$

Sei K die durch $C : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3 : t \mapsto (\cos(t), \sin(t), \cos(t))$ parametrisierte Kurve. Skizzieren Sie K. Bestimmen Sie das Umlaufintegral $\oint_K w(x) \bullet \mathrm{d}\,x$.

Hinweis: Vergleichen Sie w und v.

Aufgabe H 95. *Zirkulation und Ausfluss*

Gegeben sind die Geschwindigkeitsfelder einer Strömung

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \text{ und } g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ -u \end{pmatrix} .$$

Sei E die durch $C : [0, 2\pi] : t \to (\sin(t), \sin(t) + 2\cos(t))$ parametrisierte Kurve. Skizzieren Sie die Kurve.

(a) Bestimmen Sie die Zirkulation von f und von g längs E.

(b) Bestimmen Sie den Ausfluss von f und von g durch E.

(c) Geben Sie eine Gleichung an, die E als Quadrik beschreibt.

Aufgabe H 96. *Parametrisierung, Extremstellen*

Sei g die Gerade im $\mathbb{R}^3$ durch die Punkte $(0, 0, 0)$ und $(1, 1, 1)$. Sei h die Gerade durch die Punkte $(0, 1, 0)$ und $(0, 0, 1)$.

(a) Bestimmen Sie Punkte P auf g und Q auf h derart, dass die Gerade durch P und Q senkrecht auf g und h steht. Berechnen Sie den Abstand von P und Q.

(b) Parametrisieren Sie die Geraden g und h. Berechnen Sie den minimalen Abstand eines Punktes von g von einem Punkt von h unter Verwendung des Gradienten des Quadrats der Abstandsfunktion. Vergleichen Sie mit dem Resultat aus (a).