D. Garmatter
C. Apprich, B. Krinn
J. Hörner, M. Werth

15. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 2

M. Künzer
M. Stroppel

Sommersemester 2014

Präsenzübungen

Aufgabe P 49. *Konvergenzkriterien für Reihen*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Reihen konvergieren.

(a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k}{(k+1)!}$ **(b)** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{13}{7+6k}$ **(c)** $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}$ **(d)** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{((-1)^k+1)\,3^{k+2}}{4^{k-1}}$

Aufgabe P 50. *ε-δ-Kriterium*

Zeigen Sie mit Hilfe des ε-δ-Kriteriums, dass die folgenden Funktionen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ an der angegebenen Stelle x_0 stetig sind.

(a) $f(x) = 5x-3, \quad x_0 = 1$ **(b)** $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}\,, \quad x_0 = 0$

Aufgabe P 51. *Berechnen von Reihenwerten*

Berechnen Sie die Werte der folgenden Reihen.

(a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k}$ **(b)** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{4^k}$ **(c)** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ **(d)** $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{3}{k!}$

Hinweis: Schreiben Sie $\frac{1}{k(k+1)}$ als $\frac{A}{k}+\frac{B}{k+1}$ mit $A, B \in \mathbb{R}$.

Aufgabe P 52. *Leibniz-Kriterium*

Gegeben ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k-1}$.

(a) Zeigen Sie, dass diese Reihe konvergiert.

(b) Bestimmen Sie für $n \in \{1,2,3\}$ jeweils die n-te Partialsumme

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{2k-1}\,.$$

(c) Geben Sie ein $n \in \mathbb{N}$ an, für das sich S_n vom Wert der Reihe um weniger als $\frac{1}{6}$ unterscheidet.

(d) Ist die Reihe absolut konvergent?

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 46. *Konvergenz und Werte von Reihen*

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und geben Sie ihren Wert an, falls er existiert.

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{7^k}{3^{2k+1}}$ **(b)** $\displaystyle\sum_{k=-1}^{\infty} \frac{3^k}{7^{k/2}(2k+3)}$ **(c)** $\displaystyle\sum_{k=4}^{\infty} \frac{3}{(3k+1)(3k+7)}$

Aufgabe H 47. *Parameterabhängige Reihe*

Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten der Reihe

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j a^j - j!}{|a|^j \cdot j!}$$

in Abhängigkeit von dem Parameter $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Aufgabe H 48. *Stetigkeit*

Gegeben sind die folgenden Funktionen $f_j \colon D_j \to \mathbb{R}$, $j \in \{1,2\}$:

$$f_1(x) = \begin{cases} \dfrac{x+|x|}{2x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}, \qquad f_2(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-3x+2}{x^3-6x^2+11x-6}, & x \neq 2 \\ -1, & x = 2 \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie jeweils den maximalen Definitionsbereich $D_j \subseteq \mathbb{R}$, für den die Abbildungsvorschrift sinnvoll ist. Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen f_1 und f_2.

(b) Finden Sie zu jedem $0 < \varepsilon < 1$ ein $\delta > 0$ so, dass $f_2(U_\delta(2) \cap D_2) \subseteq U_\varepsilon(f_2(2))$.

(c) Existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so, dass $f_1(U_\delta(0) \cap D_1) \subseteq U_\varepsilon(f_1(0))$ gilt?

(d) Ist die Funktion f_1 stetig an der Stelle $x = 0$? Ist f_2 stetig an der Stelle $x = 2$?

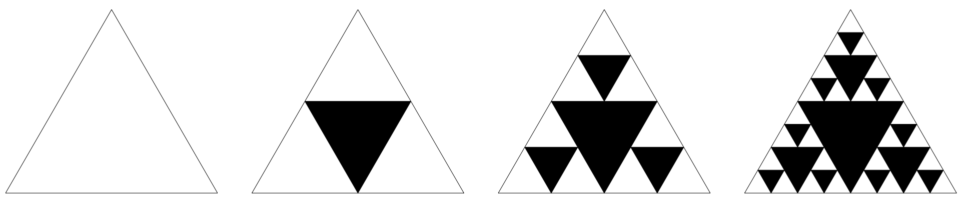
Aufgabe H 49. *Sierpiński-Dreieck*

Gegeben sei ein gleichseitiges weißes Dreieck der Seitenlänge 1 (Schritt 0). Die Verbindungsstrecken der Seitenmittelpunkte bilden ein kleineres Dreieck, das schwarz eingefärbt wird (Schritt 1). Wiederholt man diesen Vorgang für alle nun vorhandenen weißen Dreiecke, so erhält man die unten abgebildete Folge geometrischer Figuren.

(a) Bestimmen Sie für $n \in \mathbb{N}$ die Anzahl der im n-ten Schritt neu entstehenden schwarzen Dreiecke sowie die Seitenlänge und den Flächeninhalt eines solchen Dreiecks.

(b) Geben Sie die Gesamtlänge L_n aller Seiten aller nach n Schritten vorhandenen schwarzen Dreiecke an und berechnen Sie den Grenzwert von L_n für $n \to \infty$.

(c) Geben Sie die Gesamtfläche A_n aller nach n Schritten vorhandenen schwarzen Dreiecke an und berechnen Sie den Grenzwert von A_n für $n \to \infty$.



Schritt 0 Schritt 1 Schritt 2 Schritt 3

Präsenzübungen

Aufgabe P 53. *Funktionsgrenzwerte*

Berechnen Sie folgende Grenzwerte.

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x^4 - 8x^2 + 5}{5x^4 - 8x^3 + 3}$ **(b)** $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3x^4 - 8x^2 + 5}{5x^4 - 8x^3 + 3}$ **(c)** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x^4 - 8x^2 + 5}{5x^4 - 8x^3 + 3}$

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{4x+3} - \sqrt{2x+3}}{\sqrt{x}}$ **(e)** $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{4x+3} - \sqrt{2x+3}}{\sqrt{x}}$ **(f)** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{4x+3} - \sqrt{2x+3}}{\sqrt{x}}$

(g) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sin(x)}{\ln(x)}$ **(h)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(2x)}{\sin(x)}$

Aufgabe P 54. *Einseitige Funktionsgrenzwerte*

Gegeben sei die Abbildung

$$f\colon \mathbb{R} \smallsetminus \{0,2,4\} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{x^2(x-2)(x-4)}{x(x-2)^2|x-4|}\,.$$

(a) Ist f stetig?

(b) Bestimmen Sie jeweils die links- und rechtsseitigen Grenzwerte an den Lücken des Definitionsbereiches.

(c) An welchen Stellen ist f stetig ergänzbar?

(d) Skizzieren Sie den Graphen von f.

Aufgabe P 55. *Komplexe Wurzeln*

Gegeben ist die Funktion w, die $z \in \mathbb{C}$ auf diejenige komplexe Quadratwurzel von z abbildet, deren Argument kleiner als π ist.

(a) Berechnen Sie w an den Stellen $z \in \{0, 1, \mathrm{i}, -1, -\mathrm{i}\}$.

(b) Suchen Sie in der komplexen Zahlenebene zu jedem $\delta > 0$ ein $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-1| < \delta$ und $|w(z) - w(1)| > 1$ (Skizze!).

(c) Ist w stetig?

Hinweis: Eine interaktive Darstellung des komplexen Wurzelziehens finden Sie unter
http://www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/HM-Stroppel-Material/

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 50. *Einseitige Funktionsgrenzwerte*

Gegeben sei die Abbildung

$$f\colon \mathbb{R} \setminus \{-2, 1, 5\} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{x^4 - 5x^3 - 3x^2 + 17x - 10}{(x^3 + 3x^2 - 4)|x - 5|}\,.$$

(a) Ist f stetig?

(b) Zerlegen Sie Zähler und Nenner soweit wie möglich in Faktoren.

(c) Bestimmen Sie jeweils die links- und rechtsseitigen Grenzwerte an den Lücken des Definitionsbereiches. An welchen Stellen ist f stetig ergänzbar?

(d) Skizzieren Sie den Graphen von f.

Aufgabe H 51. *Funktionsgrenzwerte*

Berechnen Sie folgende Grenzwerte (ohne Verwendung der Regel von l'Hospital, aber unter Verwendung der Stetigkeit der Wurzelfunktion).

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{5x^4 - 13x^3 - 13x^2 + 21x}{-3x^4 + 4x^3 + 15x^2 - 5x + 15}$ **(b)** $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{4x^4 + 3x^2} - \sqrt{4x^4 + 5x^2}}$

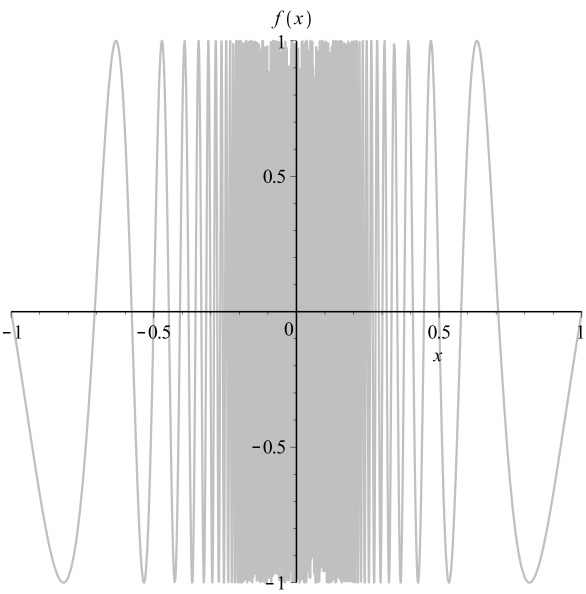
(c) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{(\cos(x))^4 - 13\sin(x) + \cos(x)}{\frac{x^4+3}{x^2} + \frac{17x^3+19}{13x^3+11x}}$ **(d)** $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \sin(x) + \ln(\ln(x))$

Aufgabe H 52. *Stetigkeit und Folgen*

Gegeben sei die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{x^2}\right) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}\,.$$

Ihr Computerplot ist rechts dargestellt.



(a) Berechnen Sie für die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \sqrt{\frac{2}{1+4n}}$ die Grenzwerte $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ und $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f(a_n)$.

(b) Finden Sie eine Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ sowie $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f(b_n) = -1$.

(c) Finden Sie eine Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\displaystyle\lim_{n\to\infty} c_n = 0$ so, dass $(f(c_n))_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert.

(d) Ist f stetig im Punkt $x = 0$? Entscheiden Sie dies unter Verwendung von 1.10.3.

Präsenzübungen

Aufgabe P 56. *Konvergenzradius*

Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen:

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} k^5 5^k x^k$ **(b)** $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(3z)^k}{k!}$

(c) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(2+(-1)^k\right)^{-k} x^k$ **(d)** $\sum_{k=1}^{\infty} k^k x^{2k}$

Aufgabe P 57. *Nullstellen*

Sei ein Polynom $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ mit reellen Koeffizienten und $a_n \neq 0$ gegeben.

(a) Begründen Sie: Ist n ungerade, so hat p mindestens eine reelle Nullstelle.

(b) Begründen Sie: Ist n gerade, $a_n > 0$ und $a_0 < 0$, so hat p mindestens zwei verschiedene reelle Nullstellen.

(c) Wie viele reelle Nullstellen hat das Polynom $p(x) = x^4 + x^3 - 6x^2 - 5x + 5$? Untersuchen Sie dazu die Vorzeichenwechsel von p. Geben Sie ein Intervall an, das mindestens eine Nullstelle enthält.

Aufgabe P 58. *Intervallhalbierungsmethode*

Bestimmen Sie näherungsweise eine Lösung von $18x^3 - 9x^2 - x = -3$.
Bestimmen Sie dazu mit Hilfe der Intervallhalbierungsmethode eine Nullstelle der Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto 18x^3 - 9x^2 - x + 3$ im Intervall $[-2, 0]$. Führen Sie das Verfahren solange durch, bis eine Genauigkeit von $0{,}15$ gewährleistet ist.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 53. *Gleichheitsproblem*

(a) Besitzt die Gleichung $\sin(x) + 2x = 2^x$ mehrere reelle Lösungen?

(b) Seien die folgenden Funktionen gegeben:

$$f : (0, +\infty) \to \mathbb{R} : x \mapsto \ln(x) \quad \text{und} \quad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto -\frac{1}{4}x + 2\cos(x) + 2.$$

Zeigen Sie, dass die Gleichung $f(x) = g(x)$ im Intervall $(0, +\infty)$ mindestens drei Lösungen hat. Sie dürfen dabei benutzen, dass $\ln$ auf $\mathbb{R}^+$ stetig ist.

Aufgabe H 54. *Umkehrfunktionen*

Gegeben sind die Mengen $M = \mathbb{R} \smallsetminus \{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\}$ und $N = \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$ und die Funktionen

$$f\colon M \to N\colon x \mapsto \frac{x}{2 - x^2}, \qquad g\colon N \to M\colon x \mapsto -\frac{1}{2x} + \sqrt{\frac{1}{4x^2} + 2}.$$

(a) Berechnen Sie $f(g(x))$. Ist g die Umkehrfunktion von f?

(b) Geben Sie Teilmengen $\tilde{N} \subsetneqq N$ und $\tilde{M} \subsetneqq M$ so an, dass die jeweiligen Einschränkungen von f und g Umkehrfunktionen voneinander sind.

(c) Bestimmen Sie $\lim\limits_{x\to 0+0} g(x)$.

(d) Skizzieren Sie die Graphen von f und g und markieren Sie die Graphen der Einschränkungen aus **(b)**.

Aufgabe H 55. *Potenzreihen*

Geben Sie für die folgenden Potenzreihen die Koeffizienten a_j und den Entwicklungspunkt z_0 für die Darstellung in der Form von Definition 1.14.2 an. Bestimmen Sie den Konvergenzradius. Geben Sie an, für welche $z \in \mathbb{R}$ die Reihen konvergieren:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-nz)^n \left(\frac{z}{n}\right)^{n+1}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^{(n^2)}} z^n$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!} (z + 3 - \sqrt{2}\mathrm{i})^n$

(d) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{1}{25}(z^2 - 6\mathrm{i}z - 9)\right)^n$

Aufgabe H 56. *Potenzreihen?*

Gegeben sind die Reihen $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} (z^2 - 2z + 1)^k$ und $g(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} (z^2 - 2z - 1)^k$.

(a) Bestimmen Sie die Reihenwerte $f(0), f(2), g(0), g(2)$.

(b) Bestätigen Sie mit Hilfe der Dreiecksungleichung, dass für zwei Punkte a und b in einem Kreis auch deren Mittelpunkt $(a + b)/2$ im selben Kreis liegt:

$$\forall a, b, z_0 \in \mathbb{C}, \forall r \in \mathbb{R}^+ : \quad a \in U_r(z_0) \wedge b \in U_r(z_0) \implies \tfrac{a+b}{2} \in U_r(z_0).$$

(c) Formen Sie $f(z)$ in eine Potenzreihe um. Begründen Sie mit Hilfe der ersten beiden Aufgabenteile, warum $f(1)$ konvergiert, ohne die Reihe selbst zu untersuchen.

(d) Überprüfen Sie, dass $g(1)$ nicht konvergiert. Begründen Sie damit und mit den ersten beiden Aufgabenteilen, dass sich $g(z)$ nicht in eine Potenzreihe umformen lässt.

Präsenzübungen

Aufgabe P 59. *Ableitungsregeln*

(a) Bestimmen Sie die Ableitung der folgenden Funktionen:

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \ln\left(1 + x^2 + 2^x\right), \qquad g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{\cos(x)}{\mathrm{e}^{3x}}$$

(b) Gegeben seien zwei differenzierbare Funktionen $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(1) = 2, \quad f'(1) = -1, \quad f(2) = 4, \quad f'(2) = 2, \quad g(2) = 1, \quad g'(2) = 5,$$

sowie

$h_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto (g \circ f)(x)$ und $h_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \sqrt{1 + (f(x))^2 + (g(x))^2}\,.$

Berechnen Sie $h_1'(1)$ und $h_2'(2)$.

Aufgabe P 60. *Frequenzanalyse*

Schreiben Sie die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto (\cos(x))^3$$

mit Hilfe der Formel von Euler und de Moivre als Linearkombination von Funktionen der Form $\sin(ax)$ und Funktionen der Form $\cos(bx)$ mit $a, b \in \mathbb{N}$.

Aufgabe P 61. *Differenzierbarkeit*

(a) Sei

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \begin{cases} -x^3 + 5x^2 - 7x + 1 & \text{für } 1 < x \leqq 3 \\ 2\cos(\pi x) & \text{sonst} \end{cases} .$$

Ist f differenzierbar?

(b) Konstruieren Sie eine Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die an der Stelle $x_0 = 0$ differenzierbar, aber nicht zweimal differenzierbar ist.

Aufgabe P 62. *Binomische Reihe*

Bestimmen Sie mit Hilfe der binomischen Reihe die Potenzreihendarstellung der Funktion

$$f\,:\,(-1,1) \to \mathbb{R}\,:\,x \mapsto \sqrt{1-x}\,.$$

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 57. *Ableitungen*

Gegeben seien die Funktionen

$$f\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \sqrt{x}\cosh(x)\,, \qquad g\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}\colon x \mapsto (2x)^{x/3} \qquad \text{und}$$

$$h\colon \mathbb{R} \smallsetminus \left\{\tfrac{1}{2}\right\} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \ln|1-2x|\,.$$

(a) Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen.

(b) Bestimmen Sie jeweils die erste und die zweite Ableitung. Geben Sie den Definitionsbereich dieser Ableitungsfunktionen an.

(c) Leiten Sie durch vollständige Induktion eine allgemeine Formel für $h^{(n)}(x)$ her.

Aufgabe H 58. *Potenzreihen*

Sei $f\colon [-1,+\infty) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \sqrt[4]{1+x}\,.$ Geben Sie mit Hilfe von 1.14.16 eine Potenzreihe für f auf $(-1,1)$ an. Geben Sie die Partialsummen S_0, S_1, S_2 und S_3 der Potenzreihe an. Zeichnen Sie die Graphen von f, S_1, S_2 und S_3 auf $[-1,2]$ in ein Schaubild.

Aufgabe H 59. *Differenzierbarkeit*

(a) Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:\ x \mapsto \begin{cases} \sqrt{x}\,, & \text{für } x \geqq 0 \\ -\sqrt{-x}\,, & \text{für } x < 0 \end{cases} \qquad \text{und}$$

$$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:\ x \mapsto x\,|x| + |x-1|\ .$$

(b) Untersuchen Sie mit Hilfe des Differenzenquotienten, ob f an der Stelle $x_0 = 0$ und g an den Stellen $x_0 = 0$ und $x_1 = 1$ differenzierbar ist.

(c) Finden Sie ein Polynom p so, dass die Funktion

$$h\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}\colon x \mapsto \begin{cases} \ln(2+x^2) & \text{für } \ x \leqq 1 \\ p(x) & \text{für } \ x > 1 \end{cases}$$

zweimal differenzierbar, aber nicht dreimal differenzierbar ist.

Aufgabe H 60. *Formel von Euler und de Moivre*

(a) Schreiben Sie $f(x) = (\sin(x))^2(\cos(x))^3$ als Linearkombination von Funktionen der Form $\sin(mx)$ und $\cos(nx)$, mit $m,\, n \in \mathbb{N}_0$.

(b) Schreiben Sie $g(x) = \sin(4x)$ als Linearkombination von Termen der Form $(\sin(x))^j(\cos(x))^k$, mit $j,\, k \in \mathbb{N}_0$.

(c) Leiten Sie die folgenden Formeln her:

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{\cos(x+y)}{2} + \frac{\cos(x-y)}{2} \qquad \text{und}$$

$$\cos(x) + \cos(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right), \qquad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}\,.$$

D. Garmatter
C. Apprich, B. Krinn
J. Hörner, M. Werth

19. Gruppenübung zur Vorlesung
Höhere Mathematik 2

M. Künzer
M. Stroppel

Sommersemester 2014

Präsenzübungen

Aufgabe P 63. *Funktionsgrenzwerte*

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte mit der Regel von l'Hospital.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x}$ **(b)** $\displaystyle\lim_{x\to 0+0} x^2 \ln(x)$ **(c)** $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\ln(x)}$

Aufgabe P 64. *Umkehrfunktion*

Der *Cotangens* ist definiert durch

$$\cot\colon (0,\pi) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}.$$

Begründen Sie anhand des Graphen, dass die Funktion $\cot$ bijektiv ist. Die Umkehrfunktion von $\cot$ ist der *Arcuscotangens* $\operatorname{arccot}\colon \mathbb{R} \to (0,\pi)$. Begründen Sie, dass Satz 2.3.1 anwendbar ist, und berechnen Sie damit die Ableitung von arccot.

Aufgabe P 65. *Mittelwertsatz*

(a) Gegeben ist die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{1}{x}.$$

Bestimmen Sie für die Funktion f eine Zwischenstelle $\xi \in (1,3)$ so, dass $f'(\xi) = \frac{f(3)-f(1)}{3-1}$ ist.

(b) Gegeben ist die Funktion

$$g\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \sqrt[3]{x}.$$

Begründen Sie mit dem Mittelwertsatz, dass zu jedem $x \in \mathbb{R}^+$ ein $\xi(x) \in (x, x+1)$ existiert mit $g'(\xi(x)) = g(x+1) - g(x)$. Bestimmen Sie damit

$$\lim_{x\to+\infty} (\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}).$$

Aufgabe P 66. *Grenzen der Regel von l'Hospital*

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0-0} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\tan(x)}$ **(b)** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{(x^2)} + x}{e^{(2x^2)}}$

Welche Probleme treten bei einem Versuch der Anwendung der Regel von l'Hospital auf?

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 61.

Gegeben ist die Funktion

$$\tanh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}.$$

(a) Bestimmen Sie die Ableitung von $\tanh$. Untersuchen Sie $\tanh$ auf Nullstellen, Extremalstellen und Monotonie. Bestimmen Sie $\lim\limits_{x\to+\infty} \tanh(x)$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} \tanh(x)$. Skizzieren Sie den Graphen von $\tanh$ und geben Sie den Wertebereich an.

(b) Es ist artanh definiert als die Umkehrfunktion von $\tanh$. Skizzieren Sie den Graphen von artanh und geben Sie den Definitionsbereich und den Wertebereich an. Begründen Sie, dass Satz 2.3.1 anwendbar ist, und berechnen Sie damit die Ableitung von artanh.

(c) Beweisen Sie:

$$\operatorname{artanh}(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

Hinweis: Satz 2.4.6 aus der Vorlesung kann dabei helfen.

Aufgabe H 62. *Monotonie und Mittelwertsatz*

(a) Zeigen Sie, dass für $x \in \mathbb{R}^+ \smallsetminus \{1\}$ gilt:

$$1 - \frac{1}{x} < \ln(x) < x - 1.$$

Skizzieren Sie die Graphen dieser drei Funktionen in ein Koordinatensystem.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes, dass für $x, y \in \mathbb{R}^+$ gilt:

$$\left|\cos\left(\mathrm{e}^{-x}\right) - \cos\left(\mathrm{e}^{-y}\right)\right| \leqq |x-y|.$$

Begründen Sie außerdem, dass Gleichheit nur für $x = y$ gilt.

Aufgabe H 63. *Funktionsgrenzwerte und Regel von l'Hospital*

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(\sin(x))^2}{\sin(x^2)}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x-1)^2}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(x+1)}\right)$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0-0} \left(\frac{\sin(x)}{x^3} - \frac{1}{x^2}\right)$

D. Garmatter
C. Apprich, B. Krinn
J. Hörner, M. Werth

20. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 2

M. Künzer
M. Stroppel

Sommersemester 2014

Präsenzübungen

Aufgabe P 67. *Extrema*

Untersuchen Sie, ob folgende Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto f(x)$ an der Stelle $x = 0$ ein lokales Extremum haben.

(a) $f(x) = x^{20}$ **(b)** $f(x) = x^6 - x^5$ **(c)** $f(x) = x^2(x-1)(x+2)$

Aufgabe P 68. *Ein nützlicher Integrationstrick*

Zeigen Sie durch partielle Integration, dass für jede differenzierbare Funktion f die Formel

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[x\,f(x)\Big] - \int x\,f'(x)\,\mathrm{d}x$$

gilt. Berechnen Sie:

(a) $\displaystyle\int \ln(x)\,\mathrm{d}x$ **(b)** $\displaystyle\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln(1+x^2)$ **(c)** $\displaystyle\int \arctan(x)\,\mathrm{d}x$

Aufgabe P 69. *Bestimmte Integrale*

Berechnen Sie:

(a) $\displaystyle\int_2^4 x^{-2}\,\mathrm{d}x$ **(b)** $\displaystyle\int_2^4 x^{-1}\,\mathrm{d}x$ **(c)** $\displaystyle\int_0^\pi x\cos(x)\,\mathrm{d}x$

(d) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \ln(\sqrt{x}\,)\,\mathrm{d}x$ **(e)** $\displaystyle\int_0^{2^{-1/2}} (1-x^2)^{-1/2}\,\mathrm{d}x$

Aufgabe P 70. *Taylorentwicklung*

Gegeben ist die Funktion $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \dfrac{1}{x}$.

(a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom $T_5(f,x,1)$ der Stufe 5 in $x_0 = 1$ für f.

(b) Schätzen Sie den Fehler

$$\left| f\left(\frac{3}{2}\right) - T_2\left(f, \frac{3}{2}, 1\right)\right|$$

mit Hilfe des Restglieds nach oben ab und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem tatsächlichen Fehler.

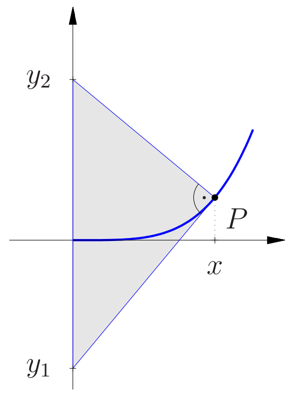
(c) Skizzieren Sie die Graphen von $f(x)$ und $T_2\,(f,x,1)$ in ein Koordinatensystem.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 64. *Extremwerte*

Das graue Dreieck wird durch die y-Achse sowie durch die Tangente und Normale an den Graphen der Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x^4$ im Punkt P begrenzt.

Bestimmen Sie y_1 und y_2 in Abhängigkeit von der x-Koordinate von P. Für welches $x_{\min} > 0$ wird der Flächeninhalt F des Dreiecks am kleinsten, und wie groß ist der minimale Wert $F_{\min}$?



Aufgabe H 65. *Taylorpolynom*

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \cosh(x)$.

(a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom $T_4(f, x, x_0)$.

(b) Skizzieren Sie die Graphen von $f(x)$ und $T_4(f, x, 0)$ in ein Koordinatensystem.

(c) Berechnen Sie $T_4(f, 1, 0)$. Verwenden Sie das Restglied $R_4(f, x, 0)$, um eine Schranke für den Fehler $|f(1) - T_4(f, 1, 0)|$ zu erhalten.

(d) Bestimmen Sie die Potenzreihe von f unter Verwendung der Exponentialreihe.

Aufgabe H 66. *Partielle Integration*

(a) Leiten Sie durch partielle Integration eine Stammfunktion für $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3 \ln(x)$ her.

(b) Leiten Sie durch partielle Integration eine Stammfunktion für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3 \arctan(x)$ her.

(c) Berechnen Sie die Integrale

$$\int_1^2 (\ln(x))^3 \, \mathrm{d}x \qquad \text{und} \qquad \int_0^\pi x\,(\cos(x))^2 \, \mathrm{d}x\,.$$

Aufgabe H 67. *Integrationsformel*

Beweisen Sie, dass für jede differenzierbare Funktion f die Formel

$$\int \frac{f(x)f'(x)}{\sqrt{1+(f(x))^2}} \, \mathrm{d}x = \left[\sqrt{1+(f(x))^2}\right]$$

gilt, und berechnen Sie hiermit die Integrale

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2x)}{\sqrt{1+(\cos(x))^2}} \, \mathrm{d}x \qquad \text{und} \qquad \int_{-1}^1 \frac{(x^2+x)\,\mathrm{e}^{2x}}{\sqrt{1+x^2\,\mathrm{e}^{2x}}} \, \mathrm{d}x\,.$$

Präsenzübungen

Aufgabe P 71. *Partialbruchzerlegung*

Geben Sie den Ansatz für eine Partialbruchzerlegung der folgenden Terme an:

(a) $\dfrac{1}{x^2-6x+5}$ **(b)** $\dfrac{1}{(x-1)(x-5)^3}$ **(c)** $\dfrac{1}{(2x^2+1)(x-5)}$

(d) $\dfrac{1}{(2x^2+1)^3(x-5)}$ **(e)** $\dfrac{x^4}{(2x^2+1)(x-5)}$ **(f)** $\dfrac{1}{x^4+1}$

Berechnen Sie die folgenden Integrale.

$$\int \frac{1}{x^2-6x+5}\,\mathrm{d}\,x \quad \text{und} \quad \int \frac{1}{(2x^2+1)(x-5)}\,\mathrm{d}\,x$$

Aufgabe P 72. *Integration durch Substitution*

Berechnen Sie die folgenden Integrale.

(a) $\displaystyle\int_1^2 5^{(3x-4)}\,\mathrm{d}\,x$ **(b)** $\displaystyle\int_{-1}^1 x\,\mathrm{e}^{1-x^2}\,\mathrm{d}\,x$

(c) $\displaystyle\int \tan(x)\,\mathrm{d}\,x$ **(d)** $\displaystyle\int \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}\,x$

Hinweis: Substitution $x = \sinh(t)$

Aufgabe P 73. *Noch ein nützlicher Integrationstrick: Universalsubstitution*

Bei der Berechnung von Integralen, in denen trigonometrische Funktionen im Nenner auftreten, hilft oft die sogenannte Universalsubstitution $u(x) = \tan(\frac{x}{2})$ weiter.

(a) Zeigen Sie: Für $x \in \mathbb{R} \smallsetminus \{\pi + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ gilt:

$$\frac{2u(x)}{1+(u(x))^2} = \sin(x)\,, \quad \frac{1-(u(x))^2}{1+(u(x))^2} = \cos(x) \quad \text{und} \quad \frac{\mathrm{d}\,u}{\mathrm{d}\,x} = \frac{1+(u(x))^2}{2}$$

(b) Berechnen Sie die folgenden Integrale.

$$\int \frac{1}{\sin(x)}\,\mathrm{d}\,x \quad \text{und} \quad \int \frac{1}{\cos(x)}\,\mathrm{d}\,x$$

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 68. *Integration durch Substitution*
Berechnen Sie die folgenden Integrale.

(a) $\displaystyle\int \frac{(\arctan(x))^3}{1+x^2}\,\mathrm{d}\,x$

(b) $\displaystyle\int_0^{\ln(2)} \mathrm{e}^{(x-\mathrm{e}^x)}\,\mathrm{d}\,x$

(c) $\displaystyle\int \sin(\ln(x))\,\mathrm{d}\,x$

(d) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}\,x$

Aufgabe H 69. *Partialbruchzerlegung*
Berechnen Sie die folgenden Integrale.

(a) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^4+8x^2+15}\,\mathrm{d}\,x$

(b) $\displaystyle\int \frac{2x^4+10x^3+18x^2+14x+3}{x^4+5x^3+9x^2+7x+2}\,\mathrm{d}\,x$

(c) $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+2x+5)^2}\,\mathrm{d}\,x$

Aufgabe H 70. *Universalsubstitution*
Berechnen Sie die folgenden Integrale.

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos(x)+\sin(x)}\,\mathrm{d}\,x$

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos(x)(1+\sin(x))}\,\mathrm{d}\,x$

Aufgabe H 71. *Formel von Euler und de Moivre*

(a) Berechnen Sie das folgende Integral. $\displaystyle\int (\sin(x))^2(\cos(x))^3\,\mathrm{d}\,x$

Hinweis: vergleiche Aufgabe H 60.

(b) Für $m,\, n \in \mathbb{N}_0$ sei

$$f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}\colon x\mapsto (\sin(x))^3(\cos(x))^4\,,$$
$$s_m\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}\colon x\mapsto \sin(mx)\,,$$
$$c_n\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}\colon x\mapsto \cos(nx)\,.$$

Schreiben Sie f als Linearkombination der Funktionen $c_0, s_1, c_1, s_2, c_2, \ldots$.

(c) Berechnen Sie das folgende Integral. $\displaystyle\int (\sin(x))^3(\cos(x))^4\,\mathrm{d}\,x$

D. Garmatter
C. Apprich, B. Krinn
J. Hörner, M. Werth

22. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 2

M. Künzer
M. Stroppel

Sommersemester 2014

Präsenzübungen

Aufgabe P 74. *Uneigentliche Integrale*

Bestimmen Sie, falls möglich, die folgenden uneigentlichen Integrale:

(a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}\,x$ **(b)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}\,x$ **(c)** $\displaystyle\int_0^{3} \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}\,x$

Aufgabe P 75. *Integrale*

(a) Sei $b \in \mathbb{R}^+$ und $g\colon [-b,b] \to \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion. Es sei g ungerade, d. h. für alle $x \in [-b,b]$ gelte $g(-x) = -g(x)$. Berechnen Sie $\displaystyle\int_{-b}^{b} g(x)\,\mathrm{d}\,x$.

Sei nun die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \dfrac{x}{1+x^4}$ gegeben.

(b) Skizzieren Sie den Graphen von f.

(c) Bestimmen Sie $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}\,x$. Entscheiden Sie, ob $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}\,x$ existiert.

Aufgabe P 76. *Ober- und Untersummen*

Für $n \in \mathbb{N}$ sei durch

$$P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} := \left\{\frac{0}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{n}{n}\right\}$$

eine Partition des Intervalls $[0,1]$ gegeben.

(a) Bilden Sie zu dieser Partition die Ober- und Untersumme der Funktion $f(x) = 1 - x$.

(b) Zeigen Sie, dass diese Summen für $n \to \infty$ gegen denselben Grenzwert konvergieren.

(c) Wie lässt sich dieser Grenzwert als Flächeninhalt und als Integral interpretieren?

Aufgabe P 77. *Differentiation und Integration von Potenzreihen*

(a) Zeigen Sie, dass die Potenzreihen

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n+1} \qquad \text{und} \qquad g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n x^n$$

denselben Konvergenzradius besitzen, und stellen Sie $f'(x)$ als Potenzreihe dar.

(b) Stellen Sie $g(x)$ in geschlossener Form (d. h. ohne unendliche Summe) dar.
Hinweis: Schreiben Sie $n = (n+1) - 1$ und verwenden Sie Beispiel 3.8.8.

(c) Berechnen Sie den Reihenwert $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 72. *Uneigentliche Integrale*

Untersuchen Sie, ob die folgenden uneigentlichen Integrale konvergieren, und berechnen Sie gegebenenfalls deren Werte.

(a) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sin(x)}\,\mathrm{d}\,x$ **(b)** $\displaystyle\int_{-3}^{1} \frac{1}{\sqrt{|x+1|}}\,\mathrm{d}\,x$ **(c)** $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \frac{\sin(x)}{\cos(x)-1}+\frac{2}{x}\,\mathrm{d}\,x$ **(d)** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{3t^2}{1+t^6}\,\mathrm{d}\,t$

Aufgabe H 73. *Uneigentliche Integrale*

Untersuchen Sie die folgenden Integrale auf Konvergenz:

(a) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin(x)\cos(x)}{\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}\,x$ **(b)** $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{(x-1)^2}{x^4+x^2}\,\mathrm{d}\,x$ **(c)** $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{x^3+3}{\sqrt{x^8+1}}\,\mathrm{d}\,x$ **(d)** $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{x^2-2x-1}{(x^2+1)^3}\,\mathrm{d}\,x$

Aufgabe H 74. *Ober- und Untersummen*

Gegeben seien $f : [0,1] \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{\sin(\pi x)}$ und $I := \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

(a) Skizzieren Sie das Schaubild von f.

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Ober- und Untersummen von f zu den Partitionen

$$P := \left\{0, \tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}, 1\right\} \qquad \text{und} \qquad Q := \left\{0, \tfrac{1}{6}, \tfrac{5}{6}, 1\right\}$$

jeweils eine obere und eine untere Schranke für I.

(c) Finden Sie eine Verfeinerung R von Q mit $\overline{S}(f,R) - \underline{S}(f,R) \leqq 0{,}3$.

Hinweis: Zur Auswertung von f können elektronische Hilfsmittel benutzt werden.

Aufgabe H 75. *Differentiation und Integration von Potenzreihen*

(a) Berechnen Sie den Konvergenzradius ϱ der Potenzreihe

$$u(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n^2-n} .$$

Bestimmen Sie durch gliedweises Differenzieren eine Potenzreihendarstellung von $u''(x)$.

(b) Stellen Sie $u'(x)$ und $u(x)$ auf $(-\varrho, \varrho)$ in geschlossener Form dar.

(c) Stellen Sie $v(x) = \displaystyle\int_0^x \sin(s^2)\,\mathrm{d}s$ als Potenzreihe dar.

Trainingstipp: Scheinklausur HM II vom 17. 6. 2006:
www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/HM-Stroppel-Material/scheinklausuren/2006_06_17_SoSe06_HM2.pdf

D. Garmatter
C. Apprich, B. Krinn
J. Hörner, M. Werth

23. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 2

M. Künzer
M. Stroppel

Sommersemester 2014

Präsenzübungen

Aufgabe P 78. *Ableitungen*

Bestimmen Sie für die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}\colon x \mapsto f(x) = f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sin\left(x_1 + 2x_2 + x_3^3 + \frac{1}{4}x_4\right)$$

die partiellen Ableitungen

(a) $f_{x_3}(x)$, **(b)** $\dfrac{\partial^2}{\partial_{x_4}\partial_{x_1}} f(x)$, **(c)** $\mathrm{D}^{(1,1,1,1)} f(x)$, **(d)** $\mathrm{D}^{(1,0,1,0)}\left(\mathrm{D}^{(0,1,0,1)} f\right)(x)$.

Aufgabe P 79. *Schnitte, Niveaumengen*

Es sei

$$f\colon \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

gegeben.

(a) Bestimmen Sie die achsenparallelen Schnitte durch den Graphen von f für $x = 0$, $x = 1$ und $y = 0$, sowie die Nullstellenmenge von f und die Niveaumengen zu den Niveaus $t \in \{-2, -1, \frac{1}{2}, 1, 2\}$. Skizzieren Sie dies in einem geeigneten Koordinatensystem.

(b) Lässt sich f in $(0,0)$ stetig fortsetzen? Ist f beschränkt?

Aufgabe P 80. *Topologie*

Gegeben sind die Teilmengen von $\mathbb{R}$

$$M_1 := \{1,2\}\,, \quad M_2 := (1,2)\,, \quad M_3 := M_1 \cup M_2\,, \quad M_4 := M_1 \cap M_2$$

sowie die Teilmengen von $\mathbb{R}^2$

$$M_5 := M_1 \times M_2\,, \quad M_6 := M_1 \times M_3\,, \quad M_7 := M_2 \times M_2\,.$$

Bestimmen Sie für alle Mengen die inneren Punkte und die Randpunkte. Geben Sie an, ob die Mengen offen, abgeschlossen, beschränkt beziehungsweise kompakt sind.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 76. *Ableitungen*

Bestimmen Sie den Gradienten ∇f und die Richtungsableitung $\partial_v f(P)$ in den folgenden Fällen:

(a) $f(x,y) = y^2 - x^2\,,\quad P = (3,4)\,,\quad v = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)^\intercal$

(b) $f(x,y,z) = \cos(y^2) + z\mathrm{e}^{xy}\,,\quad P = (0,0,\pi)\,,\quad v = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,2)^\intercal$

(c) $f(x,y,z) = \ln(xyz\mathrm{e}^x)\,,\quad P = (1,1,1)\,,\quad v = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,-1)^\intercal\,.$

Bestimmen Sie außerdem in **(b)** alle zweiten partiellen Ableitungen.

Aufgabe H 77. *Funktionen in 2 Veränderlichen*

Finden Sie Funktionen $f_j\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ für $j \in \{1,2,3,4\}$ mit folgenden Eigenschaften:

(a) $f_1(0,0) = 1,\quad f_1(1,5) = 3$ und $f_1(2,2) = 7$

(b) Die Niveaumenge von f_2 zum Niveau 1 ist $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + y^2 = 1\right\}$, die Niveaumenge von f_2 zum Niveau 4 ist $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + y^2 = 2\right\}$ und f_2 ist stetig.

(c) f_3 ist an jeder Stelle $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ stetig und an der Stelle $(0,0)$ unstetig.

(d) Die Ableitung von f_4 an der Stelle $(1,1)$ in Richtung $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)^\intercal$ ist 4 und die Ableitung von f_4 an der Stelle $(1,1)$ in Richtung $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)^\intercal$ ist 5.

Aufgabe H 78. *Nullstellenmenge skizzieren*

(a) Fertigen Sie jeweils eine Skizze der Nullstellenmenge und Vorzeichenverteilung von

$$f_\alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto x(x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1)(y^2 - \alpha x^2)$$

für $\alpha \in \{-1,0,1,4\}$ an.

(b) Begründen Sie mit Hilfe der Skizze und Satz 4.2.18, dass f_1 mindestens 3 lokale Extremstellen hat.

Aufgabe H 79. *Stetigkeit und Folgen*

Gegeben sei die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{2xy^3}{x^2 + y^6} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}\,.$$

(a) Skizzieren Sie die Niveaumengen von f zu den Niveaus 0 und 1.

(b) Berechnen Sie für die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \left(\frac{1}{n^3}, \frac{1}{n}\right)$ die Grenzwerte $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ und $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)$.

(c) Finden Sie eine Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = (0,0)$ sowie $\lim\limits_{n\to\infty} f(b_n) = 0$.

(d) Finden Sie eine Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = (0,0)$ so, dass $(f(c_n))_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert.

(e) Ist f stetig im Punkt $(0,0)$?

Präsenzübungen

Aufgabe P 81. *Lokale Extrema*

Bestimmen Sie alle kritischen Stellen von f und von g. Bestimmen Sie deren Typ: welche sind lokale Maximalstellen, welche sind lokale Minimalstellen, welche sind Sattelpunkte?

(a) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto \dfrac{1}{3}x^3 - x^2 + y^3 - 12y$

(b) $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon (x,y,z) \mapsto x(x-1) + 2y(y-1) + 3z(z-1)$.

Aufgabe P 82. *Lokale Extrema und Nullstellenmenge*

Gegeben ist die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto x^3y^2.$$

(a) Bestimmen und skizzieren Sie die Nullstellenmenge $N = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = 0\}$ und die Vorzeichenverteilung von f.

(b) Bestimmen Sie $\operatorname{grad} f$ und $\mathrm{H}f$. Bestimmen Sie $\det(\mathrm{H}f(P))$, für alle $P \in N$.

(c) Bestimmen Sie nun alle kritischen Stellen von f und geben Sie deren Typ an.

Aufgabe P 83. *Taylorpolynom*

Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen die Taylorpolynome der Stufe zwei.

(a) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto \mathrm{e}^{x-y}$ um den Entwicklungspunkt $(1,1)$

(b) $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y)^\intercal \mapsto x^2 \sin\left(\dfrac{xy}{2}\right)$ um den Entwicklungspunkt $(1,\pi)$

Aufgabe P 84. *Taylorpolynom*

Bestimmen Sie für die Funktion

$$f\colon \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + y > 0\} \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto f(x,y) = \ln\sqrt{\frac{2x+y}{3}}$$

sowohl die lineare Taylor-Approximation $T_1(f,(x,y),(1,1))$ als auch die quadratische Taylor-Approximation $T_2(f,(x,y),(1,1))$ um den Entwicklungspunkt $(1,1)$.
Berechnen Sie damit jeweils näherungsweise $f(\,1{,}03,\ 0{,}95\,)$ und vergleichen Sie die beiden Näherungen mit dem tatsächlichen Wert.
Hinweis: Zur Bestimmung des tatsächlichen Wertes sind elektronische Hilfsmittel erlaubt.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 80. *Taylorpolynom*

In der Relativitätstheorie wird die Energie E eines Teilchens der Masse m in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit beschrieben durch

$$E\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon v \mapsto E(v) = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{\langle v \,|\, v\rangle}{c^2}}},$$

wobei $v = (v_1, v_2, v_3)$ den Geschwindigkeitsvektor und c die Lichtgeschwindigkeit bezeichnet. Berechnen Sie das Taylorpolynom der Funktion E der Stufe 2

(a) um den Entwicklungspunkt $v = (0, 0, 0)$.

(b) um den Entwicklungspunkt $v = \left(\frac{c}{2}, 0, 0\right)$.

Aufgabe H 81. *Lokale Extrema*

Bestimmen Sie jeweils alle kritischen Stellen von f. Bestimmen Sie deren Typ: welche sind lokale Maximalstellen, welche sind lokale Minimalstellen, welche sind Sattelpunkte?

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto (x - y^2)(x^2 - 4)$.

(b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \exp(2x^3 + 3y^2 - 6xy)$.

(c) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2 + xy^2 + yz$.

Aufgabe H 82. *Lokale Extrema und Nullstellenmenge*

Gegeben ist die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x, y) \mapsto x^4 + 2x^2y^2 - 2x^2 + y^4 - 2y^2 + 1.$$

(a) Bestimmen und skizzieren Sie die Nullstellenmenge N und die Vorzeichenverteilung von f.

(b) Bestimmen Sie $\operatorname{grad} f$ und $\mathrm{H}f$. Für welche $P \in N$ ist $\det(\mathrm{H}f(P)) = 0$?

(c) Bestimmen Sie nun alle kritischen Stellen von f und geben Sie deren Typ an.

Aufgabe H 83. *Taylorpolynom*

(a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom der Stufe 2 zur Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\} \to \mathbb{R}\colon (x, y) \mapsto \frac{x - y}{x + y}$$

um den Entwicklungspunkt $(1, 1)$.

(b) Bestimmen Sie das Taylorpolynom der Stufe 3 zur Funktion

$$g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x, y) \mapsto \frac{1}{3}x^3 - x^2 + y^3 - 12y$$

um den Entwicklungspunkt $(-1, -1)$. Begründen Sie, dass das zugehörige Restglied verschwindet.

Hinweis: Benutzen Sie 4.4.19 .

Präsenzübungen

Aufgabe P 85. *Minimierung mit Nebenbedingung*

Bestimmen Sie mit der Methode von Lagrange das Minimum der Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon (x,y,z) \mapsto f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$$

unter der Nebenbedingung $ax + by + cz = d\,, \quad a,b,c,d \in \mathbb{R}^+$.

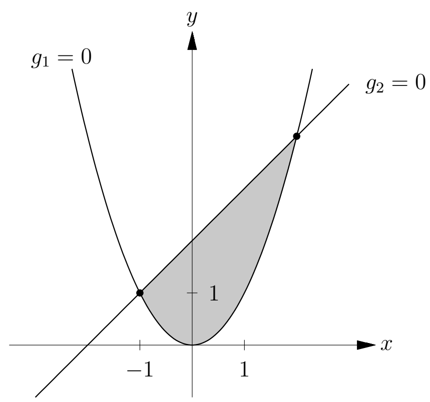
Die Nebenbedingung definiert eine Ebene E. Bestimmen Sie den Punkt auf E mit minimalem Abstand vom Ursprung.

Aufgabe P 86. *Extrema auf kompakter Menge*

Bestimmen Sie die globalen Extrema der Funktion $f(x,y) = 3x - 2y$ auf dem grauen Bereich

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid g_1(x,y) \geqq 0 \wedge g_2(x,y) \geqq 0\}\,,$$

wobei $g_1(x,y) = y - x^2$ und $g_2(x,y) = 2 + x - y$.



Aufgabe P 87. *Tangente und Tangentialebene*

Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x_1,x_2) \mapsto x_1^3 + x_2^3 + 3x_1x_2$.

(a) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene an den Graphen

$$\Gamma(f) \;=\; \{(x_1,x_2,f(x_1,x_2)) \,|\, (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2\}$$

von f im Punkt $P = (0,2,f(0,2))$.

(b) Geben Sie die Tangente im Punkt $(0,2)$ an die Niveaulinie von f zum Niveau 8 an.

(c) In welche Richtung wird ein Ball auf $\Gamma(f)$ rollen, wenn man ihn in P loslässt?

Aufgabe P 88. *Jacobi-Matrizen*

(a) Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix der Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^2 + y^2 \\ xy \end{pmatrix}\,.$$

(b) Sei $D \subseteqq \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie für alle $a \in D^\circ$ und alle total differenzierbaren Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$, $g,h : D \to \mathbb{R}^n$ die verallgemeinerten Produktregeln

$$\mathrm{J}(fg)\,(a) \;=\; g(a)\,\mathrm{J}f\,(a) \;+\; f(a)\,\mathrm{J}g\,(a) \qquad\qquad \text{und}$$

$$\mathrm{J}(g \bullet h)\,(a) \;=\; (h(a))^{\mathsf{T}}\mathrm{J}g\,(a) \;+\; (g(a))^{\mathsf{T}}\mathrm{J}h\,(a)\,.$$

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 84. *Extrema auch mit Nebenbedingung*

Ein Tetraeder hat die Ecken

$$A = (0,0,0)\,, \quad B = (1,0,0)\,, \quad C = (0,3,0)\,, \quad D = (0,0,5)\,.$$

(a) Bestimmen Sie die Funktion $S\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon P \mapsto S(P)$, die die Summe der Quadrate der Entfernungen eines Punktes P von den Ecken des Tetraeders angibt.

(b) Bestimmen Sie den Punkt R, für den S minimal ist.

(c) Bestimmen Sie den Punkt K auf der Kugel mit der Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, für den S minimal ist.

(d) Welcher der Werte $S(R)$ oder $S(K)$ ist der größere?

Aufgabe H 85. *Abstand zweier Mengen*

Die Gerade G und die Ellipse E sind gegeben durch

$$G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 3y = 6\} \qquad \text{und} \qquad E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 9y^2 = 9\}\,.$$

Skizzieren Sie G und E. Bestimmen Sie mit Hilfe von Lagrange-Multiplikatoren den Abstand von G und E.

Hinweis: Es ist der Abstand zwischen zwei Punkten $P_1 = (x_1, y_1)$ und $P_2 = (x_2, y_2)$ zu minimieren, von denen der eine die Geradengleichung und der andere die Ellipsengleichung erfüllt – die zu minimierende Funktion hat also vier Variablen. Da die Wurzelfunktion streng monoton wächst, kann statt des Abstands auch das Quadrat des Abstands minimiert werden.

Aufgabe H 86. *Jacobi–Matrizen*

(a) Bestimmen Sie $\mathrm{J}f\,(x,y,z)$ und $\mathrm{J}f\,(1,2,3)$ für die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} xy\sin(\pi z) \\ \sin(\pi xyz) \end{pmatrix}.$$

(b) Bestimmen Sie total differenzierbare Funktionen $g, h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ so, dass

$$\mathrm{J}g\,(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{J}h\,(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 & -2y \\ 2xy & x^2 \end{pmatrix}, \quad \text{für alle } (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

und $h(1,1) = (1,1)^{\mathsf{T}}$. Geben Sie $\mathrm{J}(g \circ h)\,(1,1)$ an.

Aufgabe H 87. *Tangente und Tangentialebene*

Gegeben seien die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x,y,z) \mapsto x^2 + y^2 - z^2$ und die Ebene $E : z = 2$.

(a) Um was für ein geometrisches Objekt handelt es sich bei der Niveaumenge

$$N = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z) = 1\}\ ?$$

(b) Berechnen Sie die Tangentialebenen an N in den Punkten $(1,0,0)$ und $(2,1,2)$.

(c) Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung der Tangente an $E \cap N$ im Punkt $(2,1,2)$.

D. Garmatter
C. Apprich, B. Krinn
J. Hörner, M. Werth

26. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 2

M. Künzer
M. Stroppel

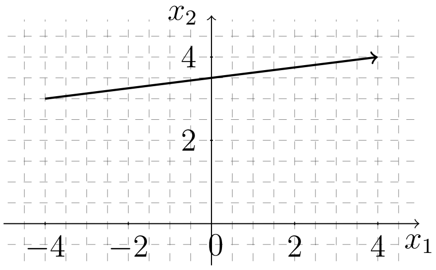
Sommersemester 2014

Präsenzübungen

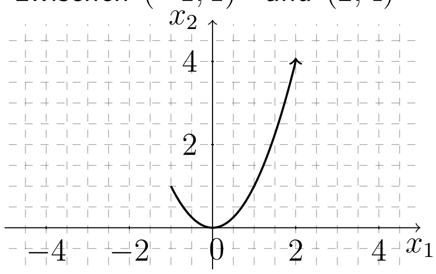
Aufgabe P 89. *Kurven*

Geben Sie jeweils eine Parametrisierung der abgebildeten Kurven an.

Strecke von $(-4,3)^\intercal$ nach $(4,4)^\intercal$



Graph von $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}\colon x\mapsto x^2$ zwischen $(-1,1)^\intercal$ und $(2,4)^\intercal$



Aufgabe P 90. *Kurvenintegrale*

Gegeben seien die Kurve K mit der Parametrisierung $C\colon\ [0,\pi]\to\mathbb{R}^2\colon t\mapsto(\cos(t),\sin(t))^\intercal$ und die Vektorfelder

$$v_1\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2\colon (x_1,x_2)^\intercal\mapsto(2x_1,2x_2)^\intercal \quad \text{sowie} \quad v_2\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2\colon (x_1,x_2)^\intercal\mapsto(-x_2,x_1)^\intercal\,.$$

Fertigen Sie eine Skizze der beiden Felder und der Kurve an. Berechnen Sie

$$\int_K v_1(x)\bullet\mathrm{d}\,x \quad \text{und} \quad \int_K v_2(x)\bullet\mathrm{d}\,x\,.$$

Begründen Sie die Ergebnisse auch anhand der Skizze.

Aufgabe P 91. *Potential*

Welche der folgenden Vektorfelder besitzen ein Potential?

$$v_1\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2\colon (x_1,x_2)^\intercal\mapsto(2x_1,2x_2)^\intercal \quad , \quad v_2\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2\colon (x_1,x_2)^\intercal\mapsto(-x_2,x_1)^\intercal\,.$$

Berechnen Sie ein Potential, falls es existiert. Überprüfen Sie damit die entsprechenden Ergebnisse aus Aufgabe P 90.

Aufgabe P 92. *Potential*

Gegeben seien die Funktionen

$$U_1\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\colon (x,y)^\intercal\mapsto -\cos(2xy)\,, \qquad v_1\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2\colon (x,y)^\intercal\mapsto\begin{pmatrix}2y\sin(2xy)\\2x\sin(2xy)\end{pmatrix}\,,$$

$$U_2\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\colon (x,y)^\intercal\mapsto \sin(2xy)\,,$$

$$U_3\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\colon (x,y)^\intercal\mapsto 2\left(\sin(xy)\right)^2\,, \qquad v_2\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2\colon (x,y)^\intercal\mapsto\begin{pmatrix}2x\sin(2xy)\\2y\sin(2xy)\end{pmatrix}\,.$$

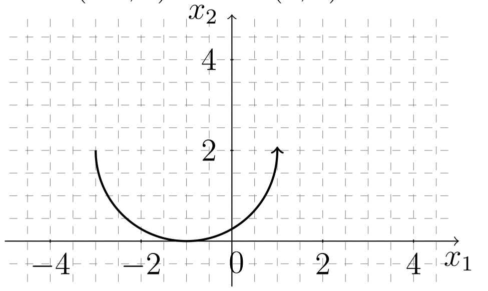
Welche der Funktionen U_1, U_2, U_3 sind Potentiale von v_1? Welche sind Potentiale von v_2?
Wie viele Elemente hat die Menge $\{U_1,\,U_2,\,U_3\}$?
Wie viele Elemente hat die Menge $\{[U_1]\,,\,[U_2]\,,\,[U_3]\}$?

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

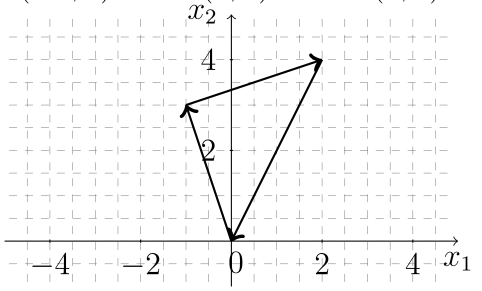
Aufgabe H 88. *Kurven*

Geben Sie jeweils eine Parametrisierung der abgebildeten Kurven an.

Stück eines Kreises um $(-1,2)^\intercal$ von $(-3,2)^\intercal$ nach $(1,2)^\intercal$



Streckenzug von $(0,0)^\intercal$ über $(-1,3)^\intercal$ und $(2,4)^\intercal$ nach $(0,0)^\intercal$



Berechnen Sie das Kurvenintegral des Feldes $v\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon (x,y)^\intercal \mapsto (-y,x)^\intercal$ längs der beiden Kurven.

Aufgabe H 89. *Potential*

Berechnen Sie die Divergenz und die Rotation der folgenden Vektorfelder.

$$v_1\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon (x,y,z)^\intercal \mapsto \mathrm{e}^{xz^2}\begin{pmatrix} 5y^2+5xy^2z^2 \\ 10xy \\ 10x^2y^2z \end{pmatrix}$$

$$v_2\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon (x,y,z)^\intercal \mapsto \mathrm{e}^{xz^2}\begin{pmatrix} 5y^2+5xy^2z^2 \\ 10xy \\ 10x^2y^3z \end{pmatrix}$$

Untersuchen Sie, ob die Vektorfelder ein Potential besitzen. Berechnen Sie ein Potential, falls das möglich ist. Ist dieses Potential eine harmonische Funktion?

Aufgabe H 90. *Potential und Kurvenintegrale*

Gegeben seien für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $r \in \mathbb{R}^+$ das Vektorfeld

$$g_\alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \alpha\begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} + \mathrm{e}^{x_1x_2}\begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

sowie die Parametrisierung des Kreises K_r durch $C_r\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto r\begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie, für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ das Vektorfeld g_α ein Potential hat, und geben Sie für diese α ein Potential an.

(b) Bestimmen Sie für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ und jedes $r \in \mathbb{R}^+$ das Kurvenintegral $\displaystyle\oint_{K_r} g_\alpha(x) \bullet \mathrm{d}\,x$.

Aufgabe H 91. *Zusatzaufgabe*

Finden Sie einen real existierenden Sattelpunkt, möglichst auf dem Campus der Universität Stuttgart. Schicken Sie ein selbst gemachtes Foto samt genauer Ortsangabe an

`wettbewerb@lexmath.uni-stuttgart.de`

Die besten Einsendungen werden prämiert.

D. Garmatter
C. Apprich, B. Krinn
J. Hörner, M. Werth

27. Gruppenübung zur Vorlesung
Höhere Mathematik 2

M. Künzer
M. Stroppel

Sommersemester 2014

Präsenzübungen

Aufgabe P 93. *Kurvenintegrale*

Gegeben seien die Vektorfelder

$$g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon (x,y)^\intercal \mapsto (-y, x+1)^\intercal \quad \text{und} \quad h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon (x,y)^\intercal \mapsto (x+1, -y)^\intercal.$$

Weiterhin sei K die Kurve, welche die untere Hälfte eines Kreises mit Mittelpunkt $(1,1)$ und Radius 2 ist, der im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen wird.

(a) Welches der Vektorfelder besitzt ein Potential? Berechnen Sie ein Potential, falls es existiert.

(b) Verwenden Sie Satz 5.3.10, um das Kurvenintegral $\int_K h(x) \bullet \mathrm{d}\,x$ zu bestimmen.

(c) Verwenden Sie Definition 5.3.1, um das Kurvenintegral $\int_K h(x) \bullet \mathrm{d}\,x$ zu bestimmen.

Aufgabe P 94. *Zirkulation und Ausfluss*

Gegeben seien die Ellipse $K = \{(x,y)^\intercal \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{4}x^2 + 4y^2 = 1\}$ und das Vektorfeld

$$g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon (x,y)^\intercal \mapsto (xy, y-x)^\intercal.$$

(a) Skizzieren Sie K.

(b) Geben Sie eine Parametrisierung C von K an.

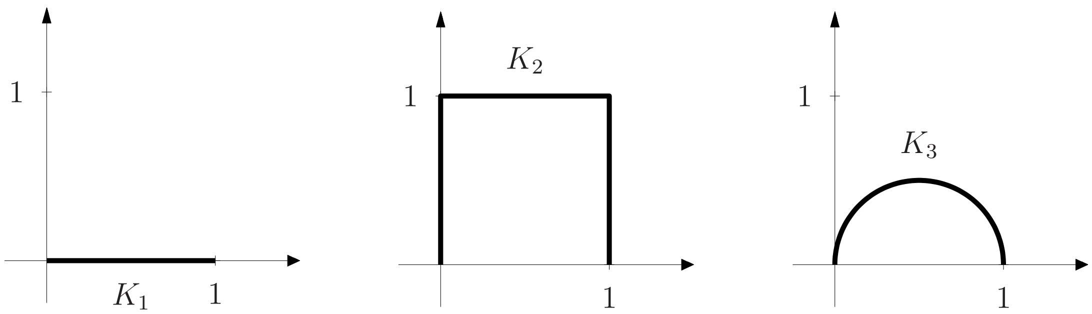
(c) Bestimmen Sie die Zirkulation von g längs K und den Ausfluss von g durch K.

Aufgabe P 95. *Parametrisierung, Kurvenintegrale*

Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_K \left(x^2 + y^2\right) \mathrm{d}s$$

über die unten skizzierten Wege K_1, K_2 und K_3 vom Punkt $(0,0)$ zum Punkt $(1,0)$.



Hausübungen (Abgabe bis spätestens Freitag, 25. Juli 2014):

Aufgabe H 92. *Potential mittels Kurvenintegral*

(a) Gegeben seien die vier Punkte

$$P_1 = (0,0,0), \quad P_2 = (a,0,0), \quad P_3 = (a,b,0), \quad P_4 = (a,b,c)\,.$$

Finden Sie für $i \in \{1,2,3\}$ Parametrisierungen C_i von Kurven, welche vom Punkt P_i zum Punkt P_{i+1} laufen.

(b) Berechnen Sie ein Potential U des Vektorfeldes

$$g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon (x,y,z)^\intercal \to (y+z,\, x+z,\, x+y)^\intercal\,,$$

indem Sie die Wegintegrale von g über C_1, C_2 und C_3 summieren.

(c) Bestimmen Sie $\operatorname{grad} U$.

Aufgabe H 93. *Kurvenintegrale*

Gegeben seien das Vektorfeld

$$v\colon \mathbb{R}^2 \setminus \left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\} \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{x_1^2+x_2^2}\begin{pmatrix}-x_2+x_1^2+x_2^2\\ x_2^3+x_1^2x_2+x_1\end{pmatrix},$$

sowie die Kurve K, parametrisiert durch

$$C\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \begin{pmatrix}\cos(t)\\ \sin(t)\end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Rotation von v.

(b) Bestimmen Sie $\displaystyle\oint_K v(x) \bullet \mathrm{d}\,x$.

(c) Besitzt die Einschränkung von v auf $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$ ein Potential? Geben Sie, falls möglich, ein solches Potential an.

(d) Besitzt v ein Potential? Geben Sie, falls möglich, ein solches Potential an.

Aufgabe H 94. *Länge von Kurven*

Skizzieren Sie die durch die folgenden Funktionen parametrisierten Kurven und berechnen Sie jeweils ihre Länge.

(a) $C\colon [0,\pi] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto (\cos(2t), \sin(2t))^\intercal$

(b) $C\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto (t, t^2)^\intercal$ *Hinweis:* Aufgabe P 72 (d)

(c) $C\colon [-1,1] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto (\cosh(t), t)^\intercal$

(d) $C\colon [0,2] \to \mathbb{R}^3\colon t \mapsto (\cos(\pi t), \sin(\pi t), t)^\intercal$

Aufgabe H 95. *Zirkulation und Ausfluss*
Die Geschwindigkeitsfelder zweier Strömungen seien durch

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (u,v)^\intercal \mapsto (-u,-v)^\intercal \qquad \text{und} \qquad g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (u,v)^\intercal \mapsto (-v,0)^\intercal$$

gegeben. Sei außerdem E die geschlossene Kurve mit Parametrisierung

$$C : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) - 2\sin(t) \\ 2\sin(t) + \cos(t) \end{pmatrix}.$$

(a) Welche Punkte auf E haben maximalen bzw. minimalen Abstand vom Ursprung?

(b) Skizzieren Sie die Kurve E.

(c) Berechnen Sie für jedes der beiden Geschwindigkeitsfelder die Zirkulation längs E und den Ausfluss durch E.

Aufgabe H 96. *Stetigkeit & Integration*
Gegeben seien die Menge $L := \{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\}$, das Intervall $D = [0, \frac{7\pi}{4}]$ und die Funktion

$$g\colon D \smallsetminus L \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{\sin(2x)}{|\sin(2x)|}\cos(x).$$

(a) Skizzieren Sie die Graphen von g.

(b) Geben Sie eine auf ganz D rechtsseitig stetige Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ an, welche g fortsetzt, d.h. $f|_{D\smallsetminus L} = g$.

(c) Ist f stetig?

(d) Berechnen Sie $\displaystyle\int_0^{\frac{7\pi}{4}} f(x)\,\mathrm{d}\,x$.

Aufgabe H 97. *Integration*
Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\displaystyle\int x^2\sin(2x)\,\mathrm{d}x$ **(b)** $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}}\,\mathrm{d}x$ **(c)** $\displaystyle\int \frac{3x^3-12x^2+3x-8}{3x^2+2}\,\mathrm{d}x$

Aufgabe H 98.
Gegeben seien $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y)^\intercal \mapsto x - y + 2$ und $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

(a) Skizzieren Sie den Graphen der Einschränkung von f auf K.

(b) Berechnen Sie die Extrema von f auf K mit der Multiplikatormethode von Lagrange.

(c) Berechnen Sie diese Extrema mit Hilfe einer geeigneten Parametrisierung von K.

(d) Zeichnen Sie die gefundenen Extrema in die Skizze ein.