Präsenzübungen

Aufgabe P 52. *Grenzwerte*

Gegeben ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $a_n = \left(\frac{1+(-1)^n}{3}\right)^n$.

Bestimmen Sie folgende Werte, falls existent.

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ **(b)** $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n|$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ **(d)** $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$ **(e)** $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$

(f) $\lim\limits_{k\to\infty} \left|\frac{a_{2(k+1)}}{a_{2k}}\right|$

(g) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$

Welche Zusammenhänge bestehen?

Aufgabe P 53. *ε-δ-Kriterium*

Zeigen Sie mit Hilfe des ε-δ-Kriteriums, dass die folgenden Funktionen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ an der angegebenen Stelle x_0 stetig sind.

(a) $f(x) = 5x-3, \quad x_0 = 1$ **(b)** $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}\,, \quad x_0 = 0$

Aufgabe P 54. *Unstetigkeit*

Wir betrachten die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}\smallsetminus\{-1\}\to\mathbb{R}\colon x\mapsto f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x^2-1} & \text{für } x\in\mathbb{R}\smallsetminus\{-1,+1\} \\ 0 & \text{für } x = 1\,. \end{cases}$$

Skizzieren Sie den Graphen von f.
Zeigen Sie, dass f in $x_0 = 1$ unstetig ist.

Aufgabe P 55. *Parameterabhängige Reihe*

Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten der Reihe

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{a^j - j!}{|a|^j\cdot j!}$$

in Abhängigkeit von dem Parameter $a\in\mathbb{R}\smallsetminus\{0\}$.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 59. *Grenzwerte*

In Abhängigkeit vom Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \dfrac{\alpha^n + (-3)^n}{4^n}$ gegeben.
Für welche α konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$? Was ist in diesem Fall der Wert der Reihe?

Aufgabe H 60. *Stetigkeit*

Gegeben sind die folgenden Funktionen $f_j\colon D_j \to \mathbb{R}$, $j \in \{1, 2\}$.

$$f_1(x) = \begin{cases} \dfrac{x - |x|}{2x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \qquad f_2(x) = \begin{cases} \dfrac{5x^2 - 15x + 10}{x^3 - 7x + 6}, & x \neq 2 \\ 1, & x = 2 \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie jeweils den maximalen Definitionsbereich $D_j \subseteqq \mathbb{R}$, für den die Abbildungsvorschrift sinnvoll ist. Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen f_1 und f_2.

(b) Finden Sie zu jedem $0 < \varepsilon < 1$ ein $\delta > 0$ so, dass $f_2(U_\delta(2) \cap D_2) \subseteqq U_\varepsilon(f_2(2))$.

(c) Existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so, dass $f_1(U_\delta(0) \cap D_1) \subseteqq U_\varepsilon(f_1(0))$ gilt?

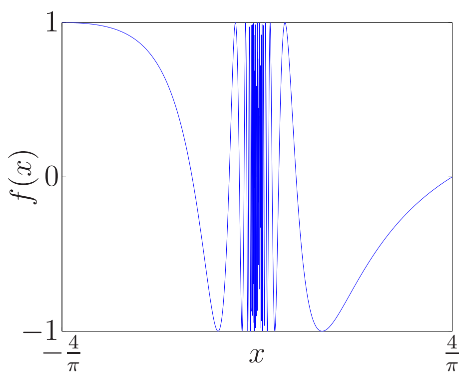
(d) Ist die Funktion f_1 stetig an der Stelle $x_0 = 0$? Ist f_2 stetig an der Stelle $x_0 = 2$?

Aufgabe H 61. *Stetigkeit und Folgen*

Gegeben sei sie Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases} .$$

Ihr Computerplot ist rechts dargestellt.



(a) Berechnen Sie für die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{4}{\pi(1+4n)}$ die Grenzwerte $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ und $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)$.

(b) Finden Sie eine Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ sowie $\lim\limits_{n\to\infty} f(b_n) = -1$.

(c) Finden Sie eine Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$ so, dass $(f(c_n))_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert.

(d) Ist f stetig im Punkt $x_0 = 0$? Entscheiden Sie dies unter Verwendung von 1.10.3.

Aufgabe H 62. *Stetigkeit und Folgen*

Sei $f\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ stetig mit $2x \leqq f(x) \leqq 3x$. Für die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $a_n \in \mathbb{R}_0^+$ gelte $a_n > f(a_{n+1})$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und bestimmen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)$.
Geben Sie ein Beispiel einer solchen Funktion f und einer solchen Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an.

Präsenzübungen

Aufgabe P 56. *Funktionsgrenzwerte*

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte.

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} - \sqrt{3x^2-2}$

(b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^2-5x+3}{3x^2-5x+2}$

(c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2-5x+3}{3x^2-5x+2}$

Aufgabe P 57. *Gleichheitsproblem*

Gegeben sind die Funktionen

$$f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}\colon x\mapsto \mathrm{e}^x\,, \qquad g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}\colon x\mapsto x+2\,.$$

Skizzieren Sie die Funktionen mit Hilfe einer geeigneten Wertetabelle im Intervall $[-2,2]$. Begründen Sie mit Hilfe der Funktionswerte, wieviele Schnittpunkte die beiden Graphen mindestens aufweisen.

Aufgabe P 58. *Umkehrfunktionen*

Zeichnen Sie die Graphen der folgenden Funktionen in ein Koordinatensystem ein:

(a) $f_1\colon [-1,3]\to\mathbb{R}\colon x\mapsto 2^x$

(b) $f_2\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}\colon x\mapsto \begin{cases} 3\,x+3 & \text{für } x<-1 \\ (x+1)^2 & \text{für } -1\leqq x\leqq 1 \\ 6-\frac{1}{x} & \text{für } x>1 \end{cases}$

Prüfen Sie ob diese Funktionen eine Umkehrfunktion besitzen, bzw. ob dies durch Änderung des Definitions- oder Zielbereichs erreicht werden kann. Geben Sie ggf. die Definitions- und Wertebereiche der Umkehrfunktionen an.

Aufgabe P 59. *Nullstellen*

Sei ein Polynom $p\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}\colon x\mapsto a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$ mit reellen Koeffizienten und $a_n\neq 0$ gegeben.

(a) Begründen Sie: Ist n ungerade, so hat p mindestens eine reelle Nullstelle.

(b) Begründen Sie: Ist n gerade, $a_n>0$ und $a_0<0$, so hat p mindestens zwei verschiedene reelle Nullstellen.

(c) Wie viele reelle Nullstellen hat das Polynom $p(x)=x^4+x^3-6x^2-5x+5$? Untersuchen Sie dazu die Vorzeichenwechsel von p. Geben Sie ein Intervall an, das mindestens eine Nullstelle enthält.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 63. *Funktionsgrenzwerte*

Bestimmen Sie folgende Funktionsgrenzwerte.

(a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x^4-8x^2+5}{5x^4-8x^3+3}$ **(b)** $\lim\limits_{x\to0-0} \sin(x^2)/x^3$ **(c)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\cos(x))^2-3\sin(x)\cos(3x)}{\dfrac{x^2-2x}{3x^3+4}+\dfrac{3x^3+4}{1x^2-2x}}$

(d) Bestimmen Sie, für welche $a \in \mathbb{R}^+, b \in \mathbb{R}$ der Grenzwert

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{2x-3} - \sqrt{ax+b}$$

in $\mathbb{R}$ existiert.

Aufgabe H 64. *Gleichheitsproblem*

Gegeben sind die Funktionen

$$f\colon (-\pi,\,\pi) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \left(x^2-9\right)\,\tan\left(\frac{x}{2}\right) \quad \text{und} \quad g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto 3x\,.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Gleichung $f(x) = g(x)$ mindestens drei Lösungen im Intervall $(-\pi,\,\pi)$ hat.

(b) Nimmt f auf $[1,2]$ ein Maximum an? Nimmt f auf $(-\pi,+\pi)$ ein Maximum an?

Hinweis: Untersuchen Sie das Verhalten von f für $x\to\pi-0$ und $x\to-\pi+0$ und werten Sie f an $x=\pm3$ aus.

Aufgabe H 65. *Zwischenwertsatz bei einem Solarmodul*

Der Ertrag eines Solarmoduls an einem Sommertag liegt bei 600 Wh. Das Modul liefert also eine durchschnittliche Leistung von 25 W. Zeigen Sie mithilfe des Zwischenwertsatzes, dass es einen Zeitraum von einer Stunde am Tag gibt, in dem das Modul genau 25 Wh produziert.
Hinweis: Sei $f(t)$ die zum Zeitpunkt t erbrachte Energie. Betrachten Sie $f(t+1)-f(t)$ für $t\in[0,23]$.

Aufgabe H 66. *Umkehrfunktionen*

Gegeben sind die Mengen $M = \mathbb{R}\setminus\{-2,0,2\}$ und $N = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ und die Funktionen

$$f\colon M\to N\colon x\mapsto \frac{2x}{x^2-4}, \qquad g\colon N\to M\colon x\mapsto \frac{1+\sqrt{1+4x^2}}{x}.$$

(a) Berechnen Sie $f(g(x))$. Ist g die Umkehrfunktion von f?

(b) Geben Sie Teilmengen $\tilde N \subsetneqq N$ und $\tilde M \subsetneqq M$ so an, dass die jeweiligen Einschränkungen von f und g Umkehrfunktionen voneinander sind.

(c) Bestimmen Sie $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

(d) Skizzieren Sie die Graphen von f und g und markieren Sie die Graphen der Einschränkungen aus **(b)**.

Präsenzübungen

Aufgabe P 60. *Potenzreihen*

Bestimmen Sie Entwicklungspunkte und Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{2^n\, n}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^2 \left(z-1+\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^n$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4)^n z^{2n}}{(2n)!}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+\sqrt{2}-\mathrm{i})^n}{n!}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{2^n}\, z^n$

(f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \left(z^2+4z+4\right)^n$

Skizzieren Sie jeweils den Konvergenzkreis. Geben Sie an, für welche $z \in \mathbb{R}$ die Reihen konvergieren. Geben Sie für eine dieser Reihen den Wert in geschlossener Form an.

Aufgabe P 61. *Formel von Euler und de Moivre*

(a) Berechnen Sie

$$\mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\ln(2)+\mathrm{i}\pi/3}) \quad \text{und} \quad \mathrm{Im}(\sin(\mathrm{i}))$$

(b) Schreiben Sie f mithilfe der Formel von Euler und de Moivre als Linearkombination von Funktionen der Form $\sin(ax)$ und Funktionen der Form $\cos(bx)$, wobei $a,\, b \in \mathbb{N}_0$.

(i) $f(x) = \cos(x)^3$ **(ii)** $f(x) = \sin(5x)\cos(2x)$

(c) Seien $z,\, w \in \mathbb{C}$. Bestätigen Sie mittels der Formel von Euler und de Moivre folgendes Additionstheorem.

$$\sin(z+w) \;=\; \sin(z)\cos(w)+\cos(z)\sin(w)$$

Aufgabe P 62. *Binomische Reihe*

Sei $f\colon\ [-1,+\infty) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \sqrt[4]{1+x}$. Geben Sie mit Hilfe von 1.14.16 eine Potenzreihe für f auf $(-1,1)$ an. Geben Sie die Partialsummen S_0, S_1 und S_2 der Potenzreihe an. Zeichnen Sie die Graphen von f, S_1 und S_2 auf $[-1,2]$ in ein Schaubild.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 67. *Konvergenzradien von Potenzreihen*

(a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ für

$$\textbf{(i)}\quad a_n = (n/(n+1))^{n^2} \qquad \textbf{(ii)}\quad a_n = (2n-1)^{-n-1}$$

(b) Bestimmen Sie die Konvergenzradien der Potenzreihen und skizzieren Sie die Konvergenzkreise. Untersuchen Sie, für welche Werte von $z \in \mathbb{R}$ die Reihen konvergieren bzw. divergieren.

$$\textbf{(i)}\quad \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(3z+6)^n}{\sqrt{n^2+1}} \qquad \textbf{(ii)}\quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(5z-\mathrm{i})^n}{n^2-n}$$

Aufgabe H 68. *Produkt von Potenzreihen*

Seien die Abbildungen $f : U_{\rho_f}(0) \to \mathbb{C}$ und $g : U_{\rho_g}(0) \to \mathbb{C}$ gegeben durch

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} (z/2)^n \quad \text{und} \quad g(z) := \sum_{n=0}^{\infty} z^n.$$

Bestimmen Sie die Konvergenzradien ρ_f von f und ρ_g von g. Schreiben Sie $f \cdot g$ als Potenzreihe und geben Sie deren Konvergenzradius an. Was hat diese Potenzreihe zu tun mit der Funktion

$$h\colon \mathbb{C} \setminus \{1,2\} \to \mathbb{C}\colon z \mapsto \frac{2}{2-3z+z^2}?$$

Aufgabe H 69. *Potenzreihen?*

Gegeben sind die Reihen $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{3k}} (z^2-4z+4)^k$ und $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{3k}} (z^2-4z-4)^k$.

(a) Bestimmen Sie die Reihenwerte $f(0), f(4), g(0), g(4)$.

(b) Formen Sie $f(z)$ in eine Potenzreihe um. Begründen Sie mit Hilfe des ersten Aufgabenteils, warum $f(3)$ konvergiert, ohne die Reihe selbst zu untersuchen.

(c) Überprüfen Sie, dass $g(2)$ nicht konvergiert. Begründen Sie damit und mit dem ersten Aufgabenteil, dass sich $g(z)$ nicht in eine Potenzreihe umformen lässt, die dasselbe Konvergenzgebiet wie $g(z)$ hat.

Aufgabe H 70. *Formel von Euler und de Moivre*

(a) Schreiben Sie $f(x) = (\sin(x))^3(\cos(2x))^2$ als Linearkombination von Funktionen der Form $\sin(mx)$ und $\cos(nx)$, mit $m, n \in \mathbb{N}_0$.

(b) Leiten Sie die folgende Formel her.

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos(2\pi k/n) = 0$$

Hinweis: Nach Verwendung der Formel von Euler und de Moivre stößt man auf geometrische Summen.

Präsenzübungen

Aufgabe P 63. *Tangente*

Für welche Werte von a und b besitzen die Graphen der Funktionen f und g genau einen Berührpunkt? Bestimmen Sie die Gleichung der gemeinsamen Tangente für diese Werte.

$$f(x) = ax^2\,, \qquad g(x) = \frac{x^3}{3} + a^2x + b$$

Aufgabe P 64. *Differenzierbarkeit*

Skizzieren Sie folgende Funktionen.

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} \sqrt{x} & \text{für } x \in [0, +\infty) \\ -\sqrt{-x} & \text{für } x \in (-\infty, 0) \end{cases}$$
$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x\,|x| + |x-1|$$

Untersuchen Sie mit Hilfe des Differenzenquotienten, ob die Funktion f an der Stelle $x_0 = 0$ und die Funktion g an den Stellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 1$ differenzierbar ist.

Aufgabe P 65. *Ableitungen*

Bestimmen Sie den maximalen reellen Definitionsbereich von f. Berechnen Sie f'. Gibt es Stellen im Definitionsbereich von f, in denen f' nicht existiert?

(a) $f(x) = x^{x+1}$

(b) $f(x) = \sinh(\sqrt{x^2-4})$

(c) $f(x) = \frac{1+\sin(x)^2}{1+\cos(x)^2}$

Aufgabe P 66. *Leibnizformel*

Seien f und g jeweils n-mal differenzierbare Funktionen. Zeigen Sie durch vollständige Induktion folgende Formel für die n-te Ableitung von $f \cdot g$.

$$(f \cdot g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x).$$

Sei $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3 \sin(x)$. Bestimmen Sie $h^{(20)}$.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 71. *Differenzierbarkeit*

Untersuchen Sie mit Hilfe des Differenzenquotienten, ob die Funktion f an der Stelle $x_0 = 0$ und die Funktion g an den Stellen $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$ differenzierbar sind.

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{x}{x-1} & \text{für } x \leqq 0 \\ \frac{1}{2}(1-x)^2 & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

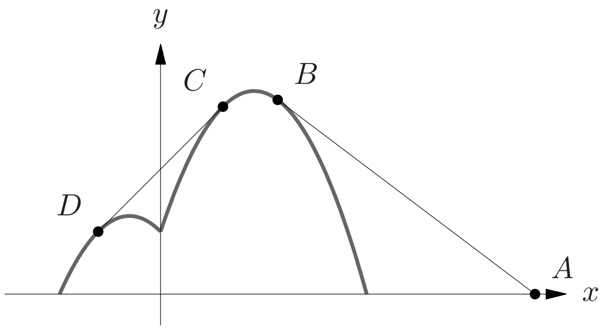
$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto |x+1|^3 + x|x-1|$$

Aufgabe H 72. *Tangenten*

Eine Seilbahn führt vom Punkt $A = (6, 0)$ auf zwei durch die Parabeln

$$p_1 : y = -x^2 + 3x + 1, \quad p_2 : y = -x^2 - x + 1$$

dargestellte Berge.



Wo befinden sich die Bergstationen B, C und D, in denen die Seile tangential aufliegen?

Aufgabe H 73. *Ableitungen*

Bestimmen Sie den maximalen reellen Definitionsbereich von f. Berechnen Sie f'. Gibt es Stellen im Definitionsbereich von f, in denen f' nicht existiert?

(a) $f(x) = x^{\sqrt{x}}$ **(b)** $f(x) = \sqrt{\frac{x^2-1}{x^2+1}}$ **(c)** $f(x) = \arctan\left((\tan(x))^2\right)$

Bestimmen Sie bei **(a)** auch f''.

Aufgabe H 74. *Höhere Ableitungen*

Bestimmen Sie die n-te Ableitung folgender Funktionen.

(a) $f\colon (-\frac{b}{a}, +\infty) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \ln(ax+b)$, wobei $a \in \mathbb{R}^+$, $b \in \mathbb{R}$

Hinweis: Verwenden Sie Induktion.

(b) $g\colon \mathbb{R} \setminus \{1, 2\} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto (x^2 - 3x + 2)^{-1}$

Hinweis: Schreiben Sie $g(x)$ als Linearkombination von Kehrwerten linearer Terme und verwenden Sie dann **(a)**.

(c) $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x^2 \mathrm{e}^{-3x}$

Hinweis: Verwenden Sie die Leibnizformel aus Aufgabe P66.

Präsenzübungen

Aufgabe P 67. *Grenzwerte*

Berechnen Sie folgende Grenzwerte.

(a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(x)}{x-1}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(4x)}{\tan(7x)}$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^{(x^2)} - 1 - x^2}{x^4}$

(d) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(x^6)}{\ln(x^5+1)}$

(e) $\lim\limits_{x\to 0+0} x^x$

Aufgabe P 68. *Umkehrfunktion der Cosinus-Funktion*

(a) Begründen Sie, dass die Einschränkung der Cosinus-Funktion $\cos$ auf den Definitionsbereich $[0, \pi]$ eine Umkehrfunktion besitzt. Diese Umkehrfunktion heiße *Arcuscosinus*, geschrieben $\arccos$. Skizzieren Sie die Graphen von $\cos$ und $\arccos$.

(b) Berechnen Sie $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} \arccos(x)$ mit Hilfe der Ableitung der Umkehrfunktion.

(c) Zeigen Sie $\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(x)$.

Aufgabe P 69. *Taylorpolynom und Restglied*

Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \dfrac{x}{\mathrm{e}^x}$.

Bestimmen Sie das Taylorpolynom $T_3\,(f, x, 0)$ der Stufe 3 um den Entwicklungspunkt 0 und das Restglied nach Lagrange $R_3\,(f, x, 0)$ für die Funktion f.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 75. *Grenzwerte*

Berechnen Sie folgende Grenzwerte.

(a) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln(x)}-\dfrac{1}{x-1}\right)$

(b) $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{1-\cos(x)}{x^2\sin(x)}$

(c) $\lim\limits_{x\to 1-0}\ln(x)\,\ln(1-x)$

(d) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos(x)}{\cos(2x)}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

Aufgabe H 76. *Differentiation von Umkehrfunktionen*

Gegeben seien die Funktionen

$$f\colon \mathbb{R}^+\to\mathbb{R}\colon x\mapsto \frac{x-1}{x+1} \quad \text{und} \quad g\colon [2,+\infty)\to\mathbb{R}\colon x\mapsto x^3-3x^2-1.$$

(a) Zeigen Sie, dass g streng monoton steigend ist.
Was sagt das über die Existenz einer Umkehrfunktion?

(b) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $g^{-1}(y)$ an der Stelle $y=-1$.

(c) Bestimmen Sie den Wertebereich $W := f(\mathbb{R}^+)$ und skizzieren Sie den Graphen von f.

(d) Berechnen Sie die Umkehrfunktion $f^{-1}\colon W\to\mathbb{R}^+$.

(e) Berechnen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion f^{-1} wie in Satz 2.3.1.

(f) Berechnen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion f^{-1} direkt.

Aufgabe H 77. *Mittelwertsatz*

Gegeben sei die Funktion $f\colon\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}\colon x\mapsto\sqrt{x}$.

(a) Bestimmen Sie eine Zwischenstelle $\xi\in(1,4)$ so, dass $f'(\xi)=\frac{f(4)-f(1)}{4-1}$ ist.

(b) Begründen Sie mit dem Mittelwertsatz die Ungleichungen

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}(x-1) < \sqrt{x}-1 < \frac{1}{2}(x-1) \quad \text{für } x>1 .$$

Skizzieren Sie die Graphen der drei beteiligten Funktionen.

Aufgabe H 78. *Taylorpolynom und Restglied*

Gegeben sind die Funktionen

$$f\colon\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}\colon x\mapsto\frac{1}{x} \quad \text{und} \quad g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}\colon x\mapsto\sin(2x) .$$

(a) Bestimmen Sie $T_5(f,x,1)$ und $R_5(f,x,1)$.

(b) Bestimmen Sie $T_4(g,x,\frac{\pi}{4})$ und $R_4(g,x,\frac{\pi}{4})$.

(c) Schätzen Sie den Fehler

$$\left|f\left(\frac{3}{2}\right)-T_2\left(f,\frac{3}{2},1\right)\right|$$

mit Hilfe des Restglieds nach oben ab und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem tatsächlichen Fehler.

D. Garmatter, J. Hörner
L. Iancu, N.M. Mach

20. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 2

Sommersemester 2015

M. Künzer
M. Stroppel

Präsenzübungen

Aufgabe P 70. *Extrema*

Untersuchen Sie, ob folgende Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto f(x)$ an der Stelle $x = 0$ ein lokales Extremum haben.

(a) $f(x) = x^7 - x^6$

(b) $f(x) = x^2 \sin(x)$

Aufgabe P 71. *Partielle Integration, Substitution*

Berechnen Sie folgende Integrale. Überprüfen Sie Ihre Resultate mittels Ableitung.

(a) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}\,x$

(b) $\displaystyle\int \mathrm{e}^x \sin(x)\,\mathrm{d}\,x$

(c) $\displaystyle\int x\sin(x)\,\mathrm{d}\,x$

(d) $\displaystyle\int \ln\left(\sqrt[3]{x}\right)\mathrm{d}\,x$

Aufgabe P 72. *Taylorreihe*

Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x\sin(x)$.

(a) Bestimmen Sie die Taylorreihe um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ für die Funktion $\sin$.

(b) Bestimmen Sie die Taylorreihe $T(f, x, 0)$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ für die Funktion f.

(c) Benutzen Sie die Taylorreihe $T(f, x, 0)$, um eine Stammfunktion für f als Potenzreihe zu berechnen. Vergleichen Sie mit Aufgabe P71(c).

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 79. *Integration*
Berechnen Sie folgende Integrale.

(a) $\displaystyle\int e^x \cos(2x)\,\mathrm{d}\,x$

(b) $\displaystyle\int \arcsin(x)\,\mathrm{d}\,x$

(c) $\displaystyle\int_0^\pi x^2\cos(x)\,\mathrm{d}\,x$

(d) $\displaystyle\int_0^\pi x\cos(x^2)\,\mathrm{d}\,x$

Aufgabe H 80. *Integration*
Berechnen Sie folgende Integrale.

(a) $\displaystyle\int_0^{1/\sqrt{3}} x\arctan(x)\,\mathrm{d}\,x$

(b) $\displaystyle\int (\sin(x))^3(\cos(2x))^2\,\mathrm{d}\,x$
Hinweis: Siehe Aufgabe H70(a).

(c) $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{\ln(\ln(x))}{x}\,\mathrm{d}\,x$

(d) $\displaystyle\int \ln(\ln(x)) + \frac{1}{\ln(x)}\,\mathrm{d}\,x$

Aufgabe H 81. *Kurvendiskussion*
Gegeben sei die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}\colon x\mapsto e^x(x^2-3)\ .$$

Führen Sie eine Kurvendiskussion für f durch im Sinne von 2.8.

Aufgabe H 82. *Taylorreihe*
Gegeben seien die Funktionen

$$g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}\colon x\mapsto x^3-3x^2+3x-1 \qquad \text{und} \qquad f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}\colon x\mapsto \cos(2x)\ .$$

(a) Berechnen Sie die Taylorreihe $T(g,x,0)$.

(b) Berechnen Sie die Taylorreihe $T(g,x,1)$. Weisen Sie die Übereinstimmung von $T(g,x,1)$ und $g(x)$ für $x\in\mathbb{R}$ nach.

(c) Berechnen Sie die Taylorreihe $T(f,x,0)$. Weisen Sie mit Hilfe des Restglieds nach Lagrange die Übereinstimmung von $T(f,x,0)$ und $f(x)$ für $x\in\mathbb{R}$ nach.

(d) Bestimmen Sie eine Stammfunktion für f als Potenzreihe mit Hilfe von **(c)**.

Präsenzübungen

Aufgabe P 73. *Partialbruchzerlegung*

Berechnen Sie die folgenden Integrale.

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2(x+3)}\,\mathrm{d}\,x$

(b) $\displaystyle\int \frac{x^3+x+1}{x^3+x}\,\mathrm{d}\,x$

(c) $\displaystyle\int \frac{x^2+4x}{(x+1)^3}\,\mathrm{d}\,x$

Aufgabe P 74. *Ober- und Untersummen*

Für $n \in \mathbb{N}$ sei durch

$$P_n := \left\{\frac{0}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{n}{n}\right\}$$

eine Partition des Intervalls $[0,1]$ gegeben.

(a) Bilden Sie zu dieser Partition die Ober- und Untersumme der Funktion $f(x) = 1 - x$.

(b) Zeigen Sie, dass diese Summen für $n \to \infty$ gegen denselben Grenzwert konvergieren.

(c) Wie lässt sich dieser Grenzwert als Flächeninhalt und als Integral interpretieren?

Aufgabe P 75. *Uneigentliche Integrale*

Untersuchen Sie, ob die folgenden uneigentlichen Integrale konvergieren und berechnen Sie gegebenenfalls deren Werte.

(a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x\ln(x)}\,\mathrm{d}\,x$

(b) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln(x)}\,\mathrm{d}\,x$

(c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+4x+5}\,\mathrm{d}\,x$

(d) $\displaystyle\int_{-1}^{2} \frac{1}{\sqrt{|x|}}\,\mathrm{d}\,x$

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 83. *Partialbruchzerlegung*

Berechnen Sie die folgenden Integrale.

(a) $\displaystyle\int \frac{x^4+2}{x^3-x}\,\mathrm{d}\,x$

(b) $\displaystyle\int \frac{x^2-3x+2}{x(x+1)^2}\,\mathrm{d}\,x$

(c) $\displaystyle\int \frac{3x+5}{x(x^2+2x+2)^2}\,\mathrm{d}\,x$

(d) $\displaystyle\int \frac{1}{\mathrm{e}^{2x}\cosh(x)^3}\,\mathrm{d}\,x$

Hinweis: Substitution.

Aufgabe H 84. *Ober- und Untersumme*

Sei $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}\colon t\mapsto (t+1)^2$.

(a) Sei $x>0$. Berechnen Sie mittels Ober- und Untersummen $\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}\,t$. Wählen Sie dabei die Partitionen so, dass der Abstand zwischen zwei benachbarten Teilungspunkten immer gleich ist.

Hinweis: Siehe Lineare Algebra, 1.2.4.

(b) Sei $P=\{0,1,2,3\}$. Bestätigen Sie durch direkte Rechnung, dass

$$\underline{S}(f,P)\ \leqq\ \int_0^3 f(t)\,\mathrm{d}\,t\ \leqq\ \overline{S}(f,P)$$

ist. Finden Sie eine Partition $Q=\{0,a,b,3\}$ derart, dass $\underline{S}(f,Q)>\underline{S}(f,P)$ ist.

Aufgabe H 85. *Integrale und Flächeninhalte*

Sei $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}\colon x\mapsto\sqrt{1+x^2}$. Sei $g\colon \mathbb{R}\smallsetminus\{0\}\to\mathbb{R}\colon x\mapsto x+\frac{1}{2x}$.

(a) Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche, die vom Graphen von f, von den Geraden $x=0$ und $x=2$ und von der x-Achse eingeschlossen wird.

Hinweis: Die Substitution $x=\sinh(t)$ ist hilfreich.

(b) Zeigen Sie, dass $\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ eine Stammfunktion von $(x^2+1)^{-1/2}$ ist. Weisen Sie $\operatorname{arsinh}(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ für $x\in\mathbb{R}$ nach. Berechnen Sie $\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{arsinh}(x)-\ln(x)$.

(c) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von den Graphen der Funktionen f und g auf $[\frac{1}{2},+\infty)$ und der Geraden $x=\frac{1}{2}$ eingeschlossen wird. Fertigen Sie eine Skizze an.

Aufgabe H 86. *Uneigentliche Integrale*

Untersuchen Sie, ob die folgenden uneigentlichen Integrale konvergieren und berechnen Sie gegebenenfalls deren Werte.

(a) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x(\ln(x))^2}\,\mathrm{d}\,x$

(b) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{x}{x^4+1}\,\mathrm{d}\,x$

(c) $\displaystyle\int_{\sqrt{3}}^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}\,x$

(d) $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \cot(x)+\tan(x)-\frac{1}{x}\,\mathrm{d}\,x$

Präsenzübungen

Aufgabe P 76. *Modell: Sattelfläche als Funktionsgraph (hyperbolisches Paraboloid)*

Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto y^2 - x^2$. Das vorliegende Modell ist ein Ausschnitt des Funktionsgraphen dieser Funktion. Dargestellt ist der Bereich $-1 \leqq x, y \leqq 1$.

(a) Bei welchen der farbigen Linien handelt es sich um achsenparallele Schnitte? Welche entsprechen Niveaulinien?

(b) Die dargestellten Niveaulinien sind Quadriken. Welche Gestalt haben diese jeweils? Kann es eine Niveaulinie von einer weiteren Gestalt geben?

(c) Sei $k \in \mathbb{R}$ und $N_k := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = k\}$ die Niveaumenge von f zum Niveau k. Für welche Werte k ist N_k im Modell dargestellt?

(d) Skizzieren Sie 5 verschiedene Niveaumengen N_k zu Niveaus $k \in [-2, 2]$.

Aufgabe P 77. *Konvergenzverhalten von Integralen*

Untersuchen Sie auf Konvergenz:

(a) $\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}\,x$ **(b)** $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^6+1}}\,\mathrm{d}\,x$

Aufgabe P 78. *Potenzreihen*

(a) Berechnen Sie den Konvergenzradius ρ und die Ableitung von

$$f\colon (-\rho, \rho) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto 3 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} x^{2k+1}$$

(b) Finden Sie eine geschlossene Darstellung für f'.

(c) Finden Sie eine geschlossene Darstellung für f.

Aufgabe P 79. *Stetigkeit*

Zeigen Sie mit Hilfe des ε-δ-Kriteriums, dass

$$f\colon \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto \frac{x^4}{x^2+y^2}$$

sich in $(0,0)$ durch den Funktionswert 0 stetig fortsetzen lässt.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 87. *Konvergenz*

Untersuchen Sie auf Konvergenz:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{x^6+x}\,d\,x$ **(b)** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{\exp(x^2)}\,d\,x$ **(c)** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\tan\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2 d\,x$ **(d)** $\displaystyle\sum_{n=17}^{\infty} \left(\tan\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2$

Aufgabe H 88. *Potenzreihen*

(a) Berechnen Sie den Konvergenzradius ρ und die ersten zwei Ableitungen von

$$f\colon (-\rho,\rho) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k(2k-1)} x^{2k}$$

(b) Finden Sie eine geschlossene Darstellung für f''.

(c) Finden Sie eine geschlossene Darstellung für f.

(d) Finden Sie eine geschlossene Darstellung für $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k+1} x^{2k+1}$.

(∗) Berechnen Sie $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k+1}$.

Aufgabe H 89. *Modell: Parabolische Quadrik als Funktionsgraph*

Für $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ betrachten wir $f_\alpha^\beta\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto \alpha y^2 - \beta x^2$.
Für $k \in \mathbb{R}$ sei $N_k(\alpha,\beta)$ die Niveaumenge von f_α^β zum Niveau k. Das in der Präsenzübung benutzte Modell stellt einen Ausschnitt des Funktionsgraphen der Funktion f_1^1 dar. Dargestellt ist der Bereich $-1 \leqq x,y \leqq 1$. Sie finden das Modell auch unter:
www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/HM-Stroppel-Material/3D-Modelle/01

(a) Zeichnen Sie für $(\alpha,\beta) \in \{(1,-3),(2,1)\}$ jeweils 5 nichtleere Niveaumengen $N_k(\alpha,\beta)$ mit $k \in [-2,2]$.

(b) Wie hängt die Gestalt des Graphen der Funktion f_α^β vom Paar (α,β) ab?

(c) Bestimmen Sie alle Gestalten, die die Niveaumengen $N_k(\alpha,\beta)$ annehmen können, und geben Sie zu jeder Gestalt ein dazu passendes Tripel (k,α,β) als Beispiel an.

Aufgabe H 90. *Stetigkeit und Folgen*

Gegeben sei die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x_1,x_2) \mapsto \begin{cases} \dfrac{3x_1^4(x_2-1)}{x_1^8+(x_2-1)^2} & \text{für } (x_1,x_2) \neq (0,1) \\ 0 & \text{für } (x_1,x_2) = (0,1) \end{cases}.$$

(a) Stellen Sie Zähler und Nenner von $\dfrac{3x_1^4(x_2-1)}{x_1^8+(x_2-1)^2}$ in Multiindex-Notation im Sinne von 4.2.10 dar. Geben Sie jeweils die nichtverschwindenden Koeffizienten an.

(b) Finden Sie eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = (0,1)$ sowie $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = 0$.

(c) Gibt es eine Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = (0,1)$ und $\lim\limits_{n\to\infty} f(b_n) \neq 0$?

(d) Ist f im Punkt $(0,1)$ stetig?

Präsenzübungen

Aufgabe P 80. *Partielle Ableitungen*
Bestimmen Sie für die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}\colon x \mapsto f(x) = f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sin\left(x_1 + 2x_2 + x_3^3 + \frac{1}{4}x_4\right)$$

die partiellen Ableitungen

(a) $f_{x_3}(x)$, **(b)** $\dfrac{\partial^2}{\partial_{x_4}\partial_{x_1}} f(x)$, **(c)** $\mathrm{D}^{(1,1,1,1)} f(x)$, **(d)** $\mathrm{D}^{(1,0,1,0)}\left(\mathrm{D}^{(0,1,0,1)} f\right)(x)$.

Aufgabe P 81. *Mengen*
Gegeben sind die Teilmengen von $\mathbb{R}$

$$M_1 := \{1, 2\}\,, \quad M_2 := (1, 2)\,, \quad M_3 := M_1 \cup M_2\,,$$

sowie die Teilmengen von $\mathbb{R}^2$

$$M_4 := M_1 \times M_2\,, \quad M_5 := M_1 \times M_3\,, \quad M_6 := M_2 \times M_2\,.$$

(a) Fertigen Sie eine Skizze an.
(b) Bestimmen Sie für alle Mengen M_i die inneren Punkte und die Randpunkte.
(c) Welche der Mengen M_i sind offen?
(d) Welche der Mengen M_i sind kompakt?
(e) Welche der Mengen M_i sind konvex?

Aufgabe P 82. *Taylorpolynom*
Sei

$$f\colon \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + y > 0\} \to \mathbb{R}\colon (x, y) \mapsto f(x, y) = \ln\sqrt{\frac{2x + y}{3}}\;.$$

(a) Bestimmen Sie die Taylorpolynome $T_1(f, (x, y), (1, 1))$ und $T_2(f, (x, y), (1, 1))$.
(b) Skizzieren Sie die Graphen von $f(1 + t, 1 + t)$, $T_1(f, (1 + t, 1 + t), (1, 1))$ und $T_2(f, (1 + t, 1 + t), (1, 1))$.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 91. *Ableitungen*

Bestimmen Sie im Punkt P jeweils den Gradienten $\nabla f(P)$, die Hessematrix $\mathrm{H}f(P)$ und die Ableitung in Richtung v.

(a) $f(x,y,z) = z^2 \mathrm{e}^{-x^2-y^2}$, $\quad P = (1,2,3)$, $\quad v = \frac{1}{\sqrt{6}}(-2,1,1)$

(b) $f(x,y,z) = \ln\left(\frac{\exp((x+y)^2)}{(z+1)^2}\right)$, $\quad P = (1,-1,1)$, $\quad v = \frac{1}{100}\left(7,-7,\sqrt{2}\right)$

Aufgabe H 92. *Existenz lokaler Extremstellen*

(a) Fertigen Sie jeweils eine Skizze der Nullstellenmenge und Vorzeichenverteilung von

$$f_c\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto x^2 y(x^2 + y^2 + c^2 - 2cy - 4)$$

für $c \in \{-2, 0, 2\}$ an.

(b) Begründen Sie mit Hilfe der Skizze und Satz 4.2.18, dass f_0 mindestens 4 lokale Extremstellen hat.

Aufgabe H 93. *Interpolation*

(a) Bestimmen Sie ein Polynom $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit Totalgrad $\leqq 2$, welches

$$f(0,0) = 0, \qquad f(0,1) = 0, \qquad f(1,0) = 1, \qquad f(1,1) = 0$$

erfüllt und dessen Hessematrix Diagonaleinträge 0 hat.
Gibt es ein solches Polynom von Totalgrad $\leqq 1$?

(b) Bestimmen Sie $T_2(f,(x,y),(1,1))$. Begründen Sie, dass das zugehörige Restglied verschwindet.

(c) Bestimmen Sie die Nullstellenmenge von f. Skizzieren Sie den Graphen von f.

Aufgabe H 94. *Taylorpolynom und Restglied*

Gegeben ist die Funktion $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto \sin(2x)y$.

(a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom $T_1(g,(x,y),(0,1))$ der Stufe 1 um den Entwicklungspunkt $(0,1)$.

(b) Sei $v = (v_1 \; v_2) \in \mathbb{R}^2$ gegeben, mit Parametern v_1 und v_2.
Bestimmen Sie die Funktionen $\partial_v g$ und $\partial_v^2 g$.

(c) Schätzen Sie den Fehler

$$\left|g(-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}) - T_1\left(g,(-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}),(0,1)\right)\right|$$

mit Hilfe des Restglieds aus 4.4.12 nach oben ab.
Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem tatsächlichen Fehler.

Präsenzübungen

Aufgabe P 83. *Lokale Extrema*

Bestimmen Sie jeweils alle kritischen Stellen von f. Bestimmen Sie deren Typ; das heißt, entscheiden Sie, welche lokale Maximalstellen, welche lokale Minimalstellen und welche Sattelpunkte sind.

(a) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto x^2 + y^2 - 4x + 6y$

(b) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto x^3 - y^3$

(c) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto -x^2 - y^4$

Aufgabe P 84. *Nullstellenmenge, kritische Stellen*

Gegeben ist die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto (y - x^2)(y - 2x^2).$$

(a) Skizzieren Sie die Nullstellenmenge und die Vorzeichenverteilung von f.

(b) Bestimmen Sie die kritischen Stellen von f.

(c) Bestimmen Sie den Typ jeder kritischen Stelle.

Aufgabe P 85. *Extrema unter Nebenbedingungen*

Für welche $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ist das Produkt von y mit dem Quadrat von x am größten, wenn man voraussetzt, dass die Summe der Quadrate von x und y konstant 4 ist?
Welche (x,y) sind dabei lokale Minimalstellen?

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 95. *Lokale Extrema*
Gegeben sind die Funktionen

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto x^4 + 2y^2(3-2xy)$$

und

$$g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 + 4xy.$$

(a) Bestimmen Sie alle kritischen Stellen von f sowie deren Typ.

(b) Skizzieren Sie die Graphen von $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon t \mapsto g(t,t)$ und $v\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon t \mapsto g(t,-t)$.

(c) Bestimmen Sie alle kritischen Stellen von g sowie deren Typ.

Aufgabe H 96. *Der fehlende Sattelpunkt*
Sei

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto \mathrm{e}^{3y} - 3x\mathrm{e}^{y} + x^3.$$

(a) Bestimmen Sie $\nabla f(x,y)$ und $\mathrm{H}f(x,y)$.

(b) Bestimmen Sie alle kritischen Stellen von f und deren Typ.

(c) Bestimmen Sie die Tangentialebene und die Schmiegquadrik an den Graphen von f im Punkt $(1,0)$. Bestimmen Sie außerdem die euklidische Normalform und die Gestalt der Schmiegquadrik.

(d) Ist der Punkt $(1,0)$ eine globale Minimalstelle von f?

Aufgabe H 97. *Lagrange-Multiplikatoren*
Seien M der maximale und m der minimale Wert der Funktion $f(x,y,z) = xyz$ auf der Menge $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2+y^2+z^2 = 3\right\}$. Bestimmen Sie m und M.

Aufgabe H 98. *Abstand zweier Punkte*
Die Mengen M_1 und M_2 sind gegeben durch

$$M_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + \tfrac{9}{4}(y-1)^2 = 9\right\} \quad \text{und} \quad M_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2+y^2 = \tfrac{1}{4}\right\}.$$

(a) Skizzieren Sie M_1 und M_2.

(b) Sei $P_1 = (x_1,y_1) \in M_1$. Sei $P_2 = (x_2,y_2) \in M_2$. Stellen Sie das nach Lagrange zur Minimierung des Quadrates des Abstandes zwischen P_1 und P_2 benötigte Gleichungssystem auf.

(c) Ist bei $(P_1,P_2) = (x_1,y_1,x_2,y_2) = (3,1,\frac{1}{2\sqrt{2}},\frac{1}{2\sqrt{2}})$ das Gleichungssystem aus **(b)** lösbar?
Ist bei $(P_1,P_2) = (x_1,y_1,x_2,y_2) = (3,1,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$ das Gleichungssystem aus **(b)** lösbar?
Ist bei $(P_1,P_2) = (x_1,y_1,x_2,y_2) = (0,3,0,\frac{1}{2})$ das Gleichungssystem aus **(b)** lösbar?

(d) Finden Sie ein Paar (P_1,P_2), welches nicht in **(c)** aufgeführt ist und für welches das Gleichungssystem aus **(b)** lösbar ist.

Präsenzübungen

Aufgabe P 86. *Jacobi-Matrix*

Gegeben seien die Funktionen

$$f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x \\ 3z \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto uv+u^2, \quad h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

(a) Berechnen Sie die Jacobi-Matrizen von f, g und h.

(b) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix von $w = h \circ g$ auf zwei Arten: einmal mit Kettenregel, einmal ohne.

(c) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix von $\tilde{f} = f \circ f \circ f \circ f$ auf zwei Arten: einmal mit Kettenregel, einmal ohne.

Aufgabe P 87. *Potential*

Überprüfen Sie, ob f ein Gradientenfeld ist.
Bestimmen Sie gegebenenfalls ein Potential von f.

(a) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon (x,y)^\mathsf{T} \mapsto (2x + \mathrm{e}^x, 2y)^\mathsf{T}$

(b) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon (x,y)^\mathsf{T} \mapsto (\cos(2x)\cos(x+y^2), 2y\cos(2x)\cos(x+y^2))^\mathsf{T}$

(c) $f\colon \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(0,0)^\mathsf{T}\} \to \mathbb{R}^2\colon (x,y)^\mathsf{T} \mapsto (y\sinh(y), (xy+1)\cosh(y) + x\sinh(y))^\mathsf{T}$

Aufgabe P 88. *Differentiationsregeln*

Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y)^\mathsf{T} \mapsto x^2 + \mathrm{e}^y$, sei $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y)^\mathsf{T} \mapsto (x+y)^2 + y^4$ und sei $P = (1,0)$. Berechnen Sie $\nabla f(P)$, $\nabla g(P)$, $\nabla(f+g)(P)$, $\nabla(fg)(P)$ und $\nabla(f/g)(P)$.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 99. *Tangente und Tangentialebene*

Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y)^\intercal \mapsto x^2y^2 - x$.

(a) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene an den Graphen $\Gamma(f)$ im Punkt $P = (2, 1, f(2,1))$.

(b) Bestimmen Sie die Niveaumenge der Tangentialebene aus **(a)** zum Niveau 2.

(c) Berechnen Sie die Tangente im Punkt $(2,1)$ an die Niveaulinie von f zum Niveau 2 mittels 4.9.4. Vergleichen Sie mit dem Resultat aus **(b)**.

(d) Fertigen Sie eine Skizze der Niveaulinie und der Tangente aus **(c)** an.

Aufgabe H 100. *Kettenregel*

Gegeben sei die Funktion $f_{a,b}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y)^\intercal \mapsto (ax^2+by^2)xy$ für Parameter $a,\, b \in \mathbb{R}$. Für jedes $\vartheta \in \mathbb{R}$ sei die folgende Funktion gegeben:

$$R_\vartheta\colon \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r\cos(\varphi+\vartheta) \\ r\sin(\varphi+\vartheta) \end{pmatrix}.$$

(a) Finden Sie alle Paare $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ mit $\nabla f_{a,b}(1,1) = (4,4)^\intercal$.

(b) Berechnen Sie $\nabla(f_{3,2} \circ R_\vartheta)$ auf zwei Arten: einmal mit Kettenregel, einmal ohne.

(c) Sei $\tilde\vartheta \in \mathbb{R}$. Finden Sie eine Funktion $u_{\tilde\vartheta}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $u_{\tilde\vartheta} \circ R_\vartheta = R_{\vartheta+\tilde\vartheta}$. Berechnen Sie $\mathrm{J}(u_{\tilde\vartheta} \circ R_\vartheta)$ auf zwei Arten.

Aufgabe H 101. *Potential*

Überprüfen Sie, ob f ein Gradientenfeld ist.
Bestimmen Sie gegebenenfalls ein Potential von f.

(a) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon (x,y)^\intercal \mapsto \begin{pmatrix} 4\sinh(x)\sinh(y) \\ \mathrm{e}^{x+y} + \mathrm{e}^{x-y} + \mathrm{e}^{-x+y} + \mathrm{e}^{-x-y} + 1 \end{pmatrix}$

(b) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon (x,y,z)^\intercal \mapsto \begin{pmatrix} \sqrt{5}\arctan(\frac{y}{\sqrt{5}}) - \sqrt{3}\arctan(\frac{y}{\sqrt{3}}) \\ \dfrac{2xy^2}{y^4+8y^2+15} - 5y \\ 0 \end{pmatrix}$

(c) $f\colon \mathbb{R}^4 \smallsetminus \{(0,0,0,0)^\intercal\} \to \mathbb{R}^4\colon (x,y,z,w)^\intercal \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ w \\ w \end{pmatrix}$

Aufgabe H 102. *Potential*

Gegeben ist das Vektorfeld

$$f_{\alpha,\beta}\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3\colon (x,y,z)^\intercal \mapsto \begin{pmatrix} 4x^3\ln(y) \\ \alpha^4x^4y^{-1} + \alpha\beta z\mathrm{e}^{-2y} \\ \mathrm{e}^{-2y} \end{pmatrix}$$

mit Parametern $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(a) Für welche Paare (α,β) besitzt das Vektorfeld $f_{\alpha,\beta}$ ein Potential?

(b) Bestimmen Sie für die Paare (α,β) aus **(a)** jeweils alle Potentiale von $f_{\alpha,\beta}$.

Präsenzübungen

Aufgabe P 89. *Zusammenhängende Mengen*
Gegeben sind die Mengen

$$M_1 := \mathbb{R} \smallsetminus \{0\},\ M_2 := \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(0,0)\},\ M_3 := \mathbb{R}^2 \smallsetminus \left\{(x,0) \,\middle|\, x \in \mathbb{R}\right\},$$
$$M_4 := \mathbb{R}^3 \smallsetminus \{(0,0,0)\},\ M_5 := \mathbb{R}^3 \smallsetminus \left\{(0,0,z) \,\middle|\, z \in \mathbb{R}\right\},\ M_6 := \mathbb{R}^3 \smallsetminus \left\{(x,y,0) \,\middle|\, x,y \in \mathbb{R}\right\}.$$

(a) Welche der Mengen M_i sind zusammenhängend?

(b) Welche der Mengen M_i sind einfach zusammenhängend?

Aufgabe P 90. *Rotation, Potential und Kurvenintegral*
Gegeben sei das Vektorfeld

$$g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3x_1^2 - 6x_2^2 \\ -12x_1x_2 + 4x_2 \end{pmatrix}$$

und die Kurve K durch die Parametrisierung C

$$C\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto 4\begin{pmatrix} t^2(1-t) \\ t(1-t) \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Divergenz und die Rotation von g.

(b) Überprüfen Sie, ob g ein Gradientenfeld ist.

(c) Skizzieren Sie K.

(d) Bestimmen Sie das Kurvenintegral $\int_K g(x) \bullet \mathrm{d}x$.

Aufgabe P 91. *Potential und Kurvenintegral*
Gegeben sei das Vektorfeld

$$f\colon \mathbb{R}^3 \smallsetminus \left\{(0,0,w)^\mathsf{T} \,\middle|\, w \in \mathbb{R}\right\}\colon \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{u^2+v^2}\begin{pmatrix} u^2 - v + v^2 \\ u \\ u^2 + v^2 \end{pmatrix}.$$

Seien die Kurven K_1 und K_2 gegeben durch die Parametrisierungen

$$C_1\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3\colon t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C_2\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3\colon t \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

(a) Berechnen Sie die Kurvenintegrale

$$\int_{K_1} f(x) \bullet \mathrm{d}x \quad \text{und} \quad \int_{K_2} f(x) \bullet \mathrm{d}x.$$

(b) Gibt es ein Gebiet $D \subsetneqq \mathbb{R}^3$, auf welchem die Einschränkung von f ein Potential besitzt? Gibt es ein solches D, welches K_1 enthält? Gibt es ein solches D, welches K_2 enthält?

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 103. *Parametrisierung von Kurven, Kurvenintegral*

Sei $f_\alpha\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon (u,v,w)^\intercal \mapsto (vw, -uw, 1+\alpha u)^\intercal$ für $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix, die Divergenz und die Rotation von f_α.
Für welche α besitzt f_α ein Potential?

(b) Sei $S := \left\{(u,v,w)^\intercal \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, w = 4-u^2-v^2,\ u \geqq 0,\ v \geqq 0,\ w \geqq 0\right\}$.
Geben Sie eine reguläre Parametrisierung C_1 von $K_1 := \left\{(u,v,w)^\intercal \in S \,\middle|\, u=0\right\}$ mit Anfangspunkt $(0,2,0)^\intercal$ an.
Geben Sie eine reguläre Parametrisierung C_2 von $K_2 := \left\{(u,v,w)^\intercal \in S \,\middle|\, v=0\right\}$ mit Anfangspunkt $(0,0,4)^\intercal$ an.
Geben Sie eine reguläre Parametrisierung C_3 von $K_3 := \left\{(u,v,w)^\intercal \in S \,\middle|\, w=0\right\}$ mit Anfangspunkt $(2,0,0)^\intercal$ an.
Skizzieren Sie K_1, K_2 und K_3 in ein Koordinatensystem.

(c) Entstehe K durch Aneinanderfügen von K_1, K_2 und K_3 unter Beibehaltung des Durchlaufungssinns. Berechnen Sie die Kurvenintegrale $\int_K f_0(x) \bullet \mathrm{d}x$ und $\int_K f_1(x) \bullet \mathrm{d}x$.

Aufgabe H 104. *Parametrisierung von Kurven, Kurvenintegral*

Sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon (u,v,w)^\intercal \mapsto (2w-1, 0, 2v)^\intercal$. Sei $S_1 := \left\{(u,v,w)^\intercal \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, w = u^2+v^2\right\}$.
Sei $S_2 := \left\{(u,v,w)^\intercal \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 4u^2+4v^2-4u-4v+1 = 0\right\}$.

(a) Bestimmen Sie $\mathrm{J}f$. Bestimmen Sie $\operatorname{rot}\operatorname{rot} f$. Hat f ein Potential?

(b) Geben Sie eine reguläre, doppelpunktfreie Parametrisierung von $K := \left\{(u,v,w)^\intercal \in S_2 \,\middle|\, w=0\right\}$ an; vgl. 5.1.3. Berechnen Sie $\int_K f(x) \bullet \mathrm{d}x$.

(c) Geben Sie eine reguläre, doppelpunktfreie Parametrisierung von $L := S_1 \cap S_2$ an. Berechnen Sie $\int_L f(x) \bullet \mathrm{d}x$.

(d) Geben Sie eine reguläre Parametrisierung $C\colon [0,1] \to \mathbb{R}^3$ an, mittels derer die Kurve L zweimal durchlaufen wird. Bestimmen Sie $\int_0^1 f(C(t)) \bullet C'(t)\,\mathrm{d}t$. Wie kann hierzu **(c)** verwendet werden?

Aufgabe H 105. *Wendelfläche, Potential, einfacher Zusammenhang*

Gegeben sei das Vektorfeld $g\colon \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)\} \to \mathbb{R}^2\colon \left(\begin{smallmatrix}x_1\\x_2\end{smallmatrix}\right) \mapsto \frac{1}{x_1^2+x_2^2}\left(\begin{smallmatrix}-x_2\\x_1\end{smallmatrix}\right)$. Sei

$$p\colon \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)\} \to \mathbb{R}\colon \left(\begin{smallmatrix}x_1\\x_2\end{smallmatrix}\right) \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } x_1 = 0 \text{ und } x_2 < 0, \\ \arctan(\frac{x_2}{x_1}) + \frac{\pi}{2} & \text{für } x_1 > 0, \\ \pi & \text{für } x_1 = 0 \text{ und } x_2 > 0, \\ \arctan(\frac{x_2}{x_1}) + \frac{3\pi}{2} & \text{für } x_1 < 0. \end{cases}$$

Wir betrachten den Kreis $K := \{\left(\begin{smallmatrix}x_1\\x_2\end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2+x_2^2 = 4\}$, sowie den Rand R des Dreiecks mit den Eckpunkten $\left(\begin{smallmatrix}-3\\0\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}-1\\-1\end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix}-2\\-2\end{smallmatrix}\right)$.

(a) Berechnen Sie $\oint_K g(x) \bullet \mathrm{d}\,x$. Berechnen Sie $\operatorname{rot} g$. Besitzt das Feld g ein Potential?

(b) Ist p stetig? Ist p ein Potential zum Feld g ?

(c) Ist die Einschränkung $\hat{p}\colon \{\left(\begin{smallmatrix}x_1\\x_2\end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 < 0\} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto p(x)$ stetig? Ist $\hat{p}$ ein Potential zur Einschränkung $\hat{g}\colon \{\left(\begin{smallmatrix}x_1\\x_2\end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 < 0\} \to \mathbb{R}^2\colon x \mapsto g(x)$ des Feldes?

(d) Bestimmen Sie $\oint_R g(x) \bullet \mathrm{d}\,x$.

Präsenzübungen

Aufgabe P 92. *Potential durch Hakenintegral*
Gegeben sei das Vektorfeld

$$g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u + uv^2 \\ u^2v + 3v^2 \end{pmatrix} .$$

Wir verwenden die Parametrisierungen

$$H_a\colon [0,a] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad V_{a,b}\colon [0,b] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \begin{pmatrix} a \\ t \end{pmatrix} ,$$

abhängig von $a,\, b \in \mathbb{R}$. Sei $K_{a,b}$ die Kurve, die sich als Zusammensetzung der Kurven ergibt, die von H_a und $V_{a,b}$ parametrisiert werden, und die als Anfangspunkt $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ hat.

(a) Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix, die Divergenz und die Rotation von g.

(b) Berechnen Sie das Kurvenintegral $U(a,b) := \int_{K_{a,b}} g(x) \bullet \mathrm{d}x$ von g längs $K_{a,b}$.

(c) Vergleichen Sie $\operatorname{grad} U(u,v)$ und $g(u,v)$. Bestimmen Sie ein Potential von g.

Aufgabe P 93. *Kurvenintegral*
Sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon (u,v,w)^\intercal \mapsto uv - vw$.
Sei K die Strecke von $(2,2,1)^\intercal$ nach $(1,-1,2)^\intercal$.

(a) Geben Sie eine reguläre Parametrisierung C von K an.

(b) Berechnen Sie die Länge $L(K)$ einmal direkt, einmal mittels $L(K) = \int_K 1 \,\mathrm{d}s$.

(c) Berechnen Sie die Kurvenintegrale $\int_K f(s)\,\mathrm{d}s$ und $\int_K \nabla f(x) \bullet \mathrm{d}x$.

Aufgabe P 94. *Zirkulation und Ausfluss*
Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix}$.
Sei $g := f \circ f$.
Sei $K := \left\{ (u,v)^\intercal \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, u^2 + v^2 = 1 \right\}$.

(a) Berechnen Sie g.

(b) Skizzieren Sie K und die Vektorfelder f und g.

(c) Berechnen Sie für f den Ausfluss durch und die Zirkulation längs K.

(d) Berechnen Sie für g den Ausfluss durch und die Zirkulation längs K.

(e) Welche Resultate aus **(c)** und **(d)** sind erwartbar gleich 0? Erklären Sie.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 106. *Kurvenintegrale*

(a) Sei $h\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon (u,v,w)^\intercal \mapsto uvw$.
Sei K parametrisiert durch $C\colon [0,4\pi] \to \mathbb{R}^3\colon t \mapsto (\cos(t),\sin(t),3t)^\intercal$.
Berechnen Sie das Kurvenintegral von h längs K.

(b) Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} v+2uv \\ u^2-2uv \end{pmatrix}$. Sei K der Rand des von den Kurven $\left\{(u,v)^\intercal \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, v=u^2\right\}$ und $\left\{(u,v)^\intercal \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, u=v^2\right\}$ umschlossenen Bereichs.
Skizzieren Sie K. Berechnen Sie das Kurvenintegral von f längs K.

(c) Sei $p\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} v^2+w^2 \\ w^2+u^2 \\ u^2+v^2 \end{pmatrix}$. Sei K parametrisiert durch $C(t)=(t,t^2,t^3)^\intercal$ von $(0,0,0)^\intercal$ nach $(1,1,1)^\intercal$. Berechnen Sie das Kurvenintegral von p längs K.

(d) Sei $K := \left\{(u,v)^\intercal \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, v=u^2/2,\ 0 \leqq u \leqq 1\right\}$.
Skizzieren Sie K. Berechnen Sie die Länge von K.

Aufgabe H 107. *Feldlinien*

(a) Berechnen Sie die Feldlinie von $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ u \end{pmatrix}$, die durch $(0,-1)^\intercal$ verläuft. Skizzieren Sie g und drei seiner Feldlinien.

(b) Berechnen Sie die Feldlinie von $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ v \end{pmatrix}$, die durch $(0,-1)^\intercal$ verläuft. Skizzieren Sie g und drei seiner Feldlinien.

Aufgabe H 108. *Zirkulation und Ausfluss*

Gegeben sei das Vektorfeld $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u-v \\ u+v \end{pmatrix}$ und die Kurve

$$K := \left\{(u,v)^\intercal \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, u^2+v^2=u+v\right\}.$$

(a) Skizzieren Sie die Kurve K und das Vektorfeld f.

(b) Berechnen Sie die Kurvenintegrale $\int_K f(x) \bullet \mathrm{d}x$ und $\int_K |f(s)|^2 \,\mathrm{d}s$.

(c) Berechnen Sie $Z(f,K)$ und $A(f,K)$.

Aufgabe H 109. *Zirkulation und Ausfluss*

Sei $f_{a,b}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} au^2v+v^2+1 \\ 2u^3+buv+2 \end{pmatrix}$ für Parameter $a,b \in \mathbb{R}$.
Seien $F_1 := (-1,0)^\intercal$ und $F_2 := (3,0)^\intercal$. Sei $K := \left\{P \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \overline{PF_1}+\overline{PF_2}=6\right\}$.

(a) Finden Sie ein Paar $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ so, dass $f_{a,b}$ ein Gradientenfeld ist.

(b) Bestimmen Sie $\int_L f_{a,b}(x) \bullet \mathrm{d}x$ für eine Kurve L von F_1 nach F_2 mit (a,b) aus **(a)**.

(c) Parametrisieren und skizzieren Sie K.

(d) Berechnen Sie für $f_{a,b}$ mit (a,b) aus **(a)** die Zirkulation längs und den Ausfluss durch K.