E. Chavli, A. Geyer,
A.L. Thiel

14. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 2

Sommersemester 2017

M. Künzer
M. Stroppel

Präsenzübungen

Aufgabe P 40. *Geometrische Summen und Reihen*

(a) Berechnen Sie den Wert der Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^k$.

(b) Wir betrachten die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 3^{1-2k}$.

Bestimmen Sie die zweite und die dritte Partialsumme.

Finden Sie eine Formel für die n-te Partialsumme für $n \geqq 1$.

Bestimmen Sie den Wert der Reihe.

(c) Berechnen Sie den Wert der Reihe $\sum\limits_{k=3}^{\infty} \frac{2^{3k}}{3^{2k}}$.

Aufgabe P 41. *Partialsummen*

Gegeben sei die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ mit $a_k = \dfrac{k+1}{2k}$. Sei

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$$

die n-te Partialsumme dieser Reihe.

(a) Berechnen Sie S_1, S_2 und S_3.

(b) Finden Sie eine Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ so, dass $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bestimmt gegen $+\infty$ divergiert und dass $S_n \geqq b_n$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$.

(c) Konvergiert die Folge $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$? Konvergiert die Reihe?

Aufgabe P 42. *Teleskopreihe*

Berechnen Sie den Wert folgender Reihe.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right) + \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2}\right) + \ldots$$

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 40. *Folgen und Häufungspunkte*

Bestimmen Sie $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$, $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$ und $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$, falls existent. Konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

(a) $a_n = \dfrac{4}{n+3}\cdot(-1)^n$

(b) $a_n = \left(-1-\dfrac{1}{n}\right)^n$

(c) $a_n = n^{((-1)^{n+1})}$

(d) $a_n = \dfrac{n}{3n+(-1)^n\cdot(n+1)}$

Aufgabe H 41. *Partialsummen und Bolzano-Weierstraß*

Gegeben sei die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ mit $a_k = \dfrac{1}{2^k+1}$. Sei $S_n := \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$ für $n \geqq 0$.

(a) Zeigen Sie, dass $S_n \leqq 2 - 2^{-n}$ ist für $n \geqq 0$.

(b) Zeigen Sie, dass die Folge $(S_n)_{n\geqq 0}$ der Partialsummen monoton wachsend und beschränkt ist.

(c) Konvergiert die Reihe? Begründen Sie die Antwort mit einem Satz der Vorlesung.

(d) Zeigen Sie, dass $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \leqq 2$ ist.

Aufgabe H 42. *Geometrische Reihe und Teleskopreihe*

Konvergiert die Reihe? Berechnen Sie gegebenenfalls ihren Wert.

(a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{4}{4k^2-1}$

(b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$

(c) $\sum\limits_{k=6}^{\infty} \dfrac{(-4)^{3k}}{5^{k-1}}$

(d) $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(2-u_k)$, wobei $u_0 := 1$ und $u_{k+1} := \frac{1}{2}u_k + 1$ für $k \geqq 0$.

Hinweis zu (a): Umschreiben in $\frac{A}{2k-1} + \frac{B}{2k+1}$ mit $A, B \in \mathbb{R}$.
Hinweis zu (d): Es ist $2 - u_k$ von der Form q^k mit $q \in \mathbb{R}$.

Online-Aufgabe.

Sie finden Ihre Online-Aufgabe auf folgender Webseite.

http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test430/

Bitte geben Sie dort zunächst Ihre Matrikelnummer ein.

Die Lösungen sind als ganze Zahlen oder als Dezimalzahlen mit einem Dezimal**punkt** einzugeben. Sonstige Zeichen, wie zum Beispiel Klammern oder Operatoren wie $*$ und $/$, dürfen **nicht** benutzt werden.

Anschließend müssen Sie das per Email erhaltene **Passwort** für die Onlineübungen eintragen.

Innerhalb des Bearbeitungszeitraums können Sie Ihre Eingaben beliebig oft wiederholen, wobei die **letzten** Eingaben gewertet werden. Der Bearbeitungszeitraum endet mittwochs, nach der Abgabe der schriftlichen Übungen in den Übungsgruppen, um 24:00 Uhr. Sie erhalten für die Bearbeitung der Online-Aufgabe 0 bis 2 Punkte.

Präsenzübungen

Aufgabe P 43. *Konvergenzkriterien für Reihen*

Sei $a \in \mathbb{R}^+$ ein Parameter. Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz in Abhängigkeit von a.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}}{5^n + n^4}$ **(b)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+(1/3)^n}$ **(c)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^a}$ **(e)** $\sum_{n=1}^{\infty} (3+(-1)^n)^n$ **(f)** $\sum_{n=1}^{\infty} \left(a+\frac{1}{n}\right)^n$

(g) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}-1}$ **(h)** $\sum_{n=3}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}-1}\right|$

Aufgabe P 44. *Stetigkeit*

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto 1+x^2$. Sei eine Fehlerschranke $1 > \varepsilon > 0$ gegeben.

(a) Skizzieren Sie den Graphen von f.

(b) Finden Sie in Abhängigkeit von ε ein $\delta_1 > 0$ mit $|f(x) - f(1)| < \varepsilon$ für $x \in [1, 1+\delta_1)$.

(c) Finden Sie in Abhängigkeit von ε ein $\delta_2 > 0$ mit $|f(x) - f(1)| < \varepsilon$ für $x \in (1-\delta_2, 1]$.

(d) Sei $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Zeigen Sie $f(U_\delta(1)) \subseteqq U_\varepsilon(f(1))$.
Ist f an der Stelle 1 stetig?

Aufgabe P 45. *Reihen und Partialsummen*

Sei $x \in (-1, 1)$ ein Parameter.

Wir betrachten die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \ln(1 + x^{(2^n)})$.

Für $N \geqq 0$ schreiben wir die Partialsumme $S_N := \sum\limits_{n=0}^{N} \ln(1 + x^{(2^n)})$.

(a) Zeigen Sie, dass $S_0 = \ln(1+x)$, $S_1 = \ln(1+x+x^2+x^3)$
und $S_2 = \ln(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7)$ ist.

(b) Zeigen Sie durch Induktion, dass $S_N = \ln\left(\sum\limits_{n=0}^{2^{N+1}-1} x^n\right)$ gilt für $N \geqq 0$.

(c) Bestimmen Sie den Wert der Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \ln(1 + x^{(2^n)})$.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 43. *Majorantenkriterium*

(a) Zeigen Sie, dass $\frac{1}{2}(x+y) \geqq \sqrt{xy}$ gilt für $x, y \in \mathbb{R}_0^+$.

(b) Seien $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen mit $u_n, v_n \in \mathbb{R}_0^+$ für $n \in \mathbb{N}$.
Seien $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ konvergente Reihen.
Zeigen Sie, dass $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{u_n v_n}$ eine konvergente Reihe ist, welche
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{u_n v_n} \leqq \frac{1}{2}\big((\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n) + (\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n)\big)$ erfüllt.

(c) Berechnen Sie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$.

(d) Zeigen Sie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n((n+1)(n+2))^{1/2}} \leqq \frac{7}{8}$.

Aufgabe H 44. *Konvergenzkriterien für Reihen*

Sei $a \in \mathbb{R}^+$ ein Parameter. Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz in Abhängigkeit von a.

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{a^n}$ **(b)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-1+\frac{2}{n}}$ **(c)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)}$

(d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{2n}}{\mathrm{e}^{3n}+\mathrm{e}^{-3n}}$ **(e)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(3+(-1)^n)^n}$ **(f)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin(n)}{n}\right)^n$

(g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$ **(h)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^n \left(\sqrt{n^2+1}-n\right)\right|$

Aufgabe H 45. *Stetigkeit*

Wir betrachten die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leqq -1 \\ 2|x| & \text{für } -1 < x < 2 \\ 4 & \text{für } x \geqq 2 \end{cases}$$

(a) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion f.

(b) Sei eine Fehlerschranke $1 > \varepsilon > 0$ gegeben.
Finden Sie in Abhängigkeit von ε ein $\delta_1 > 0$ mit $|f(x) - f(2)| < \varepsilon$ für $x \in [2, 2+\delta_1)$ und ein $\delta_2 > 0$ mit $|f(x) - f(2)| < \varepsilon$ für $x \in (2-\delta_2, 2]$.
Sei $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Zeigen Sie $f(U_\delta(2)) \subseteqq U_\varepsilon(f(2))$.
Ist f an der Stelle 2 stetig?

(c) Finden Sie ein $\varepsilon > 0$, für welches kein $\delta > 0$ existiert mit $f(U_\delta(-1)) \subseteqq U_\varepsilon(f(-1))$.
Ist f an der Stelle -1 stetig?

Präsenzübungen

Aufgabe P 46. *Funktionsgrenzwerte*

Untersuchen Sie die folgenden Funktionsgrenzwerte.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+2x}{-x-3}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}+\sin(x)\cos(x)}{x}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0+0} \frac{x^3+3x}{x^3+x^2}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+5x}-\sqrt{x^2+1}\right)$.

Aufgabe P 47. *Stetigkeit*

Seien $p, q \in \mathbb{R}$ Parameter.
Wir betrachten die Funktionen $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für } x \leqq 1 \\ 2x+p & \text{für } x > 1 \end{cases} \quad \text{und} \quad g(x) = \begin{cases} \frac{\sin(2x)}{x} & \text{für } x < 0 \\ x+q & \text{für } x \geqq 0 \end{cases}$$

(a) Berechnen Sie

$$\lim_{x\to 1-0} f(x), \ \lim_{x\to 1+0} f(x), \ \lim_{x\to 0-0} g(x), \ \lim_{x\to 0+0} g(x).$$

(b) Für welche Werte des Parameters p ist f an der Stelle 1 stetig?

(c) Für welche Werte des Parameters q ist g an der Stelle 0 stetig?

Aufgabe P 48. *Nullstellensatz von Bolzano*

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto f(x) = \mathrm{e}^x + x^3$.

(a) Gibt es im Intervall $(0, 1)$ ein x mit $f(x) = 3$?

(b) Gibt es im Intervall $(0, 1)$ zwei Werte x_1 und x_2 mit $f(x_1) = 3$ und $f(x_2) = 3$?
Hinweis: Monotonie von e^x darf verwendet werden.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 46. *Funktionsgrenzwerte*

Untersuchen Sie die folgenden Funktionsgrenzwerte.
Die erst später einzuführende Regel von l'Hospital darf nicht verwendet werden.

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{7x^5 - 17x + 3x^4 + 1}{8x^3 - 3x^2 + 4x^5 - \sqrt{x}}$ **(b)** $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{4 - x^2}{3 - \sqrt{x^2+5}}$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$ **(d)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x + \tan(4x)}{3x}$.

Aufgabe H 47. *Stetigkeit*

Wir betrachten die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0 \\ x\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} & \text{für } x \neq 0. \end{cases}$$

(a) Skizzieren Sie den Graphen von f.

(b) Zeigen Sie dass $\frac{1}{x} \leqq \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \leqq 1 + \frac{1}{x}$ für $x > 0$.
Berechnen Sie $\lim_{x\to 0+0} f(x)$ mittels eines Sandwich-Arguments.

(c) Ist f eine gerade oder ungerade Funktion?
Leiten Sie davon die Werte von $\lim_{x\to 0-0} f(x)$ ab.

(d) Ist f an der Stelle 0 stetig?

Aufgabe H 48. *Intervallhalbierungsmethode*

Sei $f\colon [1,4] \to \mathbb{R}\colon x \mapsto f(x) = x^3 - 20$.

(a) Skizzieren Sie den Graphen von f.

(b) Zeigen Sie, dass f im Intervall $[1,4]$ genau eine Nullstelle ξ hat.

(c) Wenden Sie die Intervallhalbierungsmethode auf die Funktion $f(x)$ mit dem Startintervall $[1,4]$ an, um $a,\, b \in [1,4]$ zu finden mit $a < \xi < b$ und mit $b - a < 0{,}2$.
Hinweis: Funktionswerte sind mit einem Taschenrechner zu berechnen.

Präsenzübungen

Aufgabe P 49. *Konvergenz von Potenzreihen*
Wir betrachten folgende Potenzreihen.

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\,\frac{z^n}{3^n} \qquad g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-7\mathrm{i})^n}{n^n} \qquad h(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2\mathrm{i}z-4\mathrm{i}+1)^n}{n^2}$$

(a) Bestimmen Sie Entwicklungspunkte und Konvergenzradien von $f(z)$, $g(z)$ und $h(z)$.

(b) Skizzieren Sie die Konvergenzkreise der Potenzreihen in der komplexen Zahlenebene.

(c) Untersuchen Sie die Potenzreihen $f(z)$, $g(z)$ und $h(z)$ auf Konvergenz in $z = 1+\mathrm{i}$.

(d) Ist $h(z)$ für $z = 2$ konvergent?

(e) Ist $f(z)$ für $z = 3$ konvergent?

Aufgabe P 50. *Formel von Euler und de Moivre*
Sei $f(x) = \cos(x)^3$ für $x \in \mathbb{R}$.

(a) Schreiben Sie $f(x)$ als Linearkombination von Funktionen der Form $\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$ mit $n \in \mathbb{Z}$.

(b) Schreiben Sie $f(x)$ als Linearkombination von Funktionen der Form $\sin(nx)$ und $\cos(mx)$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{N}_0$.

Aufgabe P 51. *Form des Konvergenzbereiches*
Sei $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe, wobei $a_n \in \mathbb{C}$.
Sei bekannt, dass $f(z)$ in den Punkten $z_1 = 1+\mathrm{i}$, $z_2 = \mathrm{i}$ und $z_3 = -\mathrm{i}$ konvergiert.

(a) Zeichnen Sie z_1, z_2 und z_3 in die Zahlenebene ein.

(b) Zeichnen Sie $0{,}4z_1 + 0{,}6z_3$ und $0{,}8z_1 + 0{,}1z_2 + 0{,}1z_3$ und $0{,}1z_1 + 0{,}3z_2 + 0{,}6z_3$ in die Zahlenebene ein.

(c) Wo liegen die Punkte $\lambda_1 z_1 + \lambda_3 z_3$, wenn $\lambda_1, \lambda_3 \in [0,1]$ liegen und $\lambda_1 + \lambda_3 = 1$ gilt?

(d) Konvergiert diesenfalls $f(z)$ im Punkt $\lambda_1 z_1 + \lambda_3 z_3$?

(e) Wo liegen die Punkte $\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_3 z_3$, wenn $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in [0,1]$ liegen und $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$ gilt?

(f) Konvergiert diesenfalls $f(z)$ im Punkt $\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_3 z_3$?

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 49. *Konvergenz von Potenzreihen*

Schreiben Sie $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ mit $a_n \in \mathbb{C}$ und $z_0 \in \mathbb{C}$ geeignet.

Bestimmen Sie in den Fällen **(c)** und **(d)** die Häufungspunkte von $(\sqrt[n]{|a_n|})_{n\in\mathbb{N}}$ und damit $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$.

Bestimmen Sie den Entwicklungspunkt und den Konvergenzradius von $f(z)$.

Bestimmen Sie in den Fällen **(b)** und **(c)**, für welche Werte von $z \in \mathbb{R}$ die Potenzreihe $f(z)$ absolut konvergent, konvergent bzw. divergent ist. Betrachten Sie hierbei insbesondere die beiden reellen Punkte auf dem Rand des Konvergenzkreises.

(a) $f(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(z\mathrm{i} - 3)^n}{(2n+1)\cdot(2n-1)\cdots 3\cdot 1}$ **(c)** $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{\pi^k z^{2k+1}}{2k+2}$

(b) $f(z) = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-z)^n}{\sqrt{n}}$ **(d)** $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{\left(1+\mathrm{i}^k\right)^k}{k+1}(1+z)^k$

Aufgabe H 50. *Formel von Euler und de Moivre*

Schreiben Sie $f(x)$ als Linearkombination von Funktionen der Form $\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$ mit $n \in \mathbb{Z}$.
Schreiben Sie sodann $f(x)$ als Linearkombinationen von Funktionen der Form $\sin(nx)$ und $\cos(mx)$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{N}_0$.

(a) $f(x) = \cos(5x)^4 \sin(3x)$ **(b)** $f(x) = \sin(3x)\cos(x) - \cos(x)^3 \sin(4x)$

Aufgabe H 51. *Approximation von* $(1+x)^\alpha$

Seien $f\colon [-1,\infty) \to \mathbb{R}\colon x \to (1+x)^{\frac{3}{2}}$ und $g\colon [-1,\infty) \to \mathbb{R}\colon x \to (1+x)^{\frac{1}{2}}$.

- **(a)** Stellen Sie die Binomialreihe für $f(x)$ auf. Bestimmen Sie davon die Partialsumme $p_k(x)$ von Grad k für $k \in \{1,2,3,4\}$.
- **(b)** Skizzieren Sie die Graphen von $f(x)$ und $p_1(x)$ und $p_2(x)$ und $p_3(x)$ auf $x \in [-1,5]$ in ein gemeinsames Koordinatensystem.
- **(c)** Berechnen Sie $|f(0{,}5) - p_2(0{,}5)|$ und $|f(0{,}5) - p_3(0{,}5)|$ und $|f(0{,}5) - p_4(0{,}5)|$ mittels Taschenrechner auf 4 Nachkommastellen genau.
- **(d)** Stellen Sie die Binomialreihe für $g(x)$ auf. Bestimmen Sie davon die Partialsumme $q_4(x)$ von Grad 4.
  Berechnen Sie $f(x) - (1+x)g(x)$. Berechnen Sie $p_4(x) - (1+x)q_4(x)$.

Online-Aufgabe.

Sie finden Ihre Online-Aufgabe auf folgender Webseite.

http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/

Präsenzübungen

Aufgabe P 52. *Differenzenquotient*

(a) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x^2$.
Berechnen Sie $f'(1)$ mit Hilfe des Differenzenquotienten.
Berechnen Sie $f'(1)$ erneut mit der Ableitungsregel für Polynome.

(b) Sei

$$g\colon (-\infty, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \begin{cases} x & \text{für } x \leqq 0 \\ \tan(x) & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

Untersuchen Sie mit Hilfe des Differenzenquotienten, ob g an der Stelle $x_0 = 0$ differenzierbar ist.

Aufgabe P 53. *Ableitungen*

Bestimmen Sie $f'(x)$.

(a) $f\colon \mathbb{R} \smallsetminus \{-\frac{1}{2}\} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{\cosh(x)}{2x+1}$

(b) $f\colon (-1, +\infty) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x \cdot (x+1)^x$

(c) $f\colon (2, 17) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \arctan\left(\mathrm{e}^{3x+2}\right)$

Aufgabe P 54. *Stetigkeit und Differenzierbarkeit*

Sei $(m,p) \in \mathbb{R}^2$ ein Parameterpaar.
Wir betrachten die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 2 & \text{für } x \leqq 1 \\ mx + p & \text{für } x > 1\,. \end{cases}$$

(a) Skizzieren Sie den Graphen von f für $(m,p) \in \{(-3,1), (1,2), (3,0)\}$.

(b) Für welche Parameterpaare (m,p) ist f an der Stelle 1 stetig?

(c) Für welche Parameterpaare (m,p) ist f an der Stelle 1 differenzierbar?

Aufgabe P 55. *Ableitung der Umkehrfunktion*

Seien I und J Intervalle.
Sei $f : I \to J$ eine differenzierbare bijektive Funktion mit $f'(x) > 0$ für $x \in I$.
Sei an $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} f^{-1}(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$ erinnert.
Berechnen Sie die zweite Ableitung $\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\right)^2 f^{-1}(y)$.
Wie hängen die Vorzeichen der zweiten Ableitungen von f und von f^{-1} zusammen?
Können Sie diesen Zusammenhang am Graphen von f geometrisch erklären?

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 52. *Differenzierbarkeit*

Wie betrachten die folgenden Funktionen.

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0 \\ x\mathrm{e}^{\frac{\sin(x)}{x}} & \text{für } x \neq 0 \end{cases}$$
$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto |x^2 - 4|$$

(a) Untersuchen Sie mit Hilfe des Differenzenquotienten, ob f an der Stelle $x_0 = 0$ differenzierbar ist.

(b) Untersuchen Sie mit Hilfe des Differenzenquotienten, ob g an den Stellen $x_1 = -3$, $x_2 = 1$ und $x_3 = 2$ differenzierbar ist.

Aufgabe H 53. *Ableitungen*

Bestimmen Sie den maximalen reellen Definitionsbereich von f. Wo ist f differenzierbar? Berechnen Sie f'. Berechnen Sie bei **(a)** auch f''.

(a) $f(x) = (\mathrm{e}^x + x^4)\cos(-2x)$

(b) $f(x) = \dfrac{x^3}{2^x} + \sqrt{x}$

(c) $f(x) = \ln(\sqrt{3x^2 - 12})$

Aufgabe H 54. *Differenzierbarkeit und Tangente*

Sei $m \in \mathbb{R}$ ein Parameter.
Wir betrachten die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} -(1+x)^3 + 2 & \text{für } x \leqq 0 \\ x^2 + mx + 1 & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

(a) Skizzieren Sie den Graphen von f für $m \in \{2, 0, -3\}$.

(b) Sei $m = 0$. Ist f stetig?

(c) Für welchen Wert des Parameters m ist f an der Stelle 0 differenzierbar?

(d) Bestimmen Sie für den in **(c)** bestimmten Wert von m die Gleichung der Tangente an den Graphen von f an der Stelle 0. Skizzieren Sie diese Tangente an den Graphen.

Online-Aufgabe.

Sie finden Ihre Online-Aufgabe auf folgender Webseite.

http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test430/

Präsenzübungen

Aufgabe P 56. *Funktionsgrenzwerte mit l'Hospital*

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte mit der Regel von l'Hospital.
Geben Sie dabei an, ob ein Ausdruck der Form "$\frac{0}{0}$", "$\frac{\infty}{\infty}$", "$\frac{-\infty}{\infty}$", "$\frac{\infty}{-\infty}$" oder "$\frac{-\infty}{-\infty}$" vorliegt.

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{3x}$ **(b)** $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x^2-1}$ **(c)** $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{6x+\ln(2x)}{3x+\ln(x)}$ **(d)** $\lim\limits_{x\to -\infty} \mathrm{e}^x(2+x)$

Aufgabe P 57. *Taylorpolynome*

Bestimmen Sie $T_n(f,x,x_0)$.

(a) $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}\colon x\mapsto f(x) := \frac{1}{\cos(x)}, \quad n=2, \quad x_0=0.$

(b) $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}\colon x\mapsto f(x) := x^3, \quad n=3, \quad x_0=-1.$

(c) $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}\colon x\mapsto f(x) := \mathrm{e}^{3x}, \quad n=4, \quad x_0=0.$

Aufgabe P 58. *Mittelwertsatz*

Gegeben ist die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}\colon x\mapsto \sqrt{x}.$$

(a) Bestimmen Sie für die Funktion f ein $\xi\in(0,4)$ mit $f'(\xi) = \frac{f(4)-f(0)}{4-0}$.

(b) Skizzieren Sie den Graphen von f, die Sekante durch die Punkte $(0, f(0))$ und $(4, f(4))$ sowie die Tangente an den Graphen von f an der Stelle $(\xi, f(\xi))$.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 55. *Funktionsgrenzwerte mit l'Hospital*

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte mit der Regel von l'Hospital.
Geben Sie dabei an, ob ein Ausdruck der Form "$\frac{0}{0}$", "$\frac{\infty}{\infty}$", "$\frac{-\infty}{\infty}$", "$\frac{\infty}{-\infty}$" oder "$\frac{-\infty}{-\infty}$" vorliegt.

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4^x - 2^x}{9^x - 3^x}$

(b) $\lim\limits_{x\to +\infty} x\left(\arctan(2x) - \dfrac{\pi}{2}\right)$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x\tan(x)} - \dfrac{1}{x\sin(x)}\right)$

(d) $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)\tan\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)$

Aufgabe H 56. *Mittelwertsatz*

Wir betrachten die Funktion $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}\colon t\mapsto \arctan(t)$.

(a) Sei $x>0$. Beweisen Sie, dass es ein $\xi\in(0,x)$ gibt mit

$$\frac{1}{1+\xi^2} = \frac{f(x)-f(0)}{x-0}.$$

(b) Beweisen Sie die folgenden Ungleichungen für $x>0$ mittels **(a)**.

$$\frac{x}{1+x^2} \leqq \arctan(x) \leqq x$$

(c) Skizzieren Sie die Graphen der drei Funktionen aus **(b)** auf dem Intervall $[0,2]$.

(d) Zeigen Sie, dass $\tan : (0,\frac{\pi}{2})\to\mathbb{R}$ eine streng monoton wachsende Funktion ist.
Beweisen Sie die folgenden Ungleichungen für $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ mittels **(b)**.

$$\tan\left(\frac{x}{1+x^2}\right) \leqq x \leqq \tan(x)\ .$$

Aufgabe H 57. *Taylorentwicklung und Fehlerabschätzung*

Sei $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}\colon x\mapsto \mathrm{e}^x\cos(x)$ gegeben.

(a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom $T_3(f,x,\pi)$.

(b) Finden Sie eine reelle Zahl a so, dass

$$|f(x) - T_3(f,x,\pi)| \leqq a\,|x-\pi|^4$$

für alle $x\in[\pi-1,\pi+1]$ gilt.

(c) Bestimmen Sie ein $b\in(0,1)$ so, dass

$$|f(x)-T_3(f,x,\pi)| \leqq 10^{-4}$$

für alle $x\in[\pi-b,\pi+b]$ ist.

(d) Wir betrachten die Taylorreihe $T(f,x,0) =: \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ mit $c_n\in\mathbb{R}$.
Bestimmen Sie hierin c_{4k}, c_{4k+1}, c_{4k+2} und c_{4k+3} für $k\geqq 0$.

Online-Aufgabe.

Sie finden Ihre Online-Aufgabe auf folgender Webseite.

http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/

Präsenzübungen

Aufgabe P 59. *Partielle Integration, Substitution*
Wie betrachten die folgenden Funktionen.

$$f\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$$
$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \sin(x)(\cos(x))^3$$

(a) Bestimmen Sie mit Hilfe partieller Integration Stammfunktionen von f und von g.

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe Substitution Stammfunktionen von f und von g.

(c) Überprüfen Sie Ihre Resultate, indem Sie die erhaltenen Stammfunktionen ableiten.

Aufgabe P 60. *Integration durch Substitution*
Bestimmen Sie durch geeignete Substitutionen die folgenden Integrale.

(a) $\displaystyle\int x^2 \mathrm{e}^{2x^3+5}\,\mathrm{d}\,x$ **(b)** $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}^2} \frac{1}{x}\cos\left(\frac{\pi}{6}\ln(x)\right)\mathrm{d}\,x$

(c) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{7x}}\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}\,x$ **(d)** $\displaystyle\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}\,x$

Aufgabe P 61. *Extrema und Wendepunkte, Stammfunktion*
Wie betrachten die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \dfrac{x}{x^2+1}$.

(a) Skizzieren Sie den Graphen von f.

(b) Bestimmen Sie $f'(x)$ und $f''(x)$.

(c) Bestimmen Sie die lokalen Extrema und die Wendepunkte von f.
Skizzieren Sie die Tangenten in den Wendepunkten.

(d) Bestimmen Sie eine Stammfunktion F von f mit $F(0) = 61$.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 58. *Integration*

Bestimmen Sie die folgenden Integrale.

(a) $\int \cos(5x)^4 \sin(3x)\,\mathrm{d}x$ **(b)** $\int \sin(3x)\cos(x) - \cos(x)^3 \sin(4x)\,\mathrm{d}x$

(c) $\int_0^{1/5} \arctan(5x)\,\mathrm{d}x$ **(d)** $\displaystyle\int_2^3 \frac{\ln(x)\cdot x^x}{\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$.

Hinweis: Aufgabe **H 50** hilft in **(a)** und **(b)**. In **(c)** kann partielle Integration benutzt werden. In **(d)** forme man x^x um.

Aufgabe H 59. *Integration, lokale Extrema und Wendepunkte*

(a) Bestimmen Sie eine Stammfunktion F zu $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \to \cos(x)\sinh(x)$.
Finden Sie eine lokale Extremstelle von F.

(b) Bestimmen Sie eine Stammfunktion F zu $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \to \dfrac{x}{(1+x^2)^2}$.
Skizzieren Sie den Graphen von F. Finden Sie einen Wendepunkt von F.

(c) Bestimmen Sie eine Stammfunktion F zu $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \to x^2\mathrm{e}^{-2x}$ mit $F(0) = 0$.
Finden Sie $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $F'(x_0) = 0$ so, dass x_0 keine lokale Extremstelle von F ist.

(d) Bestimmen Sie $\int \sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$ unter Verwendung der Substitution $x(t) = 2\sin(t)$.

Aufgabe H 60. *Potenzreihe für den Arcustangens*

(a) Bestimmen Sie eine Potenzreihenentwicklung für $f\colon (-1,+1) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ unter Verwendung der geometrischen Reihe.

(b) Zeigen Sie, dass für $x \in (-1,+1)$ die Potenzreihe

$$F(x) \;:=\; \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

konvergiert.

(c) Weisen Sie mittels **(a)** nach, dass $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\arctan(x) - F(x)) = 0$ ist für $x \in (-1,+1)$.
Überprüfen Sie $\arctan(0) - F(0) = 0$. Folgern Sie, dass

$$\arctan(x) \;=\; F(x) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

ist für $x \in (-1,+1)$.

(d) Bestimmen Sie $w := \sqrt{3}\arctan(1/\sqrt{3})$.

Zeigen Sie mittels **(c)**, dass $w = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{3^{-k}}{2k+1}$ ist.

Bestimmen Sie $w_3 := \displaystyle\sum_{k=0}^{3} (-1)^k \frac{3^{-k}}{2k+1}$.

Zeigen Sie mittels 1.9.5, dass $|w - w_3| \leqq 3^{-6}$ ist.

Online-Aufgabe.

Sie finden Ihre Online-Aufgabe auf folgender Webseite.

http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test430/

Präsenzübungen

Aufgabe P 62. *Partialbruchzerlegung und Integration*

(a) Geben Sie **nur den Ansatz** für die reelle Partialbruchzerlegung an. Die unbekannten Konstanten sollen **nicht** ermittelt werden.

In welchem Fall ist keine Partialbruchzerlegung mehr sinnvoll durchführbar?

(1) $\dfrac{1}{x(x+1)}$ **(2)** $\dfrac{x^7+1253x^5+\pi x+\mathrm{e}}{x^8+x^6}$

(3) $\dfrac{2x}{x^2+2x+5}$ **(4)** $\dfrac{-7}{(x^2+1)^2\,x^3}$

(b) Bestimmen Sie $\displaystyle\int \frac{x^3+1}{x^3-2x^2+x}\,\mathrm{d}x\,.$

Aufgabe P 63. *Obersumme und Untersumme*

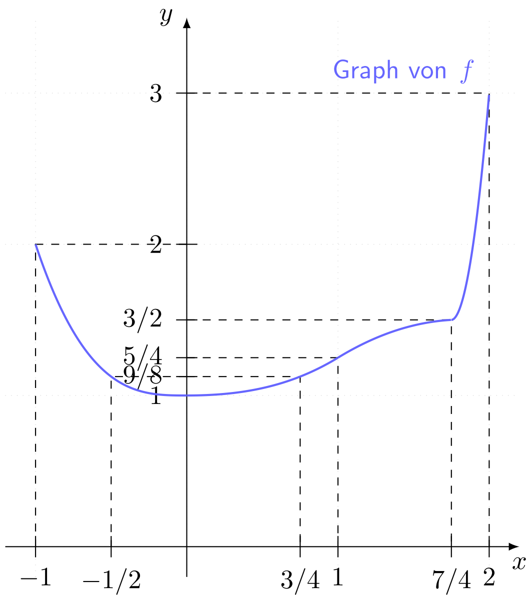
(a) Rechts ist der Graph der Funktion f dargestellt. Bestimmen Sie mit Hilfe der Ober- und Untersummen von f zur Partition $P := \{-1,0,1,2\}$ eine obere und eine untere Schranke für $\displaystyle\int_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x\,.$

(b) Finden Sie eine Partition $Q = \{-1,a,b,2\}$ so, dass

$$\overline{S}(f,Q) - \underline{S}(f,Q) < 2$$

ist.

(c) Stellen Sie die Obersumme von f zur Partition Q graphisch als Flächeninhalt dar.



Aufgabe P 64. *Integrale und Flächeninhalte*

(a) Bestimmen Sie $\displaystyle\int_2^4 -|x-3|+1\,\mathrm{d}x$. Skizzieren Sie den Graphen des Integranden.

Bestätigen Sie das Integrationsresultat durch eine geometrische Überlegung.

(b) Sei $g\colon [0,1]\to\mathbb{R}\colon x\mapsto x\mathrm{e}^x$. Sei $h\colon [0,1]\to\mathbb{R}\colon x\mapsto x\mathrm{e}^{(x^2)}$.

Bestimmen Sie die Schnittpunkte ihrer Graphen.

Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von diesen Graphen eingeschlossen wird.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 61. *Partialbruchzerlegung und Integration*

Berechnen Sie folgende Integrale.

(a) $\displaystyle\int \frac{x^2+3x+4}{x^2+2x}\,\mathrm{d}x$ **(b)** $\displaystyle\int \frac{4}{(x^2-1)^2}\,\mathrm{d}x$ **(c)** $\displaystyle\int \frac{9x}{(x^3-1)^2}\,\mathrm{d}x$

Aufgabe H 62. *Obersumme und Untersumme*

Sei $f\colon [-1,2] \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \dfrac{x^2+x+2}{x+2}$.

Wir betrachten die Partition $Q = \left\{-1, -\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2\right\}$ des Intervalls $[-1,2]$.

(a) Skizzieren Sie den Graphen von f.
Stellen Sie die Untersumme $\underline{S}(f,Q)$ graphisch als Flächeninhalt dar.

(b) Berechnen Sie $I := \displaystyle\int_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$.

(c) Berechnen Sie $\underline{S}(f,Q)$ und $\overline{S}(f,Q)$. Bestätigen Sie hiermit $\underline{S}(f,Q) \leqq I \leqq \overline{S}(f,Q)$ unter Verwendung eines Taschenrechners.

(d) Finden Sie $a \in (-\frac{1}{2}, 1)$ so, dass sich für die Partition $R := \left\{-1, -\frac{1}{2}, a, 1, \frac{3}{2}, 2\right\}$ die Gleichheit $\underline{S}(f,R) = \underline{S}(f,Q)$ ergibt.

Aufgabe H 63. *Integrale und Flächeninhalte*

(a) Skizzieren Sie den Graphen von $f\colon [0,\pi] \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x\sin(x)$.

Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche, die vom Graphen von f und von der x-Achse eingeschlossen wird.

Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche, die vom Graphen von f, von der Geraden $y = 2x$ und von der Geraden $x = \pi$ eingeschlossen wird.

Skizzieren Sie diese Flächen.

(b) Sei $g\colon (-1,+\infty) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto -\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{x}{2} + 2$. Sei $h\colon (-1,+\infty) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \dfrac{x+2}{x+1}$.

Skizzieren Sie die Graphen von g und h.

Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche, die von diesen Graphen zwischen ihren Schnittpunkten eingeschlossen wird.

Online-Aufgabe.

Sie finden Ihre Online-Aufgabe auf folgender Webseite.

http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/

Präsenzübungen

Aufgabe P 65. *Uneigentliche Integrale*

Untersuchen Sie, ob die folgenden uneigentlichen Integrale existieren, und berechnen Sie gegebenenfalls deren Werte.

(a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x$ **(b)** $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{(x-1)^2}\,\mathrm{d}x$ **(c)** $\displaystyle\int_{-5}^{+\infty} 2^{-x}\,\mathrm{d}x$

Aufgabe P 66. *Potenzreihen*

(a) Berechnen Sie den Konvergenzradius ρ der Potenzreihe $\sum\limits_{n=2}^{\infty} nx^{n-1}$.

Wir betrachten die Funktion

$$f\colon (-\rho,\rho) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \sum_{n=2}^{\infty} nx^{n-1}\,.$$

(b) Berechnen Sie die Stammfunktion F zu f, die $F(0) = 0$ erfüllt.

(c) Finden Sie eine geschlossene Darstellung für F.

(d) Finden Sie eine geschlossene Darstellung für f.

(e) Finden Sie eine geschlossene Darstellung für $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^n$.

Aufgabe P 67. *Konvergenz uneigentlicher Integrale*

Untersuchen Sie, ob die folgenden Integrale konvergieren.

(a) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^5}\,\mathrm{d}x$ **(b)** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{(2+\sin(x))\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ **(c)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x+1}{x^3}\,\mathrm{d}x$

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 64. *Uneigentliche Integrale*

Untersuchen Sie, ob die folgenden uneigentlichen Integrale existieren, und berechnen Sie gegebenenfalls deren Werte.

(a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ **(b)** $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} x^2 \mathrm{e}^{(x^3)}\,\mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int_1^{2} 2x\ln(x-1)\,\mathrm{d}x$ **(d)** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(2x)}{\sin(2x)} - \frac{1}{2x}\,\mathrm{d}x$

Aufgabe H 65. *Konvergenz uneigentlicher Integrale*

Untersuchen Sie, ob die folgenden Integrale konvergieren.

(a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ **(b)** $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+\cos(x)}}\,\mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{x^{-1}\ln(\cos(x)+2)}{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x$ **(d)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \tan(\mathrm{e}^{-x})\,\mathrm{d}x$

Konvergiert die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \tan(\mathrm{e}^{-k})$?

Aufgabe H 66. *Potenzreihen*

(a) Berechnen Sie den Konvergenzradius ρ der Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{4n+1}}{4n+1}$.

Wir betrachten die Funktion

$$f\colon (-\rho,\rho) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1}\,.$$

(b) Finden Sie eine geschlossene Darstellung für f'.

(c) Finden Sie eine geschlossene Darstellung für f.

Online-Aufgabe.

Sie finden Ihre Online-Aufgabe auf folgender Webseite.

http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test430/

E. Chavli, A. Geyer,
A.L. Thiel

23. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 2

Sommersemester 2017

M. Künzer
M. Stroppel

Präsenzübungen

Aufgabe P 68. *Partielle Ableitungen*
Bestimmen Sie für die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon (x,y,z) \mapsto f(x,y,z) = z\sin(x+3y) + \mathrm{e}^{z^3+xz+x}$$

die folgenden Ableitungen.

(a) $f_x(x,y,z)$ **(b)** $\dfrac{\partial}{\partial y} f(x,y,z)$ **(c)** $\dfrac{\partial^2}{\partial z\,\partial x} f(x,y,z)$ **(d)** $\mathrm{D}^{(1,0,1)} f(x,y,z)$

(e) $\mathrm{D}^{(0,1,0)}\left(\mathrm{D}^{(1,0,1)} f\right)(x,y,z)$ **(f)** $\partial_v f(0,0,0)$ für $v = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$.

Aufgabe P 69. *Modell: Eine unstetige, aber partiell differenzierbare Funktion*

Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \\ \dfrac{2xy^2}{x^2+y^4} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$.

Das Modell stellt den Graphen von f für $(x,y) \in [-2,2] \times [-2,2]$ im $\mathbb{R}^3$ dar.
Die Werte von f sind dabei in Richtung der z-Achse aufgetragen.

(a) Skizzieren Sie in ein ebenes Koordinatensystem die Niveaulinie N_0 von f zum Niveau 0. Welche farbigen Linien des Modells stellen N_0 dar? Markieren Sie auf Ihrer Skizze die Bereiche mit positiven Werten von f mit $+$ und die mit negativen Werten von f mit $-$. Entscheiden Sie, welche Achse des Modells die x-Achse ist und welche die y-Achse ist.

(b) Bestimmen Sie die Niveaulinien N_t von f zum Niveau t für $t = 1$ und $1/2$.
Welche farbigen Linien des Modells stellen N_1 und $N_{1/2}$ dar?

(c) Die Schnitte des Graphen von f mit den Ebenen $E_1 : y = x$, $E_2 : y = 6x$ und $E_3 : y = x/6$ sind auch als farbige Linien auf dem Modell dargestellt. Entscheiden Sie, welche Linie welchen Schnitt darstellt.

Aufgabe P 70. *Mengen*
Betrachten Sie die Teilmengen von $\mathbb{R}$

$$M_1 = [0,1], \quad M_2 = M_1^\circ,$$

sowie die Teilmengen von $\mathbb{R}^2$

$$M_3 = M_1 \times \{0\}, \quad M_4 = M_1 \times M_2, \quad M_5 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x \geqq 0 \text{ und } y \geqq 2x\right\},$$

$$M_6 = M_5 \cap \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y < 2\right\}, \quad M_7 = \overline{M_6} \cup \overline{M_4}.$$

(a) Skizzieren Sie die Mengen M_1 und M_2 in $\mathbb{R}$.
Skizzieren Sie die Mengen M_3, M_4, M_5, M_6 und M_7 in $\mathbb{R}^2$.

(b) Bestimmen Sie für die Mengen M_6, M_1 und M_3 die inneren Punkte und die Randpunkte. Argumentieren Sie mithilfe der Definitionen 4.2.14.

(c) Für welche $k \in \{1,\ldots,7\}$ ist M_k abgeschlossen?
Welche dieser Mengen sind weder abgeschlossen noch offen?

(d) Welche dieser Mengen sind beschränkt? Welche sind kompakt?

(e) Welche dieser Mengen sind konvex?

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 67. *Stetigkeit und Ableitungen*

(a) Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \\ \dfrac{x^2 \sin(y)}{x^2y + x^4 + y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0). \end{cases}$

Berechnen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ und $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right)$.

Zeigen Sie, dass f an der Stelle $(0,0)$ nicht stetig ist.

(b) Sei $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon (x,y,z) \mapsto y \ln(z^2 + x^4 + 1) + \cosh(yz)$. Sei $P = (1,2,0)$.

Sei $v = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1)$. Bestimmen Sie $\nabla g(P)$, $\partial_v g(P)$ und $\mathrm{H}g(P)$.

Aufgabe H 68. *Mengen*

Sei $M_1 = \left[-\frac{1}{2}, 0\right] \subseteqq \mathbb{R}$. Sei $M_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right] \subseteqq \mathbb{R}$. Sei $M_3 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 1 > y \geqq |x|\right\} \subseteqq \mathbb{R}^2$.
Betrachten Sie folgende Teilmengen von $\mathbb{R}^3$:

$$M_4 = M_3^\circ \times (0,1), \quad M_5 = \mathbb{R} \times [1,3] \times [0,1], \quad M_6 = M_5 \cap \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 1 \geqq x \geqq -1\right\},$$

$$M_7 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \tfrac{1}{4} > |x| \text{ und } 2 < y < 3 \text{ und } z = 1\right\},$$

$$M_8 = \{0\} \times M_1 \times \overline{M_2}, \qquad M_9 = \overline{M_4} \cup M_8 .$$

(a) Skizzieren Sie die Teilmengen M_6, M_7 und M_9 von $\mathbb{R}^3$ in dasselbe Koordinatensystem.

(b) Bestimmen Sie für M_2, M_3 und M_8 die inneren Punkte und die Randpunkte.

(c) Welche der Mengen M_2, M_3, M_4, M_5 und M_8 sind abgeschlossen?
Welche dieser Mengen sind weder abgeschlossen noch offen?

(d) Finden Sie unter den Mengen M_k, wobei $k \in \{1, \ldots, 9\}$, eine Menge, die nicht beschränkt ist, eine Menge, die nicht konvex ist und eine Menge, die kompakt ist.

Aufgabe H 69. *Modell: Eine unstetige, aber partiell differenzierbare Funktion*

Wir betrachten die Funktion f von **Aufgabe P 69**. Das in der Präsenzübung benutzte Modell des Graphen von f finden Sie auch unter:
www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/HM-Stroppel-Material/3D-Modelle/04

(a) Bestimmen Sie die Niveaulinien N_t von f zum Niveau t für $t = -1$ und $-1/3$.
Welche farbigen Linien des Modells stellen N_{-1} und $N_{-1/3}$ dar?

(b) Zeigen Sie, dass $-1 \leqq f(x,y) \leqq 1$ ist für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
Was ist die Niveaumenge N_2 von f zum Niveau 2?
Hinweis: Verwenden Sie $(x+y^2)^2 \geqq 0$ und $(x-y^2)^2 \geqq 0$.

(c) Sei $t \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} f(\frac{1}{n}, \frac{t}{n})$.
Finden Sie eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^2$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = (0,0)$ und mit $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = 1$.
Ist f stetig?

(d) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen von f im Ursprung.
Sei $\alpha \in [0, 2\pi]$. Sei $v = (\cos(\alpha), \sin(\alpha))$. Berechnen Sie $\partial_v f(0,0)$. Ist hierfür Satz 4.3.12 anwendbar?

Online-Aufgabe.

Sie finden Ihre Online-Aufgabe auf folgender Webseite.

http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/

Präsenzübungen

Aufgabe P 71. *Kritische Stellen und ihr Typ*

Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto (x^2+y^2-1)\,(y-1)$.

(a) Skizzieren Sie die Nullstellenmenge von f. Bestimmen Sie die Vorzeichenverteilung von f und notieren Sie diese in Ihrer Skizze.

(b) Bestimmen Sie den Gradienten und die Hesse-Matrix von f.

(c) Bestimmen Sie die kritischen Stellen von f.

Welcher Typ liegt jeweils vor, d.h. handelt es sich um eine lokale Maximalstelle, eine lokale Minimalstelle oder um einen Sattelpunkt?

Bei welchen kritischen Stellen kann dieser Typ mittels Hesse-Matrix bestimmt werden?

Bei welchen kritischen Stellen kann dieser Typ mittels der Skizze aus **(a)** bestimmt werden?

Aufgabe P 72. *Modell: Schmiegquadriken*

Sei $f\colon (-\pi,\pi)\times(-\pi,\pi) \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto \cos(x)\cos(y)$.
Das Modell stellt den Graphen von f dar.

(a) Skizzieren Sie die Nullstellenmenge von f. Bestimmen Sie die Vorzeichenverteilung von f und notieren Sie diese in Ihrer Skizze.

(b) Bestimmen Sie den Gradienten und die Hesse-Matrix von f.

(c) Zeigen Sie, dass $P_1 = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ und $P_2 = (0,0)$ kritische Stellen von f sind.

(d) Bestimmen Sie die Typen der kritischen Stellen P_1 und P_2 mittels Hesse-Matrix. Können Sie die Typen dieser kritischen Stellen auch mit der Skizze aus **(a)** bestimmen?

(e) Bestimmen Sie das Taylorpolynom der Stufe 2 zu f im Punkt P_1.

(f) Bestimmen Sie die Schmiegquadrik an f an der Stelle P_1 sowie deren Gestalt.

Aufgabe P 73. *Kritische Stellen und ihr Typ, Taylorpolynome*

Sei $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3)$. Seien $P = (1,0,1)$ und $Q = (3,2,-1)$ kritische Stellen von f.
Sei $f(P) = 7$. Sei $f(Q) = -17$.

Sei $\mathrm{H}f\,(P) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. Sei $\mathrm{H}f\,(Q) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie den Typ der kritischen Stelle P.

(b) Bestimmen Sie $T_2(f,(x,y,z),P)$.

(c) Bestimmen Sie den Typ der kritischen Stelle Q.

(d) Bestimmen Sie $T_2(f,(x,y,z),Q)$.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 70. *Kritische Stellen und ihr Typ*

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto (x - y^2 + 1)(x^2 - y^2 - 1)$.

(a) Skizzieren Sie die Nullstellenmenge von f im Bereich $x \in [-4, 4]$.
Bestimmen Sie die Vorzeichenverteilung von f und notieren Sie diese in Ihrer Skizze.

(b) Bestimmen Sie den Gradienten und die Hesse-Matrix von f.

(c) Bestimmen Sie die kritischen Stellen von f und tragen Sie diese in Ihre Skizze ein.

(d) Bestimmen Sie für jede kritische Stelle ihren Typ.

Aufgabe H 71. *Modell: Schmiegquadriken*

Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x, y) \mapsto \cos(x)\cos(y)$.
Das in der Präsenzübung benutzte Modell eines Ausschnitts des Graphen von f finden Sie auch unter:
www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/HM-Stroppel-Material/3D-Modelle/05
In den Präsenzübungen haben Sie Gradient und Hesse-Matrix von f berechnet.

(a) Bestimmen Sie die kritischen Stellen von f.

(b) Bestimmen Sie für jede kritische Stelle von f den Typ.

(c) Bestimmen Sie für jede kritische Stelle das Taylorpolynom der Stufe 2.

(d) Ist $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \cos(x)$, dann ist $f(x, y) - g(x)g(y) = 0$ für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
Sei $\varepsilon > 0$. Zeigen Sie, dass

$$|T_2(f, (x, y), (0, 0)) - T_2(g, x, 0)\, T_2(g, y, 0)| < \frac{\varepsilon^4}{4}$$

ist für $(x, y) \in U_\varepsilon(\,(0, 0)\,)$.

Aufgabe H 72. *Kritische Stellen und ihr Typ, Schmiegquadriken*

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x_1, x_2) \mapsto (2x_1^2 + (x_2 - 1)^2 - 1)(x_1^2 - x_2)$

(a) Skizzieren Sie die Nullstellenmenge von f im Bereich $x_1 \in [-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$.
Bestimmen Sie die Vorzeichenverteilung von f und notieren Sie diese in Ihrer Skizze.

(b) Bestimmen Sie den Gradienten und die Hesse-Matrix von f.

(c) Bestimmen Sie die kritischen Stellen von f.
Bestimmen sie für jede kritische Stelle deren Typ.

(d) Bestimmen Sie die Schmiegquadrik an f an der Stelle $(\frac{1}{3}, 0)$, deren euklidische Normalform und ihre Gestalt.

Online-Aufgabe.

Sie finden Ihre Online-Aufgabe auf folgender Webseite.

http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test430/

Präsenzübungen

Aufgabe P 74. *Modell: Multiplikatormethode nach Lagrange*
Das Modell stellt den Graphen der Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto xy^2$$

im Ausschnitt $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \sqrt{x^2+y^2} \leqq \frac{6}{5}\right\}$ dar.

(a) Welche der braunen Achsen ist die x-Achse und welche die y-Achse?

(b) Wir betrachten die Funktion f nur eingeschränkt auf dem schwarzen Kreis, der durch $x^2+y^2=1$ beschrieben wird. Welche der Kurven stellt den Graphen dieser Einschränkung dar?

(c) Welche kritischen Stellen liefert die Methode nach Lagrange für die auf diesen Kreis eingeschränkte Funktion f ? Welche Nebenbedingung muss dazu beachtet werden?

(d) Können Sie anhand des Modells entscheiden, welche der kritischen Stellen lokale Maximalstellen sind?

Aufgabe P 75. *Jacobi–Matrizen*
Berechnen Sie $\mathrm{J}f(a)$ in denn folgenden Fällen:

(a) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon f(x,y) = (x^3+y^3, x^3-y^3)$ und $a=(2,1)$.

(b) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3\colon f(x,y) = (x+y^2, x^2y, xy)$ und $a=(3,-1)$.

(c) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon f(x,y,z) = x^2yz+y^2xz+z^2xy$ und $a=(-2,-1,0)$.

Aufgabe P 76. *Tangente an implizit gegebene Funktion*
Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto x^2-y^2-4x+2y-5$. Sei $N \subseteq \mathbb{R}^2$ die Nullstellenmenge von f.

(a) Überprüfen Sie, ob $P=(-1,2)$ in N liegt.

(b) Bestimmen Sie $\nabla f(x,y)$ und $\nabla f(-1,2)$.

(c) Bestimmen Sie die Tangente durch P an N.

Link zur Vorlesungsumfrage:

evasysw.uni-stuttgart.de/evasys/online.php?p=68XCE

(Offen bis Donnerstag, den 13.07.2017.)

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 73. *Lagrange-Multiplikatoren*

Sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon (x,y,z) \mapsto 4y - 2z + 8$.

Sei $E := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 = 1\right\} \cap \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 2x - y - z = 0\right\}$.

(a) Bestimmen Sie ein $S > 0$ mit $E \subseteqq U_S(0,0,0)$. Ist E kompakt?

(b) Erstellen Sie das Gleichungssystem nach Lagrange für die Ermittlung der lokalen Extremstellen von $f|_E$, also von der Einschränkung von f auf E. Wie viele Nebenbedingungen müssen beachtet werden?

(c) Finden Sie die kritischen Stellen, indem Sie das Gleichungssystem aus **(b)** lösen.

(d) Bestimmen Sie $\max(f(E))$ und $\min(f(E))$.

Aufgabe H 74. *Kettenregel*

Sei $P := \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$. Sei $E := \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, v > |u|\right\}$.

Sei $f\colon P \to E\colon (x,y) \mapsto f(x,y) = (x^2 - y^2, x^2 + y^2)$.

(a) Bestimmen Sie $\mathrm{J}f(x,y)$ für $(x,y) \in P$. Bestimmen Sie $\mathrm{J}f(1,2)$.

(b) Bestimmen Sie die Inverse $f^{-1}\colon E \to P\colon (u,v) \mapsto f^{-1}(u,v)$.

(c) Bestimmen Sie $\mathrm{J}(f^{-1})(u,v)$ für $(u,v) \in E$.

(d) Sei $(x,y) \in P$. Sei $(u,v) := f(x,y)$. Bestimmen Sie das Matrixprodukt

$$\mathrm{J}(f^{-1})(u,v)\ \mathrm{J}f(x,y)$$

unter Verwendung von **(a)** und **(c)**. Bestimmen Sie dieses Matrixprodukt erneut, nun unter Verwendung der Kettenregel.

Aufgabe H 75. *Modell: Multiplikatormethode nach Lagrange*

Das in den Präsenzübungen benutzte Modell stellt den Graphen der Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto xy^2$$

im Ausschnitt $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \sqrt{x^2 + y^2} \leqq \frac{6}{5}\right\}$ dar. Sie finden dieses Modell auch unter: www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/HM-Stroppel-Material/3D-Modelle/06

Sei $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto x^2 + y^2 - 1$.

Sei $P = \left(\sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$. Sei $Q = \left(\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}\right)$. Es liegen P und Q in der Nullstellenmenge von g, also auf dem schwarzen Kreis.

(a) Bestimmen Sie einen Vektor v_P, der auf $\nabla g(P)$ senkrecht steht und Länge 1 hat. Bestimmen Sie einen Vektor v_Q, der auf $\nabla g(Q)$ senkrecht steht und Länge 1 hat.

(b) Bestimmen Sie $\partial_{v_P} f(P)$. Bestimmen Sie $\partial_{v_Q} f(Q)$. Interpretieren Sie diese Ergebnisse als Steigungen gewisser Tangenten an die blaue Kurve.

(c) Folgern Sie aus **(b)**, welcher der beiden Punkte P, Q eine kritische Stelle ist für die Methode nach Lagrange für lokale Extremstellen von $f(x,y)$ unter der Nebenbedingung $g(x,y) = 0$.

(d) Ist P eine kritische Stelle von $f(x,y)$, wenn die Nebenbedingung keine Rolle mehr spielt?

Online-Aufgabe.

Sie finden Ihre Online-Aufgabe auf folgender Webseite.

http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/

Präsenzübungen

Aufgabe P 77. *Potential*

Das Vektorfeld g ist ein Gradientenfeld.
Berechnen Sie das Potential U von g, das im Ursprung den Wert 5 hat.

(a) $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3y \\ 3x + 2y \end{pmatrix}$

(b) $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y^2 + yz\cos(xy) \\ 2xy + xz\cos(xy) \\ \sin(xy) + 2z \end{pmatrix}$

Aufgabe P 78. *Modell: Wendelfläche*

Die Wendelfläche ist in gelb gegeben als Graph der Funktion

$$p\colon \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\} \to \mathbb{R}\colon \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } x_1 = 0 \text{ und } x_2 < 0 \\ \arctan(\frac{x_2}{x_1}) + \frac{\pi}{2} & \text{für } x_1 > 0 \\ \pi & \text{für } x_1 = 0 \text{ und } x_2 > 0 \\ \arctan(\frac{x_2}{x_1}) + \frac{3\pi}{2} & \text{für } x_1 < 0. \end{cases}$$

Dargestellt ist der Ausschnitt des Graphen über der Menge $\left\{\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x_1^2 + x_2^2 \leqq \pi^2\right\}$.
Der schwarze Kreis in der x_1-x_2-Ebene ist $K = \left\{\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x_1^2 + x_2^2 = 4\right\}$.
Die violette Gerade in der x_1-x_2-Ebene ist $G = \left\{\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x_1 = -\sqrt{3}x_2\right\}$.

(a) Wo verläuft die x_1-Achse? Wo verläuft die x_2-Achse?

(b) Parametrisieren Sie die Gerade G.

(c) Parametrisieren Sie den Kreis K.

(d) Welche Werte nimmt die Funktion p auf $G \smallsetminus \{\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\}$ an?

(e) Welche Werte nimmt die Funktion p auf K an?

(f) Ist $p \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\})$? Ist $p \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\})$?

Aufgabe P 79. *Kurvenintegrale*

(a) Sei $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1x_2 \\ x_2 - x_1 \end{pmatrix}$.
Sei die Kurve K parametrisiert durch $C\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ t^3 \end{pmatrix}$.
Skizzieren Sie K. Berechnen Sie $\displaystyle\int_K g(x) \bullet \mathrm{d}x$.

(b) Sei $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_3 \end{pmatrix}$.
Sei die Kurve K parametrisiert durch $C\colon [0, 1] \to \mathbb{R}^3\colon t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$.
Hat g ein Potential? Falls ja, bestimmen Sie ein Potential U zu g.
Berechnen Sie $\displaystyle\int_K g(x) \bullet \mathrm{d}x$ einmal mittels Definition und einmal mittels Potential.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 76. *Parametrisierung, Potential, Kurvenintegral*

Sei $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto g(x_1, x_2) := \begin{pmatrix} 2x_1 - 2x_2 \\ 3x_1^2 x_2 \end{pmatrix}$.

Sei die Kurve K parametrisiert durch

$$C\colon [-1,3] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto C(t) := \begin{cases} (t,0) & \text{falls } t \in [-1,1) \\ (2-t, t-1) & \text{falls } t \in [1,2) \\ (2-t, 3-t) & \text{falls } t \in [2,3] \end{cases}$$

(a) Beweisen Sie, dass kein Potential für g existiert.

(b) Skizzieren Sie die Kurve K. Ist K eine geschlossene Kurve?

(c) Berechnen Sie $\oint_K g(x) \bullet \mathrm{d}x$.

(d) Beweisen Sie nochmals **(a)** mittels Folgerung 5.3.14.

Aufgabe H 77. *Astroide: Länge und Kurvenintegral*

Es laufe die Kurve $A := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+ \,\middle|\, \sqrt[3]{x_1^2} + \sqrt[3]{x_2^2} = 4 \right\}$ von $\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix}$ nach $\begin{pmatrix} -8 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(a) Skizzieren Sie A.

(b) Parametrisieren Sie A mittels $C\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \begin{pmatrix} c\cos(t)^e \\ d\sin(t)^e \end{pmatrix}$ für geeignete Werte $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$. Untersuchen Sie, ob C eine reguläre Parametrisierung von A ist.

(c) Berechnen Sie die Länge der Kurve A.

(d) Sei $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_2\cos(x_1) + x_2^2 \\ \sin(x_1) + 2x_1x_2 - 2x_2 \end{pmatrix}$.
Bestimmen Sie das Potential U für g mit $U(0,0) = 1$.
Berechnen Sie $\int_A g(x) \bullet \mathrm{d}\,x$.

Aufgabe H 78. *Modell: Wendelfläche*

Das in den Präsenzübungen benutzte Modell stellt einen Ausschnitt des Graphen der dort eingeführten Funktion p dar. Sie finden dieses Modell auch unter:
www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/HM-Stroppel-Material/3D-Modelle/07

Auf der x_1-x_2-Ebene befindet sich ein Kreisflächenausschnitt. Er hat die äußeren Eckpunkte $\begin{pmatrix} 3\cos(\frac{\pi}{6}) \\ 3\sin(\frac{\pi}{6}) \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 3\cos(\frac{\pi}{3}) \\ 3\sin(\frac{\pi}{3}) \end{pmatrix}$, sowie die inneren Eckpunkte $\begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{6}) \\ \sin(\frac{\pi}{6}) \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{3}) \\ \sin(\frac{\pi}{3}) \end{pmatrix}$.

(a) Parametrisieren Sie den Rand R des Kreisflächenausschnitts.
Im Modell ist R orange markiert.

(b) Sei $D := \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$. Sei $U := p|_D : D \to \mathbb{R}$. Sei $g := \nabla U$. Berechnen Sie g.

(c) Berechnen Sie $\oint_R g(x) \bullet \mathrm{d}x$ unter Verwendung der Parametrisierung aus **(a)**.

(d) Berechnen Sie $\oint_R g(x) \bullet \mathrm{d}x$ unter Verwendung von **(b)**.

Online-Aufgabe.

Sie finden Ihre Online-Aufgabe auf folgender Webseite.

http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test430/