M. Gorsky, M. Hofacker
C. Rösinger, D. C. Veniani,
D. Zimmermann

15. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 2

M. Stroppel

Sommersemester 2020

Präsenzübungen

Aufgabe P 57. *Reihenwerte bestimmen*

Bestimmen Sie die Werte der folgenden Reihen.

(a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{5^k + 2^k}{7^k}$ **(b)** $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{7}{k!}$ **(c)** $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{3}{2^k}$ **(d)** $\sum_{k=2}^{\infty} \left(\sqrt[k]{k} - \sqrt[k+1]{k+1} \right)$

Aufgabe P 58. *Konvergenzkriterien für Reihen*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Reihen konvergieren.

(a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k}{(k+1)!}$ **(b)** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{17}{7+9k}$ **(c)** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+15}}$ **(d)** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2+(-1)^k)^k}{5^k}$

Aufgabe P 59. *Leibnizkriterium*

Keine der folgenden Reihen erfüllt die Bedingungen zur Anwendung des Leibnizkriteriums. Welche Bedingungen sind jeweils erfüllt, welche verletzt?

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \cos(k\pi)}{k}$ **(b)** $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k+1}{k}$ **(c)** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{(2+(-1)^k)k}}$

Welche der obenstehenden Reihen konvergieren?

Aufgabe P 60. *Stetigkeit*

Für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ ist $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig?

$$f_a(x) = \begin{cases} x + a^2 - a & \text{, für } x \leqq 0, \\ \frac{1}{2}(x^2 + 2a^2 x) & \text{, für } x > 0. \end{cases}$$

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 57. *Reihenwerte*

Bestimmen Sie die folgenden Reihenwerte

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{((-1)^k+3)^k}$ **(b)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+2}{k!}$

Aufgabe H 58. *Konvergenzuntersuchung*

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz.

(a) $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{j}\right)^{-(j^2)}$ **(c)** $\displaystyle\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(2+3^{\ell})}$

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \cos\left(\frac{1}{k^4}\right)$ **(d)** $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \left(\sqrt{m+1}-\sqrt{m}\right)$

Aufgabe H 59. *Konvergenzkriterien*

(a) Betrachten Sie für $a \in \mathbb{R}$ die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-5)^k}{k \cdot 7^k}(a+3)^{5k}$.

(i) Bestimmen Sie alle Werte von a, für die die Reihe absolut konvergiert.

(ii) Bestimmen Sie alle Werte von a, für die die Reihe konvergiert.

(b) Zeigen Sie: Für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $|\alpha| < \mathrm{e}^{-1}$ ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \dfrac{(\alpha n)^n}{n!}$ eine Nullfolge.

Aufgabe H 60. *Stetigkeit, ε-δ-Kriterium*

Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2} - \frac{1}{2}|x| & , x \leqq 1, \\ \sqrt{x} & , x > 1. \end{cases}$

(a) Zeichnen Sie den Graphen von f im Bereich $[-4, 4]$.

(b) Berechnen Sie für $\varepsilon \in \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right\}$ jeweils das größte $\delta > 0$, für das gilt $|f(x) - f(1)| \leqq \varepsilon$ für alle $x \in [1-\delta, 1+\delta]$.

Online-Aufgabe.

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 30.04. – 06.05.) auf folgender Webseite:

http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/

Bitte geben Sie dort zunächst Ihre Matrikelnummer ein.

Die Lösungen sind als ganze Zahlen oder als Dezimalzahlen mit einem Dezimal**punkt** einzugeben. Sonstige Zeichen, wie zum Beispiel Klammern oder Operatoren wie $*$ und $/$, dürfen **nicht** benutzt werden.

Anschließend müssen Sie Ihr **Passwort** für die Onlineübungen eintragen, das Sie per Email an Ihre studentische Adresse (<st∗∗∗∗∗∗∗@stud.uni-stuttgart.de>) erhalten haben.

Innerhalb des Bearbeitungszeitraums können Sie Ihre Eingaben beliebig oft wiederholen, wobei die **letzten** Eingaben gewertet werden. Der Bearbeitungszeitraum endet mittwochs, nach der Abgabe der schriftlichen Übungen in den Übungsgruppen, um 24:00 Uhr. Sie erhalten für die Bearbeitung der Online-Aufgabe 0, 1, oder 2 Punkte.

M. Gorsky, M. Hofacker
C. Rösinger, D. C. Veniani,
D. Zimmermann

16. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 2

M. Stroppel

Sommersemester 2020

Präsenzübungen

Aufgabe P 61. *Funktionsgrenzwerte*

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte.

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1}-\sqrt{3x^2-2}$

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2-5x+3}{3x^2-5x+2}$

(c) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{2x^2-5x+3}{3x^2-5x+2}$

Aufgabe P 62. *Gleichheitsproblem*

Gegeben sind die Funktionen

$$f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}\colon x\mapsto \mathrm{e}^x, \qquad g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}\colon x\mapsto x+2.$$

Skizzieren Sie die Funktionen mit Hilfe einer geeigneten Wertetabelle im Intervall $[-2,2]$. Begründen Sie mit Hilfe der Funktionswerte, wie viele Schnittpunkte die beiden Graphen mindestens aufweisen.

Aufgabe P 63. *Nullstellen von Polynomen*

Sei ein Polynom $p\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}\colon x\mapsto a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ mit reellen Koeffizienten und $a_n\neq 0$ gegeben.

(a) Begründen Sie: Ist n ungerade, so hat p mindestens eine reelle Nullstelle.

(b) Begründen Sie: Ist n gerade, $a_n>0$ und $a_0<0$, so hat p mindestens zwei verschiedene reelle Nullstellen.

(c) Wie viele reelle Nullstellen hat das Polynom $p(x)=x^4+x^3-6x^2-5x+5$? Untersuchen Sie dazu die Vorzeichenwechsel von p. Geben Sie ein Intervall an, das mindestens eine Nullstelle enthält.

Aufgabe P 64. *Beispiele von stetigen und unstetigen Funktionen*

Überlegen Sie sich Beispiele von Funktionen $f\colon D\to\mathbb{R}$, die die folgenden Bedingungen erfüllen (Skizzen der Graphen sind ausreichend).

(a) D ist beschränkt und f ist stetig und unbeschränkt.

(b) f ist beschränkt und an drei Stellen unstetig.

(c) f ist in 0 nicht stetig, aber es gilt $D=[-1,1]$, $f(0)=0$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(1/n)=0$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(-1/n)=0$.

(d) f ist auf $\mathbb{R}\smallsetminus\{-1,0,1\}$ definiert und stetig und nirgends stetig ergänzbar.

(e) Zum Abschluss noch ein faszinierendes Beispiel, auf das Sie nicht selbst kommen müssen:
$D=\mathbb{R}$ und f ist an keiner einzigen Stelle stetig (*Dirichlet-Funktion*).

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 61. *Einseitige Funktionsgrenzwerte*

Gegeben sei die Abbildung

$$f\colon \mathbb{R} \smallsetminus \{-3, 1, 2\} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{x^4 - x^3 - 7x^2 + 13x - 6}{(x^3 - 5x^2 + 8x - 4)|x+3|}.$$

(a) Ist f stetig?

(b) Zerlegen Sie Zähler und Nenner soweit wie möglich in Faktoren.

(c) Bestimmen Sie jeweils die links- und rechtsseitigen Grenzwerte an den Lücken des Definitionsbereiches. An welchen Stellen ist f stetig ergänzbar?

(d) Skizzieren Sie den Graphen von f.

Aufgabe H 62. *Funktionsgenzwerte*

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte (ohne Verwendung der Regel von l'Hospital).

(a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{7x^4 + 4x^3 - 9x^2 + 10}{(x^2+1)(2x^2 + \mathrm{e}^{-5x})}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0+0} \frac{3x}{\sqrt{7x^4 + 2x^2} - \sqrt{7x^4 + 13x^2}}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(\mathrm{e}^x) - 13\arctan(x^5)}{\frac{x^7-9}{23x^6} + \frac{3x^4+19x}{7x^5+34}}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \cos(\pi x)\ln(|\ln|x||)$

Aufgabe H 63. *Gleichheitsproblem, Intervallhalbierung*

(a) Es seien $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Weiter sei f streng monoton fallend und g streng monoton wachsend mit $f(a) > g(a)$ und $f(b) < g(b)$. Begründen Sie, dass dann das Gleichheitsproblem für f und g auf $[a,b]$ genau eine Lösung besitzt.

(b) Nach **(a)** hat die Gleichung $16^{-x} = x^3$ auf $[0,1]$ genau eine Lösung. Bestimmen Sie diese näherungsweise, indem Sie die ersten drei Schritte der Intervallhalbierungsmethode mit $a_0 = 0$ und $b_0 = 1$ anwenden. Wie viele Schritte müsste man mindestens durchführen, um zu garantieren, dass die Näherungslösung nicht mehr als 10^{-6} von der tatsächlichen Lösung abweicht?

Aufgabe H 64. *Zwischenwertsatz*

Die Zugstrecke zwischen zwei Städten sei 800 km lang. Ein Zug fährt die Strecke innerhalb von vier Stunden und hat diese somit mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 200 km/h zurückgelegt. Zeigen Sie mit Hilfe des Zwischenwertsatzes, dass es einen Zeitraum von einer Stunde gibt, in dem der Zug genau 200 km der Strecke gefahren ist.
Hinweis: Sei $s(t)$ die nach t Stunden zurückgelegte Strecke (in km). Betrachten Sie $s(t+1) - s(t)$ für $t \in [0,3]$.

Online-Aufgabe.

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 07.05.–13.05.) auf folgender Webseite:

http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test430/

Präsenzübungen

Aufgabe P 65. *Konvergenz von Potenzreihen I*

Gegeben sei $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{1-n} \left(\frac{z-1+\mathrm{i}}{2}\right)^n$.

(a) Zeigen Sie, dass sich $f(z)$ als komplexe Potenzreihe der Form $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ mit geeigneten $a_n \in \mathbb{C}$ und $z_0 \in \mathbb{C}$ schreiben lässt.

(b) Skizzieren Sie den Konvergenzkreis der Potenzreihe in der komplexen Zahlenebene.

(c) Zeichnen Sie die Stellen $z = -2+3\mathrm{i}$, $z = 3-\mathrm{i}$, $z = 5-\mathrm{i}$ bzw. $z = 4+\mathrm{i}$ in Ihre Skizze ein.

(d) Untersuchen Sie, an welchen dieser Stellen die Potenzreihe konvergiert. Zeichnen Sie in allen Fällen, in denen Konvergenz vorliegt, auch den Punkt $f(z)$ in Ihre Skizze ein.

Aufgabe P 66. *Konvergenz von Potenzreihen II*

Bestimmen Sie die Entwicklungspunkte und Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{2^n\, n}$ **(b)** $\sum_{n=17}^{\infty} \left(\frac{z}{n}\right)^n$ **(c)** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!} \left(z+3-\mathrm{i}\sqrt{2}\right)^n$

Geben Sie an, für welche $z \in \mathbb{C}$ die Reihen absolut konvergieren.
Geben Sie an, für welche $z \in \mathbb{R}$ die Reihen konvergieren.

Aufgabe P 67. *Konvergenzaussagen durch geometrische Überlegungen*

(a) Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} 4^{-n}\binom{2n}{n}(z-\mathrm{i})^n$ ist für $z = -1+\frac{3}{2}\mathrm{i}$ divergent und für $z = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}$ konvergent.
Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten der Potenzreihe an den Stellen $z = 1+2\mathrm{i}$ und $z = -\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\mathrm{i}$.

(b) Eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ mit $z_0 \in \mathbb{C}$ und komplexer Koeffizientenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei für $z = 4-2\mathrm{i}$ konvergent und für $z = 3-\mathrm{i}$ divergent.
Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten dieser Potenzreihe an der Stelle $z = 1+\mathrm{i}$.

Aufgabe P 68. *Formel von Euler und de Moivre*

(a) Berechnen Sie $\mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\ln(2)+\mathrm{i}\pi/3})$ und $\mathrm{Im}(\sin(\mathrm{i}))$.

(b) Schreiben Sie $f(x)$ als Linearkombination von Funktionen der Form $\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$ mit $n \in \mathbb{Z}$. Schreiben Sie sodann $f(x)$ als Linearkombination von Funktionen der Form $\sin(ax)$ und $\cos(bx)$ mit $a, b \in \mathbb{N}_0$.

(i) $f(x) = (\cos(x))^3$ **(ii)** $f(x) = \sin(5x)\cos(2x)$

(c) Seien $z, w \in \mathbb{C}$. Bestätigen Sie mittels der Formel von Euler und de Moivre das Additionstheorem

$$\sin(z+w) = \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w)\,.$$

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 65. *Konvergenz von Potenzreihen*

(a) Schreiben Sie die Reihen als Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ mit geeigneten $a_n \in \mathbb{C}$ und Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$. Bestimmen Sie jeweils den Konvergenzradius.

(i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{ei})^n}{\sqrt{n3^{2n+1}+3^{2n}}} \left(\frac{\mathrm{i}+\mathrm{e}\mathrm{i}z}{\mathrm{e}}\right)^n$ **(ii)** $\displaystyle\sum_{n=5}^{\infty} \left(\frac{1}{64}\Big(z^2-2z-3+(1-z)4\mathrm{i}\Big)^2\right)^n$

(b) Untersuchen Sie, für welche $z \in \mathbb{R}$ die Potenzreihen in **(a)** konvergieren.

Aufgabe H 66. *Potenzreihe mit Parameter*

Wir betrachten die Potenzreihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi nk)+n^k}{k^n+\pi}(z+\mathrm{i}n)^k$ für $n \in \{-5, 2\}$.

(a) Bestimmen Sie für $n=2$ alle Punkte $z \in \mathbb{C}$, in denen die Potenzreihe konvergiert.

(b) Bestimmen Sie für $n=-5$ alle Punkte $z \in \mathbb{C}$, in denen die Potenzreihe konvergiert.

Aufgabe H 67. *Produkt von Potenzreihen*

Seien die Abbildungen $f : U_{\rho_f}(0) \to \mathbb{C}$ und $g : U_{\rho_g}(0) \to \mathbb{C}$ gegeben durch

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^n} \qquad \text{und} \qquad g(z) := \sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^n .$$

(a) Bestimmen Sie die Konvergenzradien ρ_f von f und ρ_g von g.

(b) Schreiben Sie $f \cdot g$ als Potenzreihe und geben Sie deren Konvergenzradius an.
Was hat die Potenzreihe zu tun mit der Funktion

$$h\colon \mathbb{C} \setminus \{\tfrac{1}{2}, 3\} \to \mathbb{C}\colon z \mapsto \frac{3}{2z^2-7z+3}\,?$$

Aufgabe H 68. *Logarithmische Spirale*

Gegeben sei $f\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{C}\colon\ t \mapsto \left(\sqrt{2}\exp\left(\mathrm{i}\frac{5\pi}{4}\right)\right)^{-t}$.

Die Abbildung f beschreibt eine logarithmische Spirale. Beispiele aus der Natur finden sich unter https://de.wikipedia.org/wiki/Logarithmische_Spirale.

(a) Zeichnen Sie die Punkte $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$ in die komplexe Zahlenebene ein und skizzieren Sie die Menge $f([-2, 2])$.

(b) Wir benutzen jetzt nur die Werte von f an besonderen Stellen.
Berechnen Sie $\sum_{n=0}^{\infty} |f(n+1) - f(n)|$.

(c) Für $z_0 = \sqrt{2}\exp\left(\mathrm{i}\frac{5\pi}{4}\right)$ und $z \in \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ sei $g\colon\ \mathbb{N}_0 \to \mathbb{C}\colon\ t \mapsto (z-z_0)^{-t}$.
Für welche $z \in \mathbb{C}$ ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty}\Big(g(k+1)-g(k)\Big)$ absolut konvergent?

Online-Aufgabe.

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 14.05.–20.05.) auf folgender Webseite:

http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/

M. Gorsky, M. Hofacker
C. Rösinger, D. C. Veniani,
D. Zimmermann

18. Gruppenübung zur Vorlesung
Höhere Mathematik 2
Sommersemester 2020

M. Stroppel

Präsenzübungen

Aufgabe P 69. *Ableitungen*

Bestimmen Sie im Folgenden jeweils ein maximales Intervall $D_f \subseteqq \mathbb{R}$ so, dass der gegebene Term eine Funktion $f\colon D_f \to \mathbb{R}\colon x \mapsto f(x)$ definiert.
Bestimmen Sie die Menge aller Stellen in D_f, an denen die Funktion f differenzierbar ist.
Berechnen Sie f'.

(a) $f(x) = \sqrt[4]{\cos(x)}$ **(b)** $f(x) = x\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$

(c) $f(x) = \dfrac{1+(\cos(x))^2}{1+(\sin(x))^2}$ **(d)** $f(x) = \left(\sqrt{x}\right)^{(\sqrt{x})}$

Aufgabe P 70. *Differenzen- und Differentialquotient*

(a) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x^2$.
Berechnen Sie $f'(1)$ mit Hilfe des Differenzenquotienten.
Berechnen Sie $f'(1)$ erneut mit der Ableitungsregel für Polynome.

(b) Sei

$$g\colon \left(-\infty, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \begin{cases} x & \text{für } x \leqq 0\,, \\ \tan(x) & \text{für } x > 0\,. \end{cases}$$

Skizzieren Sie den Graphen von g.
Untersuchen Sie mit Hilfe des Differentialquotienten, ob g an der Stelle $x_0 = 0$ differenzierbar ist.

Aufgabe P 71. *Differentiation von Umkehrfunktionen*

Gegeben sei die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{x+1}{x+2}\,.$$

(a) Bestimmen Sie den Wertebereich $W := f(\mathbb{R}^+)$ und skizzieren Sie den Graphen von f.

(b) Berechnen Sie die Umkehrfunktion $f^{-1}\colon W \to \mathbb{R}^+$.

(c) Berechnen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion f^{-1} mittels Satz 2.3.1.

(d) Berechnen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion f^{-1} direkt, also unter Verwendung von **(b)** und ohne Satz 2.3.1.

Aufgabe P 72. *Funktionsgrenzwerte*

(a) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte mit der Regel von l'Hospital.

(i) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x}$ **(ii)** $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{x^2}{\ln(x)} - \dfrac{1}{\ln(x)}\right)$

(b) Gegeben ist die Funktion $g\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \sqrt[3]{x}$.
Berechnen Sie $g'(x)$. Begründen Sie mit dem Mittelwertsatz, dass zu jedem $x \in \mathbb{R}^+$ ein $\xi_x \in (x, x+1)$ existiert mit $g'(\xi_x) = g(x+1) - g(x)$. Bestimmen Sie damit

$$\lim_{x\to+\infty} (\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x})\,.$$

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 69. *Differenzierbarkeit*

(a) Seien $a,\, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gegeben. Skizzieren Sie den Graphen der Funktion

$$f\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon\ x \mapsto \begin{cases} (x-a)^2(x-b)^2 & \text{für } a \leqq x \leqq b\,, \\ 0 & \text{für } x \notin [a,b]\,. \end{cases}$$

Untersuchen Sie mit Hilfe des Differenzenquotienten, ob f an den Stellen a und b differenzierbar ist.

(b) Wir betrachten die Funktion

$$g\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon\ x \mapsto \begin{cases} x^4 \sin(\frac{1}{x}) & \text{für } x \neq 0\,, \\ 0 & \text{für } x = 0\,. \end{cases}$$

Berechnen Sie $g'(x)$ und $g''(x)$ für $x \neq 0$.
Beweisen Sie, dass g an der Stelle $x_0 = 0$ zweimal differenzierbar, aber nicht dreimal differenzierbar ist.

Aufgabe H 70. *Umkehrfunktion*

Gegeben seien die Funktionen

$$f\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon\ x \mapsto \sinh(2x) \qquad \text{und} \qquad g\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon\ x \mapsto \frac{x^2}{1+x^2}\,.$$

(a) Skizzieren Sie die Graphen von f und g und bestimmen Sie jeweils die Ableitung.

(b) Finden Sie die maximalen Intervalle, in denen f und g differenzierbare Umkehrfunktionen haben. Bestimmen Sie jeweils die Ableitung der Umkehrfunktion.

Aufgabe H 71. *Mehrfaches Ableiten*

Finden Sie jeweils eine Formel für die angegebene n-te Ableitung, wobei $n \in \mathbb{N}_0$.
Beweisen Sie anschließend diese Formel mit vollständiger Induktion.

(a) $\left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\right)^n \Big(\big(\sin(x)\big)^4 + \big(\cos(x)\big)^4\Big)$ **(b)** $\left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\right)^n x\cos(2x)$

Aufgabe H 72. *Funktionsgrenzwerte und Regel von l'Hospital*

Untersuchen Sie die folgenden Funktionsgrenzwerte.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{\arctan(x^2-4)}{\sinh(3x-6)}$ **(b)** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(x^5)+x^5}{x^5+\mathrm{e}^{(-x^5)}}$ **(c)** $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\mathrm{e}^{(x^2)}-1}\right)$

Online-Aufgabe.

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 21.05.–27.05.) auf folgender Webseite:

http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test430/

M. Gorsky, M. Hofacker
C. Rösinger, D. C. Veniani,
D. Zimmermann

19. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 2

M. Stroppel

Sommersemester 2020

Präsenzübungen

Aufgabe P 73. *Extrema*

Untersuchen Sie, ob folgende Funktionen an der Stelle $x_0 = 0$ ein lokales Extremum haben:

(a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x^{10}$

(b) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x^5 - x^4$

(c) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x^6 - x^5$

(d) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x^2(x-1)(x+2)$

Aufgabe P 74. *Taylorpolynome*

Bestimmen Sie $T_n(f, x, x_0)$ für

(a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \mathrm{e}^{-x}\cos(2x), \quad n = 2, \quad x_0 = 0$

(b) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x^2, \quad n = 3, \quad x_0 = -3$

Aufgabe P 75. *Taylorentwicklung und Fehlerabschätzung*

Gegeben ist die Funktion $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \dfrac{1}{x}$.

(a) Bestimmen Sie die ersten vier Ableitungen von f. Formulieren Sie eine Vermutung, wie man die n-te Ableitung $f^{(n)}(x)$ durch eine Formel für allgemeines $n \in \mathbb{N}$ beschreiben kann.

(b) Beweisen Sie Ihre (gegebenenfalls korrigierte) Vermutung mit vollständiger Induktion.

(c) Geben Sie das Taylorpolynom $T_2(f, x, 1)$ und die Taylorreihe $T(f, x, 1)$ von f an.

(d) Skizzieren Sie die Graphen von $f(x)$ und $T_2(f, x, 1)$ in ein Koordinatensystem.

(e) Finden Sie eine Abschätzung für $\left|f^{(3)}(x)\right|$ im Intervall $[1, \frac{3}{2}]$.

(f) Schätzen Sie den Fehler $\left|f\left(\frac{3}{2}\right) - T_2\left(f, \frac{3}{2}, 1\right)\right|$ mit Hilfe des Restglieds nach oben ab und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem tatsächlichen Fehler.

Aufgabe P 76. *Kurvendiskussion*

Gegeben sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x^3 - x$. Führen Sie eine Kurvendiskussion durch, d.h.

(a) Geben Sie den maximalen Wertebereich an.

(b) Testen Sie auf Symmetrie.

(c) Bestimmen Sie die Nullstellen.

(d) Berechnen Sie mögliche lokale Extrema.

(e) Gibt es Wendepunkte?

(f) Wie ist das Verhalten an den Rändern des Definitionsbereiches?

(g) Fertigen Sie eine Skizze an.

Aufgabe P 77. *Kurvendiskussion*

Wie betrachten die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \dfrac{x}{x^2+1}$.

(a) Skizzieren Sie den Graphen von f.

(b) Bestimmen Sie $f'(x)$ und $f''(x)$.

(c) Bestimmen Sie die lokalen Extrema und die Wendepunkte von f.
Skizzieren Sie die Tangenten in den Wendepunkten.

(d) Machen Sie eine bessere Skizze des Graphen.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 73. *Monotonie via Ableitung*

Bestimmen Sie die maximalen Intervalle, auf denen die gegebenen Funktionen monoton sind.

(a) $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}\colon\ x \mapsto x^2 - \ln(x^2)$;

(b) $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon\ x \mapsto \frac{x^2}{2^x}$.

Aufgabe H 74. *Kurvendiskussion*

Gegeben sei

$$f\colon M \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{49}{x^2+49} \quad \text{und} \quad g\colon N \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x\sin(\ln(x)) \quad \text{mit} \quad M, N \subseteqq \mathbb{R}.$$

Führen Sie eine Kurvendiskussion von f und g durch, wobei Sie mindestens die folgenden Punkte bearbeiten sollen:
maximaler Definitionsbereich, maximaler Wertebereich, Stetigkeit, Differenzierbarkeit, Nullstellen, lokale Extrema, Verhalten an den Rändern des Definitionsbereichs, Skizze.

Aufgabe H 75. *Taylorentwicklung und Fehlerabschätzung*

Wir betrachten die Funktion

$$h\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon\ x \mapsto x\sin(x^2)\,.$$

(a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom $T_2(h, x, \sqrt{\pi})$.

(b) Finden Sie eine reelle Zahl a so, dass

$$\left|h(x) - T_2\left(h, x, \sqrt{\pi}\right)\right| \leqq a\left|x - \sqrt{\pi}\right|^3$$

für alle $x \in [0, 2]$ gilt.

(c) Finden Sie Koeffizienten $a_k \in \mathbb{R}$ so, dass $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k = x\sin(x^2)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

Aufgabe H 76. *Taylorpolynome*

Bestimmen Sie $T_3(f, x, x_0)$ für

(a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \mathrm{e}^{2x-x^2},\quad x_0 = 0$;

(b) $f\colon (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \ln(\cos(x)),\quad x_0 = \frac{\pi}{3}$.

Online-Aufgabe.

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 28.05.–10.06.) auf folgender Webseite:

http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/

M. Gorsky, M. Hofacker
C. Rösinger, D. C. Veniani,
D. Zimmermann

20. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 2

M. Stroppel

Sommersemester 2020

Präsenzübungen

Aufgabe P 78. *Ein nützlicher Integrationstrick*

Zeigen Sie durch partielle Integration, dass für jede differenzierbare Funktion f die Formel

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \Big[x\,f(x)\Big] - \int x\,f'(x)\,\mathrm{d}x$$

gilt. Berechnen Sie:

(a) $\int \ln(x)\,\mathrm{d}x$ **(b)** $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln(1+x^2)$ **(c)** $\int \arctan(x)\,\mathrm{d}x$

Aufgabe P 79. *Integration durch Substitution*

Berechnen Sie die folgenden Integrale.

(a) $\int\limits_1^2 5^{(3x-4)}\,\mathrm{d}\,x$ **(b)** $\int\limits_{-1}^1 x\,\mathrm{e}^{1-x^2}\,\mathrm{d}\,x$

(c) $\int \tan(x)\,\mathrm{d}\,x$ **(d)** $\int \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}\,x$

Hinweis für (d): Substitution $x = \sinh(t)$.

Aufgabe P 80. *Bestimmte Integrale*

Berechnen Sie:

(a) $\int_2^4 x^{-2}\,\mathrm{d}x$ **(b)** $\int_2^4 x^{-1}\,\mathrm{d}x$

(c) $\int_0^\pi x\cos(x)\,\mathrm{d}x$ **(d)** $\int_1^{\mathrm{e}} \ln(\sqrt{x}\,)\,\mathrm{d}x$

Aufgabe P 81. *Partialbruchzerlegung*

Führen Sie jeweils eine reelle Partialbruchzerlegung für die folgenden Ausdrücke durch.

(a) $\frac{1}{x^2-6x+5}$ **(b)** $\frac{1}{(x-1)(x-5)^3}$ **(c)** $\frac{51}{(2x^2+1)(x-5)}$

(d) $\frac{3x^2-3x-2}{(x+1)(x^2+2x+2)}$ **(e)** $\frac{25}{(x^2+1)(x-2)^2}$

Berechnen Sie die folgenden Integrale.

$$\int \frac{1}{x^2-6x+5}\,\mathrm{d}\,x \quad \text{und} \quad \int \frac{1}{(x+1)(x^2+2x+2)}\,\mathrm{d}\,x$$

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 77. *Partielle Integration*

Bestimmen Sie die folgenden Integrale.

(a) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} x^2 \sin(2x)\,\mathrm{d}\,x$ **(b)** $\int x\arctan(x)\,\mathrm{d}\,x$

(c) $\int \frac{x}{(\cos(x))^2}\,\mathrm{d}\,x$ **(d)** $\int \cos(\ln(x))\,\mathrm{d}\,x$

Aufgabe H 78. *Universalsubstitution für trigonometrische Integrale*

(a) Rechnen Sie nach, dass für $x \in \mathbb{R} \smallsetminus \{(2k+1)\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ bei Verwendung der „*Universalsubstitution*“ $t\colon x \mapsto \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ gilt:

$$t'(x) = \frac{1+\big(t(x)\big)^2}{2}\,, \qquad \sin(x) = \frac{2t(x)}{1+\big(t(x)\big)^2}\,, \qquad \cos(x) = \frac{1-\big(t(x)\big)^2}{1+\big(t(x)\big)^2}\,.$$

(b) Verwenden Sie die Resultate der Universalsubstitution aus Teilaufgabe (a), um folgende Integrale zu berechnen:

$$\int \frac{1}{3-2\sin(x)}\,\mathrm{d}\,x \qquad \int \frac{1}{\sin(x)+\cos(x)+1}\,\mathrm{d}\,x \qquad \int \frac{1}{\sin(x)(\cos(x))^2}\,\mathrm{d}\,x\,.$$

Aufgabe H 79. *Integration durch Partialbruchzerlegung*

(a) Bestimmen Sie den Quotienten $(x^5+x^4+x^3-x^2-x-1) : (x^2+x+1)$.

(b) Berechnen Sie das folgende Integral: $\int \frac{x^2+3x-2}{x^5+x^4+x^3-x^2-x-1}\,\mathrm{d}\,x$.

Aufgabe H 80. *Integration durch Substitution*

Bestimmen Sie folgende Integrale.

(a) $\int (5-2x)\mathrm{e}^{x^2-5x+7}\,\mathrm{d}\,x$ **(b)** $\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{(\ln(x))^4}{x}\,\mathrm{d}\,x$

(c) $\int \frac{\sqrt{x}}{2(x+1)}\,\mathrm{d}\,x$ **(d)** $\int \sin(2x)\left((\cos(2x))^5+(\cos(2x))^4-17\cos(2x)\right)\,\mathrm{d}\,x$

Online-Aufgabe.

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 11.06.–17.06.) auf folgender Webseite:

http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test430/

M. Gorsky, M. Hofacker
C. Rösinger, D. C. Veniani,
D. Zimmermann

21. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 2

M. Stroppel

Sommersemester 2020

Präsenzübungen

Aufgabe P 82. *Integrale und Flächeninhalte*

Gegeben seien die Funktion $f\colon\ [2,4] \to \mathbb{R}\colon\ x \mapsto -|x-3|+1$,
sowie zwei Partitionen $P_1 = \{2,3,4\}$, $P_2 = \{2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, 4\}$ des Definitionsbereichs von f.

(a) Skizzieren Sie den Graphen von f.

(b) Berechnen Sie die zugehörigen Ober- und Untersummen $\overline{S}(f,P_j)$ bzw. $\underline{S}(f,P_j)$ für $j = 1,2$ und bestätigen Sie damit die Aussagen in Lemma 3.5.3.

(c) Bestimmen Sie $\displaystyle\int_2^4 -|x-3|+1 \,\mathrm{d}\,x$ und vergleichen Sie das Ergebnis mit **(b)**.

(d) Bestätigen Sie das Integrationsresultat in **(c)** durch eine geometrische Überlegung.

Aufgabe P 83. *Uneigentliche Integrale*

Untersuchen Sie, ob die folgenden uneigentlichen Integrale existieren, und berechnen Sie gegebenenfalls den Wert.

(a) $\displaystyle\int_{1+0}^{2} \frac{1}{\sqrt{x-1}} \,\mathrm{d}\,x$ **(b)** $\displaystyle\int_{1+0}^{+\infty} \frac{1}{(x-1)^2} \,\mathrm{d}\,x$ **(c)** $\displaystyle\int_{2}^{+\infty} 3^{-2x} \,\mathrm{d}\,x$

Aufgabe P 84. *Konvergenzkriterien*

Untersuchen Sie, ob die folgenden Integrale konvergieren. Verwenden Sie dazu jeweils eine Majorante, eine Minorante oder das Grenzwertkriterium.

(a) $\displaystyle\int_{2}^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2-1} \,\mathrm{d}\,x$ **(b)** $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{x^3-x+1}{x^4+2x^2} \,\mathrm{d}\,x$ **(c)** $\displaystyle\int_{0+0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{x^2} \,\mathrm{d}\,x$

Aufgabe P 85. *Ober- und Untersummen-Challenge*

Verwenden Sie zur Bearbeitung das interaktive Extra zu Ober- und Untersummen auf
https://info.mathematik.uni-stuttgart.de/HM-Stroppel/vorlesungsmaterial/3-05.html .

Dargestellt finden Sie dort die Funktion $f\colon\ [1,13] \to \mathbb{R}\colon\ x \mapsto \frac{4\sin(x)}{x^2} + 2$, sowie eine Ober- und eine Untersumme für eine Partition $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_7\}$ des Intervalls $[1,13]$. Die Teilungspunkte $x_1, \ldots, x_6$ von P können dabei interaktiv verändert werden.

(a) Versuchen Sie die Teilungspunkte von P so zu verschieben, dass die Differenz zwischen Ober- und Untersumme möglichst klein wird.
Können Sie einen geringeren Wert als 3 erreichen?

(b) Arbeiten Sie als Gruppe zusammen: Ermitteln Sie, wer die kleinste Differenz erzielt hat. Halten Sie das beste Resultat per Screenshot fest und senden Sie dieses an Ihren Tutor.

Auf der Vorlesungshomepage https://info.mathematik.uni-stuttgart.de/HM-Stroppel/ wird zeitnah bekannt gegeben, welche Gruppe die Siegerin dieser Challenge ist.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 81. *Obersumme und Untersumme*

Wir betrachten die Funktion $f\colon\ [-1,1] \to \mathbb{R}\colon\ x \mapsto \dfrac{27x^4 + 3x^2 + 3}{9x^2 + 1}$.

(a) Berechnen Sie nach Polynomdivision $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}\,x$.

(b) Bestimmen Sie die Vorzeichenverteilung der Ableitung f' und finden Sie das Maximum und Minimum von f auf $[-1,1]$. Skizzieren Sie anschließend den Graphen von f.

(c) Sei $P = \left\{-1, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right\}$ eine Partition des Intervalls $[-1,1]$.
Stellen Sie die Unter- und Obersumme $\underline{S}(f,P)$ bzw. $\overline{S}(f,P)$ graphisch als Flächeninhalt dar.

(d) Berechnen Sie $\underline{S}(f,P)$ und $\overline{S}(f,P)$ für P aus **(c)**.
Schließen Sie daraus auf eine untere und obere Schranke für den Wert von $\arctan(3)$.

Aufgabe H 82. *Mittelwertsatz bei uneigentlichen Integralen*

Gegeben seien die Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := \sin(x)$ und $g(x) := \mathrm{e}^{-x}$.

(a) Zeigen Sie, dass das uneigentliche Integral

$$\int_0^{+\infty} f(x)g(x)\ \mathrm{d}\,x$$

absolut konvergent ist und berechnen Sie seinen Wert.

(b) Bestimmen Sie alle $\xi \in [0, +\infty)$, für die gilt

$$\int_0^{+\infty} f(x)g(x)\ \mathrm{d}\,x = f(\xi) \int_0^{+\infty} g(x)\ \mathrm{d}\,x.$$

Aufgabe H 83. *Berechnung uneigentlicher Integrale*

Berechnen Sie den Wert der folgenden uneigentlichen Integrale.

(a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{4}{x^2 + 6x + 5}\,\mathrm{d}\,x$ **(b)** $\displaystyle\int_{0+0}^{\pi^2} \frac{\left(\cos(\sqrt{x})\right)^2}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}\,x$

Aufgabe H 84. *Uneigentliche Integrale*

Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz.

(a) $\displaystyle\int_{0+0}^{+\infty} \frac{(\cos(x))^5}{\mathrm{e}^x \sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}\,x$ **(b)** $\displaystyle\int_{0+0}^{1} \frac{\ln(x+2)}{x^3 + x}\,\mathrm{d}\,x$

(c) $\displaystyle\int_{0+0}^{1} \frac{\arctan(x)}{\sqrt[3]{x^5}}\,\mathrm{d}\,x$ **(d)** $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{x^2 - 2x - 3}{\sqrt{x^7 + 1}}\,\mathrm{d}\,x$

Online-Aufgabe.

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 18.06.–24.06.) auf folgender Webseite:

http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/

Präsenzübungen

Aufgabe P 86. *Folgen in* $\mathbb{R}^n$

Untersuchen Sie die angegebenen Folgen in $\mathbb{R}^n$ auf Konvergenz. Berechnen Sie die Grenzwerte, falls sie existieren.

(a) $a_k = \begin{pmatrix} \frac{4k^2}{2k^2+1} \\ \ln\left(\frac{1}{k}\right) \end{pmatrix}$ **(b)** $b_k = \begin{pmatrix} \cos(\pi k) \\ \sin\left(\frac{1}{k}\right) \end{pmatrix}$ **(c)** $c_k = \begin{pmatrix} \sqrt[k]{k} \\ \ln(k+1) - \ln(k) \\ \mathrm{e}^k/k! \end{pmatrix}$

Aufgabe P 87. *Zu Beispiel 4.1.5*

In dieser Aufgabe untersuchen wir die Funktion aus Beispiel 4.1.5 genauer, also

$$f\colon \mathbb{R}^2 \smallsetminus \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \to \mathbb{R} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \frac{x+y}{x^2+y^2}\,.$$

(a) Zeigen Sie, dass alle Niveaulinien N_t von f zu Niveaus $t \neq 0$ Kreise sind und bestimmen sie Mittelpunkt M_t und Radius r_t des Kreises in Abhängigkeit von t.

(b) Zeichnen Sie die Niveaulinien N_t zu $t \in \{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\}$ in ein gemeinsames Koordinatensystem ein.

(c) Lässt sich die Funktion f stetig in den Punkt $\binom{0}{0}$ fortsetzen?

Aufgabe P 88. *Geschlossene Darstellung von Potenzreihen*

Wir betrachten die durch eine Potenzreihe definierte Funktion

$$f\colon (1-\rho, 1+\rho) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \sum_{k=2}^{\infty} k(1-x)^{k-1}.$$

(a) Berechnen Sie den Konvergenzradius ρ der Potenzreihe.

(b) Finden Sie eine Reihendarstellung für die Stammfunktion F von f mit $F(1) = 0$. Ermitteln Sie daraus eine geschlossene Darstellung für F.

(c) Finden Sie eine geschlossene Darstellung für f.

Aufgabe P 89. *Konvergenzkriterien für Reihen*

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz.

(a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3-n^2}$, **(b)** $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n)}$, **(c)** $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln(n))^2}$.

Hinweis: Wenn Sie das Integral-Vergleichskriterium benutzen, müssen Sie auch die Gültigkeit der Voraussetzungen überprüfen!

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 85. *Integral-Vergleichskriterium*

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz.
Ist es sinnvoll, das Integral-Vergleichskriterium 3.8.1 anzuwenden?

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \, \mathrm{e}^{-n}$, **(b)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$, **(c)** $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln(n)}{\sqrt{n^3}}$.

Aufgabe H 86. *Geschlossene Darstellung von Potenzreihen*

Wir betrachten die durch eine Potenzreihe definierte Funktion

$$f\colon (2-\rho, 2+\rho) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k} (2x-4)^{2k}.$$

(a) Berechnen Sie den Konvergenzradius ρ der Potenzreihe.

(b) Finden Sie eine Reihendarstellung für die Ableitung f' von f.

(c) Finden Sie eine geschlossene Darstellung für f'.

(d) Finden Sie eine geschlossene Darstellung für f.

Aufgabe H 87. *Stetigkeit und Folgen*

Wir betrachten $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{cases} 1 & \text{für } \binom{x_1}{x_2} = \binom{0}{0}, \\ \dfrac{x_1^2 + (x_1^2 + x_2)^2}{x_1^2 + x_2^2} & \text{für } \binom{x_1}{x_2} \neq \binom{0}{0}. \end{cases}$

(a) Stellen Sie Zähler und Nenner von $\dfrac{x_1^2 + (x_1^2 + x_2)^2}{x_1^2 + x_2^2}$ in der Multi-Index-Notation von Lemma 4.2.10 dar. Geben Sie jeweils alle nichtverschwindenden Koeffizienten an.

(b) Beweisen Sie, dass f im Punkt $\binom{0}{0}$ stetig ist.
Hinweis: Zeigen Sie $\lim_{n \to \infty} f(a_n) = 1$ für jede Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\lim_{n \to \infty} a_n = \binom{0}{0}$.

Aufgabe H 88. *Untersuchung einer Funktion in mehreren Variablen*

Gegeben seien die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \smallsetminus \left\{\binom{0}{0}\right\} \to \mathbb{R} : \binom{x}{y} \mapsto \dfrac{4y^2 - xy}{x^2 + y^2}$
und dazu die Funktionenschar $g_s\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon y \mapsto f\binom{s}{y}$ für $s \in \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$. Der Graph von g_s ist also der achsenparallele Schnitt des Graphen von f mit der Ebene $E\colon x = s$.

(a) Zeichnen Sie die Niveaulinien N_t von f zu $t \in \{0, 2, 4\}$ in ein gemeinsames Koordinatensystem.

(b) Skizzieren Sie den Graphen von g_1 im Bereich $-6 \leqq y \leqq 6$.

(c) Bestimmen Sie das globale Minimum von g_s in Abhängigkeit von s.

(d) Bestimmen Sie das globale Minimum von f auf $\mathbb{R}^2 \smallsetminus \left\{\binom{0}{0}\right\}$.

Online-Aufgabe.

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 25.06.–01.07.) auf folgender Webseite:

http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test430/

M. Gorsky, M. Hofacker
C. Rösinger, D. C. Veniani,
D. Zimmermann

23. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 2

M. Stroppel

Sommersemester 2020

Präsenzübungen

Aufgabe P 90. *Partielle Ableitungen*

Bestimmen Sie für die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}\colon x \mapsto f(x) = f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sin\left(x_1 + 2x_2 + x_3^3 + \frac{1}{4}x_4\right)$$

die partiellen Ableitungen

(a) $f_{x_3}(x)$, **(b)** $\dfrac{\partial^2}{\partial_{x_4}\partial_{x_1}} f(x)$, **(c)** $\mathrm{D}^{(1,1,1,1)} f(x)$, **(d)** $\mathrm{D}^{(1,0,1,0)}\left(\mathrm{D}^{(0,1,0,1)} f\right)(x)$.

Aufgabe P 91. *Taylorpolynom*

Sei

$$f\colon \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 2x + y > 0\right\} \to \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \ln\sqrt{\frac{2x+y}{3}} \,.$$

(a) Bestimmen Sie die Taylorpolynome $T_1\left(f, \binom{x}{y}, \binom{1}{1}\right)$ und $T_2\left(f, \binom{x}{y}, \binom{1}{1}\right)$.

(b) Skizzieren Sie die Graphen von $f\binom{1+t}{1+t}$, $T_1\left(f, \binom{1+t}{1+t}, \binom{1}{1}\right)$ und $T_2\left(f, \binom{1+t}{1+t}, \binom{1}{1}\right)$.

Aufgabe P 92. *Modell: Schmiegquadriken*

Sei $f\colon [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}\colon \binom{x}{y} \mapsto \cos(x)\cos(y)$.
Ein interaktives Modell des Graphen von f finden Sie auf
https://info.mathematik.uni-stuttgart.de/HM-Stroppel-Material/3D/05/

(a) Skizzieren Sie die Nullstellenmenge von f.
Bestimmen Sie die Vorzeichenverteilung von f und notieren Sie diese in Ihrer Skizze.

(b) Bestimmen Sie den Gradienten und die Hesse-Matrix von f.

(c) Bestimmen Sie das Taylorpolynom der Stufe 2 zu f im Punkt $P_1 = \binom{0}{0}$.

(d) Bestimmen Sie die Schmiegquadrik an f im Punkt P_1 und eine euklidische Normalform.

(e) Wie ist diese Schmiegquadrik im Modell dargestellt?

Aufgabe P 93. *kompakt, beschränkt, abgeschlossen, offen, konvex*

Überprüfen Sie, ob die folgenden Teilmengen A, B und C des $\mathbb{R}^2$ jeweils abgeschlossen, beschränkt, offen, kompakt bzw. konvex sind:

$$A := \left\{\tbinom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 4\right\},$$

$$B := \left\{\tbinom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqq 4\right\} \setminus \left\{\tbinom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\right\},$$

$$C := \left\{\tbinom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\right\}.$$

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 89. *Partielle Ableitungen und Richtungsableitungen*
Betrachten Sie die Abbildung $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y,z) = \arctan(\sinh(xyz)),$$

den Punkt $P = (\pi, 2, 0)^\intercal$ und den Vektor $v = \frac{1}{2}(\sqrt{2}, 1, 1)^\intercal$. Bestimmen Sie

(a) $\operatorname{grad} f(x,y,z)$, **(b)** $\partial_v f(P)$, **(c)** $\mathrm{H}f(x,y,z)$, **(d)** $\mathrm{H}f(P)$.

Hinweis. Mit der Formel $1 + \big(\sinh(x)\big)^2 = \big(\cosh(x)\big)^2$ können Sie $\operatorname{grad} f$ vereinfachen.

Aufgabe H 90. *Satz von Taylor in Dimension* 2
Es sei $a = \binom{0}{\pi} \in \mathbb{R}^2$. Betrachten Sie die Abbildung $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \sin(x_1)\sin(x_2).$$

(a) Bestimmen Sie $\mathrm{T}_1(f,x,a)$.
(b) Finden Sie eine Abbildung $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $\mathrm{T}_1(g,x,a) = \mathrm{T}_1(f,x,a)$ und $g\binom{2}{0} = 4$.
(c) Bestimmen Sie $\mathrm{T}_2(f,x,a)$.
(d) Es sei $v = \binom{\pi/2}{-\pi/2}$. Schätzen Sie den Fehler

$$|f(a+v) - \mathrm{T}_1(f, a+v, a)|$$

mit Hilfe des Restglieds aus 4.4.12 nach oben ab. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem tatsächlichen Fehler.

Aufgabe H 91. *Modell: Schmiegquadriken*
Seien $f\colon [-\pi,\pi] \times [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}\colon \binom{x}{y} \mapsto \cos(x)\cos(y)$ und $P_2 = \binom{-\pi/2}{-\pi/2}$, $P_3 = \binom{\pi/4}{\pi/4}$.
Ein interaktives Modell des Graphen von f finden Sie auf
https://info.mathematik.uni-stuttgart.de/HM-Stroppel-Material/3D/05/
In den Präsenzübungen haben Sie Gradient und Hesse-Matrix von f berechnet.

(a) Bestimmen Sie jeweils das Taylorpolynom der Stufe 2 zu f in P_2 und P_3.
(b) Bestimmen Sie jeweils eine Gleichung für die Tangentialebene an den Graphen von f in den Punkten P_2 und P_3.
(c) Bestimmen Sie eine Gleichung für die Schmiegquadrik an den Graphen von f in P_2 und geben Sie eine euklidische Normalform an. Welche Gestalt hat die Quadrik?

Aufgabe H 92. *Mengen*
Skizzieren Sie die folgenden Teilmengen M_i des $\mathbb{R}^2$ in ein gemeinsames Koordinatensystem und untersuchen Sie jeweils, ob diese beschränkt, kompakt bzw. konvex sind.

$$M_1 := \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, (x+1)^2 + (y-1)^2 \leqq 1 \right\}, \qquad M_2 := [1,3] \times (-1,1),$$

$$M_3 := \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 2|x| \leqq |y| \right\}, \qquad M_4 := M_1 \cup M_2.$$

Online-Aufgabe.

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 02.07.–08.07.) auf folgender Webseite:

http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/

M. Gorsky, M. Hofacker
C. Rösinger, D. C. Veniani,
D. Zimmermann

24. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 2

M. Stroppel

Sommersemester 2020

Präsenzübungen

Aufgabe P 94. *Singuläre Hesse-Matrix*

Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir die Funktion $f_n \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch $f_n\binom{x}{y} := x^n + y^n$.
Berechnen Sie $\operatorname{grad} f_n\binom{x}{y}$ und $\mathrm{H}f_n\binom{x}{y}$.
Entscheiden Sie dann, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind:

(a) Der Ursprung $\binom{0}{0}$ ist eine kritische Stelle von f_n genau dann, wenn $n \geqq 2$.

(b) Falls $n \geqq 3$ ist die Matrix $\mathrm{H}f_n\binom{0}{0}$ gleich der Nullmatrix.

(c) Die Funktion f_4 besitzt bei $\binom{0}{0}$ ein globales Minimum.

(d) Die Funktion f_3 besitzt bei $\binom{0}{0}$ einen Sattelpunkt.

Aufgabe P 95. *Kettenregel*

Bestimmen Sie die Jacobimatrix für $f = f_2 \circ f_1$, jeweils auf zwei Arten, einmal direkt und einmal unter Verwendung der Kettenregel,

(a) mit $f_1\binom{x}{y} = x^2 + y^2$ und $f_2(t) = \cos t$.

(b) mit $f_1(t) = \binom{\sin t}{\cos t}$ und $f_2\binom{x}{y} = \left(xy, x^3, y^2\right)^\intercal$.

(c) mit $f_1\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2+y \\ y+z^2 \end{pmatrix}$ und $f_2\binom{r}{s} = \exp(rs)$.

Aufgabe P 96. *Extrema unter Nebenbedingungen*

Berechnen Sie die Extrema der Funktion

$$f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x^2 - y^2$$

unter der Nebenbedingung

$$x^2 + y^2 = 1\,.$$

Gehen Sie dazu folgendermaßen vor:

(a) Die Nebenbedingung kann als $y^2 = 1 - x^2$ geschrieben werden. Ersetzen Sie y^2 im Funktionsterm von f und untersuchen Sie die entstehende Funktion in einer Veränderlichen auf Extrema.

(b) Benutzen Sie die Multiplikatormethode von Lagrange.

(c) Vergleichen Sie die Ergebnisse.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 93. *Kritische Stellen*

Betrachten Sie die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \binom{x}{y} \mapsto f\binom{x}{y} = (x^4+y^4)(x-3)(y-3)$.

(a) Skizzieren Sie die Nullstellenmenge und die Vorzeichenverteilung von f.

(b) Berechnen Sie den Gradienten und die Hessematrix von f.

(c) Finden Sie die kritischen Stellen von f.
Hinweis: Benutzen Sie die Tatsache, dass das Gleichungssystem $\begin{cases} 5y^4 - 12y^3 + x^4 = 0 \\ 5x^4 - 12x^3 + y^4 = 0 \end{cases}$
genau zwei reelle Lösungen besitzt, nämlich $\binom{x}{y} = \binom{0}{0}$ und $\binom{x}{y} = \binom{2}{2}$.

(d) Bestimmen Sie den Typ jeder kritischen Stelle.

Aufgabe H 94. *Optimierung*

Wir betrachten $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \binom{x}{y} \mapsto 3xy - 4x$ und $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \binom{x}{y} \mapsto y^3 - x$.

(a) Berechnen Sie die Gradienten von f und g.

(b) Skizzieren Sie $M = \{\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid g\binom{x}{y} = 0, x \in [-1,8]\}$ und die Nullstellenmenge von f.

(c) Finden Sie die kritischen Stellen von f auf M, d.h. die Punkte $\binom{x}{y} \in M$, die die Lagrange-Multiplikator-Bedingung erfüllen.

(d) Finden Sie das Minimum und das Maximum von f auf M.

Aufgabe H 95. *Extremalstellen*

Betrachten Sie die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f\binom{x}{y} = 3x^2y + 4x^2 - 19x$.

(a) Berechnen Sie den Gradienten von f.

(b) Finden Sie die kritischen Stellen von f auf $\mathbb{R}^2$.

(c) Skizzieren Sie die Menge $M := \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x \geqq 0 \wedge xy \geqq 1 \wedge 3y \leqq -3x + 10 \right\}$.

(d) Finden Sie das Minimum und das Maximum von f auf M.

Aufgabe H 96. *Verlauf einer berühmten Kurve*

Betrachten Sie die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \binom{x}{y} \mapsto f\binom{x}{y} = (x^2+y^2)^2 - 2(x^2-y^2)$ und die Kurve $B = \{\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid f\binom{x}{y} = 0\}$.

(a) Finden Sie die Schnittpunkte von B mit den Koordinatenachsen und mit dem Einheitskreis.

(b) Berechnen Sie die zugehörigen Tangenten mittels des Gradienten, wo möglich.

(c) Versuchen Sie mit diesen Informationen eine Skizze der Kurve zu entwerfen.

(d) Es seien $F_1 = \binom{-1}{0}$ und $F_2 = \binom{1}{0}$. Überprüfen Sie, dass jeder Punkt P auf der Kurve B die folgende Bedingung erfüllt: $|F_1 - P| \cdot |F_2 - P| = 1$.

Online-Aufgabe.

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 09.07.–15.07.) auf folgender Webseite:

http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test430/

M. Gorsky, M. Hofacker
C. Rösinger, D. C. Veniani,
D. Zimmermann

25. Gruppenübung zur Vorlesung
Höhere Mathematik 2

M. Stroppel

Sommersemester 2020

Präsenzübungen

Aufgabe P 97. *Parametrisierungen*

Skizzieren und parametrisieren Sie die folgenden Kurven.

(a) Einheitskreis, einmal gegen den Uhrzeigersinn umlaufen.

(b) Einheitskreis, dreimal im Uhrzeigersinn umlaufen.

(c) Kreis um den Punkt $\binom{2}{3}$ mit Radius 1, einmal im Uhrzeigersinn umlaufen.

(d) Ein Weg, der den Punkt $\binom{1}{1}$ mit dem Punkt $\binom{-2}{-2}$ verbindet, ohne durch den Ursprung zu laufen.

Aufgabe P 98. *Vektorfelder*

Bestimmen Sie, welche der folgenden Vektorfelder quellen- bzw. wirbelfrei sind. Entscheiden Sie auch, welche davon ein Potential besitzen.

(a) $g\binom{x}{y} = \binom{x}{y}$.

(b) $g\binom{x}{y} = \binom{y}{x}$.

(c) $g\binom{x}{y} = \binom{-y}{x}$.

(d) $g(x,y,z) = \operatorname{grad} f(x,y,z)$ mit $f(x,y,z) = \exp(x^2+y^2+z^2)$.

(e) $g(x,y,z) = (\sin z, \cos y, \tan x)^\intercal$

Aufgabe P 99. *Differentiationsregeln*

Es sei $D \subseteqq \mathbb{R}^n$, und es seien $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ zwei stetig differenzierbare Funktionen mit Definitionsbereich D. Die Funktion g habe keine Nullstelle in D, weiter sei a ein Punkt im Inneren von D. Außerdem sei $h\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein zweimal stetig differenzierbares Vektorfeld, und sei $b \in \mathbb{R}^3$.
Rechnen Sie folgende Gleichungen nach.

(a) $\operatorname{grad}(f+g)(a) = \operatorname{grad} f(a) + \operatorname{grad} g(a)$

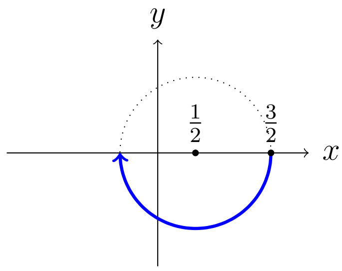
(b) $\operatorname{grad}\left(\dfrac{f}{g}\right)(a) = \dfrac{g(a)\operatorname{grad} f(a) - f(a)\operatorname{grad} g(a)}{g(a)^2}$

(c) $\operatorname{grad}\operatorname{div} h(b) - \operatorname{rot}\operatorname{rot} h(b) = \begin{pmatrix}\Delta h_1(b)\\ \Delta h_2(b)\\ \Delta h_3(b)\end{pmatrix}$

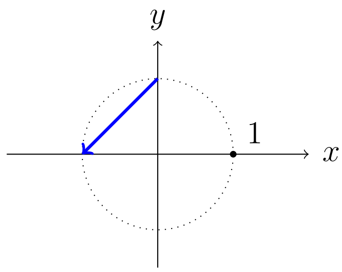
Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 97. *Parametrisierungen*

(a) Geben Sie eine Parametrisierung der folgenden blauen Kurve an.

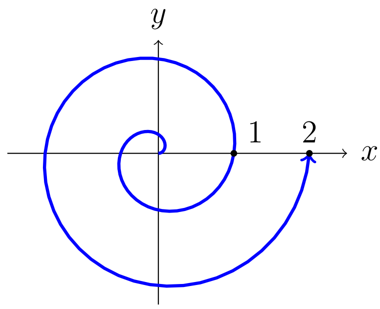


(b) Geben Sie eine Parametrisierung der folgenden blauen Kurve an.



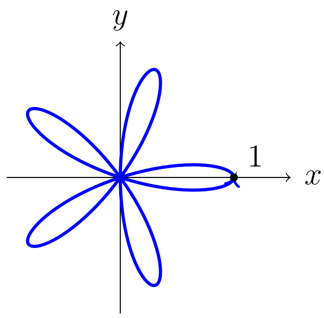
(c) Leiten Sie aus dem Bild die Parameter a und b der blauen Kurve S her. (Die Kurve heißt *archimedische Spirale*.)

$$S\colon [0,b] \to \mathbb{R}^2\colon \quad t \mapsto \begin{pmatrix} at\cos t \\ at\sin t \end{pmatrix}.$$



(d) Leiten Sie aus dem Bild die Parameter a und n der blauen Kurve R her. (Die Kurve heißt *Rosette*.)

$$R\colon [0,\pi] \to \mathbb{R}^2\colon \quad t \mapsto \begin{pmatrix} a\cos(nt)\cos t \\ a\cos(nt)\sin t \end{pmatrix}.$$



Aufgabe H 98. *Kurvenintegrale*
Gegeben ist das Vektorfeld

$$g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_2^2 \cos(x_1) \\ \exp(x_2) \\ x_3 \end{pmatrix}$$

und die Kurven K_1 und K_2, die durch

$$C_1\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3\colon \qquad t \mapsto \big(t, 2\pi t, 0\big)^\intercal,$$
$$C_2\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3\colon \qquad t \mapsto \big(t, t^2, t(t-2\pi)\big)^\intercal$$

parametrisiert werden.

(a) Entscheiden Sie, ob das Vektorfeld g wirbelfrei ist.

(b) Berechnen Sie jeweils den Anfangs- und den Endpunkt der durch C_1 bzw. C_2 parametrisierten Kurve K_1 bzw. K_2.

(c) Berechnen Sie $\int_{K_1} g(x) \bullet \mathrm{d}\, x$.

(d) Berechnen Sie $\int_{K_2} g(x) \bullet \mathrm{d}\, x$. Stimmt das Ergebnis überein mit dem aus **(c)**?

Aufgabe H 99. *Kurvenintegral einer reellwertigen Funktion (Pascalsche Schnecke)*
Betrachten Sie die Kurve K mit der folgenden Parametrisierung:

$$C\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}^2\colon \qquad t \mapsto \begin{pmatrix} (2\cos t + 1)\cos t \\ (2\cos t + 1)\sin t \end{pmatrix}.$$

(a) Finden Sie alle $t \in [-\pi, \pi]$, für die der Bildpunkt $C(t)$ auf der x_1- bzw. auf der x_2-Achse liegt. Ist die Parametrisierung C doppelpunktfrei?

(b) Berechnen Sie $|C'(t)|$.

(c) Zeigen Sie, dass die Kurve symmetrisch bezüglich der x_1-Achse ist.

(d) Berechnen Sie $\int_K f(s)\, \mathrm{d}\, s$ mit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \binom{x_1}{x_2} \mapsto x_2$.
Hinweis: Statt die übliche Formel 5.4.1 zu verwenden (siehe Bemerkung 5.3.3) kann man auch die Symmetrie der Kurve ausnutzen.

Aufgabe H 100. *Potential*

Gegeben ist das Vektorfeld $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_2 x_3 - 1 \\ x_1 x_3 - 1 \\ x_1 x_2 - 1 \end{pmatrix}.$

Wir betrachten die Kurven K_1 und K_2, die durch

$$C_1\colon [0, 1] \to \mathbb{R}^3\colon \qquad t \mapsto \big(2t, -t, -t\big)^\intercal,$$
$$C_2\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3\colon \qquad t \mapsto \big((2\cos t + 1)\cos t, (2\cos t + 1)\sin t, t(t-2\pi)\big)^\intercal.$$

parametrisiert werden.

(a) Entscheiden Sie, ob das Vektorfeld g quellen- bzw. wirbelfrei ist.

(b) Besitzt g ein Potential? Falls ja, finden Sie eines.

(c) Berechnen Sie $\int_{K_1} g(x) \bullet \mathrm{d}\, x$.

(d) Bestimmen Sie $\oint_{K_2} g(x) \bullet \mathrm{d}\, x$.

Aufgabe H 101. *Wirbelfeld*

Betrachten Sie für $a \in \mathbb{R}$ das Vektorfeld

$$w_a \colon \mathbb{R}^2 \smallsetminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \to \mathbb{R}^2 \colon \quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{2\pi(u^2+v^2)^a} \begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix von w_a.

(b) Für welches $a \in \mathbb{R}$ ist das Vektorfeld w_a quellen- bzw. wirbelfrei?

Wir setzen nun $a = 1$ und schreiben w statt w_a. Es sei K der Kreis um $\binom{0}{0}$ mit Radius 1, einmal gegen den Uhrzeigersinn umlaufen.

(c) Berechnen Sie $\oint_K w(x) \bullet \mathrm{d}\,x$.

(d) Besitzt das Vektorfeld w ein Potential? Falls ja, finden Sie eines.

[Das Integral in **(c)** ist gleich einer ganzen Zahl. Das Vektorfeld w ist tatsächlich ein spezielles Vektorfeld und heißt *Wirbelfeld*. Für jede Parametrisierung C, deren Bild den Ursprung nicht enthält, ist das Integral $\oint_C w \bullet \mathrm{d}\,x$ eine ganze Zahl und hängt nur davon ab, wie oft die Parametrisierung C um den Ursprung umläuft. Deshalb wird sie auch *Umlaufzahl* der Parametrisierung C genannt.]

Aufgabe H 102. *Quellenfeld*

Betrachten Sie für $a \in \mathbb{R}$ das Vektorfeld

$$g_a \colon \mathbb{R}^2 \smallsetminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \to \mathbb{R}^2 \colon \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{(x^2+y^2)^a} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix von g_a.

(b) Für welches $a \in \mathbb{R}$ ist das Vektorfeld g_a quellen- bzw. wirbelfrei?

Sei K der Einheitskreis (einmal gegen den Uhrzeigersinn durchlaufen).

(c) Berechnen Sie die Zirkulation $Z(g_a, K)$ von g_a längs K in Abhängigkeit von a.

(d) Berechnen Sie den Ausfluss $A(g_a, K)$ von g_a durch K in Abhängigkeit von a.

Zusatz: Für welches $a \in \mathbb{R}$ besitzt das Vektorfeld g_a ein Potential?

Aufgabe H 103. *Potential und Kurvenintegral*

In Abhängigkeit von $b \in \mathbb{R}$ und $\gamma \in \mathbb{R}^+$ sind das Vektorfeld v_b und die durch C_γ parametrisierte Kurve K_γ gegeben:

$$v_b \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \colon \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 3x_3^2 + x_3 \\ 1 + 6x_2x_3 + bx_2 \end{pmatrix},$$

$$C_\gamma \colon [0, \gamma] \to \mathbb{R}^3 \colon t \mapsto (2\sin t, \cos(2t), \cos t)^\intercal .$$

(a) Finden Sie ein b so, dass v_b ein Potential besitzt und berechnen Sie ein Potential.

(b) Finden Sie das kleinstmögliche (positive) γ so, dass die Kurve K_γ geschlossen ist.

(c) Berechnen Sie $\displaystyle\int_{K_\pi} v_1(x) \bullet \mathrm{d}\,x$.

(d) Berechnen Sie $\displaystyle\int_{K_\pi} v_0(x) \bullet \mathrm{d}\,x$.

Hinweis: Die Identitäten $\sin 2t = 2 \sin t \cos t$ und $\cos 2t = 2\cos^2 t - 1$ könnten helfen.

Aufgabe H 104. *Harmonische Funktionen*

(a) Finden Sie jeweils das größte Definitionsgebiet $D \subseteqq \mathbb{R}^2$ für die reellwertigen Funktionen, die durch die folgenden Funktionsterme gegeben sind:

(i) $H\binom{x}{y} = \exp(x)\sin(y)$.

(ii) $L\binom{x}{y} = \ln(x^2 + y^2)$.

(b) Entscheiden Sie, ob die Funktion H aus **(a)** harmonisch ist.

(c) Entscheiden Sie, ob die Funktion L aus **(a)** harmonisch ist.

(d) Verwenden Sie die Parametrisierung $C\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \binom{\cos t}{\sin t}$ des Einheitskreises K, um

$$\frac{1}{2\pi}\int_K H(s)\,\mathrm{d}\,s$$

zu berechnen.

Online-Aufgabe.

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 16.07.–22.07.) auf folgender Webseite:

http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/