T. Holicki, R. Schmähl,
A. Zvonareva

12. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 2

Sommersemester 2021

M. Stroppel

Präsenzübungen

Aufgabe P 45. *Reihenwerte bestimmen*

Bestimmen Sie die Werte der folgenden Reihen.

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4^k + 2^k}{9^k}$ **(b)** $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty} \frac{3}{2^k}$ **(c)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{8}{k!}$

Aufgabe P 46. *Konvergenzkriterien für Reihen*

Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten der Reihen.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3^n}$ **(b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ **(c)** $\displaystyle\sum_{n=4}^{\infty} \frac{n!}{2^n}$ **(d)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ **(e)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{(-1)^n}$

Für welche der angegebenen Reihen bekommt man bereits eine Konvergenzaussage mit Hilfe von Lemma 1.9.1?

Aufgabe P 47. *ε-δ-Kriterium*

Zeigen Sie mit Hilfe des ε-δ-Kriteriums, dass die folgenden Funktionen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ an der angegebenen Stelle x_0 stetig sind.

(a) $f(x) = 5x - 3, \quad x_0 = 1$ **(b)** $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}, \quad x_0 = 0$

Aufgabe P 48. *Stetigkeit*

Gegeben sei die Funktion $f\colon [-3,3] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & \text{für } x \in [-3,1] \\ -x^2 + 2x + 1 & \text{für } x \in (1,3] \end{cases}$.

(a) Fertigen Sie eine Skizze des Graphen von f an.

(b) Sei $1 > \varepsilon > 0$. Bestimmen Sie ein $\delta > 0$ so, dass $|f(x) - f(-1)| < \varepsilon$ für alle $x \in (-1-\delta, -1+\delta)$. Folgern Sie daraus, dass f in $x_0 = -1$ stetig ist.

(c) Wählen Sie ein $\varepsilon > 0$ und eine Folge (a_n) mit Grenzwert 1 so, dass $|f(a_n) - f(1)| \geqq \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Folgern Sie daraus, dass f in $x_0 = 1$ nicht stetig ist.

Online-Aufgabe

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 29.04. – 05.05.) auf folgender Webseite:

`http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test430/`

Bitte geben Sie dort zunächst Ihre Matrikelnummer ein.

Die Lösungen sind als ganze Zahlen oder als Dezimalzahlen mit einem Dezimal**punkt** einzugeben. Sonstige Zeichen, wie zum Beispiel Klammern oder Operatoren wie $*$ und $/$, dürfen **nicht** benutzt werden.

Anschließend müssen Sie Ihr **Passwort** für die Onlineübungen eintragen, das Sie per Email an Ihre studentische Adresse (<st$******$@stud.uni-stuttgart.de>) erhalten haben.

Innerhalb des Bearbeitungszeitraums können Sie Ihre Eingaben beliebig oft wiederholen, wobei die **letzten** Eingaben gewertet werden. Der Bearbeitungszeitraum endet mittwochs, nach der Abgabe der schriftlichen Übungen in den Übungsgruppen, um 24:00 Uhr. Sie erhalten für die Bearbeitung der Online-Aufgabe 0, 1, 2 oder 3 Punkte.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 49. *Stetigkeit und Folgen*

Gegeben seien die Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases} \quad \text{und} \quad g(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{|x|}\right) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases} .$$

(a) Finden Sie eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ sowie $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = 0$.

(b) Finden Sie eine Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ so, dass $(f(b_n))_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert.

(c) Ist f stetig im Punkt $x_0 = 0$? Entscheiden Sie dies unter Verwendung von 1.10.3.

(d) Ist g stetig im Punkt $x_0 = 0$?

Aufgabe H 50. *Majoranten- und Minorantenkriterium*

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz, indem Sie eine geeignete Majorante oder Minorante finden.

(a) $\displaystyle\sum_{j=3}^{\infty} \frac{j+4}{j^2-3j+1}$ **(b)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k}}$ **(c)** $\displaystyle\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{3\ell}{\ell^3+1}$ **(d)** $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^m}{m!\,\pi^m}$

Aufgabe H 51. *Konvergenzuntersuchung*

Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für welche die Reihe $\displaystyle\sum_{k=7}^{\infty} \frac{(7x)^{7k}}{k^7}$ konvergiert.

Aufgabe H 52. *Raabesches Konvergenzkriterium*

Gegeben sei die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Weiter gebe es ein $\beta > 1$ so, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqq 1 - \frac{\beta}{n+1}.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Folgengliedern $b_n := n a_n$ monoton fällt.

(b) Folgern Sie, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - b_{n+1})$ konvergiert. *Hinweis:* Teleskopsumme.

(c) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\beta-1}(b_n - b_{n+1})$ eine Majorante von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ bildet.

(d) Folgern Sie, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert.

Frischhaltebox

Aufgabe H 53. *Vollständige Induktion und Konvergenz*

(a) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion: $\forall n \in \mathbb{N}\colon \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

(b) Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n := \frac{3}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2$.

(c) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion: $\forall n \in \mathbb{N}\colon \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$.
Hinweis: Beispiel 1.2.2 aus dem LA Skript kann hier und in Teil **(d)** helfen.

(d) Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n := \frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n} k^3$.

Präsenzübungen

Aufgabe P 49. *Stetigkeit*

Seien $p, q \in \mathbb{R}$ und seien die Funktionen $f, g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für } x \leqq 1 \\ 2x + p & \text{für } x > 1 \end{cases} \quad \text{und} \quad g(x) = \begin{cases} \frac{\sin(2x)}{x} & \text{für } x < 0 \\ x + q & \text{für } x \geqq 0 \end{cases}$$

(a) Berechnen Sie

$$\lim_{x \to 1-0} f(x), \quad \lim_{x \to 1+0} f(x), \quad \lim_{x \to 0-0} g(x), \quad \lim_{x \to 0+0} g(x).$$

(b) Für welche $p \in \mathbb{R}$ ist f an der Stelle 1 (linksseitig) stetig?

(c) Für welche $q \in \mathbb{R}$ ist g an der Stelle 0 (linksseitig) stetig?

Aufgabe P 50. *Funktionsgrenzwerte*

Untersuchen Sie die folgenden Funktionsgrenzwerte.

(a) $\displaystyle \lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2 + 3x}{-x + 4}$

(b) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \left(\frac{1 - \cos(x)}{2\,x} \right)^5 \left(\frac{\sin(2\,x)}{x} \right)^7$

(c) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{x^3 + 3x}{x^3 + x^2}$

(d) $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 5} - \sqrt{x^2 + 3x}\right)$

Aufgabe P 51. *Umkehrfunktionen*

Skizzieren Sie die Graphen der folgenden Funktionen:

(a) $f_1 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \colon x \mapsto \begin{cases} x^2 & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x \leqq 0 \end{cases}$

(b) $f_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \colon x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} & \text{für } x > 1 \\ x - 1 & \text{für } x \leqq 1 \end{cases}$

Welche dieser Funktionen besitzen eine Umkehrfunktion?
Geben Sie jeweils eine möglichst große Teilmenge des Definitionsbereichs so an, dass die Einschränkung der Funktion auf diese Teilmenge injektiv ist.
Ändern Sie dann auch noch den Zielbereich so, dass eine bijektive Funktion entsteht.

Aufgabe P 52. *Intervallhalbierungsmethode*

Bestimmen Sie näherungsweise eine Nullstelle des Polynoms $x^3 - x - 2$, indem Sie die Intervallhalbierungsmethode anwenden und das erzeugte Intervall $[a_5, b_5]$ angeben, welches garantiert eine Nullstelle enthält. Starten Sie das Verfahren mit dem Intervall $[a_1, b_1] = [1, 3]$.

Online-Aufgabe

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 06.05.–12.05.) auf folgender Webseite.

`http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/`

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 54. *Funktionsgrenzwerte*

Bestimmen Sie die folgenden Funktionsgrenzwerte.

(a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3+x^2-x-1}{x^2-1}$

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{4x^2+2x}-2x$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\tan(5x)}$

(d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\cos(10x^{10})}{\sqrt[10]{x}}$

Aufgabe H 55. *Intervallhalbierungsmethode*

Gegeben sei die stetige Funktion $f\colon [-1,3]\to\mathbb{R}\colon x\mapsto \cos\left(\dfrac{4\pi}{x-4}\right)$.

(a) Skizzieren Sie den Graphen von f. (Beachten Sie den Definitionsbereich.)

(b) Zeigen Sie, dass f im Intervall $[0,2]$ genau eine Nullstelle besitzt.

(c) Finden Sie mittels der Intervallhalbierungsmethode ein Intervall $I=[a,b]$, das diese Nullstelle enthält und $b-a<0{,}1$ erfüllt.

Hinweis: Funktionswerte dürfen elektronisch näherungsweise bestimmt werden.

Aufgabe H 56. *Umkehrfunktion*

Gegeben sei die Funktion $f\colon (-1,1)\to\mathbb{R}\colon x\mapsto \frac{2x}{1-x^2}$

(a) Begründen Sie, dass f stetig ist.

(b) Zeigen Sie, dass f streng monoton wächst.

(c) Zeigen Sie, dass f bijektiv ist.

(d) Bestimmen Sie f^{-1} explizit.

Aufgabe H 57. *Eine unstetige Umkehrfunktion*

Wir betrachten die Funktion

$$g\colon (-1,0]\cup(1,2)\to(-1,1)\colon g(x)=\begin{cases} x & \text{für } x\in(-1,0] \\ x-1 & \text{für } x\in(1,2)\end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass g stetig, bijektiv und streng monoton wachsend ist.

(b) Zeigen Sie, dass g^{-1} *nicht* stetig ist.

Frischhaltebox

Aufgabe H 58. *Häufungspunkte*

Bestimmen Sie für jede der folgenden Folgen möglichst viele Häufungspunkte, indem Sie entsprechende konvergente oder bestimmt divergente Teilfolgen angeben.

(a) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n := (1+(-1)^n)\mathrm{e}^n$

(b) $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n := (-1)^n\frac{2n^2}{n^2+2}$

(c) $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n := \sqrt[n]{n}\,\sin(\pi\frac{n}{2})$

(d) $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $d_n := \left(\cos(\pi\frac{n}{4})\right)^2+\sum_{j=0}^n(\frac{1}{3})^j$

Präsenzübungen

Aufgabe P 53. *Konvergenz von Potenzreihen*

Stellen Sie die folgenden Reihen als komplexe Potenzreihen der Form $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ dar mit geeignetem Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ und geeigneter Koeffizienten-Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Bestimmen Sie anschließend die zugehörigen Konvergenzradien.

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 2^{1-n}\left(\frac{z-1+\mathrm{i}}{2}\right)^n$ **(b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2\mathrm{i}z-4\mathrm{i}+1)^n}{n^2}$ **(c)** $\displaystyle\sum_{n=17}^{\infty} \left(\frac{z}{n}\right)^n$

Skizzieren Sie jeweils die Konvergenzkreisscheibe, und entscheiden Sie, ob die Potenzreihe für $z=-1-2\mathrm{i}$ konvergiert.

Aufgabe P 54. *Konvergenz durch geometrische Überlegungen*

Betrachten Sie die Potenzreihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(z-4+2\mathrm{i})^k$, wobei $a_k \in \mathbb{C}$ für $k \in \mathbb{N}_0$. Die Reihe sei konvergent für $z=\mathrm{i}$, aber nicht absolut konvergent. Entscheiden Sie, ob

(a) $z=\mathrm{i}$ im Inneren, auf dem Rand oder außerhalb des Konvergenzkreises der Reihe liegt.

(b) die Reihe in $z_1 = 2+\mathrm{i}$ konvergiert.

Aufgabe P 55. *Formel von Euler und de Moivre*

Sei $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}\colon x\mapsto \big(\cos(x)\big)^3$.

(a) Schreiben Sie $f(x)$ als Linearkombination von Funktionen der Form $\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$ mit $n\in\mathbb{Z}$.

(b) Schreiben Sie $f(x)$ als Linearkombination von Funktionen der Form $\sin(nx)$ und $\cos(mx)$ mit $n\in\mathbb{N}$ und $m\in\mathbb{N}_0$.

Aufgabe P 56. *Potenzreihenentwicklung komplexer Funktionen*

Es sei $f\colon \mathbb{C}\smallsetminus\{2\}\to\mathbb{C}\colon z\mapsto \dfrac{1}{2-z}$.

(a) Bestimmen Sie $a,b\in\mathbb{C}\smallsetminus\{0\}$ so, dass $\dfrac{1}{2-z} = \dfrac{a}{1-[b\cdot(z-z_0)]}$ für $z_0=1$ und für alle $z\in\mathbb{C}\smallsetminus\{2\}$ gilt.

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe der geometrischen Reihe eine Potenzreihe um den Entwicklungspunkt $z_0=1$, die innerhalb ihres Konvergenzkreises mit f übereinstimmt. Skizzieren Sie den Konvergenzkreis.

(c) Gehen Sie vor wie in **(a)** und **(b)** für die Entwicklungspunkte $z_1=3$ und $z_2=2\mathrm{i}$.

Online-Aufgabe

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 13.05.–19.05.) auf folgender Webseite.

`http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test430/`

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 59. *Konvergenz von Potenzreihen*

Stellen Sie die folgenden Reihen als komplexe Potenzreihen der Form $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ dar mit geeignetem Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ und geeigneter Koeffizienten-Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Bestimmen Sie anschließend die zugehörigen Konvergenzradien.

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3z+2)^n}{n+4}$ **(b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} z^n$ **(c)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 3^n z^{3n}$

Aufgabe H 60. *Potenzreihenentwicklung komplexer Funktionen*

Seien $f, g, h\colon \mathbb{C}\smallsetminus\{5,-5\} \to \mathbb{C}$ gegeben durch $f(z) = \frac{1}{z-5}$, $g(z) = \frac{1}{z+5}$ und $h(z) = \frac{10z-20}{z^2-25}$.

(a) Bestimmen Sie $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass $\frac{10z-20}{z^2-25} = \frac{a}{z-5} + \frac{b}{z+5}$ für alle $z \in \mathbb{C} \smallsetminus \{5,-5\}$ gilt.

(b) Bestimmen Sie jeweils eine Potenzreihe um den Entwicklungspunkt $z_0 = 2$, die innerhalb ihres Konvergenzkreises $U_{\rho_f}(z_0)$ bzw. $U_{\rho_g}(z_0)$ mit f bzw. g übereinstimmt.

(c) Bestimmen Sie eine Potenzreihe um den Entwicklungspunkt $z_0 = 2$, die innerhalb von $U_{\rho_f}(z_0) \cap U_{\rho_g}(z_0)$ mit h übereinstimmt.

Aufgabe H 61. *Produkt von Potenzreihen*

Gegeben seien die Potenzreihen $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 3^n z^n$ und $g(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n}$.

(a) Bestimmen Sie die Konvergenzradien ρ_f von f und ρ_g von g.

(b) Stellen Sie mit Hilfe der geometrischen Reihe f und g als gebrochen rationale Funktionen von z dar.

(c) Stellen Sie $f \cdot g$ als Potenzreihe und als gebrochen rationale Funktion von z dar.

Aufgabe H 62. *Formel von Euler und de Moivre*

(a) Zeigen Sie, dass $4\big(|\cos(z)|^2 - \big(\cos(x)\big)^2\big) = \big(\mathrm{e}^y - \mathrm{e}^{-y}\big)^2 = 4\big(|\sin(z)|^2 - \big(\sin(x)\big)^2\big)$ für $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ gilt.

(b) Zeigen Sie mit der geometrischen Summenformel in 1.8.4, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x \in \mathbb{R} \smallsetminus \{2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ gilt

$$2\sum_{k=0}^{n} \cos(kx) = 1 + \frac{\sin\big((n+\frac{1}{2})x\big)}{\sin(\frac{x}{2})}.$$

Frischhaltebox

Aufgabe H 63. *Spezielle Folgen*

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$

(b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{(n^2)}$

(c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{n}$

(d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n}$

Präsenzübungen

Aufgabe P 57. *Ableitungen*

Geben Sie die Menge aller reellen Zahlen an, für die der angegebene Funktionsterm sinnvoll als reelle Zahl ausgewertet werden kann. Geben Sie außerdem die Menge aller Stellen an, an denen f differenzierbar ist, und berechnen Sie f'.

(a) $f(x) = \sum_{n=1}^{3} \frac{x^n}{n^2}$

(b) $f(x) = -\sqrt{-x}$

(c) $f(x) = \frac{1 + (\sin(x))^2}{1 + (\cos(x))^2}$

(d) $f(x) = \sin(\sqrt{x^2 + 1})$

(e) $f(x) = \prod_{n=2}^{4} \sqrt[n]{x}$

(f) $f(x) = e^{x \ln x} \quad \left(= x^x \right)$

Aufgabe P 58. *Ableitungen der Umkehrfunktion*

(a) Seien A und B Intervalle und sei $f\colon A \to B$ bijektiv und differenzierbar. Leiten Sie sich nochmals die Formel für die Ableitung der Umkehrfunktion $f^{-1}\colon B \to A$ her, indem Sie die Identität

$$f\big(f^{-1}(y)\big) = \big(f \circ f^{-1}\big)(y) = \mathrm{id}_B(y) = y \quad \text{für alle} \quad y \in B$$

an beiden Enden differenzieren.

Sei nun die bijektive Abbildung $f\colon [0, +\infty) \to [-1, +\infty)\colon x \mapsto 4x^4 + x^2 - 1$ gegeben.

(b) Finden Sie die Stellen a_1 und a_2 im Definitionsbereich von f, für die $f(a_1) = -\frac{1}{2}$ und $f(a_2) = 4$ gilt.

(c) Bestimmen Sie die Ableitung von f^{-1} an den Stellen $-\frac{1}{2}$ und 4.

Aufgabe P 59. *Differenzierbarkeit/Differenzenquotient/Differentialquotient*

Skizzieren Sie die Graphen der folgenden Funktionen:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} \sqrt{x} & \text{für } x \in [0, +\infty)\,, \\ -\sqrt{-x} & \text{für } x \in (-\infty, 0)\,, \end{cases}$$

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x\,|x| + |x - 1|\,.$$

Untersuchen Sie mit Hilfe des Differentialquotienten, ob die Funktion f an der Stelle $x_0 = 0$ und die Funktion g an den Stellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 1$ differenzierbar ist.

Aufgabe P 60. *Höhere Ableitungen*

Bestimmen Sie abhängig von $n \in \mathbb{N}$ die n-te Ableitung folgender Funktionen:

(a) $f : (-1, +\infty) \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{x - 1}{x + 1}$

(b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sin(x)\cos(x)$

Hinweis: Berechnen Sie jeweils einige Ableitungen, stellen Sie eine Vermutung über die allgemeine Form der Ableitung auf und verifizieren Sie Ihre Vermutung durch Induktion.

Online-Aufgabe

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 20.05. – 02.06.) auf folgender Webseite.

`http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/`

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 64. *Ableitungen*

Geben Sie die Menge aller reellen Zahlen an, für die der angegebene Funktionsterm sinnvoll als reelle Zahl ausgewertet werden kann. Geben Sie außerdem die Menge aller Stellen an, an denen f differenzierbar ist, und berechnen Sie f'.

(a) $f(x) = \sinh(x)\cosh(x)$

(b) $f(x) = \dfrac{x}{1-x^2}$

(c) $f(x) = \sin\big(\cos\big(\tan(x)\big)\big)$

(d) $f(x) = x\sqrt{x\sqrt{x}}$

Aufgabe H 65. *Schmiegehalbkreis I*

Seien $p,q,r,s \in \mathbb{R}$ mit $r > 0$ und $|s| = 1$ und sei

$$g := g_{p,q,r,s} \colon [p-r, p+r] \to \mathbb{R} \colon x \mapsto q + s\sqrt{r^2 - (x-p)^2}.$$

(a) Bestimmen Sie $g'(x)$ und $g''(x)$ für $x \in (p-r, p+r)$.

(b) Seien nun $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ mit $d \neq 0$ gegeben. Bestimmen Sie $p,q,r,s \in \mathbb{R}$ mit $r > 0$ und $|s| = 1$ so, dass $g(a) = b$, $g'(a) = c$ und $g''(a) = d$ gelten.

Aufgabe H 66. *Schmiegehalbkreis II*

Sei $f \colon (0, 2\pi) \to \mathbb{R} \colon x \mapsto \sin(x) + \dfrac{x}{2}$ gegeben.

(a) Bestimmen Sie die erste und zweite Ableitung von f.

(b) Sei nun g die Abbildung aus der vorherigen Aufgabe H65. Bestimmen Sie $p,q,r,s \in \mathbb{R}$ mit $r > 0$ und $|s| = 1$ jetzt so, dass

$$g(a) = f(a), \quad g'(a) = f'(a) \quad \text{und} \quad g''(a) = f''(a) \ \text{ gelten für } \ a = \frac{2\pi}{3}.$$

Skizzieren Sie den Graphen der Abbildungen g.

(c) Wiederholen Sie Aufgabenteil **(b)** für $a = \frac{4\pi}{3}$ und skizzieren Sie anschließend den Graphen der Abbilung f.

Aufgabe H 67. *Monotonie, Ungleichungen und Grenzwerte*

(a) Zeigen Sie mit Hilfe von 2.4.8, dass $\dfrac{t}{t+1} \leqq \ln(1+t) \leqq t$ für alle $t \geqq 0$ gilt.

(b) Folgern Sie, dass $\exp\left(\dfrac{a}{\frac{a}{n}+1}\right) \leqq \left(1+\dfrac{a}{n}\right)^n \leqq \exp(a)$ für alle $a \geqq 0$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(c) Folgern Sie daraus, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{a}{n}\right)^n = \exp(a)$ für alle $a \geqq 0$ gilt.

Frischhaltebox

Aufgabe H 68. *Rang und Determinante*

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \colon t \mapsto \operatorname{Rg}\begin{pmatrix} t-2 & 0 & t \\ 1 & 2t & 0 \\ 3 & 6t & t^2-2t \end{pmatrix}$ nicht stetig ist.

(b) Sei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ invertierbar und seien $u, v \in \mathbb{R}^2$.
Begründen Sie, dass die Abbildung $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \colon t \mapsto \det(A - tuv^\intercal)$ stetig differenzierbar ist. Zeigen Sie weiter, dass die Ableitung von g durch $g'(t) = -\det(A)\operatorname{Sp}(A^{-1}uv^\intercal)$ gegeben ist.

Präsenzübungen

Aufgabe P 61. *Die Regel von l'Hospital*
Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte.

(a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^2+4x-6}{2x^2+3x-5}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos x)}{\ln(\cos 3x)}$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)-x}{(\tan x)^2}$

(d) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{3}\,x - \ln x\right)$

Aufgabe P 62. *Taylorreihen*
Gegeben sei die folgende Funktion: $f\colon [1,3] \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{1}{x+3}$.

(a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom der Stufe 3 um den Entwicklungspunkt $x_0 = 2$.

(b) Bestimmen Sie für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ die n-te Ableitung von f.

(c) Berechnen Sie die Taylorreihe $T(f,x,2)$.

(d) Weisen Sie mit Hilfe des Restglieds nach Lagrange die Übereinstimmung von $T(f,x,2)$ und $f(x)$ für $x \in (1,3)$ nach.

Aufgabe P 63. *Taylorreihen 2*
Gegeben sei die folgende Funktion: $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x\cos x$.

(a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom der Stufe 4 um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

(b) Bestimmen Sie für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ die n-te Ableitung von g.

(c) Berechnen Sie die Taylorreihe $T(g,x,0)$.

Aufgabe P 64. *Extrema und Wendepunkte*
Bestimmen Sie alle Extrema und die Wendepunkte von

$$f\colon [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \mathrm{e}^x \cos(x)\,.$$

Online-Aufgabe

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 03.06. – 09.06.) auf folgender Webseite.

`http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test430/`

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 69. *Die Regel von l'Hospital*

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte.

(a) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \dfrac{4(\sin x)^2 - 6\sin x + 2}{2(\sin x)^2 + 5\sin x - 3}$

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2 - (\ln x)^2}{5x^2 + (\ln x)^2}$

Aufgabe H 70. *Taylorreihen*

Gegeben sei die folgende Funktion: $f\colon (-\frac{3}{2}, \frac{2}{3}) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \ln\frac{2-3x}{3+2x}$.

(a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom der Stufe 4 um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

(b) Bestimmen Sie für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ die n-te Ableitung von f.

(c) Berechnen Sie die Taylorreihe $T(f, x, 0)$.

Hinweis: Es könnte helfen, vorab Rechenregeln für Logarithmen zu nutzen.

Aufgabe H 71. *Taylorreihen 2*

Gegeben sei die folgende Funktion: $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \mathrm{e}^{5x-1}$.

(a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom der Stufe 3 um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

(b) Bestimmen Sie für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ die n-te Ableitung von g.

(c) Berechnen Sie die Taylorreihe $T(g, x, 0)$.

(d) Weisen Sie mit Hilfe des Restglieds nach Lagrange die Übereinstimmung von $T(g, x, 0)$ und $g(x)$ für $x \in \mathbb{R}$ nach.

Aufgabe H 72. *Kurvendiskussion*

Wie betrachten die Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{x^2}{x^3+8}$, dabei sei D die Menge aller reellen Zahlen, für die der Funktionsterm $\frac{x^2}{x^3+8}$ definiert ist.

(a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich D, den Wertebereich und die Nullstellen von f.

(b) Berechnen Sie f' und f''.

(c) Bestimmen Sie die lokalen Extrema von f.

(d) Skizzieren Sie den Graphen von f.

Frischhaltebox

Aufgabe H 73. *Teleskopreihen*

Berechnen Sie für die folgenden Reihen jeweils die Partialsummen S_N für $N \in \{1, 2, 3, 1000\}$. Entscheiden Sie, ob die Reihe konvergiert, und berechnen Sie gegebenenfalls den Wert der Reihe:

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{\sqrt{n+1}} - \dfrac{1}{\sqrt{n}} \right)$

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right)$

T. Holicki, R. Schmähl,
A. Zvonareva

17. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 2

Sommersemester 2021

M. Stroppel

Präsenzübungen

Aufgabe P 65. *Substitution*

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}\,x$

(b) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}\,x}{\sin(2x)} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sin x\cos x}\,\mathrm{d}\,x$

(c) $\displaystyle\int \frac{1}{(\sin x)(\cos x)^2}\,\mathrm{d}\,x$

Aufgabe P 66. *Partielle Integration*

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\displaystyle\int x\ln x\,\mathrm{d}\,x$

(b) $\displaystyle\int \ln x\,\mathrm{d}\,x$

Aufgabe P 67. *Integration mittels Partialbruchzerlegung*

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\displaystyle\int_3^4 \frac{\mathrm{d}\,x}{x^2-3x+2}$

(b) $\displaystyle\int_{7/4}^{5/2} \frac{\mathrm{d}\,x}{x^2-3x+2}$

(c) $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{x}{x^3-3x+2}\,\mathrm{d}\,x$

Aufgabe P 68. *Partielle Integration und Substitution*

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}\,x}{4+x^2}$

(b) $\displaystyle\int \frac{2x}{(x-3)^4}\,\mathrm{d}\,x$

(c) $\displaystyle\int (\sin x)^2\,\mathrm{d}\,x$

Aufgabe P 69. *Integrale mit Parameter*

Berechnen Sie für $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0, b \neq 0$ die Integrale I_1 und I_2:

$$I_1 = \int \mathrm{e}^{ax}\cos(bx)\,\mathrm{d}\,x \qquad\qquad I_2 = \int \mathrm{e}^{ax}\sin(bx)\,\mathrm{d}\,x$$

Online-Aufgabe

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 10.06. – 16.06.)
auf folgender Webseite.

`http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/`

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 74. *Partielle Integration und Substitution*

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}\,x}{\sqrt{x(1-x)}}$

(b) $\displaystyle\int \sqrt{\sqrt{x}-1}\;\mathrm{d}\,x$

(c) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}\,x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$

Aufgabe H 75. *Partielle Integration und Substitution 2*

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}\,x}{\sqrt{x^2+9}}$ **(b)** $\displaystyle\int \mathrm{e}^x \cos x \,\mathrm{d}\,x$ **(c)** $\displaystyle\int \frac{x^2}{(1-x)^{100}}\,\mathrm{d}\,x$

Aufgabe H 76. *Integration mittels Partialbruchzerlegung*

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}\,x}{x^3+1}$ **(b)** $\displaystyle\int_4^5 \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}\,\mathrm{d}\,x$

Aufgabe H 77. *Noch ein Integral*

(a) Leiten Sie die Funktion $f(x)=\arccos x$ ab.

(b) Berechnen Sie das unbestimmte Integral $\displaystyle\int x^2 \arccos x \;\mathrm{d}\,x$.

(c) Berechnen Sie das bestimmte Integral $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} x^2 \arccos x \;\mathrm{d}\,x$.

Frischhaltebox

Aufgabe H 78. *Stetigkeit*

Entscheiden Sie jeweils, ob die Funktion in x_0 stetig fortsetzbar ist:

(a) $f\colon (0,2\pi)\setminus\{\pi\}\to\mathbb{R}\colon x\mapsto (x-\pi)\cot x,\quad x_0=\pi$

(b) $g\colon \mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}\colon x\mapsto \dfrac{1-\cos x}{x^2},\quad x_0=0$

(c) $h\colon \mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}\colon x\mapsto \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x} & \text{falls } x<0 \\ \sqrt{x+1}-\sqrt{|x-1|} & \text{falls } x>0 \end{cases},\quad x_0=0$

T. Holicki, R. Schmähl,
A. Zvonareva

18. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 2

Sommersemester 2021

M. Stroppel

Präsenzübungen

Aufgabe P 70. *Uneigentliche Integrale*

Bestimmen Sie, falls möglich (d.h.: falls konvergent), die folgenden uneigentlichen Integrale:

(a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}\,x$ **(b)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\,5^{-x}\,\mathrm{d}\,x$ **(c)** $\displaystyle\int_0^{2} \frac{1}{2-x}\,\mathrm{d}\,x$

Aufgabe P 71. *Konvergenz uneigentlicher Integrale*

Untersuchen Sie, ob die folgenden Integrale konvergieren.

(a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{(10+\cos x)\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}\,x$ **(c)** $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^7}\,\mathrm{d}\,x$

(b) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{(10+\cos x)\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}\,x$ **(d)** $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{\mathrm{e}^x-\cos x}\,\mathrm{d}\,x$

Aufgabe P 72. *Flächen*

Bestimmen Sie die Fläche der durch die Ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ begrenzten Figur.

(a) Benutzen Sie die Symmetrien der Ellipse, um die Fläche als Summe von gleichen Teilen darzustellen.

(b) Lösen Sie die Gleichung der Ellipse nach y auf.

(c) Integrieren Sie die gefundene Funktion $y=f(x)$, um die Fläche zu bestimmen.

Aufgabe P 73. *Integrale und Induktion*

Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle $n\in\mathbb{N}_0$ gilt:

$$\int_0^1 x^n\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}\,x = n! - \frac{n!}{\mathrm{e}}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right).$$

Online-Aufgabe

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 17.06. – 23.06.)
auf folgender Webseite.

`http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test430/`

Im Sommersemester 2006 gab es zwei Scheinklausuren zur HM 2.
Die erste (vom 17.6.2006) bezieht sich auf Stoff, den Sie jetzt dann auch beherrschen sollten.
`http://info.mathematik.uni-stuttgart.de/HM-Stroppel-Material/scheinklausuren/#2005/06`
Nutzen Sie die Möglichkeit, sich selbst zu testen (indem Sie diese Scheinklausur unter klausurähnlichen Bedingungen in der vorgesehenen Zeit von 90 Minuten bearbeiten und dann hinterher an Hand der Musterlösung Ihre Ergebnisse kontrollieren).

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 79. *Flächen*

Bestimmen Sie die Fläche der beschränkten Figur E, die durch Linien begrenzt ist, die den Gleichungen $y^2 = 4x$ bzw. $2x - y = 4$ genügen; d.h. $E := \{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - y \leqq 4, y^2 \leqq 4x \}$.
Hinweis: Machen Sie zuerst eine Skizze von E.

Aufgabe H 80. *Konvergenz uneigentlicher Integrale*

Untersuchen Sie, ob die folgenden Integrale konvergieren.

(a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^5 + 7}{\sqrt[3]{x^{16} + 2}} \,\mathrm{d}\,x$ **(b)** $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^{x^2}} \,\mathrm{d}\,x$ **(c)** $\displaystyle\int_0^{\pi} \ln(\sin x) \,\mathrm{d}\,x$

Aufgabe H 81. *Uneigentliche Integrale*

Bestimmen Sie, falls möglich, die folgenden uneigentlichen Integrale:

(a) $\displaystyle\int_1^{3} \frac{1}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} \,\mathrm{d}\,x$ **(c)** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{e}^{-\tan x}}{(\cos x)^2} \,\mathrm{d}\,x$

(b) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\,x}{x^2 + 4x + 3}$ **(d)** $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cot x}{(\sin x)(2 - \frac{1}{\sin x})} \,\mathrm{d}\,x$

Aufgabe H 82. *Uneigentliche Integrale*

Bestimmen Sie, falls möglich, die folgenden uneigentlichen Integrale:

(a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x \,\mathrm{d}\,x$ **(b)** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + (x-2)^2} \,\mathrm{d}\,x$ **(c)** $\displaystyle\int_2^{3} x \ln(x-2) \,\mathrm{d}\,x$

Frischhaltebox

Aufgabe H 83. *Konvergenzradius*

Bestimmen Sie die Konvergenzradien der Potenzreihen.

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!} (3x-1)^n$ **(c)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{\mathrm{e}^n\, n!} (x-2)^n$

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^{3n}$ **(d)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+\mathrm{i})^n}{n\, 3^n} x^n$

T. Holicki, R. Schmähl,
A. Zvonareva

19. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 2

Sommersemester 2021

M. Stroppel

Präsenzübungen

Aufgabe P 74. *Integral-Vergleichskriterium, Grenzwertkriterium*

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

(a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^3}$ **(b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{1}{n}}{n}$ **(c)** $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n^2+1}{n^3-n^2}$

Aufgabe P 75. *Integration von Potenzreihen, geschlossener Ausdruck*

Wir betrachten die Funktion $f\colon (-\rho,\rho) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}$.

Dabei ist ρ der Konvergenzradius der verwendeten Potenzreihe.

(a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius ρ der Potenzreihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}$.

(b) Beschreiben Sie eine Stammfunktion F von f durch eine Potenzreihe.

(c) Bestimmen Sie einen geschlossenen Ausdruck für $F(x)$.

(d) Bestimmen Sie einen geschlossenen Ausdruck für $f(x)$.

(e) Berechnen Sie den Wert der Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{4^n}$.

Aufgabe P 76. *Stetigkeit für Funktionen mehrerer Veränderlicher*

Gegeben ist die Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \dfrac{x^2}{x^2+(x-y)^2}$.

Dabei sei D die Menge aller Paare reeller Zahlen, für die der Funktionsterm definiert ist.

(a) Bestimmen Sie D.

(b) Ist f in $\binom{0}{0}$ stetig fortsetzbar?

(c) Skizzieren Sie die Niveaulinien zu den Niveaus $c = \frac{1}{2}$ und $c = 1$.

Aufgabe P 77. *Folgen in* $\mathbb{R}^n$

Untersuchen Sie die folgenden Folgen in $\mathbb{R}^n$ auf Konvergenz. Berechnen Sie die Grenzwerte, falls sie existieren.

(a) $a_k = \left(\left(\dfrac{1}{\sqrt{k}}\right)^{\sin\left(\frac{\pi k}{2}\right)}, \dfrac{k^3}{k!} + 3, \sin\left(\dfrac{1}{k}\right) \right)^\intercal$

(b) $a_k = \left(\dfrac{\sqrt{2k+1}}{\sqrt{k}}, \dfrac{k+1}{k+7} \right)^\intercal$

Online-Aufgabe

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 24.06. – 30.06.) auf folgender Webseite.

`http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/`

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 84. *Integral-Vergleichskriterium*

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

(a) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^2}$ **(b)** $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-\ln(n)}$ **(c)** $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt[3]{n}}$

Aufgabe H 85. *Geschlossener Ausdruck*

Gegeben ist die Funktion $f\colon (-\rho,\rho) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

Dabei sei ρ der Konvergenzradius der verwendeten Potenzreihe.

(a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius ρ der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

(b) Bestimmen Sie einen geschlossenen Ausdruck für $f'(x)$.

(c) Bestimmen Sie einen geschlossenen Ausdruck für $f(x)$.

Aufgabe H 86. *Stetigkeit für Funktionen mehrerer Veränderlicher*

Gegeben ist die Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \frac{x^2+y^2}{\sqrt{\sin(x^2+y^2)}}$.

Dabei sei D die Menge aller Paare reeller Zahlen, für die der Funktionsterm definiert ist.

(a) Bestimmen Sie D.

(b) Skizzieren Sie den Schnitt des Definitionsbereichs D mit der Menge $[-4,4] \times [-4,4]$.

(c) Ist f in $\binom{0}{0}$ stetig fortsetzbar?

Aufgabe H 87. *Funktionen mehrerer Veränderlicher*

Gegeben ist die Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \frac{x \sin x}{y}$.

Dabei sei D die Menge aller Paare reeller Zahlen, für die der Funktionsterm definiert ist.

(a) Bestimmen Sie D.

(b) Skizzieren Sie die Niveaulinie zum Niveau $c = 1$ für $x \in [-4\pi, 4\pi]$.

(c) Finden Sie eine Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^2$ mit $\lim_{n\to\infty} b_n = \binom{0}{0}$ und $\lim_{n\to\infty} f(b_n) = 0$.

(d) Finden Sie eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^2$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = \binom{0}{0}$ und $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = +\infty$.

Frischhaltebox

Aufgabe H 88. *Grenzwerte*

Berechnen Sie jeweils den Grenzwert $\lim_{x\to 0} f(x)$, und entscheiden Sie, ob die Funktion in 0 stetig fortsetzbar ist.

(a) $f\colon (-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$

(b) $f\colon [-1,0) \cup (0,1] \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt[3]{1+x} - 2\sqrt[4]{1-x}}{x}$

T. Holicki, R. Schmähl, A. Zvonareva

20. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 2

Sommersemester 2021

M. Stroppel

Präsenzübungen

Aufgabe P 78. *(Richtungs-)Ableitungen*

Sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right) \mapsto x_1^2 x_3 + x_2 x_3^2$.

(a) Geben Sie $\operatorname{grad} f$ an.

(b) Bestimmen Sie für $a := \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $v := \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ und $w := \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$ die Ableitungen $\partial_v f(a)$ und $\partial_w f(a)$ direkt mit Hilfe der Definition 4.3.11, ohne Satz 4.3.12 zu benutzen.

Aufgabe P 79. *Gradienten*

Bestimmen Sie die Gradienten der durch die folgenden Funktionsterme gegebenen reellwertigen Funktionen.

(a) $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \left(x_1 - x_2^2\right)^3$

(b) $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1^3 \cdot \left(1 + x_2^2\right)$

(c) $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \exp\left(\dfrac{x_1 + x_2}{x_3^2 + 1}\right)$

(d) $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{cases} x_1^2 x_3 + x_2 \cdot \dfrac{\sin(x_3)}{x_3} & , x_3 \neq 0 \\ x_2 & , x_3 = 0 \end{cases}$

Aufgabe P 80. *Konvexe Mengen*

Skizzieren Sie die folgenden Mengen und untersuchen Sie diese auf Konvexität:

(a) $A := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y \geqq x(x-1) \right\}$

(b) $B := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{matrix} |xy| \leqq 1, \\ \max\left(|x|, |y|\right) \leqq 2 \end{matrix} \right\}$

(c) $C := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; |x| \leqq -y \leqq 2 \right\}$

(d) $D := A \cap B, \quad E := A \cap C.$

Aufgabe P 81. *Partielle Differenzierbarkeit*

Gegeben sei die Abbildung

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{cases} x \ln\left(x^2\right) \cdot |y| & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} .$$

(a) Für welche Stellen in $\mathbb{R}^2$ existiert $\frac{\partial}{\partial x} f$?

(b) Für welche Stellen in $\mathbb{R}^2$ existiert $\frac{\partial}{\partial y} f$?

(c) Bestimmen Sie $\frac{\partial}{\partial x} f$ und $\frac{\partial}{\partial y} f$ an den Stellen, an denen diese partiellen Ableitungen existieren.
Verwenden Sie hierbei der Einfachheit halber die Funktion $\operatorname{sig}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon r \mapsto \left\{\begin{smallmatrix} 1 & ,r>0 \\ 0 & ,r=0 \\ -1 & ,r<0 \end{smallmatrix}\right.$.

(d) Für welche Stellen $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ ist $\nabla f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ definert?

Online-Aufgabe

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 01.07. – 07.07.) auf folgender Webseite.

`http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test430/`

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 89. *Richtungsableitungen*

Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : x \mapsto x^\intercal A x$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie für $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $w = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ die Ableitungen $\partial_v f(x)$, $\partial_w f(x)$ längs v beziehungsweise w in Abhängigkeit von x.

(b) Bestimmen Sie die Richtungsableitung $\partial_{\tilde{v}} f(x)$ für $\tilde{v} := \frac{v}{|v|}$.

(c) Bestimmen Sie $\operatorname{grad} f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe H 90. *Partielle und totale Differenzierbarkeit*

Betrachten Sie die Funktion $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{cases} \exp\left(\frac{x^3 - xy}{x^2+y^2}\right) & , \binom{x}{y} \neq \binom{0}{0} \\ 1 & , \binom{x}{y} = \binom{0}{0} \end{cases}$

(a) Zeigen Sie, dass die partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x} f$, $\frac{\partial}{\partial y} f$ an der Stelle $\binom{0}{0}$ existieren.

(b) Ist f in $\binom{0}{0}$ stetig? Ist f an dieser Stelle total differenzierbar?

(c) Geben Sie $\nabla f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ an.

Aufgabe H 91. *Schmiegquadriken*

Gegeben seien die Stellen $P_1 = \binom{0}{0}$, $P_2 = \binom{\pi/4}{0}$ sowie die Funktion

$$f \colon [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi] \to \mathbb{R} \colon x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \cos(x_1)\sin(x_2).$$

(Ein um $\frac{\pi}{2}$ in x_2-Richtung verschobenes Modell finden Sie unter https://info.mathematik.uni-stuttgart.de/HM-Stroppel-Material/3D/05/.)

(a) Bestimmen Sie $T_2(f, x, P_1)$ und $T_2(f, x, P_2)$.

(b) Bestimmen Sie den Typ von $\tilde{P} := \left(\frac{\pi}{4}, 0, f\left(\binom{\pi/4}{0}\right)\right)$ gemäß 4.4.17.

Aufgabe H 92. *parameterabhängige Funktion*

Gegeben seien die von dem Parameter $t \in \mathbb{R}$ abhängige Menge $M_t := \{\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid ty < 1\}$, die Funktion $f_t \colon M_t \to \mathbb{R} \colon \binom{x}{y} \mapsto \frac{x^3}{1+y(y-t)}$ und die Stelle $a = \binom{1}{0} \in M_t$.

(a) Bestimmen Sie $\nabla f_t \binom{x}{y}$ für $\binom{x}{y} \in M_t$.

(b) Bestimmen Sie $\mathrm{H} f_t \binom{x}{y}$ für $\binom{x}{y} \in M_t$.

(c) Bestimmen Sie $T_2\left(f_t, \binom{x}{y}, a\right)$ sowie $T_3\left(f_0, \binom{x}{y}, a\right)$.

Frischhaltebox

Aufgabe H 93. *Eigenwerte und Eigenvektoren*

Gegeben seien die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A.

(b) Bestimmen Sie eine Basis von $\mathbb{R}^2$ aus Eigenvektoren von A.

(c) Bestimmen Sie die Eigenwerte von B.

(d) Bestimmen Sie eine Basis von $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von B.

T. Holicki, R. Schmähl,
A. Zvonareva

21. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 2

Sommersemester 2021

M. Stroppel

Präsenzübungen

Aufgabe P 82. *Kritische Stellen*

Geben Sie für die durch die folgenden Terme gegebenen Funktionen jeweils die kritischen Stellen an und entscheiden Sie, ob sich dort Minima, Maxima oder Sattelpunkte befinden.

(a) $f\left(\begin{smallmatrix} x\\ y\end{smallmatrix}\right) = x^2 - 2(x-y^2) - 8y + 11$

(b) $f\left(\begin{smallmatrix} x_1\\ x_2\end{smallmatrix}\right) = x_1^3 + 2x_1x_2^2 - 4x_2$

(c) $f\left(\begin{smallmatrix} x\\ y\\ z\end{smallmatrix}\right) = x^4 + zx^2 - 3yx + zx + z^4$

(d) $f\left(\begin{smallmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{smallmatrix}\right) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + x_1x_2x_3$

Aufgabe P 83. *Extrema*

Betrachten Sie die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : \left(\begin{smallmatrix} x_1\\ x_2\end{smallmatrix}\right) \mapsto (x_2 - x_1)(x_2 + x_1^2)$.

(a) Skizzieren Sie die Niveaumenge von f zum Niveau 0 sowie die Vorzeichenverteilung.

(b) Bestimmen Sie alle kritischen Stellen von f.

(c) Entscheiden Sie mit Hilfe von (a), bei welchen es sich um lokale Extremalstellen handelt.

(d) Bestätigen Sie Ihr Ergebnis rechnerisch.

Aufgabe P 84. *Lagrange-Multiplikatoren*

Gegeben seien die Funktionen

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : \left(\begin{smallmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{smallmatrix}\right) \mapsto x_1^2 - x_2^2 + x_3^2, \quad h\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : \left(\begin{smallmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{smallmatrix}\right) \mapsto x_1^2 + x_2^2 - 2$$

und die Menge $D = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + 4x_2^2 + x_3(x_3 - 1) = 0\}$.
Bestimmen Sie für folgende Funktionen die kritischen Stellen einschließlich der zugehörigen Lagrange-Multiplikatoren:

(a) $f|_D$ **(b)** $h|_D$ **(c)** $(f+h)|_D$

Aufgabe P 85. *3D-Modell*

Gegeben seien die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : \left(\begin{smallmatrix} x\\ y\end{smallmatrix}\right) \mapsto xy^2$.
Das zugehörige 3D-Modell finden Sie hier:
https://info.mathematik.uni-stuttgart.de/HM-Stroppel-Material/3D/06/.

(a) Weisen Sie nach, dass im Ursprung ein Sattelpunkt vorliegt.

(b) Bestimmen Sie $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ so, dass die Niveaumenge $D = \{\left(\begin{smallmatrix} x\\ y\end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \mid g\left(\begin{smallmatrix} x\\ y\end{smallmatrix}\right) = 0\}$ dem roten Kreis entspricht.

(c) Bestimmen Sie alle kritischen Stellen von $f|_D$ inklusive Lagrange-Multiplikator. Bei welchen liegen Extrema vor?

(d) Finden Sie die Extremalstellen von $f|_D$, in dem Sie D als Bild einer geeigneten Parametrisierung $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ beschreiben.

Online-Aufgabe

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 08.07. – 14.07.) auf folgender Webseite.

`http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/`

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 94. *3D-Modell*

Wir betrachten $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \mapsto x(x-3)(x+3)(y-2)(y+2)(x^2+2y^2-4)$ sowie die Mengen $A := \left\{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2+2y^2-4 \leqq 0\right\}$ und $B := [-3,3] \times [-2,2]$. Die Elemente von $N = \left\{ \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{39}{10} - \frac{3\sqrt{89}}{10}} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{39}{10} - \frac{3\sqrt{89}}{10}} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{39}{10} + \frac{3\sqrt{89}}{10}} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{39}{10} + \frac{3\sqrt{89}}{10}} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ sind kritische Stellen der Funktion f (es gibt aber offensichtlich noch weitere). Ein 3D-Modell, mit welchem Sie argumentieren dürfen (und sollen), finden Sie hier: https://info.mathematik.uni-stuttgart.de/HM-Stroppel-Material/3D/09/.

(a) Identifizieren Sie A im Modell (beschreiben Sie diese Menge in Worten). Genau vier kritische Stellen der Funktion f sind Elemente von A. Benutzen Sie N und die Nullstellenmenge von f, um diese kritischen Stellen zu finden.

(b) Bestimmen Sie die relativen Extremalstellen der Einschränkung $f|_A$ von f auf A. Entscheiden Sie auch, ob an diesen Stellen relative Maxima oder relative Minima vorliegen.

(c) Welche der in (b) bestimmten Stellen sind relative Extremalstellen für $f|_B$?

Aufgabe H 95. *Extrema unter Nebenbedingungen*

Gegeben seien die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \mapsto (x-2)(x+2)y(y-2)$ sowie die Mengen $A := \{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+(y-1)^2 = 1\}$ und $B := \{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \mid x+2y-2 = 0\}$.

(a) Bestimmen Sie alle lokalen Extrema von $f|_A$ sowie deren Typ.

(b) Bestimmen Sie alle lokalen Extrema von $f|_B$ sowie deren Typ.

Aufgabe H 96. *Parameterabhängige Funktion*

Gegeben seien der Parameter $t \in \mathbb{R}$ sowie $f_t\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x^\intercal \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 2 & 0 \\ t & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) x + \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 2 \end{smallmatrix}\right) x + 42$.

(a) Bestimmen Sie $\nabla f_t(x)$ und $\mathrm{H}f_t(x)$. **(b)** Für welche $t \in \mathbb{R}$ hat f_t kritische Stellen?

(c) Für welche $t \in \mathbb{R}$ handelt es sich bei diesen um lokale Extremalstellen?

Aufgabe H 97. *Lagrange-Multiplikatoren*

Gegeben seien $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x_1 - x_2^2$ und $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \left(x_1^2+x_2^2\right)^2 - x_1^3 + x_2^4$.

(a) Bestimmen Sie alle kritischen Stellen $\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2$ für f.

(b) Bestimmen Sie alle kritischen Stellen sowie die zugehörigen Lagrange-Multiplikatoren von $f|_D$, wobei $D = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid g(x) = 0\}$ die Niveaumenge von g zum Niveau 0 ist.

(c) Weisen Sie nach, dass bei $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ eine Extremalstelle von $f|_D$ ohne Lagrange-Multiplikator vorliegt. Warum widerspricht dies nicht Satz 4.6.3?

Hinweis: Man kann $g\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) = 0$ nach x_2^2 auflösen.

Frischhaltebox

Aufgabe H 98.

Skizzieren Sie folgende Mengen:

(a) $A := \{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \mid \langle \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \mid \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ -2 \end{smallmatrix}\right) \rangle \leqq 1\}$

(b) $B := \{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2+(x-1)^2 \leqq 4$ und $y^2+(x+1)^2 \leqq 4\}$

(c) $C := \{z \in \mathbb{C} \smallsetminus \{0\} \mid \max\left(|z|, \frac{1}{|z|}\right) < 2\}$

(d) $D := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z)^2 \geqq \operatorname{Im}(z) \geqq 2\left(\operatorname{Re}(z^2) + \operatorname{Im}(z)^2\right) - 1\}$

Präsenzübungen

Aufgabe P 86. *Konvexe Mengen*

Skizzieren Sie die folgenden Mengen und entscheiden Sie, ob diese konvex sind.

(a) $A = \{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \mid |4x - y| \geqq 1$ oder $|x + y| \geqq 1\}$

(b) $B = \{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\} \mid \operatorname{Re}((x + \mathrm{i}y)^2) = 0\}$

(c) $C = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2(x_2 - 2) - 4x_3 \leqq 0\}$

(d) $D = \mathbb{R}^3 \smallsetminus C$

Aufgabe P 87. *Differentiation im Mehrdimensionalen*

Gegeben seien

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2 \\ x_1 - x_2 \\ (x_3 - 2)^2 \end{pmatrix}, \qquad g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3\colon t \mapsto \begin{pmatrix} \ln(1 + t^2) \\ \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix},$$

$$h\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \exp(x_1) + x_2^2 + x_3^2.$$

Bestimmen Sie

(a) $\mathrm{J}(h \circ f)(x)$ und $\nabla(h \circ f)(x)$.

(b) $\mathrm{J}(g \circ h)(x)$ und $\mathrm{J}(h \circ g)(t)$.

(c) $\mathrm{J}(f \circ g)(t)$.

Aufgabe P 88. *Jacobimatrix*

Gegeben seien die Mengen $M_1 := \{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \mid |x + y| \geqq 2$ und $|x - y| \geqq 2\}$, $M_2 := \{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \mid |x + y| \geqq 2 > |x - y|\}$ und $M_3 := \{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \mid |x + y| < 2 \leqq |x - y|\}$ sowie die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{cases} ((x + y)^2 - 4)^2 + ((x - y)^2 - 4)^2 & , \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in M_1 \\ ((x + y)^2 - 4)^2 & , \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in M_2 \\ ((x - y)^2 - 4)^2 & , \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in M_3 \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}.$$

(a) Skizzieren Sie die Mengen M_1, M_2 und M_3.

(b) Bestimmen Sie die Nullstellenmenge von f.

(c) Bestimmen Sie $\mathrm{J}f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$.

Aufgabe P 89. *Tangenten und Niveaulinien*

Gegeben sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 10x_2$.

(a) Bestimmen $\nabla f(x)$.

(b) Skizzieren Sie mit (a) die Tangenten an die Niveaumenge $E = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid f(x) = 0\}$ in den Punkten $a_1 = \left(\begin{smallmatrix} -12 \\ 9 \end{smallmatrix}\right)$, $a_2 = \left(\begin{smallmatrix} -10 \\ 10 \end{smallmatrix}\right)$, $a_3 = \left(\begin{smallmatrix} -4 \\ 8 \end{smallmatrix}\right)$, $a_4 = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$, $a_5 = \left(\begin{smallmatrix} -6 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$, $a_6 = \left(\begin{smallmatrix} -10 \\ 5 \end{smallmatrix}\right)$ sowie den Punkten, die die Ellipse mit den Achsen gemeinsam hat.

(c) Fertigen Sie mit Hilfe von (b) eine grobe Skizze der Ellipse E an.

Online-Aufgabe

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 15.07. – 21.07.) auf folgender Webseite.

`http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test430/`

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 99. *Tangenten und Lagrange-Multiplikatoren*

Gegeben seien $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \binom{x}{y} \mapsto \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + 4y^2$, $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \binom{x}{y} \mapsto x^2+x+y^2$ und $D = \left\{\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid g\binom{x}{y} = 15/4\right\}$.

(a) Bestimmen Sie alle kritischen Stellen der Einschränkung $f|_D$.

(b) Skizzieren Sie D sowie die Tangenten an D in den in (a) bestimmten kritischen Stellen.

(c) Skizzieren Sie die Gradienten ∇f in den kritischen Stellen und deuten Sie Satz 4.6.3 geometrisch.

Aufgabe H 100. *Parameterabhängige Funktionen*

Betrachten Sie für reelles $\alpha > 0$ die durch $f_\alpha\colon \begin{pmatrix} x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1^2\cdot x_3^\alpha + x_2\\ x_2x_3\\ x_3-\alpha x_2^2\end{pmatrix}$ gegebene Funktion.

(a) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von α die Menge $D_\alpha \subseteq \mathbb{R}^3$ aller Stellen, an denen $\mathrm{J}f_\alpha$ existiert.

(b) Geben Sie die Abbildung $\mathrm{J}f_\alpha\colon D_\alpha \to \mathbb{R}^{3\times 3}$ an.

(c) Betrachten Sie nun die Abbildung $g\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^3\colon \alpha \mapsto f_\alpha\begin{pmatrix} x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ mit $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ und $x_3 \in \mathbb{R}^+$ als Parametern. Bestimmen Sie g'.

Aufgabe H 101. *Rechenregeln der Differentiation*

Seien $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon x \mapsto \begin{pmatrix} x_1x_2^2\\ x_2-x_3^2+1\\ x_1x_2x_3\end{pmatrix}$ und $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \exp\left(\frac{x_1+x_3}{1+x_2^2}\right)$ gegeben.

(a) Bestimmen Sie $\mathrm{J}f\,(x)$.

(b) Bestimmen Sie $\mathrm{J}g\,(x)$.

(c) Bestimmen Sie $\mathrm{J}(g\circ f)\,(x)$.

(d) Bestimmen Sie $\mathrm{J}(g\cdot f)\,(x)$.

Aufgabe H 102. *Lagrange-Methode vs. Parametrisierung*

Gegeben seien $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon x \mapsto -\dfrac{1}{2}x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2$, $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2\colon x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2\\ 2 & 2 & 3\end{pmatrix} x$ und $D = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \mid g(x) = \binom{2}{4}\right\}$.

(a) Schreiben Sie die durch die Methode nach Lagrange gegebenen Bedingungen als ein Gleichungssystem in den Variablen x_1, x_2, x_3, λ_1 und λ_2.

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe des Gleichungssystems aus (a) alle kritischen Stellen von $f|_D$.

(c) Parametrisieren Sie D durch eine Funktion $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3\colon \mu \mapsto h(\mu)$.

(d) Bestimmen Sie die kritischen Stellen als Lösung von $\mathrm{J}(f\circ h)\,(\mu) = 0$.

Zusatz: Können Sie den Typ der gefundenen kritischen Stellen entscheiden?

Frischhaltebox

Aufgabe H 103.

Geben Sie für die folgenden Potenzreihen jeweils einen geschlossenen Ausdruck an:

(a) $f_1(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} 2\dfrac{\pi^{2k+1}x^{2k}}{(2k)!}$

(b) $f_2(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\pi^{2k+1}x^{2k}}{(2k-1)!}$

(c) $f_3(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\sum\limits_{j=0}^{k} \dfrac{x^{j-2}}{j!(k-j)!}$

(d) $f_4(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} 2^{-k+1}x^{k+42}$

Hinweis: $\cosh(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!}$

T. Holicki, R. Schmähl,
A. Zvonareva

23. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 2

Sommersemester 2021

M. Stroppel

Präsenzübungen

Aufgabe P 90. *Zusammenhang*

Seien $A = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + (x_3 - 1)^2 \leqq 1\}$ und $B = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3 - 2 < 0\}$ gegeben.

(a) Skizzieren Sie die Querschnitte von A und B in der x_1-x_3-Ebene.

(b) Skizzieren Sie Querschnitte von A und B in der x_2-x_3-Ebene.

(c) Ist $A \cup B$ einfach zusammenhängend?

(d) Ist $A \smallsetminus B$ einfach zusammenhängend?
Trifft die Antwort auch auf $A \smallsetminus \bar{B}$ zu?

Ein 3D-Modell, welches die Situation in (c) und (d) veranschaulicht, finden Sie unter https://info.mathematik.uni-stuttgart.de/HM-Stroppel-Material/ZP/.

Aufgabe P 91. *Potentiale*

Bestimmen Sie Potentialfunktionen zu den gegebenen Vektorfeldern.

(a) $g_1\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \mapsto \begin{pmatrix} 2x-y^2 \\ -2xy \end{pmatrix}$

(b) $g_2\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon x \mapsto (x_1^2 + x_2)\left(\begin{smallmatrix} 4x_1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$

(c) $g_3\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} z\mathrm{e}^{x-y^2} \\ -2zy\mathrm{e}^{x-y^2} \\ \mathrm{e}^{x-y^2}+z \end{pmatrix}$

(d) $g_4\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x+y-z \\ x+z^2-z \\ 2yz-y-x \end{pmatrix}$

Aufgabe P 92. *Divergenz, Rotation, Potentiale*

Entscheiden Sie, welche der folgenden Vektorfelder wirbel- und/oder quellenfrei sind. Geben Sie ferner jeweils ein Potential für die wirbelfreien Felder an.

(a) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon x \mapsto \begin{pmatrix} x_1+x_2x_3 \\ x_1x_2^2 \\ x_3-x_2+x_1 \end{pmatrix}$

(b) $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon x \mapsto \begin{pmatrix} x_1+\cos(x_1)\sin(x_1) \\ 2(\sin(x_1))^2 \cdot x_2 \\ -2x_3 \end{pmatrix}$

(c) $h\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon x \mapsto \begin{pmatrix} \frac{x_1^2-x_3^2}{2}+x_1 \\ -x_2 \\ -x_1x_3 \end{pmatrix}$

(d) $k\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon x \mapsto \dfrac{1}{1+|x|^2}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

Aufgabe P 93. *Nutzen Sie Ihr Potential*

Geben seien $g\colon \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \neq 0\} \to \mathbb{R}^2\colon x \mapsto \begin{pmatrix} 1/x_2 \\ -x_1/x_2^2 \end{pmatrix}$ sowie
$C\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+\colon t \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{1}{t^2}}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \mathrm{e}^{-t} \end{smallmatrix}\right)$.

(a) Bestimmen Sie $f\colon \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \neq 0\} \to \mathbb{R}$ mit $\nabla f = g$.

(b) Bestimmen Sie das Kurvenintegral $\int_K g(x) \bullet \mathrm{d}\,x$ für die durch die Einschränkung $C|_{[\frac{1}{2},1]}$ parametrisierte Kurve K.

(c) Bestimmen Sie $\displaystyle\int_0^{\ln(1139)} (f \circ C)(t)\,\mathrm{d}\,t$.

Zusatz: Warum ist es hier nicht sinnvoll, das Kurvenintegral mit Hilfe einer Parametrisierung zu berechnen?

Online-Aufgabe

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 22.07. – 28.07.)
auf folgender Webseite.

`http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/`

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 104. *Kurvenintegrale: Parametrisierung vs. Potential*

Gegeben seien $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x_1^2 x_3 - (x_2+x_3)^2$, $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x_3 \cdot \mathrm{e}^{x_1 - x_2}$ sowie die durch $C\colon [0,4] \to \mathbb{R}^3\colon t \mapsto \begin{pmatrix} (t-1)^2 \\ t \\ \mathrm{e}^t \end{pmatrix}$ parametrisierte Kurve. Bestimmen Sie $\int_K \nabla f(x) \bullet \mathrm{d}\,x$ und $\int_K \nabla g(x) \bullet \mathrm{d}\,x$

(a) gemäß Definition 5.3.1.

(b) mittels Satz 5.3.10.

Aufgabe H 105. *Parametrisierungen von Kurven, Kurvenlänge*

Gegeben seien $a = \binom{-1}{2}$, das Vektorfeld $g\colon \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{a\} \to \mathbb{R}^2\colon x \mapsto \dfrac{1}{2\pi\,|x-a|^4} \begin{pmatrix} -x_2+2 \\ x_1+1 \end{pmatrix}$ sowie die durch $C\colon [0,\pi] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \sqrt{2} \begin{pmatrix} \cos(2t) - \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin(2t) + \sqrt{2} \end{pmatrix}$ parametrisierte Kurve K.

(a) Skizzieren Sie K.

(b) Berechnen Sie die Kurvenlänge $L(K)$.

(c) Betrachten Sie jetzt den Weg $B\colon [0,4\pi] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \sqrt{2} \begin{pmatrix} \cos(2t) - \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin(2t) + \sqrt{2} \end{pmatrix}$.
Berechnen Sie $\int_0^{4\pi} |B'(t)|\,\mathrm{d}\,t$. Warum ergibt sich nicht $L(K)$?

(d) Berechnen Sie das Umlaufintegral $I = \oint_K g(x) \bullet \mathrm{d}\,x$.

Aufgabe H 106. *Kurvenintegrale skalarwertiger Funktionen*

Gegeben sei die durch $C\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3\colon t \mapsto \begin{pmatrix} 3\cos(t) - 2\sin(t) \\ \frac{5\sqrt{3}}{2}\sin(t) \\ 4\cos(t) + \frac{3}{2}\sin(t) \end{pmatrix}$ parametrisierte Kurve K.

(a) Bestimmen Sie die Schnittpunkte von K mit den Koordinatenebenen.

(b) Zeigen Sie, dass $C|_{[0,2\pi)}$ injektiv ist, bestimmen Sie C' sowie die Länge von K.

(c) Bestimmen Sie das Kurvenintegral $\int_K f(s)\,\mathrm{d}\,s$ für $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon x \mapsto -\frac{1}{125}\left(x_1^2 + x_2^2 - x_3^2\right)$.

Aufgabe H 107. *Kurvenintegrale und Potentiale mit Parameter*

Gegeben sei $g_\beta\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \binom{x_1}{x_2} \mapsto \begin{pmatrix} \beta x_1 \cos(x_2) \\ x_1^2 \sin(x_2) \end{pmatrix}$ mit $\beta \in \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie $\mathrm{J}g_\beta \binom{x_1}{x_2}$ und $\operatorname{rot} g_\beta \binom{x_1}{x_2}$. Für welche $\beta \in \mathbb{R}$ hat g_β ein Potential?

(b) Berechnen Sie $\int_{K_1} g_\beta(x) \bullet \mathrm{d}\,x$ und $\int_{K_2} g_\beta(x) \bullet \mathrm{d}\,x$ für die beiden durch
$C_1\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \binom{ta+(1-t)}{2}$ bzw. $C_2\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \binom{a}{tb+(1-t)2}$
parametrisierten Kurven K_1 (für $a \neq 1$) und K_2 (für $b \neq 2$). Bestimmen Sie hieraus ein Potential von g_β für jedes $\beta \in \mathbb{R}$, für das ein solches existiert.

Frischhaltebox

Aufgabe H 108. *Ebenen*

Gegeben seien die Punkte $A = (1,2,3)$, $B = (3,2,1)$, $C = (1,0,4)$ und $D = (4,2,-2)$.
Sei E_1 die durch A, B und C gehende Ebene, E_2 die Ebene durch B, C, D.
Bestimmen Sie

(a) einen Normalenvektor von E_1.

(b) die Hesse-Normalform von E_1.

(c) einen Normalenvektor von E_2.

(d) die Hesse-Normalform von E_2.

Die folgenden Aufgaben sind Zusatzaufgaben zur freiwilligen Übung und gehen *nicht* in die Bewertung mit ein. Eine Bearbeitung als Vorbereitung auf die Klausur ist dennoch ratsam. Diese Aufgaben stammen in dieser bzw. ähnlicher Form aus Prüfungen früherer Semester.

Aufgabe H 109. *Verständnisfragen zu linearer Algebra und Vektorfeldern*

(a) Sei $g_1\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine Isometrie. Zeigen Sie, dass g_1 genau dann quellen- **und** wirbelfrei ist, wenn g_1 uneigentlich ist.

(b) Das Vektorfeld $g_2\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei stetig differenzierbar, wobei $\mathrm{J}g_2\,(0)$ die Eigenwerte $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \mathrm{i}$ und $\lambda_3 = -\mathrm{i}$ habe. Hat g_2 ein Potential?

(c) Sei $g_3\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld. Es seien $C_1\colon [-1,1] \to \mathbb{R}^3$, $C_2\colon [-2,2] \to \mathbb{R}^3$ und $C_3\colon [-2,4] \to \mathbb{R}^3$ reguläre Parametrisierungen mit den Eigenschaften

$$C_1(0) = C_2(0) = C_3(0) = \left(\begin{smallmatrix}1\\0\\4\end{smallmatrix}\right),$$
$$(g_3 \circ C_1)'(0) = 2C_1'(0), \quad (g_3 \circ C_2)'(0) = -5C_2'(0), \quad (g_3 \circ C_3)'(0) = C_3'(0).$$

Bestimmen Sie $\operatorname{div} g_3 \left(\begin{smallmatrix}1\\0\\4\end{smallmatrix}\right)$.

Hinweis: Wie hängen Spur und Eigenwerte einer Matrix zusammen?

Aufgabe H 110. *technische Anwendung des Kurvenintegrals einer reellwertigen Funktion*

Durch $C\colon [0,4\pi] \to \mathbb{R}^3\colon t \mapsto \begin{pmatrix} t\cos(t) \\ t\sin(t) \\ t \end{pmatrix}$ sei ein idealisierter Draht D parametrisiert.

Die Massendichte des Drahtes betrage $\rho(C(t)) = \sqrt{\frac{t}{2+t^2}}$.

Berechnen Sie die durch das Kurvenintegral $\displaystyle\int_D \rho(s)\,\mathrm{d}\,s$ gegebene Gesamtmasse des Drahtes.

Aufgabe H 111. *Potential, Parametrisierung, Kurvenintegral*

Gegeben sei das Vektorfeld

$$f\colon \mathbb{R}^2 \smallsetminus \left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\} \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \mapsto \frac{-1}{(x^2+y^2)^{3/2}} \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie ein Potential von f.

(b) Gegeben seien nun die Punkte $P_1 = \left(\begin{smallmatrix}2\\0\end{smallmatrix}\right)$, $P_2 = \left(\begin{smallmatrix}-2\\0\end{smallmatrix}\right)$ und $Q = \left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)$.

(c) Parametrisieren Sie die Ellipse E, die symmetrisch zu den Koordinatenachsen liegt und die Punkte P_1, Q enthält.

(d) Geben Sie eine Parametrisierung für eine Kurve K an, welche vom Startpunkt P_1 zum Endpunkt P_2 über eine Hälfte der Ellipse E läuft und durch Q geht.

(e) Berechnen Sie das Kurvenintegral von f längs K.