A. Barlow, C. Rösinger,
R. Schmähl, S. Smyk

15. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 2

Sommersemester 2022

M. Stroppel

Präsenzübungen

Aufgabe P 55. *Summe einer Reihe*

Berechnen Sie die Summe (also den Wert) der Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ mit $a_n = \begin{cases} \frac{1}{2^n}, & n \text{ gerade} \\ 0, & n \text{ ungerade} \end{cases}.$

Aufgabe P 56. *Konvergenzkriterien für Reihen*

Entscheiden Sie, welche der folgenden Reihen konvergieren.

(a) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{2+(-1)^k}{k!}$ **(b)** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{13}{4k^2+6k}$ **(c)** $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}$ **(d)** $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{k-1}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$

Aufgabe P 57. *Berechnung von Reihenwerten*

Berechnen Sie jeweils den Wert der folgenden Reihen.

(a) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k}$ **(b)** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{3}{4^k}$ **(c)** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ **(d)** $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{3}{(k+1)!}$

Hinweis: Schreiben Sie $\frac{1}{k(k+1)}$ als $\frac{A}{k} + \frac{B}{k+1}$ mit $A, B \in \mathbb{R}$.

Aufgabe P 58. *Konvergenzkriterien für Folgen und Reihen*

Wir betrachten eine reelle Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und konstruieren daraus rekursiv die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_1 = b_1$ und $a_n = a_{n-1} + b_n$ für $n > 1$. Entscheiden Sie für jede der folgenden Eigenschaften, ob diese hinreichend oder notwendig für die Konvergenz von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist. Bestimmen Sie $\lim\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ in den Fällen (i) bzw. (j), falls der jeweilige Grenzwert existiert.

(a) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton. **(b)** $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt. **(c)** $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton und beschränkt.

(d) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge. **(e)** $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge. **(f)** $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge. **(g)** $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergiert.

(h) $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine alternierende Nullfolge. **(i)** $a_n = (0.9)^n$. **(j)** $b_n = (0.9)^n$.

Online-Aufgabe

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 21.04. – 27.04.) auf folgender Webseite (Dieser Link wechselt jede Woche!):

`http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/`

Bitte geben Sie dort zunächst Ihre Matrikelnummer ein.

Die Lösungen sind als ganze Zahlen oder als Dezimalzahlen mit einem Dezimal**punkt** einzugeben. Sonstige Zeichen, wie zum Beispiel Klammern oder Operatoren wie $*$ und $/$, dürfen **nicht** benutzt werden.

Anschließend müssen Sie Ihr **Passwort** für die Onlineübungen eintragen, das Sie per Email an Ihre studentische Adresse (<st$*****$**@stud.uni-stuttgart.de>) erhalten haben.

Innerhalb des Bearbeitungszeitraums können Sie Ihre Eingaben beliebig oft wiederholen, wobei die **letzten** Eingaben gewertet werden. Der Bearbeitungszeitraum endet mittwochs um 24:00 Uhr. Sie erhalten für die Bearbeitung der Online-Aufgabe 0, 1 oder 2.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 71. *Berechnung von Reihenwerten*

Bestimmen Sie den Wert folgender Reihen:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\mathrm{e}}{n!}-\frac{1}{n!\,\mathrm{e}}\right)$ **(b)** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2+6n+9}$ **(c)** $\sum_{k=4}^{\infty}\frac{-1}{(k-2)!\,k}$.

(d) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{(n+1)^4+21n^2+42n+18}}-\frac{1}{\sqrt{n^4+21n^2-3}}\right)$

Hinweis: Teleskopsummen können helfen.

Aufgabe H 72. *Konvergenz von Reihen*

Wir betrachten die Folge $(F_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $F_1 := F_0 := 1$ und $F_n := F_{n-1}+F_{n-2}$ für $n \geqq 2$.

(a) Zeigen Sie $F_5 > \left(\frac{3}{2}\right)^5$ und $F_6 > \left(\frac{3}{2}\right)^6$. **(b)** Folgern Sie $F_n > \left(\frac{3}{2}\right)^n$ für alle $n \geqq 5$.

(c) Konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{F_n}$?

Aufgabe H 73. *Reihenkonvergenz in Abhängigkeit von Parametern*

Gegeben sei die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\cdot 2}{\alpha^k(\alpha-1)^k}$ mit $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$.

Für welche Werte von α konvergiert die Reihe nach dem

(a) Quotientenkriterium? **(b)** Wurzelkriterium?

(c) Wieso **müssen** die entsprechenden Bereiche die selben Randpunkte haben?

(d) Bestimmen Sie den Wert der Reihe für $\alpha = 3$.

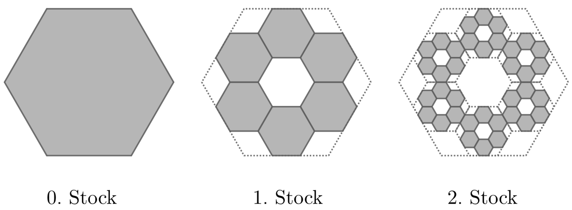
Aufgabe H 74. *Turmbau für Mathematiker*

Wir bauen einen Turm Stockwerk für Stockwerk. Die Grundfläche des EG (Stock 0) ist ein regelmäßiges Sechseck mit Flächeninhalt $A_0 = 1$. Die Grundfläche des nächsten Stocks entsteht, in dem wir 6 gleich große, regelmäßige Sechsecke maximaler Größe in die des zuvor betrachteten Stocks so einschreiben, dass es keine Überlappungen, aber Berührungen gibt. Dieser Schritt wird (unendlich oft) wiederholt, wie für die ersten drei Stockwerke skizziert.

(a) Bestimmen Sie die Anzahl q_n der im Stock n entstehenden Sechsecke.

(b) Bestimmen Sie die Fläche A_n eines im Stock n entstehenden Sechsecks.

(c) Bestimmen Sie das Volumen V des Turmes, falls jeder Stock dieselbe Höhe hat.



Grundrisse der ersten 3 Stockwerke

(d) Bestimmen Sie V, falls jeder Stock halb so hoch wie der vorherige ist. (Die Höhe des EG sei dabei gleich 1.)

Frischhaltebox

Aufgabe H 75. *Orthonormierung*

Gegeben seien $b_1 := (0,4,0,4)^\intercal$, $b_2 := (4,0,-5,0)^\intercal$, $b_3 := (5,-12,4,4)^\intercal \in \mathbb{R}^4$.

Bestimmen Sie eine ONB $F : f_1, f_2, f_3$ mit $\mathrm{L}(f_1) = \mathrm{L}(b_1)$, $\mathrm{L}(f_1,f_2) = \mathrm{L}(b_1,b_2)$ und $\mathrm{L}(f_1,f_2,f_3) = \mathrm{L}(b_1,b_2,b_3)$.

A. Barlow, C. Rösinger,
R. Schmähl, S. Smyk

16. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 2

Sommersemester 2022

M. Stroppel

Präsenzübungen

Aufgabe P 59. *Stetigkeit, ε-δ-Kriterium*

Gegeben sei die Funktion $f\colon [-2,2] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{für } x \in [-2,0] \\ 1-\sin(\pi x) & \text{für } x \in (0,2] \end{cases}$.

(a) Zeichnen Sie den Graphen von f.

(b) Bestimmen Sie für $\varepsilon \in \left\{\frac{3}{2}, 1, \frac{1}{2}\right\}$ jeweils das größte $\delta > 0$, für das gilt $|f(x) - f(0)| < \varepsilon$ für alle $x \in U_\delta(0)$.
Hinweis: Zeichnen Sie einen waagrechten Streifen der Gesamtbreite 2ε mittig um $f(0)$. Konstruieren Sie danach $U_\delta(0)$ mit einem senkrechten Streifen um $x_0 = 0$.

Weitere interessante Beispiele zum ε-δ-Kriterium bietet das interaktive Extra unter https://info.mathematik.uni-stuttgart.de/HM-Stroppel-Material/HTML-Ana/epsilon-delta.html .

Aufgabe P 60. *Stetigkeit*

Gegeben sei die Funktion $f\colon [-3,3] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \begin{cases} x^2+2x & \text{für } x \in [-3,1] \\ -x^2+2x+1 & \text{für } x \in (1,3] \end{cases}$.

(a) Fertigen Sie eine Skizze des Graphen von f an.

(b) Sei $1 > \varepsilon > 0$. Bestimmen Sie ein $\delta > 0$ so, dass $|f(x) - f(-1)| < \varepsilon$ für alle $x \in (-1-\delta, -1+\delta)$. Folgern Sie daraus, dass f in $x_0 = -1$ stetig ist.

(c) Wählen Sie ein $\varepsilon > 0$ und eine Folge (a_n) mit Grenzwert 1 so, dass $|f(a_n) - f(1)| \geqq \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Folgern Sie daraus, dass f in $x_0 = 1$ nicht stetig ist.

Aufgabe P 61. *Grenzwerte und Stetigkeit*

Sei a ein reeller Parameter. Wir betrachten die Funktionen

$$f_a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \begin{cases} ax^3 & \text{für } x \leqq 1 \\ (ax)^2 - 2 & \text{für } x > 1 \end{cases} \quad \text{und} \quad g\colon \mathbb{R} \smallsetminus \{2,4\} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{(x-2)^2(x-4)}{|x^2-6x+8|}.$$

(a) Berechnen Sie $\lim\limits_{x\to 1-0} f_a(x)$ und $\lim\limits_{x\to 1+0} f_a(x)$.
Für welche Werte des Parameters a ist f_a an der Stelle 1 stetig?

(b) Berechnen Sie $g(2-0)$, $g(2+0)$ und $g(4-0)$, $g(4+0)$.
Ist g an der Stelle 2 stetig ergänzbar? Ist g an der Stelle 4 stetig fortsetzbar?

Aufgabe P 62. *Funktionsgrenzwerte*

Untersuchen Sie die folgenden Funktionsgrenzwerte.

(a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^2+3x}{-x+4}$ **(b)** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^2+x-3}{3x^2-4x+1}$ **(c)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \tan\left(\dfrac{\pi x^3}{3x^3+x^2+1}\right)$

(d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x} + \big(\sin(x)\big)^2}{x}$ **(e)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+5} - \sqrt{x^2+3x}\right)$

Online-Aufgabe

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 28.04. – 04.05.) auf folgender Webseite.

`http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test430/`

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 76. *Stetigkeit, ε-δ-Kriterium*

Wir betrachten die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \begin{cases} \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}|x-1| + \frac{1}{2} & \text{für } x \leqq 2 \\ 2 - \sqrt{x-1} & \text{für } x > 2 \end{cases}$.

(a) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion f im Bereich $[-2, 5]$.

(b) Sei eine Fehlerschranke ε mit $1 > \varepsilon > 0$ gegeben.

- **(i)** Finden Sie in Abhängigkeit von ε ein $\delta_1 > 0$ und ein $\delta_2 > 0$ mit $|f(x) - f(1)| < \varepsilon$ für $x \in (1-\delta_1, 1]$ und $|f(x) - f(1)| < \varepsilon$ für $x \in [1, 1+\delta_2)$.
- **(ii)** Sei $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$ für δ_1, δ_2 aus **(i)**. Zeigen Sie $f(U_\delta(1)) \subseteqq U_\varepsilon(f(1))$. Ist f an der Stelle 1 stetig?

(c) Finden Sie ein $\varepsilon > 0$, für welches kein $\delta > 0$ mit $f(U_\delta(2)) \subseteqq U_\varepsilon(f(2))$ existiert. Ist f an der Stelle 2 stetig?

Aufgabe H 77. *Stetigkeit und Folgen*

Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \begin{cases} x \cos\left(\frac{1}{x^3}\right) - \sin\left(\frac{1}{x^3}\right) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$.

(a) Wir betrachten $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2\pi n}}$. Berechnen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ und $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)$.

(b) Finden Sie eine Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ sowie $\lim\limits_{n\to\infty} f(b_n) = -1$.

(c) Finden Sie eine Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$ so, dass $(f(c_n))_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert.

(d) Ist f stetig im Punkt $x_0 = 0$? Entscheiden Sie dies unter Verwendung von 1.10.3.

Aufgabe H 78. *Einseitige Funktionsgrenzwerte*

Gegeben sei die Abbildung $f\colon \mathbb{R} \smallsetminus \{-2,-1,1\} \to \mathbb{R}\colon\ x \mapsto \dfrac{|x^3+3x^2-4|}{(x^2+3x+2)(x^2-1)}$.

(a) Ist f stetig?

(b) Bestimmen Sie jeweils die links- und rechtsseitigen Grenzwerte an den Lücken des Definitionsbereiches. An welchen Stellen ist f stetig fortsetzbar?

(c) Skizzieren Sie den Graphen von f.

Aufgabe H 79. *Funktionsgrenzwerte*

Untersuchen Sie die folgenden Funktionsgrenzwerte.

(a) $\lim\limits_{x\to-3} \dfrac{x^3+x^2-7x-3}{x^3-2x^2-8x+21}$

(b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln\Big(x \tan\left(\frac{1}{x}\right)\Big)$

(c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\mathrm{e}^x \sin(x^3) - 3x^2\mathrm{e}^x\right)$

(d) $\lim\limits_{x\to0-0} \dfrac{2x^3}{\sqrt{5x^7+9x^6} - \sqrt{5x^7+x^6}}$

Frischhaltebox

Aufgabe H 80. *Grenzwerte von Folgen*

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte.

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin(2n^3) - \sin\left(\frac{1}{n}\right)\cos(n^2)}{n}$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{2n^2 - \sqrt{n}} - \sqrt{2n^2+4n}\right)$

A. Barlow, C. Rösinger,
R. Schmähl, S. Smyk

17. Gruppenübung zur Vorlesung
Höhere Mathematik 2
Sommersemester 2022

M. Stroppel

Präsenzübungen

Aufgabe P 63. *Gleichheitsproblem*

Gegeben seien die Funktionen

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \mathrm{e}^x, \qquad g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x^2.$$

(a) Skizzieren Sie die Funktionen im Intervall $[-3, 3]$.

(b) Zeigen Sie, dass die Gleichung $f(x) = g(x)$ eine Lösung im Intervall $(-1, 1)$ hat.

(c) Gibt es mehr als eine Lösung im Intervall $(-1, 1)$? Wie viele Lösungen gibt es auf $\mathbb{R}$?
Hinweis: $\mathrm{e}^{x+k} - (x+k)^2 > \mathrm{e}^x - x^2 \ \forall x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{R}^+$.

Aufgabe P 64. *Intervallhalbierungsmethode*

Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x^3 - x - \sqrt{x} - 1$. Finden Sie mittels der Intervallhalbierungsmethode ein Intervall $I = [a, b]$, das eine Nullstelle von f enthält und $b - a < \frac{2}{3}$ erfüllt. Starten Sie das Verfahren mit dem Intervall $[a_1, b_1] = [0, 4]$.

Aufgabe P 65. *Minimum und Maximum*

Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x^4 - x^3 - x^2 - 2x$.

(a) Zeigen Sie, dass f auf dem Intervall $(0, 3)$ eine Minimalstelle x_0 mit $f(x_0) < 0$ hat.

(b) Nimmt f auf $\mathbb{R}$ kleinere Werte als im Intervall $(0, 3)$ an?
Hinweis: Für welche x gilt $f(x) < 0$?

(c) Nimmt f auf $\mathbb{R}$ ein Maximum an?

(d) Sei $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto -3x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 6x$. Nimmt g auf $\mathbb{R}$ ein Minimum an? Geben Sie ein Intervall der Breite 2 an, das die Maximalstelle auf $\mathbb{R}$ enthält.

Aufgabe P 66. *Konvergenz von Potenzreihen*

Wir betrachten folgende Potenzreihen.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - 6\mathrm{i})^n}{3^{2n-1}} \qquad g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2\mathrm{i}z - 4\mathrm{i} + 1)^n}{n^2} \qquad h(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{k}\, \frac{z^k}{3^k}$$

(a) Bestimmen Sie Entwicklungspunkte und Konvergenzradien von $f(z)$, $g(z)$ und $h(z)$.

(b) Skizzieren Sie die Konvergenzkreise der Potenzreihen in der komplexen Zahlenebene.

(c) Ist $f(z)$ für $z = -3 + 2\mathrm{i}$ konvergent?

(d) Ist $h(z)$ für $z = 1 + \mathrm{i}$ konvergent?

(e) Untersuchen Sie die Potenzreihen $f(z)$, $g(z)$ und $h(z)$ auf Konvergenz in $z = 1$.

Online-Aufgabe

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 05.05. – 11.05.) auf folgender Webseite.

`http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/`

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 81. *Gleichheitsproblem*

Gegeben seien die Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \mathrm{e}^x$, $g\colon \mathbb{R} \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{1}{x}$.

(a) Skizzieren Sie die beiden Funktionen im Intervall $[-4, 4]$.

(b) Warum kann man nicht mit Hilfe des Nullstellensatzes auf die Lösbarkeit der Gleichung $f(x) = g(x)$ im Intervall $(-4, 4)$ schließen?

(c) Gibt es eine Lösung der Gleichung $f(x) = g(x)$ im Intervall $(-\infty, 0)$?
Zeigen Sie, dass es genau eine Lösung auf $(0, +\infty)$ gibt.

(d) Finden Sie mittels der Intervallhalbierungsmethode ein Intervall der Breite 2^{-4}, das die Lösung enthält. Starten Sie das Verfahren mit dem Intervall $[a_1, b_1] = [\frac{1}{2}, 1]$.

Hinweis: Für Teilaufgabe (d) können Sie Werte der Funktion f mit Hilfe eines elektronischen Rechners approximieren. Beachten Sie, dass die Ausgabe als abbrechende Dezimalentwicklung nur (je nach Rundung) eine untere oder obere Schranke für den korrekten Wert darstellt.

Aufgabe H 82. *Maxima*

Es sei $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, und es sei ξ eine Stelle, an der die Funktion f ihr Maximum $m := \max\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$ annimmt.

(a) Es seien $c, d \in \mathbb{R}$. Finden Sie für jede der folgenden Funktionen g_j das Maximum $m_j := \max\{g_j(x) \mid x \in [a, b]\}$ sowie eine Stelle ξ_j in Abhängigkeit von ξ und m.
$g_1\colon [a, b] \to \mathbb{R}\colon x \mapsto f(x) + d$, $g_2\colon [a + c, b + c] \to \mathbb{R}\colon x \mapsto f(x - c)$.

(b) Sei nun $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}\colon x \mapsto -x^3 - x^2 + 2x + 4$. Begründen Sie, warum es eine Stelle $\xi \in (0, 1)$ so gibt, dass $f(\xi) = \max\{f(x) \mid x \in [0, 1]\}$.

Hinweis: Sie brauchen ξ nicht zu bestimmen und sollen keine Ableitungen verwenden.

(c) Sei $h\colon [1, 2] \to \mathbb{R}\colon x \mapsto -(x - 1)^3 - x^2 + 4x + 9$.
Bestimmen Sie unter Verwendung von (a) und (b) das Maximum von h.

Aufgabe H 83. *Konvergenz von Potenzreihen*

Für $k \in \mathbb{Z}$ betrachten wir die Potenzreihe $f_k(z) := \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \cos(kn\pi)\,(\mathrm{i}z + 2\mathrm{i} - 3k)^n$.

(a) Bestimmen Sie den Entwicklungspunkt sowie den Konvergenzradius der Potenzreihe.

(b) Skizzieren Sie den Konvergenzkreis der Potenzreihe für $k = 0$.

(c) Bestimmen Sie für $k = 0$ alle Punkte $z \in \mathbb{R}$, in denen die Potenzreihe konvergiert.

(d) Für welche $k \in \mathbb{Z}$ konvergiert die Potenzreihe an der Stelle $z = \mathrm{i}$?

Aufgabe H 84. *Geometrische Reihen*

Gegeben sei $f\colon \mathbb{C} \smallsetminus \{1, 2\} \to \mathbb{C}\colon z \mapsto \frac{8}{z^2 - 3z + 2}$.

(a) Bestimmen Sie $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass $f(z) = \frac{1}{1-z} \frac{a}{1-bz}$ für alle $z \in \mathbb{C} \smallsetminus \{1, 2\}$ gilt.

(b) Schreiben Sie damit $f(z)$ als Produkt von zwei geometrischen Reihen und bestimmen Sie die Konvergenzradien dieser Reihen.

(c) Geben Sie mit Hilfe von 1.14.11 eine Reihe für f an. Finden Sie dann die Partialsummen S_0, S_1, S_2, S_3 dieser Reihe.

Frischhaltebox

Aufgabe H 85. *Grenzwerte*

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \left(\cos(2x)\right)^2}{2x^2}$ **(b)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x^2 - x + \sin(x)}{x^2 + 2x + 4}$

A. Barlow, C. Rösinger,
R. Schmähl, S. Smyk

18. Gruppenübung zur Vorlesung
Höhere Mathematik 2
Sommersemester 2022

M. Stroppel

Präsenzübungen

Aufgabe P 67. *Formel von Euler und de Moivre*

(a) Schreiben Sie $f(x)$ als Linearkombination von Funktionen der Form e^{inx} mit $n \in \mathbb{Z}$. Schreiben Sie sodann $f(x)$ als Linearkombination von Funktionen der Form $\sin(ax)$ und $\cos(bx)$ mit $a, b \in \mathbb{N}$.

(i) $f(x) = (\sin(x))^3$ **(ii)** $f(x) = \cos(3x)\sin(2x)$

(b) Seien $z, w \in \mathbb{C}$. Bestätigen Sie mittels der Formel von Euler und de Moivre das Additionstheorem

$$\cos(z+w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)\,.$$

Aufgabe P 68. *Ableitungen*

Bestimmen Sie im Folgenden jeweils ein möglichst großes Intervall $D_f \subsetneqq \mathbb{R}$ so, dass der gegebene Term eine Funktion $f\colon D_f \to \mathbb{R}\colon x \mapsto f(x)$ definiert.
Bestimmen Sie die Menge aller Stellen in D_f, an denen die Funktion f differenzierbar ist. Berechnen Sie f'.

(a) $f(x) = \sum_{n=1}^{3} \frac{x^n}{n!}$ **(c)** $f(x) = \sum_{n=10}^{50} \frac{(2x)^n}{n!}$ **(e)** $f(x) = \cos(\sqrt{x^3-1})$

(b) $f(x) = -\sqrt{-x}$ **(d)** $f(x) = \arctan(x^2+2)$ **(f)** $f(x) = (2x+1)^x$

Aufgabe P 69. *Differenzierbarkeit*

Skizzieren Sie den Graph der Funktion

$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x\,|x| + |x-1|\,.$$

Untersuchen Sie, ob die Funktion g an den Stellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 1$ differenzierbar ist.

Aufgabe P 70. *Ableitungsregeln*

Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen:

(a) $f\colon (0,1) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \dfrac{x^2 \cdot 2^x}{\ln(x^2)}$,

(b) $f\colon \mathbb{R} \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \dfrac{(\cosh(x))^2}{\sinh(x)}$,

(c) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \arctan\Big(\cos\big(\sin(x)\big)\Big)$.

Online-Aufgabe

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 12.05. – 18.05.) auf folgender Webseite.

`http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test430/`

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 86. *Formel von Euler und de Moivre*

(a) Schreiben Sie $f(x) = \sin(x)(\cos(x))^4 - \sin(4x)\cos(x)$ als Linearkombination von Funktionen der Form e^{inx} mit $n \in \mathbb{Z}$.
Schreiben Sie sodann $f(x)$ als Linearkombination von Funktionen der Form $\sin(ax)$ und $\cos(bx)$ mit $a,\ b \in \mathbb{N}$.

(b) Seien $z,\ w \in \mathbb{C}$. Bestätigen Sie mittels der Formel von Euler und de Moivre, dass $\sin\left(\frac{z+w}{2}\right)\cos\left(\frac{z+w}{2}\right) = \frac{1}{2}\sin(z)\cos(w) + \frac{1}{2}\sin(w)\cos(z)$.

(c) Bestimmen Sie damit $\frac{1}{\sin(w)}\left(\sin\left(\frac{k\pi+w}{2}\right)\cos\left(\frac{k\pi+w}{2}\right)\right)$ für $\sin(w) \neq 0$ und $k \in \mathbb{N}$.
Hinweis: Die Antwort kann als $(-1)^k c$ mit $c \in \mathbb{R}$ geschrieben werden.

Aufgabe H 87. *Ableitungen*

Sei $a \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie im Folgenden jeweils die maximale Teilmenge $D_f \subseteq \mathbb{R}$ so, dass der gegebene Term eine Funktion $f\colon D_f \to \mathbb{R}\colon x \mapsto f(x)$ definiert.
Bestimmen Sie die Menge aller Stellen in D_f, an denen die Funktion f differenzierbar ist. Berechnen Sie f'.

(a) $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{ax}}{x^2 - a}$ **(b)** $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{\cos(x) + \sin(x)}$

Aufgabe H 88. *Differenzierbarkeit*

Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$. Wir betrachten die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + bx + c & \text{für } -2 < x < 2 \\ a|x| & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Skizzieren Sie den Graphen von f für $(a,b,c) \in \{(1,0,0), (4,0,4)\}$.

(b) Unter welchen Bedingungen an a, b, c ist f an der Stelle -2 bzw. 2 stetig?
Hinweis: Finden Sie zwei lineare Gleichungen, die diese Bedingungen beschreiben.

(c) Unter welchen Bedingungen an a, b, c ist f an der Stelle -2 bzw. 2 differenzierbar?

(d) Bestimmen Sie unter Verwendung von (b) und (c) die Werte von a, b, c so, dass f an beiden Stellen -2 und 2 stetig und differenzierbar ist.

Aufgabe H 89. *Ableitungsregeln*

Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen:

(a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+\colon x \mapsto \exp\big(x(1-x^2)\big)\exp\Big(\big(1-\sin(x)\big)^3 + 3x\big(\cos(x)\big)^2\Big)$

(b) $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+\colon x \mapsto \dfrac{x^2}{1 + 2^x + \frac{1}{x(6+x^2)}}$

Frischhaltebox

Aufgabe H 90. *Konvergenzkriterien für Reihen*

Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten der Reihen.

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ **(b)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{2n}}{n!}$ **(c)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k-1}}{k}$ **(d)** $\displaystyle\sum_{m=2}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-m}}{m-1}$

A. Barlow, C. Rösinger,
R. Schmähl, S. Smyk

19. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 2

Sommersemester 2022

M. Stroppel

Präsenzübungen

Aufgabe P 71. *Höhere Ableitungen*

(a) Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+\colon x \mapsto x^2\mathrm{e}^{3x}$. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion für $n > 1$, dass die n-te Ableitung $f^{(n)}$ von f gegeben ist durch

$$f^{(n)}(x) = 2\mathrm{e}^{3x}3^{n-2} + 6f^{(n-1)}(x) - 9f^{(n-2)}(x).$$

(b) Bestimmen Sie für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ die n-te Ableitung der Funktion

$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \sinh(x)\cosh(x).$$

Aufgabe P 72. *Umkehrfunktion*

Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to W\colon x \mapsto \cos(x)$.

(a) Finden Sie das längste Intervall $I \subsetneq (0, 10)$, in dem f streng monoton steigend ist. Bestimmen Sie den Wertebereich $W := f(I)$.

(b) Die Einschränkung $g\colon I \to W\colon x \mapsto f(x)$ ist bijektiv. An welchen Stellen ist die Umkehrfunktion $g^{-1}\colon W \to I$ differenzierbar?
Berechnen Sie die Ableitung von g^{-1} an diesen Stellen.

(c) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion g^{-1}.
Zeigen Sie, dass die Steigung der Tangente an g^{-1} immer größer als 1 ist.

Aufgabe P 73. *Die Regel von l'Hospital*

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $b \neq 0$. Untersuchen Sie die folgenden Funktionsgrenzwerte:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x) - \cos(x + \frac{\pi}{2})}{x}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{\sin(\pi x)}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1 + ax^2 - \mathrm{e}^{x^2}}{bx^2}$

Aufgabe P 74. *Grenzwerte*

Untersuchen Sie, ob die folgenden Funktionsgrenzwerte mit der Regel von l'Hospital bestimmt werden können. Wenn nicht: finden Sie einen anderen Weg!

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 2+0} \frac{x^3 + x^2 - 4x - 4}{(x-2)^2}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{x^3 - 5x^2 + 3x + 9}{x^2 - 4x + 3}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{2x^2 + 5}}{3x - 1}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 1+0} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2-1}}}{x^2 - 1}$

Online-Aufgabe

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 19.05. – 25.05.) auf folgender Webseite.

`http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/`

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 91. *Höhere Ableitungen*

Bestimmen Sie abhängig von $n \in \mathbb{N}$ die n-te Ableitung folgender Funktionen:

(a) $f\colon \mathbb{R} \smallsetminus \{\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \dfrac{3x+1}{1+x-6x^2}$

(b) $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \big(\cosh(x)\big)^2 - \cosh(2x)$

Hinweis: Berechnen Sie jeweils einige Ableitungen, stellen Sie eine Vermutung über die allgemeine Form der Ableitung auf und verifizieren Sie Ihre Vermutung durch Induktion.
Es kann helfen, zuerst Terme zu vereinfachen.

Aufgabe H 92. *Umkehrfunktion*

Gegeben sei die Funktion $f\colon D \to W\colon x \mapsto \frac{1}{\cos(x)}$.

(a) Bestimmen Sie die größte Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}$, für die der angegebene Funktionsterm definiert ist.

(b) Es sei $k \in \mathbb{Z}$. Berechnen Sie die Ableitung $f'(x_0)$ für $x_0 \in \big((2k-1)\frac{\pi}{2}, (2k+1)\frac{\pi}{2}\big)$.

(c) Finden Sie für die folgenden k jeweils das größte Intervall $I_k \subseteq \big((2k-1)\frac{\pi}{2}, (2k+1)\frac{\pi}{2}\big)$, für das die Einschränkung f_k von f auf I_k streng monoton fallend ist. Betrachten Sie (i) $k=0$, (ii) $k=1$, (iii) $k=2m$ mit $m \in \mathbb{Z}$ (also k gerade).

(d) Nach Satz 2.3.1 ist die Funktion $g\colon [-1,0] \to f([-1,0])\colon x \mapsto f(x)$ invertierbar. Berechnen Sie die Ableitung von g^{-1}.

Aufgabe H 93. *Die Regel von l'Hospital*

Untersuchen Sie die folgenden Funktionsgrenzwerte:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\ln(3)} \frac{\mathrm{e}^x - \frac{3x}{\ln(3)}}{\sin(x+\pi-\ln(3))}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{4x^2-2x-1+3^x}{5^x-2^x}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to\pi} \frac{\tan(x)-x+\pi}{(\ln(\frac{x}{\pi}))^2}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0+0} \frac{\ln(x)-x}{(x^3-2x)^{-1}}$

Aufgabe H 94. *Die Regel von l'Hospital*

Durch $p_m(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{m^k x^k}{k!}$ ist ein Polynom $p_m(x)$ vom Grad $m-1$ gegeben.

(a) Bestimmen Sie die n-te Ableitung von x^m für $n \leqq m$.

(b) Finden Sie durch Induktion die n-te Ableitung des Polynoms $p_m(x)$.

(c) Zeigen Sie damit für $n < m$, dass $\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\right)^n \left(\mathrm{e}^{mx} - p_m(x)\right)\Big|_{x=0} = 0$ gilt.

(d) Zeigen Sie mit (a), (b), (c) und der Regel von l'Hospital, dass $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{mx}-p_m(x)}{x^m} = \frac{m^m}{m!}$.

Frischhaltebox

Aufgabe H 95. *Induktion und Konvergenz*

(a) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion: $\forall n \in \mathbb{N}\colon \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1}$.

(b) Bestimmen Sie den Wert der Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-\frac{1}{2})(k+\frac{1}{2})}$.

A. Barlow, C. Rösinger,
R. Schmähl, S. Smyk

20. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 2

Sommersemester 2022

M. Stroppel

Präsenzübungen

Aufgabe P 75. *Taylorpolynome*

Bestimmen Sie $T_n(f, x, x_0)$ für

(a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \mathrm{e}^{-2x}$, $x_0 = 0$, $n = 3$;

(b) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto (x-1)^2$, $x_0 = c$, $n = 3$;

(c) $f\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \ln(x)$, $x_0 = \mathrm{e}$, $n = 2$.

Aufgabe P 76. *Taylorentwicklung und Fehlerabschätzung*

Gegeben ist die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x^3 - 4x + 1$.

(a) Geben Sie jeweils das Taylorpolynom $T_1(f, x, 1)$ und $T_1(f, x, 0)$ an.

(b) Skizzieren Sie die Graphen von $f(x)$ und $T_1(f, x, 0)$.

(c) Finden Sie eine Abschätzung des Lagrange-Restgliedes $|R_1(f, x, 0)|$ für $x \in [-1, 1]$. Visualisieren Sie diese Fehlerschranke in Ihrer Skizze.

(d) Geben Sie $T_2(f, x, 1)$ und $T_2(f, x, 0)$ an und skizzieren Sie $T_2(f, x, 1)$.

(e) Finden Sie eine Abschätzung des Lagrange-Restgliedes $|R_2(f, x, 1)|$ für $x \in [0, 2]$. Visualisieren Sie diese Fehlerschranke in Ihrer Skizze.

Aufgabe P 77. *Extrema und Wendepunkte*

Bestimmen Sie die lokalen Extrema und die Wendepunkte der folgenden Funktionen:

(a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x^5 - 10x^3 + 2$

(b) $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \cos(x) - x$

Aufgabe P 78. *Kurvendiskussion*

Gegeben sei $f\colon \mathbb{R} \to W\colon x \mapsto \dfrac{x}{x^2+1}$. Führen Sie eine Kurvendiskussion durch, d.h.

(a) Bestimmen Sie den Wertebereich W von f und testen Sie auf Symmetrie.

(b) Berechnen Sie mögliche lokale Extrema.

(c) Bestimmen Sie mögliche Wendepunkte.

(d) Untersuchen Sie das Verhalten an den Rändern des Definitionsbereiches.

(e) Fertigen Sie eine Skizze an.

Online-Aufgabe

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 26.05. – 01.06.) auf folgender Webseite.

`http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test430/`

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 96. *Taylorpolynome*

Bestimmen Sie $T_3(f, x, x_0)$ für

(a) $f\colon (0,\pi) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \ln(\sin(x))$, $x_0 = \frac{\pi}{6}$;

(b) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \arctan(2x)$, $x_0 = 0$.

Aufgabe H 97. *Taylorentwicklung und Fehlerabschätzung*

Wir betrachten die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x^2\cos(x)$.

(a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom $T_2(f, x, \frac{\pi}{2})$.

(b) Bestimmen Sie eine Fehlerschranke $C > 0$ so, dass

$$\left|f(x) - T_2\left(f, x, \frac{\pi}{2}\right)\right| \leqq C\left|x - \frac{\pi}{2}\right|^3$$

für alle $x \in [0, 3]$ gilt.

(c) Bestimmen Sie ein $a \in (0, 1)$ so, dass

$$\left|f(x) - T_2\left(f, x, \frac{\pi}{2}\right)\right| \leqq 0.027$$

für alle $x \in \left[\frac{\pi}{2} - a, \frac{\pi}{2} + a\right]$ gilt.

Aufgabe H 98. *Extrema und Wendepunkte*

(a) Bestimmen Sie die lokalen Extrema von $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto (x+1)\mathrm{e}^{(x-1)^2}$.

(b) Bestimmen Sie die lokalen Extrema und Wendepunkte von $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \mathrm{e}^x\cos(x)$.

Aufgabe H 99. *Kurvendiskussion*

Wir betrachten die ungerade Funktion $f\colon \mathbb{R} \smallsetminus \{-3, 3\} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \dfrac{2x}{x^2 - 9}$.

(a) Untersuchen Sie das Verhalten an den Stellen $-\infty, -3, 3$ und $+\infty$.

(b) Bestimmen Sie $f'(x)$ und $f''(x)$.

(c) Bestimmen Sie die lokalen Extrema und die Wendepunkte von f (wenn es solche gibt).

(d) Skizzieren Sie den Graphen von f für $x \in [-5, 5]$.

Frischhaltebox

Aufgabe H 100. *Häufungspunkte*

Bestimmen Sie für jede der folgenden Folgen möglichst viele Häufungspunkte, indem Sie entsprechende konvergente oder bestimmt divergente Teilfolgen angeben.

(a) $(a_m)_{m\in\mathbb{N}}$ mit $a_m := \ln((-1)^m + 2) + \sum_{k=0}^{m} \left(\frac{1}{2}\right)^k$

(b) $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $b_k := (3k)^{((-1)^k)} + \cos((-1)^k k\pi)$

A. Barlow, C. Rösinger,
R. Schmähl, S. Smyk

21. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 2

Sommersemester 2022

M. Stroppel

Präsenzübungen

Aufgabe P 79. *Integration*

Sei $a, b \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die folgenden Integrale.

(a) $\displaystyle\int x^3 \mathrm{e}^{2-x^4}\,\mathrm{d}\,x$ **(b)** $\displaystyle\int \mathrm{e}^{ax}\cos(bx)\,\mathrm{d}\,x$ **(c)** $\displaystyle\int \frac{2x\ln(x^2+1)}{x^2+1}\,\mathrm{d}\,x$

Aufgabe P 80. *Integration mittels Partialbruchzerlegung*

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x-2)^3}\,\mathrm{d}\,x$ **(b)** $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2+9}\,\mathrm{d}\,x$ **(c)** $\displaystyle\int \frac{7x-15}{x^3-2x^2+5x}\,\mathrm{d}\,x$

Aufgabe P 81. *Partielle Integration, Substitution*

Wie betrachten die folgenden Funktionen.

$$f\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$$
$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \cos(x)(\sin(x))^3$$

(a) Bestimmen Sie Stammfunktionen von f und von g durch partielle Integration.

(b) Bestimmen Sie Stammfunktionen von f und von g durch Substitution.

(c) Überprüfen Sie Ihre Resultate, indem Sie die erhaltenen Stammfunktionen ableiten.

Aufgabe P 82. *Ein nützlicher Integrationstrick*

Zeigen Sie durch partielle Integration, dass für jede differenzierbare Funktion f die Formel

$$\int f(x)\,\mathrm{d}\,x = \Big[x\,f(x)\Big] - \int x\,f'(x)\,\mathrm{d}\,x$$

gilt. Berechnen Sie damit $\int \ln(x)\,\mathrm{d}\,x$, $\int \arctan(x)\,\mathrm{d}\,x$ und $\int \sin(\ln(x))\,\mathrm{d}\,x$.

Interaktive Challenge: Ober- und Untersummen

Unter folgendem Link finden Sie eine interaktive Seite zum Riemann-Integral:

https://info.mathematik.uni-stuttgart.de/HM-Stroppel-Material/HTML-Ana/3-05.html

Versuchen Sie, die Differenz zwischen Ober- und Untersumme möglichst klein zu drücken.
Reichen Sie einen Screenshot über ILIAS an der dafür vorgesehenen Stelle ein:
Abgabe bis spätestens Freitag, 3.6.2022. Auch Abgaben in Teams (max. 7 Personen) werden berücksichtigt. (Bitte geben Sie Namen und Matrikelnummer aller Mitwirkenden an.)
Die besten Abgaben werden am Dienstag, 14.6. um 19:00 Uhr im Hörsaal V53.01 prämiert!

Online-Aufgabe

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 02.06. – 15.06.)
auf folgender Webseite.

http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 101. *Partielle Integration*

Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$ und $0 < b \neq \mathrm{e}^c$. Bestimmen Sie die folgenden Integrale.

(a) $\displaystyle\int x^2(2\cos(x)\sin(x) - \cos(2x))$

(b) $\displaystyle\int \operatorname{arsinh}(-x)\,\mathrm{d}\,x$

(c) $\displaystyle\int x^3 \sin(ax)\,\mathrm{d}\,x$

(d) $\displaystyle\int x^2 b^x \mathrm{e}^{-cx}\,\mathrm{d}\,x$

Aufgabe H 102. *Integration durch Substitution*

Bestimmen Sie die folgenden Integrale (nehmen Sie in (c) an, dass x in $(0, \pi)$ liegt).

(a) $\displaystyle\int \frac{x^2\cosh(x^3)}{\sinh(x^3)}\,\mathrm{d}\,x$

(b) $\displaystyle\int \frac{2x\arctan(2x) + 2\arctan(2x)}{4x^3 + 4x^2 + x + 1}\,\mathrm{d}\,x$

(c) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1-(\cos(x))^2}}{\sqrt{1+(\cos(x))^2}}\,\mathrm{d}\,x$

(d) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{\sqrt{x}-1}{4x}}\,\mathrm{d}\,x$

Aufgabe H 103. *Stammfunktionen*

Wir betrachten die folgende Funktion:

$$f_n \colon (-\infty, 1) \to \mathbb{R} \colon x \mapsto \frac{x^2 - 2x}{(1-x)^n}, \qquad n \in \mathbb{N}$$

Bestimmen Sie für die folgenden $n \in \mathbb{N}$ jeweils eine Stammfunktion F_n von f_n:

(a) $n = 1$, **(b)** $n = 2$, **(c)** $n = 3$, **(d)** $n > 3$.

Aufgabe H 104. *Integration mittels Partialbruchzerlegung*

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\displaystyle\int \frac{-x^2 + 10x - 11}{x^3 - x^2 - 8x + 12}\,\mathrm{d}\,x$

(b) $\displaystyle\int \frac{(x-1)(x+2)}{(x+1)(x^2+x+2)}\,\mathrm{d}\,x$

Frischhaltebox

Aufgabe H 105. *Lineare Gleichungssysteme*

Bestimmen Sie jeweils (mit dem Gauß-Algorithmus 3.7.6) die Lösungsmenge des Gleichungssystems $Ax = b$, mit

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

A. Barlow, C. Rösinger,
R. Schmähl, S. Smyk

22. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 2

Sommersemester 2022

M. Stroppel

Präsenzübungen

Aufgabe P 83. *Fläche einer Ellipse*

Wir betrachten die durch die Gleichung $-\frac{x_1^2}{\gamma} - x_2^2 + 1 = 0$ gegebene Ellipse E_γ für $\gamma \in \mathbb{R}^+$.

(a) Skizzieren Sie E_1 und E_4 in ein Standardkoordinatensystem.

(b) Beschreiben Sie den Teil der Ellipse, welcher sich nicht unterhalb der x_1-Achse befindet, als Graph einer Funktion.

(c) Bestimmen Sie die Funktion $F\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, welche jedem $\gamma \in \mathbb{R}^+$ den Flächeninhalt der Ellipse E_γ zuweist.

Aufgabe P 84. *Integrale und Vergleichskriterien*

Bestimmen Sie, falls möglich,

(a) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1-\ln t}{t^3}\,\mathrm{d}\,t$ **(b)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x+1}{1+(x+1)^2}\,\mathrm{d}\,x$

(c) Untersuchen Sie die Reihen $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1-\ln(n)}{n^3}$ und $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{1+(n+1)^2}$ auf Konvergenz.
Überprüfen Sie dabei die entsprechenden Voraussetzungen von 3.8.1.

Aufgabe P 85.

Gegeben sei die Funktion $\operatorname{sign} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \frac{x}{|x|}, & x \neq 0 \end{cases}$

Bestimmen Sie

(a) $\int_a^b \operatorname{sign}(t)\;\mathrm{d}\,t$ für $a, b \in \mathbb{R}^+$ **(b)** $\int_a^b \operatorname{sign}(t)\;\mathrm{d}\,t$ für $a, b \in \mathbb{R}^-$

(c) Eine Funktion $F\colon \mathbb{R} \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{R}$ mit $F'(x) = f(x)$.

Ist F eindeutig bestimmt? Wie viel Wahlfreiheit haben Sie?

Aufgabe P 86. *Mittelwertsatz*

Seien $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{4}{5}x^3 - \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + 1,\ a = -1, b = 2$.

(a) Skizzieren Sie den Graphen von f für $x \in [a,b]$.

(b) Berechnen Sie $I_f := \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x$ und veranschaulichen Sie I_f als Fläche in ihrer Skizze.

(c) Finden Sie ein $\xi \in [a,b]$ mit $f(\xi) \cdot (b-a) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x$.

(d) Bestimmen Sie eine konstante Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $I_g := \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}\,x = I_f$.
Veranschaulichen Sie I_g als Fläche in der Skizze und deuten Sie Satz 3.6.4 geometrisch.

Online-Aufgabe

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 16.06. – 22.06.)
auf folgender Webseite.

`http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test430/`

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 106. *Integration mit Partialbruchzerlegung*

(a) Schreiben Sie $p(x) = x^3 + x^2 - x - 1$ als Produkt von Linearfaktoren.

(b) Bestimmen Sie $\int f(x)\,\mathrm{d}\,x$ für $f(x) = \dfrac{x^5 - x^4 + x^2 + x - 2}{x^3 + x^2 - x - 1}$ mit Hilfe einer Partialbruchzerlegung.

(c) Bestimmen Sie $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{(\sin(x))^5 - (1-(\cos(x))^2)^2 - (\cos(x))^2 + \sin(x) - 1}{(\sin(x))^3 - (\cos(x))^2 - \sin(x)} \cdot \cos(x)\,\mathrm{d}\,x\,.$

Aufgabe H 107. *Bestimmte Integrale*

Berechnen Sie

(a) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}^{42}} \frac{1}{21t + t\,\ln t}\,\mathrm{d}\,t$

(b) $\displaystyle\int_{-\frac{3}{7}}^{\frac{3}{7}} \frac{1 + 2\xi^2 + \xi^4}{(1-\xi^2)(1-\xi^4)}\,\mathrm{d}\,\xi$

(c) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 3\mathrm{e}^{(\sin(x))^3} \cos(x)\,\mathrm{d}\,x - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 3\mathrm{e}^{(\sin(x))^3} (\cos(x))^3\,\mathrm{d}\,x$

(d) $\displaystyle\int_0^{\ln 3} \frac{1}{\cosh(x)}\,\mathrm{d}\,x$

Hinweis: Erweitern Sie mit $\cosh(x)$.

Aufgabe H 108. *Unbestimmte und uneigentliche Integrale*

Berechnen Sie

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} - \frac{1}{x^3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}\,x$

(b) $\displaystyle\int \ln|x| \cdot \frac{(x-1)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}}{x^3}\,\mathrm{d}\,x$

(c) $\displaystyle\int_{0+0}^{+\infty} \ln x \cdot \frac{(x-1)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}}{x^3}\,\mathrm{d}\,x$

Aufgabe H 109. *Unbestimmte und uneigentliche Integrale mit Parameter*

Zu $d \in \mathbb{R}$ definieren wir $f_d\colon (0,1] \to \mathbb{R}$ vermöge $f_d(t) := \ln\left(t^{(t^d)}\right)$.

(a) Bestimmen Sie $\displaystyle\int f_d(t)\,\mathrm{d}\,t\,.$

(b) Bestimmen Sie alle $d \in \mathbb{R}$, für die das Integral $\displaystyle\int_{0+0}^{1} f_d(t)\,\mathrm{d}\,t$ existiert.
Geben Sie für diese ferner den Wert des Integrals an.

Frischhaltebox

Aufgabe H 110. *Geht auch ohne Hauptachsentransformation ...*

Bestimmen Sie für $A := \begin{pmatrix} -4 & -4 & 0 \\ -4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $Q := \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^\intercal A x + 2\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}^\intercal x = 0 \right\}$

(a) $\det A_{\text{erw}}$ und $\operatorname{Rg} A_{\text{erw}}$.

(b) die Gestalt von Q.

A. Barlow, C. Rösinger,
R. Schmähl, S. Smyk

23. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 2

Sommersemester 2022

M. Stroppel

Präsenzübungen

Hinweis: Sei $D \subseteqq \mathbb{R}^n$ eine Menge, $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und M die Menge aller Punkte, in denen **alle** ersten partiellen Ableitungen existieren. Dann ist
– der Gradient von f die Abbildung $\operatorname{grad} f\colon M \to \mathbb{R}^n\colon x \mapsto \left(f_{x_1}(x), f_{x_2}(x), \ldots, f_{x_n}(x)\right)^\intercal$.
– der Gradient von f an der Stelle $x \in M$ der Vektor $\operatorname{grad} f(x) = \nabla f(x)$.

Aufgabe P 87. *Gradienten*

Bestimmen Sie die Gradienten von

(a) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x_1^3 x_2 + x_2^2 x_1 + 4x_2$.

(b) $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \mapsto xyz + xy + (x^2+1)^z$

(c) $h\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \dfrac{1}{2} x^\intercal \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) x + \left\langle \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ -3 \end{smallmatrix}\right) \middle| \, x \right\rangle + 4$

Aufgabe P 88. *Inneres, Rand und Abschluss*

Bestimmen und skizzieren Sie jeweils M. Identifizieren Sie ferner M°, ∂M und $\overline{M}$ in der jeweiligen Skizze.

(a) $M := \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, -2 \leqq x \leqq 2, |y| < x+1 \right\}$

(b) $M := \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqq 1, z^6 \neq 1 \}$

(c) $M := \{ \alpha \in \mathbb{R} \mid \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n n^\alpha \text{ konvergiert} \}$

Aufgabe P 89. *Gradient und partielle Ableitungen*

Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right) \mapsto \det\left(x_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \right)$.

(a) Geben Sie das Polynom, welches sich hinter der Determinante verbirgt, explizit an.

(b) Bestimmen Sie $\operatorname{grad} f$.

(c) Können Sie $\frac{\partial}{\partial x_1} f(x)$ und $\frac{\partial}{\partial x_2} f(x)$ für $x = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ auch bestimmen, ohne das Polynom in (a) explizit zu berechnen?

Aufgabe P 90. *(Partielle) Ableitungen*

Gegeben sei die von einem Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$ abhängige Funktion

$$f_\lambda\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon t \mapsto |\lambda + 1| \log\left(1 + t^2\right) + |t|$$

(a) Bestimmen Sie die Menge A_λ aller Stellen, an denen f_λ differenzierbar ist, und geben Sie $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t} f_\lambda$ an.

(b) Sei nun $t \in \mathbb{R}$ fest und $g_t\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon \lambda \mapsto f_\lambda(t)$.
Bestimmen Sie die Menge B_t aller Stellen, an denen g_t differenzierbar ist, und geben Sie $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,\lambda} g_t$ an.

(c) Sei nun $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \mapsto f_y(x)$. Für welche $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2$ existiert $\nabla h\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$?

Online-Aufgabe

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 23.06. – 29.06.) auf folgender Webseite.

`http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/`

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 111. *Gradienten und Nullstellenmengen*

Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right) \mapsto \displaystyle\int_{x_1}^{x_2} \mathrm{e}^{x_3 - 3} \cdot (x_3 - 3)^2 \,\mathrm{d}\,\xi$.

(a) Bestimmen Sie $\operatorname{grad} f$.

(b) Skizzieren Sie $N_0 := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid f(x) = 0\}$ und $G_0 := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \nabla f(x) = \mathbf{0}\}$ jeweils in ein eigenes Koordinatensystem.

Aufgabe H 112. *Partielle Ableitungen*

Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \begin{cases} \frac{\sin(\pi x_1 - x_2)\, x_1 + x_2^2}{\pi x_1^2 + x_2^2}, & x \neq \mathbf{0} \\ 1, & x = \mathbf{0} \end{cases}$

sowie die Parametrisierung $g_m\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto t\binom{m}{1}$ einer Geraden G_m.

(a) Zeigen Sie, dass $\partial_{x_1} f$ und $\partial_{x_2} f$ in $x_0 = \mathbf{0}$ existieren.

(b) Bestimmen Sie $L_m := \lim\limits_{t \to 0} (f \circ g_m)(t)$. Ist f in $\mathbf{0}$ stetig?

(c) Für welches $m \in \mathbb{R}$ wird L_m maximal?

Aufgabe H 113. *Eigenwerte und Ableitungen*

Für $A \in \{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid A^\intercal = A\}$ definieren wir: $\Lambda(A) := \max\{r \in \mathbb{R} \mid r \text{ ist EW von } A\}$. Betrachten Sie die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon y \mapsto \Lambda\left(\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_2 & y_3 \end{pmatrix}\right)$$

(a) Geben Sie eine Formel zur Berechnung von $f\left(\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}^\intercal\right)$ an.

(b) Bestimmen Sie $\partial_{y_2} f$.

Aufgabe H 114. *Gradienten II*

Gegeben sei *Montecristo*: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \binom{x}{y} \mapsto \frac{1}{36}y^4 - \frac{1}{2}y^2 + \frac{9}{4}x^4 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^2y^2$.

(a) Bestimmen Sie ∇*Montecristo*$\binom{x}{y}$.

(b) Skizzieren Sie die Menge $N := \{\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid \nabla$*Montecristo*$\binom{x}{y} = \mathbf{0}\}$ in einem kartesischen Koordinatensystem für $\mathbb{R}^2$.

(c) Skizzieren Sie die Menge $N := \{\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid \nabla$*Montecristo*$\binom{x}{y} = \mathbf{0}\}$ in die x-y-Ebene eines Koordinatensystems für $\mathbb{R}^3$.

(d) Der Graph von *Montecristo* ist $\mathcal{G} := \{(x, y, z)^\intercal \in \mathbb{R}^3 \mid z =$ *Montecristo*$\binom{x}{y}\}$.
Ergänzen Sie die Skizze um den Schnitt von $\mathcal{G}$ mit der x-z- sowie mit der y-z-Ebene.

Frischhaltebox

Aufgabe H 115. *Taylorpolynome*

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Bestimmen Sie jeweils $T_n(f, x, x_0)$ für

(a) $x_0 = -3$, $n = 2$,
$f(x) := \mathrm{e}^{x-3}$

(b) $x_0 = 1$, $n = 42$,
$f(x) := x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

A. Barlow, C. Rösinger,
R. Schmähl, S. Smyk

24. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 2

Sommersemester 2022

M. Stroppel

Präsenzübungen

Aufgabe P 91. *3D-Modell – Schmiegquadriken*

Der Graph der Funktion $f\colon [-\pi,\pi]\times[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}\colon x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\mapsto \cos(x_1)\cos(x_2)$ ist vorliegenden Modell dargestellt. Um den Einblick zu erleichtern, ist bei $\binom{\pi/2}{\pi/2}$ ein Fenster aus dem gelben Funktionsgraph ausgeschnitten.

Betrachten Sie die Stellen $P_1 := \binom{0}{0}$, $P_2 := \begin{pmatrix}\pi/2\\\pi/2\end{pmatrix}$ und $P_3 := -\begin{pmatrix}\pi/2\\\pi/2\end{pmatrix}$.

(Für Besucher von Onlinegruppen: Das Modell finden Sie unter https://info.mathematik.uni-stuttgart.de/HM-Stroppel-Material/3D/05/.)

- **(a)** Wo etwa verlaufen die Koordinatenachsen im Modell? Wo ist der Punkt $(0,0,1)^\intercal$?
- **(b)** Bestimmen Sie $T_2(f,x,P)$ für $P\in\{P_1,P_2,P_3\}$.
- **(c)** Bestimmen Sie die Gleichungen der zugehörigen Schmiegquadriken sowie jeweils die Gestalt der Quadrik. Passen Ihre Ergebnisse zum Modell?
- **(d)** Sei nun $R := \left[\frac{\pi}{2},\pi\right]\times\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. Bestimmen Sie $\min\limits_{x\in R} f(x)$.

Aufgabe P 92. *Kritische Stellen und Extrema*

Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\colon \binom{x}{y}\mapsto \frac{1}{16}\,(x^2-4)\cdot(x^2+(y+1)^2-8)$.

- **(a)** Bestimmen Sie $\nabla f\binom{x}{y}$.
- **(b)** Geben Sie alle kritischen Stellen von f an.
- **(c)** Entscheiden Sie anhand der Definitheit der Hessematrix für jede kritische Stelle, ob dort ein Minimum, Maximum oder Sattelpunkt vorliegt.
- **(d)** Skizzieren Sie alle kritischen Stellen sowie die Nullstellenmenge von f samt Vorzeichenverteilung in ein Koordinatensystem. Überprüfen Sie damit Ihr Ergebnis aus (b).

Aufgabe P 93. *Ableitungen längs von Vektoren*

Gegeben seien $a := \binom{4}{2}$, $v := \binom{-3}{4}$, $w := \frac{1}{5}\binom{3}{-4}$ und $f\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\colon \binom{x}{y}\mapsto x^3+xy^2$.
Bestimmen Sie $\partial_v f(a)$ und $\partial_w f(a)$

- **(a)** mit Definition 4.3.11
- **(b)** mit Satz 4.3.12

Aufgabe P 94. *Gradienten und Richtungsableitungen*

Betrachen Sie die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\colon x=\binom{x_1}{x_2}\mapsto x_1\cdot \mathrm{e}^{x_2}$.

- **(a)** Sei $\binom{r}{\varphi}\in(\mathbb{R}\smallsetminus\{0\})\times\mathbb{R}$ und $v := r\binom{\cos(\varphi)}{\sin(\varphi)}$.
  Bestimmen Sie die Ableitung von f längs v.
  Für welche r ist dies eine Richtungsableitung?
- **(b)** Bestimmen Sie zu $r=1$ den Winkel φ so, dass $\partial_v f\binom{1}{1}$ maximal wird.

Online-Aufgabe

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 30.06. – 06.07.)
auf folgender Webseite.

`http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test430/`

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 116. (*Minimale Differenz von Ober- und Untersummen – Analytische Version*)$^\circ$

Sei $x_0 := 0$, $x_3 := 2$ und $f\colon [x_0, x_3] \to \mathbb{R}\colon \xi \mapsto 4\xi + 2$.
Auf der Menge $M := \left\{\binom{x_1}{x_2} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x_0 < x_1 < x_2 < x_3\right\}$ definieren wir die Funktion

$$d\colon M \to \mathbb{R}\colon x = \binom{x_1}{x_2} \mapsto \overline{S}\,(f, \{x_0, x_1, x_2, x_3\}) - \underline{S}\,(f, \{x_0, x_1, x_2, x_3\})$$

(a) Geben Sie mithilfe der Monotonie von f einen geschlossenen Ausdruck für $d(x)$ an.

(b) Bestimmen Sie $\nabla d(x)$.

(c) Bestimmen Sie $\mathrm{H}d\,(x)$.

(d) Bestimmen Sie $\min d|_{M^\circ} = \min\limits_{x \in M^\circ} d(x)$.

Hinweis: Sie dürfen ohne Begründung verwenden, dass ein Minimum existiert.

Aufgabe H 117. ∂ (*Minimale Differenz von Ober- und Untersummen – Analytische Version*)

Seien x_0, x_3, f, M und d wie in H 116. Wir erweitern den Begriff der Ober- und Untersumme und lassen auch zu, dass $x_0 = 0 \leqq x_1 \leqq x_2 \leqq x_3 = 2$ gelten.

(a) Skizzieren Sie M in ein geeignetes Koordinatensystem.

(b) Geben Sie mithilfe der Monotonie von f einen geschlossenen Ausdruck für $d(x)$ an.

(c) Bestimmen Sie $\min d|_{\partial M} = \min\limits_{x \in \partial M} d(x)$.

Aufgabe H 118. *Kritische Stellen und Extrema*

Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \binom{x}{y} \mapsto \left(\mathrm{e}^{1-x^2} - 1\right)(1 - y^4)$.

(a) Bestimmen Sie $\nabla f\binom{x}{y}$ sowie die Menge $K = \left\{\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \nabla f\binom{x}{y} = \mathbf{0}\right\}$ der kritischen Stellen.

(b) Skizzieren Sie K sowie die Nullstellenmenge von f in ein Koordinatensystem. Kennzeichnen Sie ferner, welches Vorzeichen die Funktion in den von der Nullstellenmenge begrenzten Gebieten jeweils annimmt.

(c) Bestimmen Sie $\mathrm{H}f\binom{x}{y}$ und $\mathrm{H}f\,(\mathbf{0})$.

(d) Entscheiden Sie für jede kritische Stelle, ob ein Minimum, Maximum oder Sattelpunkt vorliegt.

Aufgabe H 119. *Taylorpolynome*

Gegeben seien die Vektoren $v_1 = \binom{2}{1}$, $v_2 = \binom{2}{0}$ und $v_3 = \binom{0}{1}$ sowie der Entwicklungspunkt $a = \binom{1}{0}$. Sei $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$ mit

$$\begin{array}{ccccc} \partial_{v_1}^2 f(a) = 1 & , & \partial_{v_2}^2 f(a) = 2 & , & \partial_{v_3}^2 f(a) = 3 \\ \partial_{v_1} f(a) = 1 & , & \partial_{v_2 - v_3} f(a) = 1 & , & f(a) = 4 \end{array}$$

(a) Bestimmen Sie $\nabla f(a)$ mit 4.3.12.
(b) Bestimmen Sie $\mathrm{H}f\,(a)$ mit 4.4.9.
(c) Geben Sie das Taylorpolynom $T_2(f, x, a)$ an.
(d) Entscheiden Sie: Liegt in a ein Extremum vor? Wenn ja, welcher Art?

Frischhaltebox

Aufgabe H 120. *Ebenen*

Gegeben seien die Punkte $P_1 = (1, 0, 1)^\intercal$, $P_2 = (9, 9, 13)^\intercal$ und $P_3 = (-8, -8, 13)^\intercal$.
Sei E die Ebene mit $P_1, P_2, P_3 \in E$. Bestimmen Sie

(a) eine Parameterdarstellung von E.
(b) die Hesse-Normalform von E.

A. Barlow, C. Rösinger,
R. Schmähl, S. Smyk

25. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 2

Sommersemester 2022

M. Stroppel

Präsenzübungen

Aufgabe P 95. *3D-Modell – Extrema unter Nebenbedingungen*

Im Modell sehen Sie den Graphen der Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x_1 x_2^2$ sowie (u. a.) die Mengen

$$K = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x|^2 - 1 = 0\} \qquad \text{(blauer Kreis)}$$
$$P = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 - x_2^2 = 0\} \qquad \text{(violette Parabel)}$$

(Für Besucher von Onlinegruppen: Das Modell finden Sie unter
https://info.mathematik.uni-stuttgart.de/HM-Stroppel-Material/3D/06/.)

(a) Können Sie im Modell die x_1- sowie die x_2-Achse identifizieren?

(b) Bestimmen Sie die Extremalstellen von $f|_K$ und $f|_P$ mit Lagrange.

(c) Kontrollieren Sie Ihre Ergebnisse rechnerisch, indem Sie K und P parametrisieren.

(d) Passen Ihre Ergebnisse zu dem, was Sie bei Betrachtung des Modells erwarten würden?

Aufgabe P 96. *Jacobi-Matrizen*

Gegeben seien die Funktionen $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon \left(\begin{smallmatrix} x\\y\\z \end{smallmatrix}\right) \mapsto x^2 + \mathrm{e}^{y^2}$, $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2\colon \left(\begin{smallmatrix} x\\y\\z \end{smallmatrix}\right) \mapsto \left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 & 4\\ -4 & -1 & 2 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} x\\y\\z \end{smallmatrix}\right)$ und $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3\colon \left(\begin{smallmatrix} s\\t \end{smallmatrix}\right) \mapsto \left(\begin{smallmatrix} 2s-2t\\ \ln(1+s^2)+t^2 \end{smallmatrix}\right)$. Bestimmen Sie

(a) $\mathrm{J}f\left(\begin{smallmatrix} x\\y\\z \end{smallmatrix}\right)$ und $\nabla f\left(\begin{smallmatrix} x\\y\\z \end{smallmatrix}\right)$ **(b)** $\mathrm{J}g\left(\begin{smallmatrix} x\\y\\z \end{smallmatrix}\right)$ **(c)** $\mathrm{J}h\left(\begin{smallmatrix} s\\t \end{smallmatrix}\right)$ und $\mathrm{J}(h \circ g)\left(\begin{smallmatrix} x\\y\\z \end{smallmatrix}\right)$

Aufgabe P 97. *Tangenten und Normalformen*

Gegeben seien die Koordinatensysteme $\mathbb{E} := (\mathbf{0}; e_1, e_2)$ und $\mathbb{F} := \left(\left(\begin{smallmatrix} 2\\2 \end{smallmatrix}\right); \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{smallmatrix} 1\\1 \end{smallmatrix}\right), \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{smallmatrix} -1\\1 \end{smallmatrix}\right)\right)$ sowie die Funktionen $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon y \mapsto y_1^2 - y_2^2 + 4$ und $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \left(g \circ {}_{\mathbb{F}}\mathrm{id}_{\mathbb{E}}\right)(x)$.

(a) Bestimmen Sie die Koordinatentransformation ${}_{\mathbb{F}}\mathrm{id}_{\mathbb{E}}$.

(b) Geben Sie einen geschlossenen Ausdruck für $f(x) = f\left(\begin{smallmatrix} x_1\\x_2 \end{smallmatrix}\right)$ an.
Bestimmen Sie anschließend $\nabla f(x)$.

(c) Sei nun $N := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid f(x) = 0\}$. Skizzieren Sie N mit Hilfe der Tangenten von N in den bzgl. Standardkoordinaten gegebenen Punkten $\left(\begin{smallmatrix} 0\\3 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 1\\4 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 3\\0 \end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix} 4\\1 \end{smallmatrix}\right)$. Entspricht das Ergebnis dem, was Sie mit Ihrem Wissen über Normalformen erwarten?
Zusatz: Wie können Sie die Tangente an N in $x = \left(\begin{smallmatrix} -2\\5/2 \end{smallmatrix}\right)$ skizzieren?
Sehen Sie verschiedene Möglichkeiten?

Aufgabe P 98. *Konvexität*

Welche der folgenden Mengen sind konvex, welche sind es nicht?

(a) $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \in [-1, 1], x_2 \leqq |x_1|\}$

(b) $\{z \in \mathbb{C} \smallsetminus \{0\} \mid |z| < 2\}$

(c) $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid \max\{|x_1|, |x_2|, |x_3|\} \leqq 1\}$

(d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x = 0\}$

Online-Aufgabe

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 07.07. – 13.07.)
auf folgender Webseite.

`http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/`

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 121. *Seltsame Extrema unter Nebenbedingungen*

Gegeben seien die Funktionen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{1}{4}x_1^3 - \frac{1}{4}x_2^3 + 10$ und
$g\colon (\mathbb{R} \smallsetminus \{0\}) \times (\mathbb{R} \smallsetminus \{0\}) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{1}{8} - \frac{1}{x_1^2} - \frac{1}{x_2^2}$.

(a) Bestimmen Sie $\nabla f(x)$ und $\nabla g(x)$.

(b) Sei $D = \{x \in (\mathbb{R} \smallsetminus \{0\}) \times (\mathbb{R} \smallsetminus \{0\}) \mid g(x) = 0\}$. Die Einschränkung $f|_D$ nimmt ein relatives Minimum sowie ein relatives Maximum an. Bestimmen Sie diese.

Hinweis: D besteht aus vier verschiedenen „Ästen" (einer pro Quadrant) welche die Punkte $\binom{-6\sqrt{2}}{-3}$, $\binom{-6\sqrt{2}}{3}$, $\binom{6\sqrt{2}}{-3}$ und $\binom{6\sqrt{2}}{3}$ enthalten.

Aufgabe H 122. *Extrema mit Lagrange*

Gegeben seien die Funktionen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \binom{x}{y} \mapsto 2y$ und
$g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \binom{x}{y} \mapsto -\frac{1}{2}x^4 - y^4 + 3y^3 - 2y^2 - \frac{1}{2}x^2y^2 + 2x^2y$.

Wir suchen die Extrema von f auf $D := \{\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid g\binom{x}{y} = 0\}$.

(a) Stellen Sie das Lagrange-System auf.

(b) Bestimmen Sie alle kritischen Stellen.

(c) Geben Sie an, an welchen Stellen $f|_D$ das absolute Minimum/Maximum annimmt.
Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass D beschränkt ist.

Aufgabe H 123. *Extrema unter Nebenbedingungen in $\mathbb{R}^3$*

Wir betrachten die Funktionen $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{1-\frac{1}{2}(x_3+1)^2}{1+x_1^2} - x_2^2$ und $g_1\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x_2$ sowie $g_2\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1$. Sei $M = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid g_1(x) = 0, g_2(x) = 0\}$.

(a) Bestimmen Sie $\mathrm{J}g\,(x)$ für $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2\colon x \mapsto \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \end{pmatrix}$.

(b) Finden Sie die kritischen Stellen von $f|_M$ mit Lagrange.

(c) Finden Sie alle möglichen Extremalstellen von $f|_M$, indem Sie M parametrisieren.

(d) Geben Sie $\min\limits_{x\in M} f(x)$ und $\max\limits_{x\in M} f(x)$ an.

Hinweis: Sowohl bei (b) als auch (c) kann $1 + x_1^2 = 2 - x_3^2$ zur Vereinfachung helfen.

Aufgabe H 124. *Extrema in Halbräumen*

Gegen sei die Menge $D = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \left\langle \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \,\middle|\, x \right\rangle \geqq 2\right\}$ sowie die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon x \mapsto -|x|^2 - (x_1 - 4)x_1$$

(a) Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung der Ebene $E := \partial D$.

(b) Bestimmen Sie alle lokalen Extrema von $f|_E$ mit einem geeigneten Gleichungssystem.

(c) Kontrollieren Sie Ihre Ergebnisse in (b) mithilfe von (a).

(d) Bestimmen Sie alle lokalen Extrema der Einschränkung $f|_D : D \to \mathbb{R}\colon x \mapsto f(x)$.

Zusatz: Können Sie entscheiden, ob diese Extrema auch absolut sind?

Frischhaltebox

Aufgabe H 125. *Integrale*

Berechnen Sie folgende Integrale:

(a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x)\cos(2x)\cos(x)\,\mathrm{d}\,x$

(b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x}{(\sqrt{x})^{\frac{1}{4}}}\,\mathrm{d}\,x$

A. Barlow, C. Rösinger,
R. Schmähl, S. Smyk

26. Gruppenübung zur Vorlesung
Höhere Mathematik 2
Sommersemester 2022

M. Stroppel

Präsenzübungen

Aufgabe P 99. *Jacobi-Matrix und Kettenregel*

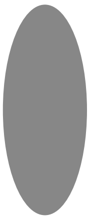
Seien $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto x^2 + 3y^2 - z$ und $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3\colon t \mapsto \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \\ 1 \end{pmatrix}$

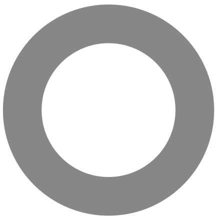
(a) Bestimmen Sie $f \circ g$ und $g \circ f$. Berechnen Sie $J(f \circ g)$ und $J(g \circ f)$ ohne die Kettenregel zu verwenden.

(b) Bestimmen Sie $J(f)$ und $J(g)$ und mit der Kettenregel $J(f \circ g)$ und $J(g \circ f)$.

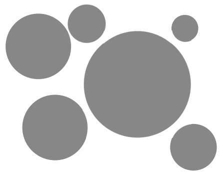
Aufgabe P 100. *Zusammenhängende Gebiete*

Sind folgende Gebiete (grau) in $\mathbb{R}^2$ zusammenhängend und/oder einfach zusammenhängend? Muss demnach eine Funktion mit dem entsprechenden Definitionsbereich ein Potential besitzen, wenn die Integrabilitätsbedingung erfüllt ist?

(a) 

(b) 

(c) 

(d) 

Betrachten Sie nun die Komplemente der oben gezeigten Gebiete. Entscheiden Sie, ob die Komplemente zusammenhängend und/oder einfach zusammenhängend sind.

Aufgabe P 101. *Potentiale*

(a) Besitzen folgende Vektorfelder Potentiale? Wenn ja, geben Sie jeweils ein Potential an.

$g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^2+y^2 \\ y^2+z^2 \\ z^2+x^2 \end{pmatrix}$, $\qquad h\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \exp(z)x^5 \\ xy^2 \\ \sin(zy) \end{pmatrix}$

(b) Bestimmen Sie ein Potential für $k\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \sin(x) \\ \cos(y) \end{pmatrix}$.

Aufgabe P 102. *Parametrisierung*

(a) Erläutern Sie an Hand einer Skizze, dass $g\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto r_0 - R\begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$ mit $r_0 \in \mathbb{R}^2$ und $R \in \mathbb{R}^+$ eine Parametrisierung eines Kreises mit Mittelpunkt r_0 und Radius R darstellt. Zeigen Sie weiterhin, dass g die Kreisgleichung löst.

(b) Was passiert für $R = 0$?

(c) Sei nun $r_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $R = 1$. Wir betrachten die Kreisgleichung: $x^2 + y^2 = 1$. Welche Teilkurven des Kreises erhält man für

(i) $y \geqq 0$, $\qquad$ **(ii)** $1 \geqq x \geqq -1$?

Überlegen Sie für beide Fälle, wie Sie t wählen müssen, um mittels der Parametrisierung die gleichen Teilkurven zu erhalten. Bestimmen Sie zudem die Länge dieser Kurven.

Online-Aufgabe

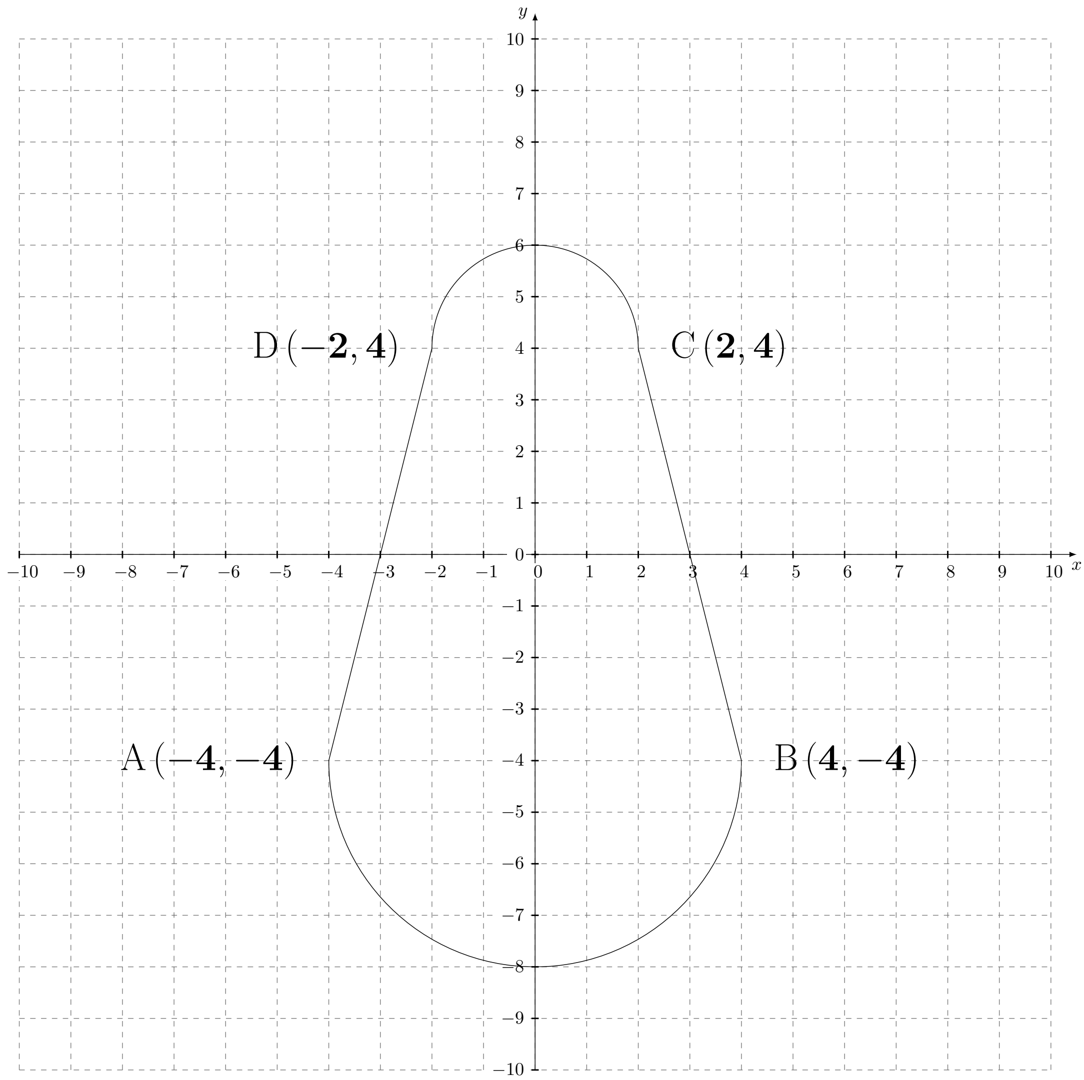
Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 14.07. – 20.07.) auf folgender Webseite.

`http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test430/`

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 126. *Eine Parametrisierung für eine zusammengesetzte Kurve*

Wir betrachten im Folgenden die gezeigte Kurve, welche aus zwei Halbkreisen und zwei geraden Strecken besteht.



(a) Bestimmen Sie für jede Teilkurve (Halbkreise und Strecken) eine geeignete Parametrisierung.

(b) Stellen Sie sicher, dass jeweils zwei verschiedene ihrer gewählten Parametrisierungen an den Randpunkten (A, B, C und D) übereinstimmen.

(c) Welche Längen haben die Teilkurven? Welche Länge hat die Gesamtkurve?

Aufgabe H 127. *Wenn wir manche Sätze schon nicht komplett beweisen...*

Seien $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \mapsto xyz$ und $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \mapsto \exp\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$. Berechnen Sie ohne Lemma 4.8.1 zu nutzen:

(a) $\operatorname{grad}(f+g)$

(b) $\operatorname{grad}(fg)$

(c) $\operatorname{grad}\left(\frac{f}{g}\right)$

Aufgabe H 128. *Ist die Kettenregel für Jacobi-Matrizen immer hilfreich?*

Seien $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ und $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$.

(a) Wie viele Zeilen und Spalten haben $J(g)$, $J(h)$ und $J(g \circ h)$? Existiert $h \circ g$? Wenn ja, wie viele Zeilen und Spalten hat $J(h \circ g)$?

(b) Sei von nun an $g\colon \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \mapsto \left(\begin{smallmatrix} x^2+y^2 \\ z^2 \end{smallmatrix}\right)$ und $h\colon t \mapsto \left(\begin{smallmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \\ t \end{smallmatrix}\right)$. Bestimmen Sie $J(g \circ h)$. Hat $g \circ h$ somit ein Potential? Haben g und/oder h Potentiale? Wenn ja, geben Sie jeweils eines an.

(c) Sei $k\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \mapsto \left(\begin{smallmatrix} (y+z)(2x+z)+3x^2+y^2 \\ (x+z)(2y+x)+3y^2+z^2 \\ (x+y)(2z+y)+3z^2+x^2 \end{smallmatrix}\right)$. Bestimmen Sie ein Potential für k.

Aufgabe H 129. *Niveaumengen und Gleichungssysteme*

Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \mapsto \left(x^2 - y^2\right)(x - 3y)$.

(a) Bestimmen Sie die Niveaumenge $\{r \in \mathbb{R}^2 | f(r) = 0\}$ und skizzieren Sie diese.

(b) Bestimmen Sie ∇f.

(c) Bestimmen Sie alle $a \in \mathbb{R}^2$ für die $\nabla f(a) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$.

(d) Bestimmen Sie für folgende Punkte b jeweils $\nabla f(b)$ und zeichnen Sie $\nabla f(b)$ angeheftet an b in ihre Skizze ein

(i) $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ **(ii)** $\frac{1}{2}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ **(iii)** $\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ **(iv)** $\frac{1}{3}\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$

Frischhaltebox

Aufgabe H 130. *Konvergenz von Reihen*

Konvergieren folgende Reihen? Bestimmen Sie den Grenzwert der Reihe, wenn sie konvergiert.

(a) $\sum\limits_{j=2}^{\infty} \left(\frac{3\mathrm{i}+2}{6\mathrm{i}}\right)^j$ **(b)** $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \left(\frac{2\mathrm{i}+5}{1+3\mathrm{i}}\right)^j$

A. Barlow, C. Rösinger,
R. Schmähl, S. Smyk

27. Gruppenübung zur Vorlesung
Höhere Mathematik 2
Sommersemester 2022

M. Stroppel

Präsenzübungen

Aufgabe P 103. *Auf dem letzten Blatt haben Sie zu wenig Potentiale bestimmt ...*

Seien $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon \begin{pmatrix} x\\ y\\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos(x)y\cos(z)\\ \sin(x)\cos(z)\\ -\sin(x)y\sin(z) \end{pmatrix}$ und $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon \begin{pmatrix} x\\ y\\ z \end{pmatrix} \mapsto \exp\left(x^2\right) \begin{pmatrix} 2x\ln\left(y^2+1\right)z\\ \frac{2zy}{y^2+1}\\ \ln\left(y^2+1\right) \end{pmatrix}$

(a) Zeigen Sie, dass f ein Potential besitzt und bestimmen Sie eines.

(b) Zeigen Sie, dass g ein Potential besitzt und bestimmen Sie eines.

Aufgabe P 104. *Divergenz, Rotation und Jacobi ...*

Seien $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon \begin{pmatrix} x\\ y\\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x-y\exp(z)\\ y\left(x^2-z^3\right)\\ z \end{pmatrix}$ und $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon \begin{pmatrix} x\\ y\\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \sin(x)\\ \cos(y)\\ 1 \end{pmatrix}$ und $h\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon \begin{pmatrix} x\\ y\\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \exp(x+y+z)\\ \tan\left(y^2\right)\\ \ln\left(z^2+1\right) \end{pmatrix}$.

(a) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix, die Divergenz und die Rotation von f.

(b) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix, die Divergenz und die Rotation von g.

(c) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix, die Divergenz und die Rotation von h.

Aufgabe P 105. *Kurvenintegrale und Potentiale*

(a) Sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon \begin{pmatrix} x\\ y\\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} yz+2y\\ xz+2x+z+2\\ xy+y \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, dass f ein Potential besitzt und bestimmen Sie eines. Bestimmen Sie zudem für jede parametrisierte Kurve K von $P_1 = (-1,2,3)^\intercal$ nach $P_2 = (2,1,1)^\intercal$ das Kurvenintegral $\int_K f(r) \bullet \mathrm{d}\, r$.

(b) Sei $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon \begin{pmatrix} x\\ y\\ z \end{pmatrix} \mapsto (x+2)\exp(y) \begin{pmatrix} 2z\\ xz+2z\\ x+2 \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, dass g ein Potential besitzt und bestimmen Sie eines. Bestimmen Sie zudem für jede parametrisierte Kurve M von $P_3 = (0,0,1)^\intercal$ nach $P_4 = (1,0,2)^\intercal$ das Kurvenintegral $\int_K g(r) \bullet \mathrm{d}\, r$.

Aufgabe P 106. *Mal wieder Parametrisierungen*

(a) Sei $C\colon [0,\pi] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto R\begin{pmatrix} \cos(t)\\ \sin(t) \end{pmatrix}$ mit $R \in \mathbb{R}^+$. Bestimmen Sie die Länge der Kurve $C([0,\pi])$.

(b) Sei $\gamma\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3\colon t \mapsto R\begin{pmatrix} \cos(t)\\ \sin(t)\\ t \end{pmatrix}$ mit $R \in \mathbb{R}^+$. Skizzieren Sie γ und bestimmen Sie die Länge der Kurve $\gamma([0,2\pi])$.

Online-Aufgabe

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 21.07. – 27.07.) auf folgender Webseite.

`http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/`

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):

Aufgabe H 131. *Harmonische Funktionen und Divergenz, sowie Rotation*

(a) Ist $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \mapsto \exp(x)\sin(y)$ harmonisch?

(b) Ist $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \mapsto \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ harmonisch?

(c) Sei $h\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \mapsto \sin(x) + \exp(y^2+z^2)$.
Zeigen Sie $\operatorname{div}\operatorname{grad} h = \Delta h$ und $\operatorname{rot}\operatorname{grad} h = 0$ ohne Lemma 5.2.8 zu benutzen.

Aufgabe H 132. *Kurvenintegrale von Vektorfeldern*

(a) Es sei die Parametrisierung $C\colon [0,2] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \left(\begin{smallmatrix} 2+t^4 \\ t \end{smallmatrix}\right)$ einer Kurve K gegeben. Skizzieren Sie diese Kurve. Bestimmen Sie für $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \mapsto \left(\begin{smallmatrix} x \\ \sin(y) \end{smallmatrix}\right)$ das Kurvenintegral $\int_K f(s) \bullet \mathrm{d}\,s$.

(b) Es sei die Parametrisierung $\tilde{C}\colon [-1,1] \to \mathbb{R}^3\colon t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ \sin(t) \end{pmatrix}$ einer Kurve $\tilde{K}$ gegeben. Skizzieren Sie diese Kurve. Bestimmen Sie für $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{1+x^2} \\ x^2y^2 \\ z \end{pmatrix}$ das Kurvenintegral $\int_{\tilde{K}} g(s) \bullet \mathrm{d}\,s$.

Aufgabe H 133. *Kurvenintegrale reellwertiger Funktionen*

(a) Es sei die Parametrisierung $C\colon [0,\pi] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$ einer Kurve K gegeben. Bestimmen Sie für $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \mapsto 2x^4 + x^2y^2$ das Kurvenintegral $\int_K f(s)\,\mathrm{d}\,s$.

(b) Sei nun die Parametrisierung $\tilde{C}\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \begin{pmatrix} t\sin(t) \\ t\cos(t) \end{pmatrix}$ einer Kurve $\tilde{K}$ gegeben. Bestimmen Sie für $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \mapsto \sqrt{1+x^2+y^2}$ das Kurvenintegral $\int_{\tilde{K}} g(s)\,\mathrm{d}\,s$.

Aufgabe H 134. *Etwas aufwendiger als sonst ...*

Wir betrachten eine geschlossene Kurve K, welche auf den Kanten eines Vierecks mit Eckpunkten $A = (0,0)$, $B = (5,1)$, $C = (7,4)$ und $D = (-2,3)$ verläuft.

(a) Bestimmen Sie eine Parametrisierung der Kurve K.

(b) Bestimmen Sie $\oint_K f(s)\,\mathrm{d}\,s$ für $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \mapsto x\exp(y)$.

(c) Angenommen wir entfernen Punkt D und betrachten eine geschlossene Kurve $\tilde{K}$, welche auf den Kanten des Dreiecks mit Eckpunkten A, B und C verläuft. Bestimmen Sie nun $\oint_{\tilde{K}} f(s)\,\mathrm{d}\,s$ für die oben definierte Funktion f.

Frischhaltebox

Aufgabe H 135. *Positive Definitheit*

Sind die folgenden Matrizen positiv definit?

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 2022 & 1 & 0 \\ 1 & 17 & 0 \\ 0 & 0 & 23\pi \end{pmatrix}$