Z. Askarpour, T. Conde,
T. Holicki, G. Kemlin,
R. Schmähl, D. Wittwar,
D. Zimmermann

15. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 2

M. Künzer

Sommersemester 2023

Präsenzübungen

Aufgabe P 45. *Reihenwerte bestimmen*

Bestimmen Sie die Werte der folgenden Reihen

(a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3}{n!}$ **(b)** $\sum_{m=2}^{\infty} \left(\frac{2}{m-1}\right)^2$ **(c)** $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(2+(-1)^k\right)^k}{5^k}$

Aufgabe P 46. *Konvergenzkriterien für Reihen*

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

(a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{2^{2n}}$ **(b)** $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{3}$ **(c)** $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2m+1}}{m+7}$ **(d)** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+(-1)^k)!}$

Aufgabe P 47. *Teleskopreihen*

Schreiben Sie die folgenden Reihen in der Form $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+k} - a_n$ für ein $k \geqq 1$ und eine geeignete Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Entscheiden Sie, ob die Reihen konvergieren und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-n}{n!}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{n+2}\right)$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{(n+2)^{-3}} - \sqrt{(n+1)^{-3}}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} 1$

Aufgabe P 48. *Majoranten- und Minorantenkriterium*

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz, indem Sie geeignete Majoranten bzw. Minoranten der Form $\sum_{n=n_0}^{\infty} c \cdot \frac{1}{n^\alpha}$ mit $c > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ und $n_0 \geqq 1$ angeben. Sie dürfen dabei verwenden, dass diese für $\alpha \leqq 1$ divergieren und für $\alpha > 1$ konvergieren.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+3n-1}$

(b) $\sum_{l=2}^{\infty} \frac{3}{\sqrt[3]{l^3+3l^2+3l}}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} + \frac{2}{n^3}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2n}{(n+1)^3 2^n}$

Online-Aufgabe

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 20.04. – 26.04.) auf folgender Webseite (Dieser Link wechselt jede Woche!):

`http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/`

Bitte geben Sie dort zunächst Ihre Matrikelnummer ein.

Die Lösungen sind als ganze Zahlen oder als Dezimalzahlen mit einem Dezimal**punkt** einzugeben. Sonstige Zeichen, wie zum Beispiel Klammern oder Operatoren wie $*$ und $/$, dürfen **nicht** benutzt werden.

Anschließend müssen Sie Ihr **Passwort** für die Onlineübungen eintragen, das Sie per Email an Ihre studentische Adresse (<st∗ ∗ ∗ ∗ ∗∗@stud.uni-stuttgart.de>) erhalten haben.

Innerhalb des Bearbeitungszeitraums können Sie Ihre Eingaben beliebig oft wiederholen, wobei die **letzten** Eingaben gewertet werden. Der Bearbeitungszeitraum endet mittwochs um 24:00 Uhr. Sie erhalten für die Bearbeitung der Online-Aufgabe 0, 1 oder 2 Punkte.

Hausübungen (Abgabe in ILIAS):

Aufgabe H 71. *Berechnung von Reihenwerten*

Bestimmen Sie die folgenden Reihenwerte.

(a) $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{3m}-\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{3m+3}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{n^2-2n-1}{n+3}\right)^{k}$

Aufgabe H 72. *Konvergenzuntersuchung*

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\cos\left(\frac{\pi}{2}n^2\right)$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n}{2^{2n-1}(n+1)^2}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n-n}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\sqrt{(n^2-1)^2-1}-n^2$

Aufgabe H 73. *Parameterabhängige Konvergenz*

Zeigen Sie, dass die Reihe $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\frac{x^n(n!)n^n}{(2n)!}$ für alle $x\in[-1,1]$ konvergiert.

Aufgabe H 74. *Verdichtungskriterium*

Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge nicht-negativer reeller Zahlen und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben mittels $b_n := a_{2^k}$ für $2^k \leqq n < 2^{k+1}$.

(a) Zeigen Sie: $a_n \leqq b_n$ für alle $n\in\mathbb{N}$.

(b) Zeigen Sie: $\displaystyle\sum_{n=1}^{2^{m+1}-1} a_n \leqq \sum_{n=1}^{2^{m+1}-1} b_n = \sum_{k=0}^{m} 2^k a_{2^k}$ für $m \geqq 0$.

(c) Folgern Sie: Konvergiert die Reihe $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$, so ist $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ eine konvergente Majorante von $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(d) Verwenden Sie **(c)** um zu zeigen, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ für $\alpha > 1$ konvergiert.

Frischhaltebox

Aufgabe H 75. *Komplexe Zahlen*

Skizzieren Sie die folgende Menge in der komplexen Zahlenebene.

$$\left\{z\in\mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z^2)=1\right\}$$

Z. Askarpour, T. Conde,
T. Holicki, G. Kemlin,
R. Schmähl, D. Wittwar,
D. Zimmermann

16. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 2

M. Künzer

Sommersemester 2023

Präsenzübungen

Aufgabe P 49. *Funktionsgrenzwerte*

Untersuchen Sie auf Konvergenz oder bestimmte Divergenz und bestimmen Sie ggf. den Grenzwert:

(a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x+3x^2}{(-x+5)^2}$ **(b)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \cos\left(\frac{\pi}{1+x^2}\right)$ **(c)** $\lim\limits_{x\to1+0} \frac{1}{\sqrt{x}-x}$

(d) $\lim\limits_{x\to1} \frac{1}{\sqrt{x}-x}$ **(e)** $\lim\limits_{x\to0} \left(\frac{\sin(x)}{x} - \frac{x^2}{(\sin(x))^2}\right)$ **(f)** $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x^2+4} - \sqrt{x^2-2x}$

Aufgabe P 50. *Stetigkeit mit dem ε-δ-Kriterium*

Wir betrachten die Funktion $f\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}\colon x \mapsto f(x) := \sqrt{x}$. Sei $x_0 \in \mathbb{R}_0^+$.
Wir erinnern an die Umgebung $U_\delta(x_0) = (x_0-\delta, x_0+\delta)$ und an die Umgebung $U_\varepsilon(f(x_0)) = (f(x_0)-\varepsilon, f(x_0)+\varepsilon)$, wobei $\delta > 0$ und $\varepsilon > 0$.

(a) Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Sei zudem $\varepsilon \leqq \sqrt{x_0}$.
Man rechne nach: Mit $\delta := \varepsilon\sqrt{x_0} > 0$ ist $f(U_\delta(x_0)) \subseteqq U_\varepsilon(f(x_0))$.

(b) Man folgere mit dem ε-δ-Kriterium: Die Funktion f ist stetig in x_0.
Falls hierbei das vorgegebene $\varepsilon > 0$ größer als $\sqrt{x_0}$ ist: Wieso kann man trotzdem (a) verwenden?

Aufgabe P 51. *Stetigkeit und Folgen*

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) & \text{für } x \neq 0, \\ 1 & \text{für } x = 0. \end{cases}$

(a) Finden Sie eine Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n \neq 0$ stets, mit $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ und mit $\lim\limits_{n\to\infty} f(b_n) = 1$.

(b) Finden Sie eine Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n \neq 0$ stets, mit $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$ und mit $\lim\limits_{n\to\infty} f(c_n) = 0$.

(c) Ist f stetig im Punkt $x_0 = 0$?

Aufgabe P 52. *Stetigkeit mit dem ε-δ-Kriterium*

Zeigen Sie mit Hilfe des ε-δ-Kriteriums, dass die folgenden Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an der angegebenen Stelle x_0 stetig sind.

$$f(x) = 5x - 3, \quad x_0 = 1, \qquad g(x) = \frac{2x}{1+x^2}, \quad x_0 = 0.$$

Online-Aufgabe

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 27.04. – 03.05.) auf folgender Webseite:

`http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test430/`

Hausübungen (Abgabe in ILIAS):

Aufgabe H 76. *Stetigkeit und einseitige Grenzwerte*

Gegeben seien $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon t \mapsto \begin{cases} -1, & t \leqq -1 \\ \frac{1}{2}t+1, & t > -1 \end{cases}$ und $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon t \mapsto 2t^2 + t - 1$.

(a) Skizzieren Sie den Graphen von f.

(b) Sei $t_0 := -1$. Ist f linksseitig stetig in t_0? Ist f rechtsseitig stetig in t_0? Ist f stetig in t_0?

(c) Skizzieren Sie den Graphen von $(f \circ g)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon t \mapsto f(g(t))$. Ist $f \circ g$ stetig?

(d) Skizzieren Sie den Graphen von $(g \circ f)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon t \mapsto g(f(t))$. Ist $g \circ f$ stetig?

Aufgabe H 77. *Funktionsgrenzwerte und stetige Fortsetzungen*

Wir betrachten die Funktion $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \sqrt{4 - (2\cos(x))^2}$.

(a) Geben Sie eine stetige Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an mit $g(x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(b) Bestimmen Sie $\mathcal{N} := \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) = 0\}$.

(c) Finden Sie eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ so, dass $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 2$ gilt. Existiert $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$?

Aufgabe H 78. *Funktionsgrenzwerte*

Untersuchen Sie die folgenden Funktionsgrenzwerte:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 + \sqrt{1+\sin(x)}}{x^4}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \tan\left(\frac{\pi x^3}{4x^3 - x^2 + 5}\right)$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^3-6} - \sqrt{x^2+4}\right)$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+3}{4x^2+\cos(x)}$

Aufgabe H 79. *Parametrisierte Funktion*

Seien $p, q \in \mathbb{R}$ reelle Parameter mit $p < 0$. Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} |x-p|, & x < -1, \\ x^2, & -1 \leqq x \leqq 1, \\ q - x, & 1 < x. \end{cases}$$

(a) Sei $1 > \varepsilon > 0$. Bestimmen Sie ein $\delta > 0$ so, dass $|f(x) - f(0)| < \varepsilon$ für alle $x \in (-\delta, \delta)$. Folgern Sie daraus, dass f in $x_0 = 0$ stetig ist.

(b) Für welchen Wert des Parameters p ist f an der Stelle -1 stetig ?

(c) Für welchen Wert des Parameters q ist f an der Stelle 1 stetig ?

(d) Zeichnen Sie den Graphen von f im Bereich $[-4, 4]$ für das Paar der in (b) und (c) gefundenen Parameterwerte.

Frischhaltebox

Aufgabe H 80. *LGS*

Bestimmen Sie die Lösungsmenge des Gleichungssystems $\begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 & 4 \\ 1 & -4 & 4 & -6 \\ 3 & -4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 42 \\ 29 \end{pmatrix}$.

Z. Askarpour, T. Conde,
T. Holicki, G. Kemlin,
R. Schmähl, D. Wittwar,
D. Zimmermann

17. Gruppenübung zur Vorlesung
Höhere Mathematik 2

M. Künzer

Sommersemester 2023

Präsenzübungen

Aufgabe P 53. *Nullstellensatz von Bolzano, Intervallhalbierungsmethode*
Gegeben sei die Funktion $f\colon\ [0,3] \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \sqrt{x^5+2} - 4x + 1$.

(a) Zeigen Sie, dass f mindestens zwei Nullstellen hat.

(b) Finden Sie $a, b \in [0,3]$ mit $|b-a| \leqq \frac{1}{4}$ und mit einer Nullstelle von f im Intervall $[a,b]$.

Aufgabe P 54. *Potenzreihen*
Bestimmen Sie die Entwicklungspunkte und die Konvergenzradien der folgenden (komplexen) Potenzreihen.

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} 3^k (z-4)^k$ **(b)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} 3^{-k^2} k!(z+\mathrm{i}-2)^k$

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k^4 (7z^2)^k$ **(d)** $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} (-2+(-1)^k)^{-k} (z-\mathrm{i}-2)^k$

Aufgabe P 55. *Exponentialfunktion*
Bestimmen Sie die Werte der folgenden Reihen.

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ **(b)** $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ **(c)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n-1)!}$

Aufgabe P 56. *Potenzreihen*
Finden Sie Potenzreihen f, g so, dass für die Konvergenzradien ρ_f, ρ_g, ρ_{f+g} gilt:

$$0 < \rho_f = \rho_g < \rho_{f+g} < +\infty.$$

Online-Aufgabe

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 04.05. – 10.05.) auf folgender Webseite:

`http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/`

Hausübungen (Abgabe in ILIAS):

Aufgabe H 81. *Gleichheitsproblem, Intervallhalbierungsmethode*

Gegeben seien die Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon t \mapsto t^2 - 1$ und $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon t \mapsto 3t - t^3$.

(a) Skizzieren Sie die Graphen von f und g im Intervall $[-1, 1]$.

(b) Verwenden Sie den Nullstellensatz von Bolzano, um zu zeigen: Es gibt ein $t_0 \in [-1, 1]$ mit $f(t_0) = g(t_0)$. Markieren Sie diese Stelle t_0 in der Skizze aus (a).

(c) Wir betrachten die Funktion $f - g$ und das Intervall $[-1, 1]$. Führen Sie drei Schritte der Intervallhalbierungsmethode durch, um $a, b \in [-1, 1]$ zu finden mit $|b - a| = \frac{1}{4}$ und $t_0 \in [a, b]$.

Aufgabe H 82. *Potenzreihen*

(a) Für welche $z \in \mathbb{R}$ konvergiert die Potenzreihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k + 3^k}{k} z^k$?

(b) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^k}{k!} z^k$.

Aufgabe H 83. *Potenzreihen*

Bestimmen Sie die Entwicklungspunkte und die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen und untersuchen Sie das Konvergenzverhalten auf dem Rand des Konvergenzkreises.

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} (z - \mathrm{i})^k$ **(b)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} 3^k k (z^2 + 4\mathrm{i}z - 4)^k$

Aufgabe H 84. *Produkt von Potenzreihen*

Gegeben seien die Funktionen

$$f\colon U_1(0) \to \mathbb{C}\colon z \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} (-z)^k \quad \text{und} \quad g\colon U_1(0) \to \mathbb{C}\colon z \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} z^k.$$

(a) Berechnen Sie $f \cdot g$ in geschlossener Form.

(b) Schreiben Sie $f \cdot g$ als Potenzreihe unter Verwendung von 1.14.11.4.

(c) Verwenden Sie 1.8.4 direkt, um erneut $f \cdot g$ als Potenzreihe zu schreiben.

Frischhaltebox

Aufgabe H 85. *Vollständige Induktion*

Beweisen Sie die folgende Gleichung für alle $n \in \mathbb{N}$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$.

Z. Askarpour, T. Conde,
T. Holicki, G. Kemlin,
R. Schmähl, D. Wittwar,
D. Zimmermann

18. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 2

M. Künzer

Sommersemester 2023

Präsenzübungen

Aufgabe P 57. *Formel von Euler und de Moivre*

Verwenden Sie 1.14.18 und 1.14.12, um zu zeigen, dass die Gleichung $(\cos(z))^2 + (\sin(z))^2 = 1$ gilt für alle $z \in \mathbb{C}$.

Aufgabe P 58. *Differenzierbarkeit*

Bestimmen Sie $\lim\limits_{h\to 0+0} \dfrac{f(h)-f(0)}{h}$ und $\lim\limits_{h\to 0-0} \dfrac{f(h)-f(0)}{h}$ für $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto f(x)$ und entscheiden Sie, ob f differenzierbar in 0 ist.

(a) $f(x) = |x|$

(b) $f(x) = \sqrt{|x|}$

(c) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right), & \text{falls } x < 0 \\ x^3, & \text{falls } x \geqq 0 \end{cases}$

(d) $f(x) = |x^3|$

Aufgabe P 59. *Sinus und Cosinus hyperbolicus*

(a) Rechnen Sie nach: Es gilt $\sinh(x) \cdot \cosh(x) = \dfrac{1}{4}(\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{-2x}) = \dfrac{1}{2}\sinh(2x)$ für $x \in \mathbb{R}$.

(b) Bestimmen Sie folgende Ableitungen direkt.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sinh(x) \cdot \cosh(x)\right), \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{4}(\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{-2x})\right), \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{2}\sinh(2x)\right)$$

(c) Rechnen Sie nach: Die Ergebnisse in (b) stimmen überein.

Aufgabe P 60. *Ableitungen*

Bestimmen Sie die Ableitung der reellen Funktion f.

(a) $f(x) = x^5 + 3^x - 1$

(b) $f(x) = \sqrt{3x^2 - 2^x} - x\ln(x)$

(c) $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$

(d) $f(x) = \sin\left(\dfrac{x^3}{\cos(x^3)}\right)$

Online-Aufgabe

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 11.05. – 17.05.) auf folgender Webseite:

`http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test430/`

Hausübungen (Abgabe in ILIAS):

Aufgabe H 86. *Formel von Euler und de Moivre*

(a) Beweisen Sie unter Verwendung von 1.14.18 die folgende Gleichung für alle $z \in \mathbb{C}$:

$$\sin(z) \cdot \left(16\,(\sin(z))^4 - 20\,(\sin(z))^2 + 5\right) = \sin(5z).$$

(b) Verwenden Sie (a), um alle Lösungen der Gleichung $16x^4 - 20x^2 + 5 = 0$ zu berechnen.

(c) Verwenden Sie die Substitution $t = x^2$, um damit nochmals alle Lösungen der Gleichung $16x^4 - 20x^2 + 5 = 0$ zu berechnen.

Aufgabe H 87. *Differenzierbarkeit*

(a) Sei $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $g(0) = -1$.
Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto f(x) := x \cdot g(x)$. Berechnen Sie $f'(0)$ unter Verwendung des Differentialquotienten. Berechnen Sie $f'(0)$ erneut, unter Verwendung der Produktregel.

(b) Sei $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $g(0) = 0$ und $g'(0) = 0$.
Sei

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto f(x) := \begin{cases} g(x)\cos\left(\dfrac{1}{x}\right), & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Berechnen Sie $f'(0)$ unter Verwendung des Differentialquotienten.

Aufgabe H 88. *Ableitungen*

Berechnen Sie $f'(x)$ und $f''(x)$. Bestimmen Sie den maximalen reellen Definitionsbereich von f, von f' und von f''.

(a) $f(x) = \dfrac{x}{\cos(x)}$

(b) $f(x) = \sqrt{(x-1)^2}$

(c) $f(x) = \sqrt{\ln(x)}$

(d) $f(x) = \sinh(\sin(x))$

Aufgabe H 89. *Produktregel*

(a) Seien $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbare Funktionen. Verwenden Sie die Produktregel, um $(f \cdot g)^{(0)}$, $(f \cdot g)^{(1)}$, $(f \cdot g)^{(2)}$ und $(f \cdot g)^{(3)}$ zu bestimmen.

(b) Wir betrachten nun die Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x^3$ und $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \mathrm{e}^{2x}$.
Zeigen Sie, dass für alle ganze Zahlen $n \geqq 0$ gilt:
$(f \cdot g)^{(n)}(x) = x^3 2^n \mathrm{e}^{2x} + 3nx^2 2^{n-1}\mathrm{e}^{2x} + 3n(n-1)x2^{n-2}\mathrm{e}^{2x} + n(n-1)(n-2)2^{n-3}\mathrm{e}^{2x}$.

Frischhaltebox

Aufgabe H 90. *Determinante, Inverse Matrix*

Wir betrachten die reelle Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Determinante von A und entscheiden Sie, ob A invertierbar ist. Falls ja, bestimmen Sie die inverse Matrix von A.

Z. Askarpour, T. Conde,
T. Holicki, G. Kemlin,
R. Schmähl, D. Wittwar,
D. Zimmermann

19. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 2

M. Künzer

Sommersemester 2023

Präsenzübungen

Aufgabe P 61. *Umkehrfunktion, Differentiation von Umkehrfunktionen*

Gegeben sei die Funktion $f\colon [0,+\infty) \to [-1,+\infty) : x \mapsto x^2 - 1$.

(a) Berechnen Sie die Ableitung $f'(x)$. Folgern Sie, dass f eine Umkehrfunktion besitzt.

(b) Skizzieren Sie die Graphen von f und von f^{-1}.

(c) Berechnen Sie $f^{-1}(x)$.

(d) Bestimmen Sie $(f^{-1})'(x)$ unter Verwendung der Formel für das Ableiten der Umkehrfunktion aus 2.3.1.

(e) Bestimmen Sie $(f^{-1})'(x)$ durch Ableiten des Ausdrucks aus (c) erneut.

Aufgabe P 62. *Mittelwertsatz*

Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{1}{x}$.

(a) Bestimmen Sie für die Funktion f eine Zwischenstelle $\xi \in (1,3)$ so, dass $f'(\xi) = \frac{f(3)-f(1)}{3-1}$ ist.

(b) Skizzieren Sie den Graphen von f, die Sekante durch die Punkte $(1, f(1))$ und $(3, f(3))$ sowie die Tangente an den Graphen von f an der Stelle $(\xi, f(\xi))$.

Aufgabe P 63. *Funktionsgrenzwerte und Regel von l'Hospital*

Untersuchen Sie die folgenden Funktionsgrenzwerte.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x}{\tan(x)}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \left(\frac{x^2}{\ln(x)} - \frac{1}{\ln(x)}\right)$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(\cos(x))^2 - 1}{x^2}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{\arctan(x^2-4)}{\sinh(3x-6)}$

Aufgabe P 64. *Taylorpolynome*

(a) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x^2$. Bestimmen Sie für die Funktion f das Taylorpolynom $T_2(f,x,3)$ der Stufe 2 um den Entwicklungspunkt $x_0 := 3$.

(b) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \mathrm{e}^{2x}$. Bestimmen Sie für die Funktion f das Taylorpolynom $T_3(f,x,-1)$ der Stufe 3 um den Entwicklungspunkt $x_0 := -1$.

Online-Aufgabe

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 18.05. – 24.05.)
auf folgender Webseite:

`http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/`

Hausübungen (Abgabe in ILIAS):

Aufgabe H 91. *Differentiation von Umkehrfunktionen*

(a) Sei $f\colon (0,+\infty) \to (0,+\infty)\colon x \mapsto x\mathrm{e}^x$. Skizzieren Sie den Graphen von f im Intervall $(\,0\,,\,1{,}5\,)$. Bestimmen Sie f'. Folgern Sie, dass f eine Umkehrfunktion besitzt. Berechnen Sie $f(1)$, $f^{-1}(\mathrm{e})$ und $(f^{-1})'(\mathrm{e})$.

(b) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine bijektive differenzierbare Funktion. Sei zudem $f(1) = 3$ und $f'(1) = 5$. Bestimmen Sie $(f^{-1})'(3)$.

Aufgabe H 92. *Mittelwertsatz*

Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto f(x) := \arctan(x)$.

(a) Sei x eine positive reelle Zahl. Zeigen Sie, dass es eine Zwischenstelle $\xi \in (0,x)$ gibt mit $f'(\xi) = \frac{\arctan(x)}{x}$.

(b) Zeigen Sie mittels (a), dass die folgenden Ungleichungen gelten für $x > 0$:

$$\frac{x}{1+x^2} < \arctan(x) < x.$$

(c) Seien $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto g(x) := \frac{x}{1+x^2}$ und $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto h(x) := x$. Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen f, g und h im Intervall $[-2,2]$.

Aufgabe H 93. *Funktionsgrenzwerte und Regel von l'Hospital*

Untersuchen Sie die folgenden Funktionsgrenzwerte.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\ln(-\cos(\pi x))}{\sin(\pi x)}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^4 - 4^x}{\sin(\pi x)}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - x}{x^3}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} (x+1)\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

Aufgabe H 94. *Taylorpolynome, Restglied nach Lagrange*

Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \cos(2x)$.

(a) Berechnen Sie die Taylorpolynome $T_2(f,x,0)$ und $T_4(f,x,0)$. Skizzieren Sie die Graphen von $f(x)$, $T_2(f,x,0)$ und $T_4(f,x,0)$ für $x \in [-2,2]$.

(b) Bestimmen Sie ein $C > 0$ mit $|f(x) - T_4(f,x,0)| \leqq C|x|^5$ für $x \in [-1,1]$.

Frischhaltebox

Aufgabe H 95. *Eigenwerte*

Wir betrachten die reelle Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Eigenwerte von A und entscheiden Sie, ob A diagonalisierbar ist.

Z. Askarpour, T. Conde,
T. Holicki, G. Kemlin,
R. Schmähl, D. Wittwar,
D. Zimmermann

20. Gruppenübung zur Vorlesung
Höhere Mathematik 2

M. Künzer

Sommersemester 2023

Präsenzübungen

Aufgabe P 65. *Extrema*

Sei U eine feste positive reelle Zahl.

(a) Wir betrachten ein beliebiges Rechteck mit Umfang U, Länge x und Breite y. Bestimmen Sie y in Abhängigkeit von x.

(b) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x \cdot y(x)$. Bestimmen Sie f', f'' sowie alle $x \in \mathbb{R}$ mit $f'(x) = 0$.

(c) Zeigen Sie, dass von allen Rechtecken mit gleichem Umfang das Quadrat den größten Flächeninhalt hat.

Aufgabe P 66. *Kurvendiskussion*

Wir betrachten die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x^4 - 2x^2$.

(a) Bestimmen Sie f' und f''.

(b) Bestimmen Sie die Nullstellen, die lokalen Extrema und die Wendepunkte von f.

(c) Skizzieren Sie den Graphen von f. Skizzieren Sie die Tangenten in den Wendepunkten von f.

Aufgabe P 67. *Reihen, maßgeschneidert*

Gegeben Sei die Funktion $f\colon (-1,1) \to \mathbb{R}\colon t \mapsto \dfrac{1}{1-t}$.

(a) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion: $f^{(n)}(t) = \frac{n!}{(1-t)^{n+1}}$ für $n \geqq 0$.

(b) Bestimmen Sie die Taylorreihe $T(f, x, 0)$.

(c) Vergleichen Sie diese mit der geometrischen Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} t^k$.

Aufgabe P 68. *Stammfunktionen*

Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{R}\colon t \mapsto \ln(t^2) + \arctan(t)$.

(a) Bestimmen Sie $f'(t)$.

(b) Geben Sie eine Funktion $g\colon \mathbb{R} \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{R}$ mit $g'(t) = f'(t)$ für alle $t \in \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$ so an, dass $g(t) \neq f(t)$ für alle $t \in \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$.

(c) Geben Sie eine Funktion $h\colon \mathbb{R} \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{R}$ mit $h'(t) = f'(t)$ für alle $t \in \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$ so an, dass $h(-1) = 0$ und $h(1) = 2\pi$ gelten.

Online-Aufgabe

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 25.05. – 07.06.) auf folgender Webseite:

`http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test430/`

Hausübungen (Abgabe in ILIAS):

Aufgabe H 96. *Kurvendiskussion*

Wir betrachten die Funktion $f\colon \mathbb{R}\smallsetminus\{1\}\to\mathbb{R}\colon x\mapsto \dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$

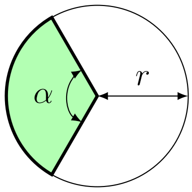
(a) Bestimmen Sie f' und f''. Hat f Wendepunkte?

(b) Bestimmen Sie die lokalen Extrema.

(c) Bestimmen Sie $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-(x-1)\right)$ sowie $\lim\limits_{x\to 1+0} f(x)$.

(d) Skizzieren Sie den Graphen von f.

Aufgabe H 97. *Extrema*



Ein Garten soll in Form eines Kreissektors mit Radius $r>0$ und Zentriwinkel $\alpha\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{11\pi}{6}\right]$ angelegt und umzäunt werden, wie in der rechts stehenden Skizze veranschaulicht.

(a) Stellen Sie Flächeninhalt F und Zaunlänge Z als Funktionen in r und α dar.

(b) Sei nun $F:=42$.

(i) Bestimmen Sie die Zaunlänge $Z=Z(\alpha)$ in Abhängigkeit von α sowie die Nullstelle α_0 von $Z'(\alpha)$.

(ii) Überprüfen Sie: Für $\alpha\in\left[\frac{\pi}{6},\alpha_0\right]$ ist Z streng monoton fallend, für $\alpha\in\left[\alpha_0,\frac{11\pi}{6}\right]$ ist Z streng monoton steigend. Überprüfen Sie ferner: $Z(\alpha)$ nimmt in α_0 ein globales Minimimum auf $\left[\frac{\pi}{6},\frac{11\pi}{6}\right]$ an.

Aufgabe H 98. *Taylorreihe*

Gegeben sei die Funktion $f\colon(-2,2)\to\mathbb{R}\colon x\mapsto -\ln(4-x^2)$.

(a) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion für $n\in\mathbb{N}$: $f^{(n)}(x)=(n-1)!\left((-1)^n\frac{1}{(2+x)^n}+\frac{1}{(2-x)^n}\right)$.

(b) Geben Sie die Taylorreihe $T(f,x,x_0)$ von f im Entwicklungspunkt $x_0:=\sqrt{3}$ an.

(c) Bestimmen Sie den Konvergenzradius ρ von $T\left(f,x,\sqrt{3}\right)$.

Aufgabe H 99. *Ableitung und Integral*

Sei $\alpha\in\mathbb{R}$ ein Parameter und f_α die Funktion $f_\alpha\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}\colon t\mapsto\sin\left(\pi\sqrt{(t-\alpha)^2}\right)$.

(a) Bestimmen Sie $f_\alpha'(t)$ für $t\neq\alpha$.

(b) Bestimmen Sie $\lim\limits_{t\to\alpha-0}\frac{f_\alpha(t)-f_\alpha(\alpha)}{t-\alpha}$ und $\lim\limits_{t\to\alpha-0} f_\alpha'(t)$.

(c) Sei nun $\alpha:=2$. Bestimmen Sie $\displaystyle\int_{1/2}^{2} f_2'(t)\,\mathrm{d}t$.

Frischhaltebox

Aufgabe H 100. *Quadriken*

Bestimmen Sie die Typen folgender Quadriken in $\mathbb{R}^3$:

(a) $\mathcal{Q}:=\left\{x\in\mathbb{R}^3\;\middle|\;-3x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+2x_2-1=0\right\}$

(b) $\mathcal{A}:=\left\{x\in\mathbb{R}^3\;\middle|\;-2x_2^2-2x_2x_3+x_3^2+4x_2+2x_3-2=0\right\}$

Z. Askarpour, T. Conde,
T. Holicki, G. Kemlin,
R. Schmähl, D. Wittwar,
D. Zimmermann

21. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 2

M. Künzer

Sommersemester 2023

Präsenzübungen

Aufgabe P 69. *Integration*

Bestimmen Sie die folgenden Integrale mit Substitution, **einschließlich** Substitution der Grenzen (vgl. 3.3.3).

(a) $\displaystyle\int_0^1 2x\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int_0^{\arcsin\left(\frac{\pi}{4}\right)} \frac{2\cos(x)}{1+(\sin(x))^2}\,\mathrm{d}x$

Aufgabe P 70. *Integration durch Substitution*

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{4+x^2}\,\mathrm{d}x$

Aufgabe P 71. *Partialbruchzerlegung*

(a) Schreiben Sie folgende Polynomfunktion als Produkt von Faktoren vom Grad 1 und Faktoren vom Grad 2 ohne reelle Nullstellen:

$$p\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}\colon x\mapsto \left(x^3-3x^2+3x-1\right)\left(x^4+2x^2+1\right)x$$

(b) Machen Sie mithilfe von (a) den **Ansatz** aus 3.4.5 – das heißt **ohne** die Bestimmung der Koeffizienten der Zählerpolynome – für

$$\frac{42}{(x^3-3x^2+3x-1)(x^4+2x^2+1)\,x}.$$

Aufgabe P 72. *Partialbruchzerlegung*

Finden Sie jeweils die Partialbruchzerlegung für die folgenden gebrochen rationalen Funktionen:

(a) $\dfrac{x+1}{x^2-9}$

(b) $\dfrac{x+1}{x^2+9}$

(c) $\dfrac{2x}{(x-3)^3}$

(d) $\dfrac{7x-15}{x^3-2x^2+5x}$

Online-Aufgabe

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 08.06. – 14.06.)
auf folgender Webseite:

`http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/`

Hausübungen (Abgabe in ILIAS):

Aufgabe H 101. *Integration mit Partialbruchzerlegung*

(a) Schreiben Sie $p(x) = x^3 + 1$ als Produkt von Faktoren vom Grad 1 und Grad 2 ohne reelle Nullstellen.

(b) Bestimmen Sie $\int \frac{x^4}{x^3+1}\,\mathrm{d}x$ mit Hilfe einer Partialbruchzerlegung.

Aufgabe H 102. *Partielle Integration und Substitution*

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\displaystyle\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} \frac{\cos(x)}{\sqrt{1-\sin(x)}}\,\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (\cos(x))^3\,\mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int_{0}^{\pi^2} \sin(\sqrt{x})\,\mathrm{d}x$

(d) $\displaystyle\int \arcsin(x)\,\mathrm{d}x$

Aufgabe H 103. *Integration durch Substitution*

(a) Bestimmen Sie $\displaystyle\int_0^{\ln(3)} \frac{2\sinh(x)}{1+(\sinh(x))^2}\,\mathrm{d}x$ mittels Substitution.

(b) Bestimmen Sie $\displaystyle\int_1^{3} \frac{2\sinh(\ln(x))}{x+x(\sinh(\ln(x)))^2}\,\mathrm{d}x$ unter Verwendung von (a).

Aufgabe H 104. *Unbestimmte Integrale*

Bestimmen Sie

(a) $\displaystyle\int \sqrt{\tfrac{t^4}{1+t^6}}\,\mathrm{d}t$

(b) $\displaystyle\int (\sin(x))^2\,\mathrm{d}x$

Frischhaltebox

Aufgabe H 105.

Untersuchen Sie die Reihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n+2(1+(-1)^n)}$ auf Konvergenz.

Z. Askarpour, T. Conde,
T. Holicki, G. Kemlin,
R. Schmähl, D. Wittwar,
D. Zimmermann

22. Gruppenübung zur Vorlesung
Höhere Mathematik 2

M. Künzer

Sommersemester 2023

Präsenzübungen

Aufgabe P 73. *Hauptsatz der Integralrechnung*

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon t \mapsto f(t)$ stetig differenzierbar. Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke:

(a) $\displaystyle\int_1^x f'(t)\,\mathrm{d}t$ **(b)** $\displaystyle\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ **(c)** $\displaystyle\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^{x^2} f(t)\,\mathrm{d}t$

Aufgabe P 74. *Uneigentliche Integrale*

Bestimmen Sie, falls möglich (das heißt: falls konvergent), die folgenden uneigentlichen Integrale:

(a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ **(c)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\,5^{-x}\,\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ **(d)** $\displaystyle\int_0^{2} \frac{1}{2-x}\,\mathrm{d}x$

Aufgabe P 75. *Potenzreihen*

(a) Berechnen Sie den Konvergenzradius ρ und die ersten zwei Ableitungen von

$$f\colon (-\rho,\rho) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} x^{n+1}.$$

(b) Finden Sie eine geschlossene Darstellung für f''.

(c) Finden Sie eine geschlossene Darstellung für f'.

(d) Finden Sie eine geschlossene Darstellung für f.

Aufgabe P 76. *Ober- und Untersummen*

Gegeben seien die Funktionen $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}\colon x \mapsto 1 - x^2$.

(a) Wir betrachten die Partition $P = \left\{-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\right\}$ von $[-1,1]$. Bestimmen Sie:

$$\Delta := \overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P)$$

(b) Finden Sie eine Partition $Q = \{-1, x_1, x_2, x_3, 1\}$ von $[-1,1]$ mit

$$\overline{S}(f,Q) - \underline{S}(f,Q) < \Delta\,.$$

Online-Aufgabe

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 15.06. – 21.06.)
auf folgender Webseite:

`http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test430/`

Hausübungen (Abgabe in ILIAS):

Aufgabe H 106. *Majoranten- und Grenzwertkriterium*

Untersuchen Sie, ob die folgenden Integrale konvergieren.

(a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^3}\,\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)+2}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+x}}\,\mathrm{d}x$

(d) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{x}\,\mathrm{d}x$

Aufgabe H 107. *Uneigentliche Integrale I*

Bestimmen Sie $\displaystyle\int_\pi^{\frac{3}{2}\pi} \mathrm{e}^{\frac{1}{\sin(t)}} \cdot \frac{\cos(t)}{(\sin(t))^2}\,\mathrm{d}t$ und $\displaystyle\int_\pi^{2\pi} \mathrm{e}^{\frac{1}{\sin(t)}} \cdot \frac{\cos(t)}{(\sin(t))^2}\,\mathrm{d}t$.

Aufgabe H 108. *Integration und Potenzreihen*

Gegeben seien die Funktionen $f, g, h\colon (-1,1) \to \mathbb{R}$ wie folgt:

$$f(s) = \sum_{k=3}^{\infty} k(k-1)s^{k-2}, \qquad g(s) = \int_0^s f(t)\,\mathrm{d}t, \qquad h(s) = \int_0^s g(t)\,\mathrm{d}t$$

(a) Bestimmen Sie $g(s)$ als Potenzreihe.

(b) Bestimmen Sie $h(s)$ als Potenzreihe.

(c) Finden Sie eine geschlossene Darstellung für $h(s)$.

(d) Finden Sie geschlossene Darstellungen für $g(s)$ und $f(s)$.

Aufgabe H 109. *Uneigentliche Integrale II*

Bestimmen Sie, falls möglich, die folgenden uneigentlichen Integrale:

(a) $\displaystyle\int\limits_0^2 (\ln(3x))^2\,\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int\limits_4^{+\infty} \frac{32}{(x^2-4)^2}\,\mathrm{d}x$

Frischhaltebox

Aufgabe H 110.

Sei $E \subseteq \mathbb{R}^3$ die Spiegelebene der Spiegelung $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon x \mapsto \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ 1 & 8 & 4 \\ -4 & 4 & -7 \end{pmatrix} x$.

Schreiben Sie E

(a) als Aufspann.

(b) in Hessescher Normalform.

Z. Askarpour, T. Conde,
T. Holicki, G. Kemlin,
R. Schmähl, D. Wittwar,
D. Zimmermann

23. Gruppenübung zur Vorlesung
Höhere Mathematik 2

M. Künzer

Sommersemester 2023

Präsenzübungen

Aufgabe P 77. *Topologie*

Wir betrachten die Menge

$$M = \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqq 0,\ x^2 + y^2 < 1 \right\} \subseteqq \mathbb{R}^2.$$

(a) Skizzieren Sie die Menge M.

(b) Bestimmen Sie $\overline{M}$, M° und ∂M.

(c) Ist M kompakt? Ist $\overline{M}$ kompakt?

Aufgabe P 78. *Folgen in $\mathbb{R}^n$*

Untersuchen Sie die Folge $(a_k)_{k \geqq 1}$ in $\mathbb{R}^n$ auf Konvergenz. Bestimmen Sie ihren Grenzwert, falls er existiert.

(a) $a_k = \binom{1/k}{(k+\sin(k))/k}$

(b) $a_k = \begin{pmatrix} \cos(\pi/k) \\ 2+k^{-1} \\ (-1)^k \ln(k) \end{pmatrix}$

(c) $a_k = \binom{\sin(\pi k/2)}{k^{-2}}$

(d) $a_k = \left(\sum_{\ell=1}^{k} \frac{1}{\ell^2}, \int_1^k \frac{1}{x^2}\, \mathrm{d}x \right)^\mathsf{T}$

Aufgabe P 79. *Stetigkeit für Funktionen mehrerer Veränderlicher*

Sei $f \colon \mathbb{R}^2 \smallsetminus \left\{ \binom{0}{0} \right\} \to \mathbb{R} \colon \binom{x}{y} \mapsto \dfrac{(x-y)(x+2y)}{x^2+y^2}$.

Zeigen Sie, dass die Funktion f im Punkt $\binom{0}{0}$ nicht stetig fortgesetzt werden kann, indem Sie zwei Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^2$ angeben mit

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} b_n = \binom{0}{0}$$

und

$$\lim_{n \to \infty} f(a_n) \neq \lim_{n \to \infty} f(b_n)\ .$$

Aufgabe P 80. *Visualisierung von Funktionen mehrer Veränderlicher*

Gegeben ist die Funktion $f \colon D \to \mathbb{R} \colon \binom{x}{y} \mapsto \dfrac{x+y^2}{x^2+y}$, wobei $D := \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y \neq 0 \right\}$.

(a) Skizzieren Sie die Menge $\mathbb{R}^2 \smallsetminus D$.

(b) Skizzieren Sie die Niveaulinien N_t zu den Niveaus $t = 1$ und $t = -1$.

(c) Bestimmen Sie den Schnitt des Graphen $\Gamma(f)$ mit der Ebene $E_1 \colon x = 0$.

(d) Bestimmen Sie den Schnitt des Graphen $\Gamma(f)$ mit der Ebene $E_2 \colon y = 0$.

(e) Ist f in $\binom{0}{0}$ stetig fortsetzbar?

Online-Aufgabe

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 22.06. – 28.06.) auf folgender Webseite:

`http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/`

Hausübungen (Abgabe in ILIAS):

Aufgabe H 111. *Topologie*

Wir betrachten die Menge

$$M = \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leqq x \leqq 1,\ -f(x) < y \leqq f(x) \right\},$$

wobei $f(x) = (1+x)(1-x)$.

(a) Skizzieren Sie die Menge M.

(b) Bestimmen Sie $\overline{M}$ und M° und ∂M.

(c) Untersuchen Sie, ob M beschränkt ist.

(d) Untersuchen Sie, ob M kompakt ist.

Aufgabe H 112. *Integral-Vergleichskriterium*

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz, indem Sie das Integral-Vergleichskriterium anwenden:

(a) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^2}$ **(b)** $\displaystyle\sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n)\ln(\ln(n))}$

Aufgabe H 113. *Funktion in mehreren Variablen I*

Gegeben ist die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \setminus \left\{\binom{0}{0}\right\} \to \mathbb{R}\colon \binom{x}{y} \mapsto \dfrac{xy+y^2}{x^2+y^2}$.

(a) Skizzieren Sie die Niveaulinien N_t von f für $t=0$ und $t=1$ in ein gemeinsames Koordinatensystem.

(b) Finden Sie eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^2$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \binom{0}{0}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = 1$

(c) Finden Sie eine Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^2$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \binom{0}{0}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} f(b_n) = -\frac{1}{5}$

(d) Kann f in $\binom{0}{0}$ stetig fortgesetzt werden?

Aufgabe H 114. *Funktion in mehreren Variablen II*

Gegeben ist die Funktion $f : D \to \mathbb{R}\colon \binom{x}{y} \mapsto \dfrac{x^2+2x}{y-1}$.

Dabei sei D die Menge aller Elemente von $\mathbb{R}^2$, für welche der Funktionsterm definiert ist.

(a) Bestimmen Sie D.

(b) Skizzieren Sie die Niveaulinie zum Niveau $t=1$ für $\binom{x}{y}$ im Bereich $[-3,1]\times[0,2]$.

(c) Finden Sie eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^2$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \binom{0}{1}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = 0$.

(d) Finden Sie eine Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^2$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \binom{0}{1}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} f(b_n) = 1$.

Frischhaltebox

Aufgabe H 115.

Gegeben sei die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n := \dfrac{n^2}{1+n^2}$ und Grenzwert a. Bestimmen Sie die kleinste natürliche Zahl $n_0 \in \mathbb{N}$, für welche $|a_n - a| < 10^{-4}$ ist für $n \geqq n_0$.

Z. Askarpour, T. Conde,
T. Holicki, G. Kemlin,
R. Schmähl, D. Wittwar,
D. Zimmermann

24. Gruppenübung zur Vorlesung
Höhere Mathematik 2

M. Künzer

Sommersemester 2023

Präsenzübungen

Aufgabe P 81. *Partielle Ableitungen*

Bestimmen Sie für die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \colon x \mapsto f(x) = f(x_1, x_2) = x_2 \mathrm{e}^{x_1^2 + \frac{1}{3}x_2}$$

die partiellen Ableitungen:

(a) $f_{x_1}(x)$ **(b)** $\dfrac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} f(x)$ **(c)** $\mathrm{D}^{(2,1)} f(x)$ **(d)** $\dfrac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1} f_{x_1}(x)$.

Aufgabe P 82. *Hessematrizen*

Vervollständigen Sie die fehlenden Eintrage der folgenden Matrizen derart, dass diese als Hessematrix einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ aus $C^2(\mathbb{R}^n)$ im Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$ auftauchen können.

(a) $\begin{pmatrix} 1 & * & 3 \\ -1 & 1 & * \\ * & 0 & 2 \end{pmatrix}$ **(b)** $\begin{pmatrix} 1 & * \\ 1 & * \end{pmatrix}$.

Aufgabe P 83. *Richtungsableitung*

Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \colon \binom{x}{y} \mapsto x^2 + xy^2$. Berechnen Sie die folgenden Richtungsableitungen sowohl mittels Definition 4.3.11 als auch mit Satz 4.3.12:

(a) $\partial_v f\binom{1}{0}$, wobei $v = \binom{1}{2}$ **(b)** $\partial_w f\binom{2}{3}$, wobei $w = \binom{0}{2}$.

Aufgabe P 84. *Satz von Schwarz*

Verifizieren Sie den Satz von Schwarz anhand der Funktion

$$f : \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y \neq 0 \right\} \to \mathbb{R} \colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \frac{x}{y} \mathrm{e}^{xy^2+1}$$

durch Berechnen der partiellen Ableitungen:

(a) $\dfrac{\partial}{\partial x} \dfrac{\partial}{\partial y} f\binom{x}{y}$ **(b)** $\dfrac{\partial}{\partial y} \dfrac{\partial}{\partial x} f\binom{x}{y}$.

Online-Aufgabe

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 29.06. – 05.07.) auf folgender Webseite:

`http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test430/`

Hausübungen (Abgabe in ILIAS):

Aufgabe H 116. *Gradient und Hessematrix*
Gegeben sind die Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x_1, x_2, x_3) = \mathrm{e}^{\sin(2x_1 + x_2 x_3)},$$

der Punkt $P = (\pi, \pi, -\frac{1}{2})^\intercal$ und der Vektor $v = (\pi, 0, -\pi)^\intercal$. Bestimmen Sie:
(a) $\operatorname{grad} f(x_1, x_2, x_3)$ **(b)** $\partial_v f(P)$ **(c)** $\mathrm{H}f(x_1, x_2, x_3)$ **(d)** $\mathrm{H}f(P)$.

Aufgabe H 117. *Niveaumengen*
Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \colon \binom{x}{y} \mapsto \mathrm{e}^{x^2-y^2}(4x^2 + y^2 - 9)$.
- **(a)** Bestimmen Sie $\operatorname{grad} f\binom{x}{y}$.
- **(b)** Bestimmen Sie ein $v \in \mathbb{R}^2$ mit $|v| = 1$ so, dass $\partial_v f\binom{2}{1} = 0$.
- **(c)** Skizzieren Sie die Niveaumenge $\mathcal{N}_0$ der Funktion f zum Niveau $c = 0$.
- **(d)** Skizzieren Sie die Menge $\mathcal{M} := \left\{ \binom{x}{y} \,\middle|\, \operatorname{grad} f\binom{x}{y} = \binom{0}{0} \right\}$ und bestimmen Sie $\mathcal{N}_0 \cap \mathcal{M}$.

Aufgabe H 118. *Hessematrizen von Polynome*
Entscheiden Sie, welche der folgenden Matrizen als Hessematrix eines Polynoms $p \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \colon \binom{x}{y} \mapsto p(x, y)$ vom Grad $\leqq 3$ vorkommen können und geben Sie im positiven Fall ein solches Polynom an:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ **(b)** $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ **(c)** $\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}$.

Aufgabe H 119. *Richtungsableitung*
Gegeben ist die Funktion $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \colon \binom{x}{y} \mapsto 2xy - y^2 + 1$.
- **(a)** Skizzieren Sie den Graphen $\Gamma(f)$ auf dem Rand des Quadrats $[0, 1] \times [0, 1]$.
- **(b)** Skizzieren Sie den Schnitt des Graphen $\Gamma(f)$ mit der Ebene $E \colon x - y = 0$ für $\binom{x}{y} \in [0, 1] \times [0, 1]$.
- **(c)** Berechnen Sie die Richtungsableitung $\partial_v f\binom{1/2}{1/2}$ in die Richtung $v = \frac{1}{\sqrt{2}}\binom{1}{1}$
- **(d)** Ergänzen Sie Ihre Skizze aus **(b)** um die Tangente in Richtung v am Punkt $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}))^\intercal$ und ermitteln Sie ihre Steigung graphisch unter Verwendung eines Steigungsdreiecks.

Frischhaltebox

Aufgabe H 120.
Gegeben ist die Funktion $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \colon x \mapsto x\mathrm{e}^x$.
- **(a)** Bestimmen Sie die n-te Ableitung $f^{(n)}(x)$ für alle $n \geqq 0$.
- **(b)** Bestimmen Sie die Taylorreihe $T(f, x, 0)$ von f um den Entwicklungspunkt 0.

Z. Askarpour, T. Conde,
T. Holicki, G. Kemlin,
R. Schmähl, D. Wittwar,
D. Zimmermann

25. Gruppenübung zur Vorlesung
Höhere Mathematik 2

M. Künzer

Sommersemester 2023

Präsenzübungen

Aufgabe P 85. *Taylorpolynome I*

Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \binom{x}{y} \mapsto \mathrm{e}^x y$. Bestimmen Sie das Taylorpolynom $T_2\left(f, \binom{x}{y}, \binom{0}{0}\right)$.

Aufgabe P 86. *Extrema ohne Nebenbedingung*

Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : \binom{x_1}{x_2} \mapsto x_1^2 + 4x_2^2 - 4$.

(a) Skizzieren Sie die Niveaumenge von f zum Niveau 0 sowie die Vorzeichenverteilung von f.

(b) Bestimmen Sie alle kritischen Stellen von f.

(c) Geben Sie mit Hilfe von (a) den Typ der kritischen Stellen (lokales Minimum/Maximum oder Sattelpunkt) an.

(d) Bestätigen Sie Ihr Ergebnis unter Verwendung der Hesse-Matrix.

Aufgabe P 87. *Extrema unter Nebenbedingungen: Lösung mittels Parametrisierung*

Gegeben seien die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \binom{x}{y} \mapsto 1 - x^2 - y^2$ sowie die Mengen
$A := \{\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1\}$ und $B := \{\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

(a) Geben Sie eine Parametrisierung α von A an.

(b) Geben Sie eine Parametrisierung β von B an.

(c) Bestimmen Sie mittels α alle lokalen Extrema von $f|_A$ sowie deren Typ.

(d) Bestimmen Sie mittels β alle lokalen Extrema von $f|_B$ sowie deren Typ.

Aufgabe P 88. *Taylorpolynome II*

Gegeben sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x^\intercal \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x + 5$.

(a) Bestimmen Sie $\nabla f(x)$ und $\mathrm{H}f\,(x)$.

(b) Geben Sie $\nabla f(a)$ und $\mathrm{H}f\,(a)$ für $a = \binom{1}{1}$ an.

(c) Geben Sie $T_2(f, x, a)$ an.

Online-Aufgabe

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 06.07. – 12.07.)
auf folgender Webseite:

`http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/`

Hausübungen (Abgabe in ILIAS):

Aufgabe H 121. *Extremalstellen*

Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon x = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) \mapsto (x_1 + 1 + x_2^2)(1 - x_1^2 - x_2^2)$.

(a) Bestimmen Sie $\nabla f(x)$ und $\mathrm{H}f\,(x)$.

(b) Skizzieren Sie $\mathcal{N} := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid f(x) = 0\}$ sowie die Vorzeichenverteilung von f.

(c) Betrachten Sie die kritische Stelle $P := \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$.
Entscheiden Sie mit (b), ob bei P ein lokales Minimum, ein lokales Maximum oder ein Sattelpunkt vorliegt.
Ließe sich dies auch mit der Hesse-Matrix entscheiden?

Aufgabe H 122. *Extrema unter Nebenbedingung*

Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \binom{x}{y} \mapsto xy$.

Sei $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \binom{x}{y} \mapsto 4x^2 + y^2 - 4$.

(a) Bestimmen Sie $\nabla f\binom{x}{y}$ und $\nabla g\binom{x}{y}$.

(b) Stellen Sie das Gleichungssystem nach Lagrange auf, mit welchem die kritischen Stellen von $f\binom{x}{y}$ unter der Nebenbedingung $g\binom{x}{y} = 0$ bestimmt werden.

(c) Bestimmen Sie mittels (b) die globalen Minimal- und Maximalstellen von $f\binom{x}{y}$ unter der Nebenbedingung $g\binom{x}{y} = 0$.

(d) Für welchen Punkt $\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2$ mit $x,\, y \geqq 0$ und mit $4x^2 + y^2 = 4$ hat das Rechteck mit den Ecken $\binom{0}{0}$, $\binom{x}{0}$, $\binom{0}{y}$, $\binom{x}{y}$ den maximalen Flächeninhalt? Skizzieren Sie die Kurve $E := \{\, \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid x,\, y \geqq 0,\ 4x^2 + y^2 = 4 \,\}$ und dieses Rechteck.

Aufgabe H 123. *Extremwerte*

Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \mapsto \frac{2}{3}y^3 - y^2\mathrm{e}^{-x} + 2x\mathrm{e}^{-3x}$.

(a) Bestimmen Sie $\nabla f\binom{x}{y}$ und $\mathrm{H}f\binom{x}{y}$.

(b) Bestimmen Sie die kritischen Stellen von f.

(c) Entscheiden Sie für die kritischen Stellen jeweils, ob an dieser ein lokales Minimum, ein lokales Maximum oder ein Sattelpunkt vorliegt.

Aufgabe H 124. *Taylorpolynome*

Bestimmen Sie $T_2\left(f, \binom{x}{y}, \binom{x_0}{y_0}\right)$ für

(a) $f\colon \{\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid x > y\} \to \mathbb{R}\colon \binom{x}{y} \mapsto \frac{1}{\sqrt{x-y}},\quad x_0 = 2,\quad y_0 = 1$

(b) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \binom{x}{y} \mapsto x^2 + 2xy + y^2,\quad x_0 = 1,\quad y_0 = 1$

Frischhaltebox

Aufgabe H 125. *Darstellungsmatrizen*

Wir betrachten den von der Basis $B\colon b_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon t \mapsto \cos(t)$, $b_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon t \mapsto \sin(t)$ aufgespannten Funktionenraum $V = \{\alpha\, b_1 + \beta\, b_2 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \subseteqq \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$.
Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix ${}_B\rho_B$ der linearen Abbildung $\rho\colon V \to V\colon f \mapsto \rho(f)$, wobei die Abbildung $\rho(f)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $(\rho(f))(t) = f\left(t - \frac{3}{2}\pi\right)$ gegeben ist.

Z. Askarpour, T. Conde,
T. Holicki, G. Kemlin,
R. Schmähl, D. Wittwar,
D. Zimmermann

26. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 2

M. Künzer

Sommersemester 2023

Präsenzübungen

Aufgabe P 89. *Extrema unter Nebenbedingungen*

Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \binom{x}{y} \mapsto x^2 - y^2$ und $N := \{\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

(a) Mit der Parametrisierung $p\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$ gilt $N = \{p(t) \mid t \in [0, 2\pi]\}$. Berechnen Sie die Extrema von f auf N, indem Sie die Funktion $f \circ p : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ auf Extrema untersuchen.

(b) Berechnen Sie die Extrema von f auf N mit Hilfe der Multiplikatorenmethode.

Aufgabe P 90. *Multiplikatorenmethode von Lagrange*

Bestimmen Sie alle Kandidaten, die nach der Methode von Lagrange als relative Extrema der Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \binom{x}{y} \mapsto 4x^2 + y^2$ unter der Nebenbedingung $x^2 y = 1$ in Frage kommen.

Wieso kann nicht ohne weiteres auf die Existenz einer Maximal- oder Minimalstelle geschlossen werden?

Aufgabe P 91. *Jacobi–Matrizen*

Bestimmen Sie jeweils die Jacobimatrix $\mathrm{J}f(a)$ für die gegebene Funktion f an der Stelle a.

(a) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \binom{x}{y} \mapsto f(x, y) = (\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}, xy)^\intercal$ und $a = (1, -1)^\intercal$.

(b) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto f(x, y, z) = (\cos(xy), \sin(xz))^\intercal$ und $a = (\frac{\pi}{4}, 1, -1)^\intercal$.

Aufgabe P 92. *Tangente an Nullstellenmenge*

Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \binom{x}{y} \mapsto x^2 + y^2 - 3x + 4y$ und sei $N \subsetneq \mathbb{R}^2$ die Nullstellenmenge von f.

(a) Überprüfen Sie, ob $P = \binom{0}{-4}$ in N liegt.

(b) Bestimmen Sie $\nabla f \binom{x}{y}$ und $\nabla f \binom{0}{-4}$.

(c) Bestimmen Sie die Tangente an N in dem Punkt P.

(d) Skizzieren Sie die Nullstellenmenge N samt der Tangente aus (c).

Online-Aufgabe

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 13.07. – 19.07.)
auf folgender Webseite:

`http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test430/`

Hausübungen (Abgabe in ILIAS):

Aufgabe H 126. *Ein Teil des Trust-Region-Verfahrens*

Gegeben seien $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{1}{2}x^\intercal Ax - b^\intercal x$ und $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{1}{2}(|x|^2 - 1)$, mit der Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ und dem Vektor $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie mit Hilfe von Lagrange die lokalen Extremstellen der Funktion f unter der Nebenbedingung $g(x) = 0$.

Aufgabe H 127. *Extrema auf berandetem Bereich*

Wir betrachten das Dreieck $D := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leqq x_1 \leqq x_2 + 1 \leqq 2\}$, sowie die Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x_1^2 + x_2^2$.

Gehen Sie wie folgt vor, um globale Extrema von f auf D zu bestimmen:

(a) Skizzieren Sie D.

(b) Bestimmen Sie Parametrisierungen h_1, h_2 und h_3 für die Seiten von D.

(c) Bestimmen Sie ein $x \in D$ so, dass $f(x) = \min\{f(y) \mid y \in D\}$ ist.

(d) Bestimmen Sie ein $x \in D$ so, dass $f(x) = \max\{f(y) \mid y \in D\}$ ist.

Aufgabe H 128. *Jacobi-Matrix und Kettenregel*

Seien $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon (x, y, z)^\intercal \mapsto x^2 + y^2 - z$ und $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3\colon t \mapsto (\cos(t), \sin(t), t)^\intercal$

(a) Bestimmen Sie $f \circ g$ und $g \circ f$.

(b) Berechnen Sie $\mathrm{J}(f \circ g)$ und $\mathrm{J}(g \circ f)$, ohne die Kettenregel zu verwenden.

(c) Bestimmen Sie $\mathrm{J}f$ und $\mathrm{J}g$. Bestimmen Sie mit der Kettenregel $\mathrm{J}(f \circ g)$ und $\mathrm{J}(g \circ f)$.

Aufgabe H 129. *Tangente und Tangentialebene*

Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \binom{x}{y} \mapsto x^2y^3 - x$. Sei $N \subseteqq \mathbb{R}^2$ die Nullstellenmenge von f.

(a) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene an den Graphen $\Gamma(f)$ im Punkt $P = (1, 1, f\binom{1}{1})^\intercal$ und die Niveaumenge der Tangentialebene zum Niveau 0.

(b) Berechnen Sie die Tangente im Punkt $(1, 1)^\intercal$ an N mittels Gradienten wie in **4.9.4**. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem Schnitt der Tangentialebene aus **(a)** mit der x-y-Ebene.

(c) Lösen Sie $x^2y^3 - x = 0$ nach y auf und verwenden Sie die resultierende Funktion, die y in Abhängigkeit von x darstellt, um die Tangente im Punkt $(1, 1)^\intercal$ an N zu berechnen. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem aus **(b)**.

(d) Skizzieren Sie N im Bereich $0 \leqq x \leqq 5$ und $-1 \leqq y \leqq 4$, sowie die Tangente im Punkt $(1, 1)^\intercal$.

Frischhaltebox

Aufgabe H 130. *Integrale*

Bestimmen Sie das Integral

$$\int \frac{x^3 + 4}{x^2 - 4}\,\mathrm{d}x.$$

Z. Askarpour, T. Conde,
T. Holicki, G. Kemlin,
R. Schmähl, D. Wittwar,
D. Zimmermann

27. Gruppenübung zur Vorlesung
Höhere Mathematik 2

M. Künzer

Sommersemester 2023

Präsenzübungen

Aufgabe P 93. *Differentialoperatoren*

Berechnen Sie die Jacobimatrix, Divergenz und Rotation des Vektorfeldes

$$g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^2 z + \cos(x) \\ y^3 + \sin(xz) \\ \mathrm{e}^{xz} + \mathrm{e}^{yz} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe P 94. *Potential*

Bestimmen Sie jeweils ein Potential für die folgenden Gradientenfelder.

(a) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2y \end{pmatrix}$

(b) $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y\,\mathrm{e}^x + z \\ \mathrm{e}^x \\ x \end{pmatrix}$

Aufgabe P 95. *Kurvenintegrale*

(a) Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon x = \binom{x_1}{x_2} \mapsto \binom{x_1 x_2}{x_1^2 + 2x_2^2}$ und $K := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| = 1 \text{ und } x_2 \geqq 0\}$. Berechnen Sie $\int_K f(x) \bullet \mathrm{d}\,x$, wobei die Kurve K gegen den Uhrzeigersinn durchlaufen werden soll.

(b) Sei $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon x = \binom{x_1}{x_2} \mapsto x_1^3 x_2 + x_1 x_2^3$. Sei Q der Rand des Quadrats mit den Ecken $\binom{0}{0}$, $\binom{1}{0}$, $\binom{1}{1}$ und $\binom{0}{1}$. Berechnen Sie $\displaystyle\int_Q \operatorname{grad} g(x) \bullet \mathrm{d}\,x$, wobei Q gegen den Uhrzeigersinn durchlaufen werden soll.

Aufgabe P 96. *Einfacher Zusammenhang*

Entscheiden Sie, welche der folgenden Mengen einfach zusammenhängend sind.

(a) $M_1 = \mathbb{R}^2$

(b) $M_2 = \mathbb{R}^2 \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

(c) $M_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, y \geqq 0 \right\}$

(d) $M_4 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 = 1 \right\}$

(e) $M_5 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 \geqq 1 \right\}$

Online-Aufgabe

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 20.07. – 26.07.) auf folgender Webseite:

`http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/`

Hausübungen (Abgabe in ILIAS):

Aufgabe H 131. *Rotation und Potentiale*

Berechnen Sie jeweils die Rotation der folgenden Vektorfelder. Welche besitzen ein Potential?

(a) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 + 2x^3 + x(1-2y) \\ y - x^2 \end{pmatrix}$

(b) $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -\mathrm{e}^{y\cos(x)}\sin(x) \\ \mathrm{e}^{y\cos(x)} y\cos(x) \end{pmatrix}$

(c) $h\colon E \to \mathbb{R}^3\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \sqrt{xy^2z^3}\begin{pmatrix} \frac{1}{x} \\ \frac{2}{y} \\ \frac{3}{z} \end{pmatrix}$ für $E = \left\{(x,y,z)^\intercal \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x > 0, y > 0, z > 0\right\}$

Aufgabe H 132. *Kurvenintegrale*

(a) Sei $K = \{\binom{x_1}{x_2} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 - x_2^2 = 1,\ x_1 \geqq 0,\ |x_2| \leqq 2\}$. Bestimmen Sie eine Parametrisierung $P\colon [-2,2] \to \mathbb{R}^2$ der Kurve K mit $P(-2) = \binom{\sqrt{5}}{-2}$.

(b) Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto f(x) = \begin{pmatrix} 1 + x_2^2 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix}$.
Berechnen Sie $\int_K f(x) \bullet \mathrm{d}\,x$ mit der in **(a)** bestimmten Parametrisierung P von K.

(c) Sei $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 - 1 \end{pmatrix}$ und $C\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto (1+\cos(t))\begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$.
Skizzieren Sie die von C parametrisierte Kurve L. Berechnen Sie $\int_L g(x) \bullet \mathrm{d}\,x$.

Aufgabe H 133. *Potential*

Gegeben Sei das Gradientenfeld $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y\cos(xy)\mathrm{e}^{yz} + 1 \\ (x\cos(xy) + z\sin(xy))\,\mathrm{e}^{yz} + z \\ y\sin(xy)\mathrm{e}^{yz} + y \end{pmatrix}$.

(a) Berechnen Sie ein Potential $U : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ von f, welches $U((0,0,0)^\intercal) = 17$ erfüllt.

(b) Sei nun $C\colon [0,2] \to \mathbb{R}^3\colon t \mapsto (\pi t, t^2, 2)^\intercal$. Berechnen Sie das Kurvenintegral von f längs der Kurve $K = \{C(t) \mid t \in [0,2]\}$ bezüglich C.

Aufgabe H 134. *Partikelbewegung in einen Vektorfeld*

Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon x = \binom{x_1}{x_2} \mapsto \binom{x_2}{x_1}$.

(a) Bestimmen Sie ein Potential U von f.

(b) Sei $C : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ differenzierbar mit $C'(t) = f(C(t))$ für alle $t \in [a,b]$.
Überprüfen Sie, dass $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}(U \circ C)(t) = |C'(t)|^2$ für alle $t \in [a,b]$ gilt.

(c) Sei nun $C : [0, \ln(2)] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \binom{\cosh(t)}{\sinh(t)}$. Bestätigen Sie die Formel aus **(b)** für C.
Für die von C parametrisierte Kurve K berechnen Sie $\int_K f(x) \bullet \mathrm{d}\,x$.

Frischhaltebox

Aufgabe H 135. *Taylorpolynom*

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x^3$. Bestimmen Sie das Taylorpolynom $T_3(f,x,1)$, das Restglied $R_3(f,x,1)$ und den Approximationsfehler $\sup\{\,|f(x) - T_3(f,x,1)| \mid x \in \mathbb{R}\,\}$.