D. Ewert
I. Rybak
S. Poppitz

Höhere Mathematik I

Prof. Dr. M. Stroppel
Prof. Dr. N. Knarr

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Winter 2008/09

Zu Aufgabe H1: Nach dem Binomischen Lehrsatz gilt

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \,.$$

Setzt man nun $a = 1,\ b = -1$, erhält man

$$\begin{aligned} (1-1)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k}(-1)^k, \\ 0 &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \,. \end{aligned}$$

Zu Aufgabe H2:
Induktionsanfang: $A(0)$:

$$\sum_{k=0}^{0} \binom{m+k}{m} = \binom{m+0}{m} = \binom{m}{m} = 1,$$

$$\binom{m+0+1}{m+1} = \binom{m+1}{m+1} = 1.$$

Induktionsschluss: $A(n) \Longrightarrow A(n+1)$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{m+k}{m} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{m+k}{m} + \binom{m+(n+1)}{m} \\ &= \binom{m+n+1}{m+1} + \binom{m+n+1}{m} \\ &= \binom{m+n+2}{m+1} = \binom{m+(n+1)+1}{m+1} \end{aligned}$$

Darstellung im Pascalschen Dreieck:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & \mathbf{1} & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & \mathbf{4} & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}$$

Hinweis zu den Hinweisen: Es nützt *nichts*, diese Hinweise nur zu kopieren und abzuheften. Es nützt auch wenig, diese nur einfach durchzulesen. Man sollte sich wenigstens zu jedem Schritt überlegen, wie man diesen rechtfertigen kann.
Am besten: Nach einem Blick auf die Hinweise erneut versuchen, die Aufgaben selbst zu lösen!

D. Ewert
I. Rybak
S. Poppitz

Höhere Mathematik I

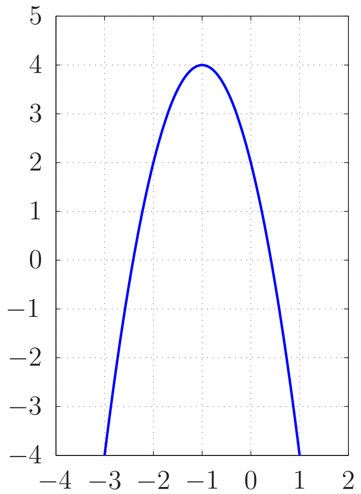
Prof. Dr. M. Stroppel
Prof. Dr. N. Knarr

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

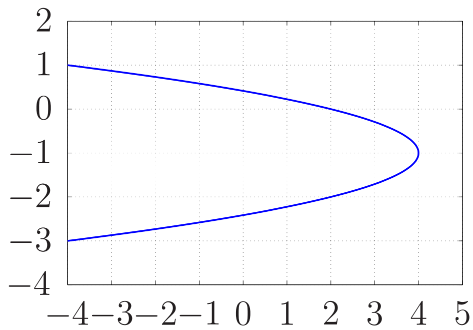
Winter 2008/09

Zu Aufgabe H3:

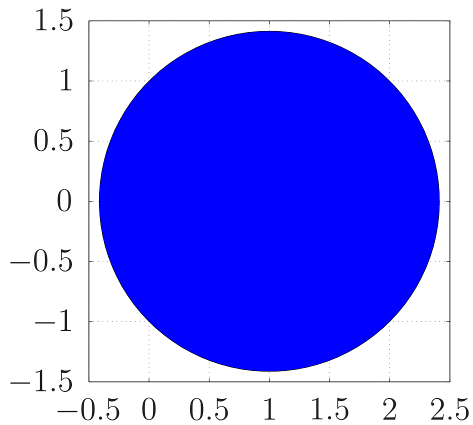
(a) Bei der Menge M_1 handelt es sich um eine Parabel, deren Scheitel bei $(-1, 4)$ liegt und die um den Faktor zwei gestreckt wurde.



Bei der Menge M_2 handelt es sich ebenfalls um eine Parabel, allerdings wurde hier der y-Wert und der x-Wert vertauscht. Hier liegt der Scheitel bei $(4, -1)$ und sie wurde auch um den Faktor zwei gestreckt.



(b) Die Menge M_3 ist eine Kreisscheibe mit Radius $\sqrt{2}$ und Mittelpunkt $(1, 0)$, wobei der Rand Bestandteil der Menge ist.



Hinweis zu den Hinweisen: Es nützt *nichts*, diese Hinweise nur zu kopieren und abzuheften. Es nützt auch wenig, diese nur einfach durchzulesen. Man sollte sich wenigstens zu jedem Schritt überlegen, wie man diesen rechtfertigen kann.
Am besten: Nach einem Blick auf die Hinweise erneut versuchen, die Aufgaben selbst zu lösen!

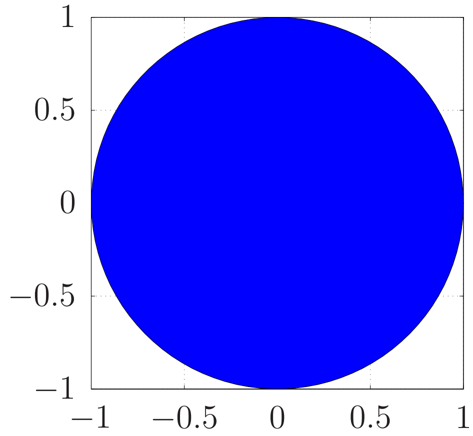
D. Ewert
I. Rybak
S. Poppitz

Prof. Dr. M. Stroppel
Prof. Dr. N. Knarr

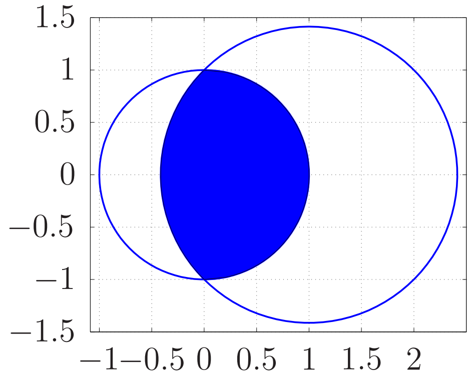
Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Winter 2008/09

Die Menge M_4 ist eine Kreisscheibe mit Radius 1 und Mittelpunkt $(0,0)$; der Rand ist dabei *nicht* Bestandteil der Menge.



Also ist die Schnittmenge von M_3 und M_4:



Der „rechte" Rand gehört dabei im Gegensatz zum „linken" Rand nicht zur Schnittmenge. Insbesondere sind die Punkte $(0,1)$ und $(0,-1)$ nicht Bestandteil der Menge.

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Winter 2008/09

Zu Aufgabe H4:
zu (a) Es ist

$$(2-3i)(3+2i) = 6+4i-9i+6 = 12-5i\,.$$

Weiter ergibt sich

$$\begin{aligned}\frac{(1+i)^2}{(1-i)^2} &= \frac{(1+i)^2\overline{(1-i)^2}}{(1-i)^2\overline{(1-i)^2}} = \frac{(1+i)^2\overline{(1-i)^2}}{((1-i)\overline{(1-i)})^2} \\ &= \frac{(1+i)^4}{(1^2-i^2)^2} = \frac{(2i)^2}{4} = -1\,.\end{aligned}$$

Insgesamt ist also

$$(2-3i)(3+2i) + \frac{(1+i)^2}{(1-i)^2} = 12-5i-1 = 11-5i\,.$$

zu (b)

$$\begin{aligned}(1+\sqrt{3}i)^3 + (1-\sqrt{3}i)^3 &= (1+\sqrt{3}i)^2\cdot(1+\sqrt{3}i) + (1-\sqrt{3}i)^2\cdot(1-\sqrt{3}i) \\ &= (1+2\sqrt{3}i-3)(1+\sqrt{3}i) + (1-2\sqrt{3}i-3)(1-\sqrt{3}i) \\ &= (-2+2\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i) + (-2-2\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i) \\ &= (-2-2\sqrt{3}i+2\sqrt{3}i-6) + (-2+2\sqrt{3}i-2\sqrt{3}i-6) \\ &= -8-8 = -16\end{aligned}$$

zu (c) Es wurde $(1+i)^2 = 2i$ und $(1+i)^4 = -4$ bereits berechnet. Es gilt

$$(1+i)^{10} = (1+i)^2\cdot\big((1+i)^4\big)^2 = 2i\cdot 16 = 32i\,.$$

zu (d)

$$\mathrm{Im}(2-4i) + \mathrm{Re}(|5+2i|) = -4 + \mathrm{Re}(\sqrt{5^2+2^2}) = -4+\sqrt{29}$$

D. Ewert
I. Rybak
S. Poppitz

Prof. Dr. M. Stroppel
Prof. Dr. N. Knarr

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Winter 2008/09

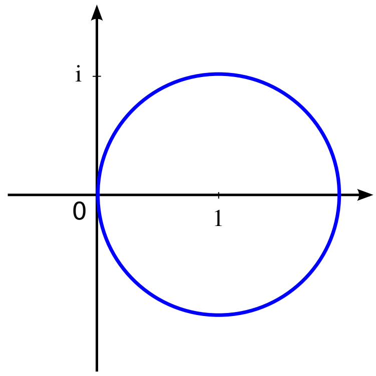
Zu Aufgabe H5:
zu (a) Für $z = a + bi$ mit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$z + \overline{z} = 2a \quad \text{und} \quad z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2 .$$

Das heißt, durch quadratisches Ergänzen erhält man

$$\begin{aligned} z + \bar{z} = z \cdot \bar{z} &\Leftrightarrow 2a = a^2 + b^2 \\ &\Leftrightarrow (a-1)^2 + b^2 = 1 \end{aligned}$$

also ist M_1 ein Kreis in der komplexen Zahlenebene mit Radius 1 und Mittelpunkt $1 + 0i$.



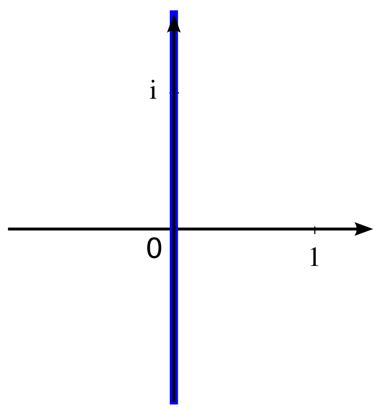
Etwas trickreicher kann man alternativ folgende Überlegung verwenden:

$$z + \overline{z} = z \cdot \overline{z} \Leftrightarrow z \cdot \overline{z} - z - \overline{z} + 1 = 1 \Leftrightarrow |z - 1|^2 = 1$$

zu (b) Es gilt

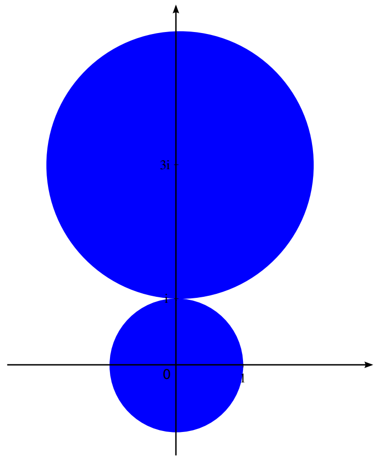
$$\begin{aligned} |z-1| = |z+1| &\Leftrightarrow |z-1|^2 = |z+1|^2 \\ &\Leftrightarrow (z-1)\overline{(z-1)} = (z+1)\overline{(z+1)} \\ &\Leftrightarrow 2(z + \bar{z}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) = 0 \end{aligned}$$

und damit ist die Menge M_2 genau die imaginäre Achse.



Hinweis zu den Hinweisen: Es nützt *nichts*, diese Hinweise nur zu kopieren und abzuheften. Es nützt auch wenig, diese nur einfach durchzulesen. Man sollte sich wenigstens zu jedem Schritt überlegen, wie man diesen rechtfertigen kann.
Am besten: Nach einem Blick auf die Hinweise erneut versuchen, die Aufgaben selbst zu lösen!

zu (c) Bei M_3 handelt es sich um die Vereinigung zweier Kreisscheiben: Eine mit Radius 1 und Mittelpunkt $0 + 0i$ und eine mit Mittelpunkt $0 + 3i$ und Radius 2.



Zu Aufgabe H6:

zu (a) Die Abbildung f ist nicht injektiv, denn $f(1) = 1 = f(-1)$, aber $1 \neq -1$.

Die Abbildung f ist surjektiv, denn zu beliebigem $z \in \mathbb{C}$ eixistiert eine Zahl $a \in \mathbb{C}$ so, dass $f(a) = a^2 = z$, vgl. Vorlesung, 1.8.4 Wurzelziehen bei komplexen Zahlen.

Da f nicht injektiv ist, kann es auch nicht bijektiv sein.

zu (b) Die Abbildung g ist nicht injektiv, denn $g(1) = 1 = g(i)$.

Die Abbildung g ist nicht surjektiv, denn für alle $c \in \mathbb{C}$ gilt $|c| \in \mathbb{R}$; die Zahl $i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ liegt also nicht im Bildbereich von g.

Da g weder injektiv noch surjektiv ist, kann es auch nicht bijektiv sein.

zu (c) Die Abbildung h ist injektiv, denn für $a, b \in \mathbb{C}$ gilt:

$$h(a) \neq h(b) \Leftrightarrow ai \neq bi \Leftrightarrow a \neq b\,.$$

Die Abbildung h ist surjektiv, denn für $z \in \mathbb{C}$ gilt $h(-iz) = i \cdot (-iz) = z$.

Damit ist h aber auch bijektiv.

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Winter 2008/09

Zu Aufgabe H7:
Es gilt:

$$\begin{aligned} z_1 &= \quad 1-i \quad = \sqrt{2}\left(\cos(\tfrac{7\pi}{4}) + i\,\sin(\tfrac{7\pi}{4})\right) \\ z_2 &= \sqrt{3}+i = 2\left(\cos(\tfrac{\pi}{6}) + i\,\sin(\tfrac{\pi}{6})\right) \\ z_3 &= \quad \sqrt{3}i \quad = \sqrt{3}\left(\cos(\tfrac{\pi}{2}) + i\,\sin(\tfrac{\pi}{2})\right) \end{aligned}$$

zu (a)

$$z_2 \cdot z_3 = 2\sqrt{3}\left(\cos(\tfrac{2\pi}{3}) + i\,\sin(\tfrac{2\pi}{3})\right) = 2\sqrt{3}\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -\sqrt{3} + 3i$$

zu (b) Es gilt:

$${z_1}^2 = 2\left(\cos(\tfrac{3\pi}{2}) + i\,\sin(\tfrac{3\pi}{2})\right) = -2i$$

Weiter ist $\overline{z_3} = -\sqrt{3}i = \sqrt{3}\left(\cos(\tfrac{3\pi}{2}) + i\,\sin(\tfrac{3\pi}{2})\right)$. Damit folgt dann

$${z_1}^2 - \overline{z_3} = -2i + \sqrt{3}i = (-2+\sqrt{3})i = (2-\sqrt{3})\left(\cos(\tfrac{3\pi}{2}) + i\,\sin(\tfrac{3\pi}{2})\right);$$

dabei ist zu beachten, dass $2 = \sqrt{4} > \sqrt{3}$ und somit $2 - \sqrt{3} > 0$.

zu (c)

$${z_2}^{10} = 2^{10}\left(\cos(10\cdot\tfrac{\pi}{6}) + i\,\sin(10\cdot\tfrac{\pi}{6})\right) = 1024\left(\cos(\tfrac{5\pi}{3}) + i\,\sin(\tfrac{5\pi}{3})\right) = 512 - 512\sqrt{3}\,i.$$

zu (d) Nach Abschnitt 1.8.4 der Vorlesung ist

$$\begin{aligned} {z_4}^2 = z_3 \Leftrightarrow z_4 &\in \left\{\sqrt[4]{3}\left(\cos(\tfrac{\pi}{4}) + i\,\sin(\tfrac{\pi}{4})\right),\ \sqrt[4]{3}\left(\cos(\tfrac{5\pi}{4}) + i\,\sin(\tfrac{5\pi}{4})\right)\right\} \\ &= \left\{\tfrac{\sqrt[4]{3}\sqrt{2}}{2} + \tfrac{\sqrt[4]{3}\sqrt{2}}{2}i,\ -\tfrac{\sqrt[4]{3}\sqrt{2}}{2} - \tfrac{\sqrt[4]{3}\sqrt{2}}{2}i\right\} \end{aligned}$$

Für $z_{4,1} = \frac{\sqrt[4]{3}\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt[4]{3}\sqrt{2}}{2}i$ gilt damit

$$z_{4,1} + \overline{z_1} = \tfrac{\sqrt[4]{3}\sqrt{2}}{2} + \tfrac{\sqrt[4]{3}\sqrt{2}}{2}i + 1 + i = \tfrac{\sqrt[4]{3}\sqrt{2}+2}{2} + \tfrac{\sqrt[4]{3}\sqrt{2}+2}{2}i = (\sqrt[4]{3}+\sqrt{2})\left(\cos(\tfrac{\pi}{4}) + i\,\sin(\tfrac{\pi}{4})\right).$$

Für $z_{4,2} = -\frac{\sqrt[4]{3}\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt[4]{3}\sqrt{2}}{2}i$ erhält man

$$z_{4,2}+\overline{z_1} = -\tfrac{\sqrt[4]{3}\sqrt{2}}{2} - \tfrac{\sqrt[4]{3}\sqrt{2}}{2}i + 1 + i = \tfrac{-\sqrt[4]{3}\sqrt{2}+2}{2} + \tfrac{-\sqrt[4]{3}\sqrt{2}+2}{2}i = (-\sqrt[4]{3}+\sqrt{2})\left(\cos(\tfrac{\pi}{4}) + i\,\sin(\tfrac{\pi}{4})\right),$$

wobei zu beachten ist, dass $\sqrt[4]{3} < \sqrt[4]{4} = \sqrt{2}$ und damit ist $\frac{-\sqrt[4]{3}+\sqrt{2}}{2} > 0$.

Hinweis zu den Hinweisen: Es nützt *nichts*, diese Hinweise nur zu kopieren und abzuheften. Es nützt auch wenig, diese nur einfach durchzulesen. Man sollte sich wenigstens zu jedem Schritt überlegen, wie man diesen rechtfertigen kann.
Am besten: Nach einem Blick auf die Hinweise erneut versuchen, die Aufgaben selbst zu lösen!

I. Rybak
S. Poppitz

Prof. Dr. M. Stroppel
Prof. Dr. N. Knarr

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Zu Aufgabe H8:

zu (a) Polynomdivision liefert:

$$p = \left(3X^5 - 21X^4 + X^3 - 5X^2 - 14X\right) : \left(X^2 - 7X\right) = 3X^3 + X + 2.$$

zu (b) Es gilt:

$$X^4 - X^2 - 12 = (X-2)\cdot(X+2)\cdot\left(X^2+3\right).$$

Zerlegung in komplexe Linearfaktoren:

$$X^4 - X^2 - 12 = (X-2)\cdot(X+2)\cdot\left(X - \sqrt{3}\,i\right)\cdot\left(X + \sqrt{3}\,i\right).$$

zu (c) Zerlegung in reelle Polynome, die nicht mehr als eine reelle Nullstelle besitzen:

- $X^4 - X^2 - 12 = (X-2)\cdot(X+2)\cdot(X^2+3)$, oder
- $X^4 - X^2 - 12 = (X-2)\cdot(X^3+2X^2+3X+6)$, oder
- $X^4 - X^2 - 12 = (X+2)\cdot(X^3-2X^2+3X-6)$.

Zu Aufgabe H9:

zu (a) Wir sollen zeigen, dass die Vektorraumaxiome für $\mathbb{C}$ mit der üblichen Addition (also $(a+bi)+(x+yi) = (a+x)+(b+y)i$) und der Multiplikation mit reellen Skalaren (also $s(a+bi) = sa+sbi$) erfüllt sind.

$(\mathbb{C},+)$ ist eine abelsche Gruppe, weil $(\mathbb{C},+,\cdot)$ ein Körper ist (siehe Vorlesung). Für die Überprüfung der anderen Vektorraumaxiome betrachten wir $s,t\in\mathbb{R}$ und $v,w\in\mathbb{C}$. Mit dem Ansatz $v = a+b\,i$, $w = x+y\,i$, wobei $a,b,x,y\in\mathbb{R}$, erhalten wir:

- $(s+t)\cdot v = (s+t)\cdot(a+b\,i) = sa+sbi+ta+tbi = s(a+bi)+t(a+bi) = s\cdot v+t\cdot v$;
- $s\cdot(v+w) = s\cdot(a+bi+x+yi) = sa+sbi+sx+syi = s(a+bi)+s(x+yi) = s\cdot v+s\cdot w$;
- $(s\cdot t)\cdot v = (s\cdot t)\cdot(a+bi) = sta+stbi = s(ta+tbi)+s(t(a+bi)) = s\cdot(t\cdot v)$;
- $1\cdot v = 1(a+bi) = a+bi = v$.

Weil alle Vektorraumaxiome erfüllt sind, ist $\mathbb{C}$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

zu (b) Zur Erinnerung: $U\subseteqq V$ heißt Untervektorraum des $\mathbb{K}$-Vektorraums V, wenn gilt:

- $\forall\, u,v\in U\colon u+v\in U$,
- $\forall\, u\in U\,\forall s\in\mathbb{K}\colon s\cdot u\in U$,
- $0\in U$.

$$R := \left\{a+0i\in\mathbb{C}\;\middle|\; a\in\mathbb{R}\right\}$$

Offenbar gilt $R\subseteqq\mathbb{C}$. Nun untersuchen wir, ob die Untervektorraumaxiome erfüllt sind.

- Für $u = a+0i$ und $v = b+0i$ in R (also mit $a,b\in\mathbb{R}$) gilt: $a+b\in\mathbb{R}$, also $u+v = a+b+0i\in R$. Damit ist das erste der Axiome nachgewiesen.

- Für $u = a+0i \in R$ und $s \in \mathbb{R}$ gilt $sa \in \mathbb{R}$ und deswegen $s \cdot u = s(a+0i) = sa+0i \in R$. Damit ist das zweite Axiom nachgewiesen.
- $0 = 0 + 0i \in R$, da $0 \in \mathbb{R}$.

Folglich ist R Untervektorraum des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{C}$.

$$G := \{ z \in \mathbb{C} \mid \arg(z) = c \}$$

Für $s \in \mathbb{R}$ mit $s < 0$ gilt $\arg(sz) \neq \arg(z)$ (in der Tat gilt $\arg(sz) = \arg(z) + \pi$ oder $\arg(sz) = \arg(z) - \pi$, je nachdem, ob $\arg(z)$ kleiner oder größer als π ist). Damit ist das zweite Axiom nicht erfüllt, und G ist kein Untervektorraum.

$$K := \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = c \}$$

Für $c \neq 0$ liegt 0 nicht in K. Damit ist das dritte Axiom verletzt, und K ist kein Untervektorraum.

Für $c = 0$ gilt $K = \{0\}$. Wegen $0 + 0 = 0$ und $s \cdot 0 = 0$ sind alle Untervektorraumaxiome erfüllt: In diesem Fall ist K ein (sehr minimalistischer) Untervektorraum!

Zum Zusatz: Wenn man $\mathbb{C}$ als $\mathbb{C}$-Vektorraum betrachtet, muss man bei $s \cdot u$ jedesmal beliebige komplexe Zahlen für s zulassen. Weil z. B. $i \cdot (a + 0i)$ nicht mehr in R liegt, ist R kein $\mathbb{C}$-Untervektorraum. Die Menge G ist immer noch nicht abgeschlossen bezüglich der Multiplikation mit Skalaren, ist also auch kein $\mathbb{C}$-Vektorraum. Die Menge K ist nur dann ein $\mathbb{C}$-Untervektorraum, wenn 0 in K liegt: also wieder nur für $c = 0$.

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Winter 2008/09

Zu Aufgabe H10:

zu (a) Wir wollen zeigen, dass $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ ein Erzeugendensystem bildet und dass die Vektoren b_1, b_2, b_3 linear unabhängig sind.

Wir zeigen zunächst $\mathbb{R}^3 = L(B) = L(b_1, b_2, b_3)$. Für ein beliebiges $v = (v_1, v_2, v_3)^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^3$ müssen wir α_1, α_2, $\alpha_3 \in \mathbb{R}$ finden, so dass $v = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \alpha_3 b_3$:

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}.$$

Dies ist äquivalent zu dem linearen Gleichungssystem

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} \alpha_1 & + & \alpha_2 & = & v_1, \\ \alpha_1 & + & \alpha_3 & = & v_2, \\ \alpha_2 & + & \alpha_3 & = & v_3. \end{array} \right.$$

Für die Koeffizienten α_j folgt hieraus

$$\alpha_1 = \frac{v_1 + v_2 - v_3}{2}, \quad \alpha_2 = \frac{v_1 - v_2 + v_3}{2}, \quad \alpha_3 = \frac{-v_1 + v_2 + v_3}{2}. \tag{1}$$

Das heißt, jeder Vektor $v = (v_1, v_2, v_3)^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^3$ lässt sich schreiben als $v = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \alpha_3 b_3$. Also bildet $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ ein Erzeugendensystem.

Mit (1) ergibt sich dann: Aus $\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \alpha_3 b_3 = 0$ folgt $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$ und $\alpha_3 = 0$, und wir haben die lineare Unabhängigkeit nachgewiesen. Folglich ist B eine Basis.

Mit 2.8.17 aus der Vorlesung kann man sich auch darauf beschränken entweder die lineare Unabhängigkeit von B oder, dass B ein Erzeugendensystem ist, nachzuweisen. Die andere Eigenschaft folgt dann direkt aus Dimensionsgründen.

zu (b) Zur Erinnerung: Ist $B = \{b_1, \dots b_n\}$ eine Basis des Vektorraums V, so lässt sich jeder Vektor $v \in V$ eindeutig als Linearkombination $v = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j b_j$ darstellen. Man nennt das Koordinatentupel $_B v = (\alpha_1, \dots \alpha_n)$ die Koordinaten von v bezüglich B.

Schreiben wir den Vektor u als Linearkombination von Vektoren b_1, b_2 und b_3:

$$\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \alpha_3 b_3 = u,$$
$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix},$$

dann haben wir

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} \alpha_1 & + & \alpha_2 & = & 2, \\ \alpha_1 & + & \alpha_3 & = & 0, \\ \alpha_2 & + & \alpha_3 & = & -4. \end{array} \right.$$

Daraus folgt $\alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = -1$, $\alpha_3 = -3$.

Das Koordinatentupel von u bezüglich B ist also ${}_Bu = (3, -1, -3)$.

Wir können auch Teil **(a)** benutzen. Wir haben $u = (2, 0, -4)^\intercal$ mit $u_1 = 2$, $u_2 = 0$, $u_3 = -4$. Dann berechnen wir mit Formel (1):

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \frac{u_1 + u_2 - u_3}{2} = \frac{2 + 0 - (-4)}{2} = 3,\\
\alpha_2 &= \frac{u_1 - u_2 + u_3}{2} = \frac{2 - 0 + (-4)}{2} = -1,\\
\alpha_3 &= \frac{-u_1 + u_2 + u_3}{2} = \frac{-2 + 0 + (-4)}{2} = -3.
\end{aligned}$$

Für $v = (0, 3, 0)^\intercal$ mit $v_1 = 0$, $v_2 = 3$, $v_3 = 0$ berechnen wir mit Formel (1):

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \frac{v_1 + v_2 - v_3}{2} = \frac{0 + 3 - 0}{2} = \frac{3}{2},\\
\alpha_2 &= \frac{v_1 - v_2 + v_3}{2} = \frac{0 - 3 + 0}{2} = -\frac{3}{2},\\
\alpha_3 &= \frac{-v_1 + v_2 + v_3}{2} = \frac{-0 + 3 + 0}{2} = \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

Das Koordinatentupel von v bezüglich B ist ${}_Bv = \left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

Für $w = (2, 3, -4)^\intercal$ nutzten wir aus, dass $w = u + v$. Dann gilt für das Koordinatentupel ${}_Bw = {}_Bu + {}_Bv$. (Der Beweis hierzu ist eine lehrreiche Übung).

I. Rybak
S. Poppitz

Prof. Dr. M. Stroppel
Prof. Dr. N. Knarr

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Winter 2008/09

Zu Aufgabe H11:

zu (a)

$$\begin{aligned}
\langle b_1 \,|\, b_2 \rangle &= 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 0 \cdot \sqrt{2} = 0, \\
\langle b_1 \,|\, b_3 \rangle &= 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 0 \cdot \sqrt{2} = 0, \\
\langle b_2 \,|\, b_3 \rangle &= (-1) \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 0.
\end{aligned}$$

zu (b)

$$\begin{aligned}
|b_1| &= \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}, \\
|b_2| &= \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (\sqrt{2})^2} = 2, \\
|b_3| &= \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (\sqrt{2})^2} = 2.
\end{aligned}$$

zu (c)

$$\begin{aligned}
&\langle b_1 \,|\, b_1 \rangle = |b_1|^2 = 2, \quad \langle b_2 \,|\, b_2 \rangle = |b_2|^2 = 4, \quad \langle b_3 \,|\, b_3 \rangle = |b_3|^2 = 4. \\
&\langle v \,|\, b_1 \rangle = 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 0, \\
&\langle v \,|\, b_2 \rangle = 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 + 0 \cdot \sqrt{2} = -2, \\
&\langle v \,|\, b_3 \rangle = 1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) + 0 \cdot \sqrt{2} = 2.
\end{aligned}$$

$$v = 0 \cdot b_1 - \frac{2}{4} \cdot b_2 + \frac{2}{4} \cdot b_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

zu (d) Aus (c) und der Definition des Koordinatentupels folgt direkt

$$_{O}v = \left(\frac{\langle v \,|\, b_1 \rangle}{\langle b_1 \,|\, b_1 \rangle}, \frac{\langle v \,|\, b_2 \rangle}{\langle b_2 \,|\, b_2 \rangle}, \frac{\langle v \,|\, b_3 \rangle}{\langle b_3 \,|\, b_3 \rangle} \right) = \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) .$$

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Zu Aufgabe H12:

Zu den Eigenschaften des Skalarproduktes:
Seien beliebige $f, g \in \mathcal{C}^0([0,1])$ und $s \in \mathbb{R}$ gegeben.

(a) $\langle f \mid g \rangle = \int_0^1 f(x)\, g(x)\,\mathrm{d}\,x = \int_0^1 g(x)\, f(x)\,\mathrm{d}\,x = \langle g \mid f \rangle$.

(b) $\langle f \mid f \rangle = \int_0^1 f(x)^2 \geqq 0$, da $f^2(x) \geqq 0$, und $\langle f \mid f \rangle = 0 \iff f = 0$, wobei die Stetigkeit der Funktion f eingeht.

(c) Da für Funktionen der Betrag noch nicht auf andere Weise definiert ist, kann man nun diese Eigenschaft zur Definition des Betrags verwenden $|f| = \left(\int_0^1 f(x)\, f(x)\,\mathrm{d}\,x \right)^{1/2}$.

(d) $\langle f \mid g + h \rangle = \int_0^1 f(x)\,(g(x) + h(x))\,\mathrm{d}\,x = \int_0^1 f(x)\, g(x)\,\mathrm{d}\,x + \int_0^1 f(x)\, h(x)\,\mathrm{d}\,x = \langle f \mid g \rangle + \langle f \mid h \rangle$.

(e) $s\,\langle f \mid g \rangle = s \int_0^1 f(x)\, g(x)\,\mathrm{d}\,x = \int_0^1 sf(x)\, g(x)\,\mathrm{d}\,x = \langle sf \mid g \rangle = \int_0^1 f(x)\, gs(x)\,\mathrm{d}\,x = \langle f \mid sg \rangle$

I. Rybak
S. Poppitz

Prof. Dr. M. Stroppel
Prof. Dr. N. Knarr

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Winter 2008/09

Zu Aufgabe H13:

Wir zeigen zunächst, dass für Vektoren $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}^3$ gilt:

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c \tag{1}$$

Für die Vektoren

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

erhalten wir (Definition des Vektorproduktes):

$$\begin{aligned} a \times (b + c) &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 + c_1 \\ b_2 + c_2 \\ b_3 + c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2\,(b_3 + c_3) - a_3\,(b_2 + c_2) \\ a_3\,(b_1 + c_1) - a_1\,(b_3 + c_3) \\ a_1\,(b_2 + c_2) - a_2\,(b_1 + c_1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 + a_2c_3 - a_3c_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 + a_3c_1 - a_1c_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 + a_1c_2 - a_2c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2c_3 - a_3c_2 \\ a_3c_1 - a_1c_3 \\ a_1c_2 - a_2c_1 \end{pmatrix} \\ &= a \times b + a \times c. \end{aligned}$$

Dass

$$(b + c) \times a = b \times a + c \times a \tag{2}$$

erkennt man via

$$(b + c) \times a = -(a \times (b + c)) \overset{(1)}{=} -(a \times b + a \times c) = -a \times b - a \times c = b \times a + c \times a\,.$$

Weiter zeigen wir, dass für $s \in \mathbb{R}$ und $a,\ b \in \mathbb{R}^3$ gilt:

$$s \cdot (a \times b) = (sa) \times b = a \times (sb). \tag{3}$$

Wir berechnen

$$\begin{aligned} s \cdot (a \times b) = s \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} sa_2b_3 - sa_3b_2 \\ sa_3b_1 - sa_1b_3 \\ sa_1b_2 - sa_2b_1 \end{pmatrix} = (sa) \times b \\ &= \begin{pmatrix} a_2sb_3 - a_3sb_2 \\ a_3sb_1 - a_1sb_3 \\ a_1sb_2 - a_2sb_1 \end{pmatrix} = a \times (sb). \end{aligned}$$

zu (a) Wir benutzen die Eigenschaften des Vektorproduktes (1)–(3), $a \times a = 0$ und $b \times a = -a \times b$. Damit erhalten wir:

$$(2a+b)\times(a+2b) = 2a\times a + b\times a + 4\,a\times b + 2b\times b \;=\; 2\cdot 0 - a\times b + 4a\times b + 2\cdot 0 \;=\; 3\,a\times b.$$

Hinweis zu den Hinweisen: Es nützt *nichts*, diese Hinweise nur zu kopieren und abzuheften. Es nützt auch wenig, diese nur einfach durchzulesen. Man sollte sich wenigstens zu jedem Schritt überlegen, wie man diesen rechtfertigen kann.
Am besten: Nach einem Blick auf die Hinweise erneut versuchen, die Aufgaben selbst zu lösen!

zu (b) Wir berechnen

$$
\begin{aligned}
&(2a+b)\times(c-a)+(b+c)\times(a+b)=\\
&=2\,a\times c+b\times c-2\,a\times a-b\times a+b\times a+c\times a+b\times b+c\times b=\\
&=2\,a\times c+b\times c-2\cdot 0-b\times a+b\times a-a\times c+0-b\times c=a\times c.
\end{aligned}
$$

Zu Aufgabe H14:

Der Flächeninhalt $S_\triangle$ des Dreiecks, das von den Vektoren $a-2b$ und $3a+2b$ aufgespannt wird, ist gleich

$$S_\triangle=\frac{1}{2}|a-2b|\,|3a+2b|\,\sin\sphericalangle(a-2b,3a+2b)=|(a-2b)\times(3a+2b)|.$$

Wegen

$$
\begin{aligned}
(a-2b)\times(3a+2b)&=3a\times a-6b\times a+2a\times b-4b\times b=3\cdot 0-6b\times a+2a\times b-4\cdot 0\\
&=-6b\times a+2a\times b=6a\times b+2a\times b=8a\times b
\end{aligned}
$$

gilt

$$S_\triangle=\frac{1}{2}|8a\times b|=4|a\times b|=4\,|a|\,|b|\,\sin\sphericalangle(a,b)=4\cdot 5\cdot 5\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=50\sqrt{2}.$$

Zu Aufgabe H15:

zu (a)

$$4A+7B=\begin{pmatrix}4&8&12\\16&20&24\\28&32&36\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-7&0&14\\49&35&0\\28&-7&14\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&8&26\\65&55&24\\56&25&50\end{pmatrix}.$$

zu (b)

$$B-A=\begin{pmatrix}-1&0&2\\7&5&0\\4&-1&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&-2&-1\\3&0&-6\\-3&-9&-7\end{pmatrix}.$$

zu (c)

$$AB^\mathsf{T}=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&7&4\\0&5&-1\\2&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&17&8\\8&53&23\\11&89&38\end{pmatrix}.$$

zu (d)

$$(A+B)C=\begin{pmatrix}0&2&5\\11&10&6\\11&7&11\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&4&15\\11&20&18\\11&14&33\end{pmatrix}.$$

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

zu (e)

$$A + 2AB^{\mathsf{T}} + C^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 & 34 & 16 \\ 16 & 106 & 46 \\ 22 & 178 & 76 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 36 & 19 \\ 20 & 113 & 52 \\ 29 & 186 & 88 \end{pmatrix}.$$

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Winter 2008/09

Zu Aufgabe H16:

zu (a) Das LGS

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x & - & 3y & + & z & - & 2 & = & 0 \\ x & + & 5y & - & 4z & + & 5 & = & 0 \\ 4x & + & y & - & 3z & + & 4 & = & 0 \end{array}$$

führt auf die erweiterte Koeffizientenmatrix

$$\left[\begin{array}{rrr||r} 2 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & -4 & -5 \\ 4 & 1 & -3 & -4 \end{array}\right].$$

Vertauschen der ersten beiden Zeilen liefert

$$Z_1 \leftrightarrow Z_2: \quad \left[\begin{array}{rrr||r} 1 & 5 & -4 & -5 \\ 2 & -3 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & -3 & -4 \end{array}\right].$$

Weiter berechnen wir

$$\begin{array}{r} \\ Z_2 - 2\,Z_1: \\ Z_3 - 4\,Z_1: \end{array} \quad \left[\begin{array}{rrr||r} 1 & 5 & -4 & -5 \\ 0 & -13 & 9 & 12 \\ 0 & -19 & 13 & 16 \end{array}\right],$$

$$-\tfrac{1}{13}\,Z_2: \quad \left[\begin{array}{rrr||r} 1 & 5 & -4 & -5 \\ 0 & 1 & -\frac{9}{13} & -\frac{12}{13} \\ 0 & -19 & 13 & 16 \end{array}\right],$$

$$\begin{array}{r} Z_1 - 5\,Z_2: \\ \\ Z_3 + 19\,Z_2: \end{array} \quad \left[\begin{array}{rrr||r} 1 & 0 & -\frac{7}{13} & -\frac{5}{13} \\ 0 & 1 & -\frac{9}{13} & -\frac{12}{13} \\ 0 & 0 & -\frac{2}{13} & -\frac{20}{13} \end{array}\right],$$

$$\begin{array}{r} Z_1 + \frac{7}{2}\,Z_1: \\ \\ Z_2 - \frac{9}{2}\,Z_3: \end{array} \quad \left[\begin{array}{rrr||r} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{13} & -\frac{20}{13} \end{array}\right],$$

$$-\tfrac{13}{2}\,Z_3: \quad \left[\begin{array}{rrr||r} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \end{array}\right].$$

Daraus erhalten wir die Lösung zu $x = 5,\ y = 6,\ z = 10$, also die Lösungsmenge

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix} \right\}.$$

Probe: Wir setzen $x = 5,\ y = 6,\ z = 10$ in die ursprüngliche Gleichung ein.

zu (b)

Das LGS führt auf die erweiterte Koeffizientenmatrix

$$\left[\begin{array}{rrr||r} 3 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right].$$

Wir berechnen

$$\begin{array}{r} Z_1 - Z_3: \\ Z_2 + 3\,Z_3: \\ -1\,Z_3: \end{array} \left[\begin{array}{rrr||r} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right],$$

$$\begin{array}{r} Z_1 - \frac{1}{2}\,Z_2: \\ \\ Z_3 + \frac{1}{2}\,Z_2: \end{array} \left[\begin{array}{rrr||r} -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & 1 & 0 \end{array}\right],$$

$$\begin{array}{r} -2\,Z_1: \\ \frac{1}{2}\,Z_2: \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{rrr||r} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{5}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & 1 & 0 \end{array}\right],$$

$$\begin{array}{r} \\ Z_2 - \frac{5}{2}\,Z_1: \\ Z_3 - \frac{3}{2}\,Z_1: \end{array} \left[\begin{array}{rrr||r} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Damit erhalten wir als eindeutige Lösung $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$, also die Lösungsmenge

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Eine Probe durch Einsetzen ist ziemlich langweilig – wichtig ist hier, dass es keine anderen Lösungen gibt!

zu (c)

Das LGS führt auf die erweiterte Koeffizientenmatrix

$$\left[\begin{array}{rrr||r} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right].$$

Wir berechnen

$$\begin{array}{r} \\ Z_2 - 2\,Z_1: \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{rrr||r} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right].$$

Hinweis zu den Hinweisen: Es nützt *nichts*, diese Hinweise nur zu kopieren und abzuheften. Es nützt auch wenig, diese nur einfach durchzulesen. Man sollte sich wenigstens zu jedem Schritt überlegen, wie man diesen rechtfertigen kann.
Am besten: Nach einem Blick auf die Hinweise erneut versuchen, die Aufgaben selbst zu lösen!

Wir vertauschen Zeilen Z_2 und Z_3 und erhalten

$$Z_2 \leftrightarrow Z_3 : \left[\begin{array}{rrr||r} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{array}\right].$$

Nach Satz 3.7.2, ist das LGS nicht lösbar, da $0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z \neq -5$, das heißt $\mathcal{L} = \{\}$.

zu (d)

Das LGS führt auf die erweiterte Koeffizientenmatrix

$$\left[\begin{array}{rrr||r} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 7 \end{array}\right].$$

Wir berechnen

$$\begin{array}{r} \\ Z_2 - 2\,Z_1 : \\ Z_3 - 3\,Z_1 : \end{array} \left[\begin{array}{rrr||r} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -7 & -5 \\ 0 & -3 & -7 & -5 \end{array}\right],$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ Z_3 - Z_2 : \end{array} \left[\begin{array}{rrr||r} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -7 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Setzen wir $z = t$, dann erhalten wir $3y + 7z = 5$ und $y = \dfrac{5-7t}{3}$. Für x bekommen wir $x = 4 - 2y - 3z = \dfrac{2+5t}{3}$. Also ist die Lösungsmenge

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{5}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ -\frac{7}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Probe: Ob alle Elemente von $\mathcal{L}$ tatsächlich Lösungen sind, überprüft man durch Einsetzen.

Zu Aufgabe H17:

Die lineare Hülle $\mathrm{L}(b_1, b_2, b_3)$ ist gegeben durch

$$\mathrm{L}(b_1, b_2, b_3) = \left\{ \alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Für die lineare Hülle $\mathrm{L}(b_4, b_5, b_6)$ erhalten wir

$$\mathrm{L}(b_4, b_5, b_6) = \left\{ \beta_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; \beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Für den Schnitt $\mathrm{L}(b_1, b_2, b_3) \cap \mathrm{L}(b_4, b_5, b_6)$ beider Mengen muss nun

$$\alpha_1 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} + \alpha_3 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} = \beta_1 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix} + \beta_2 \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\2\\1\end{pmatrix} + \beta_3 \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$$

gelten.

Dies führt auf das lineare Gleichungssystem

$$\alpha_1 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} + \alpha_3 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} - \beta_1 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix} - \beta_2 \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\2\\1\end{pmatrix} - \beta_3 \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Die zugehörige erweiterte Koeffizientenmatrix hat die Form

$$\left[\begin{array}{cccrrr||c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Mit dem Gauß-Algorithmus formt man dies um zu

$$\left[\begin{array}{cccrrr||c} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

und erhält somit als Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\\\beta_1\\\beta_2\\\beta_3\end{pmatrix} = s \begin{pmatrix}-2\\1\\0\\-1\\1\\0\end{pmatrix} + t \begin{pmatrix}-1\\0\\0\\-1\\0\\1\end{pmatrix} \quad \text{mit } s, t \in \mathbb{R}.$$

(Probe durch Einsetzen!) Dies bedeutet

$$\mathrm{L}(b_1, b_2, b_3) \cap \mathrm{L}(b_4, b_5, b_6) = \left\{ (-2s - t) \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \;\middle|\; s, t \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \right).$$

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Zu Aufgabe H18:

Für festes $\alpha \in \mathbb{R}$ sei $A_\alpha = (a_{j,k})_{1 \leqq j \leqq 4, 1 \leqq k \leqq 4}$. Weiter setzen wir

$$b_1 = \begin{pmatrix} b_{1,1} \\ b_{1,2} \\ b_{1,3} \\ b_{1,4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ b_2 = \begin{pmatrix} b_{2,1} \\ b_{2,2} \\ b_{2,3} \\ b_{2,4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ b_3 = \begin{pmatrix} b_{3,1} \\ b_{3,2} \\ b_{3,3} \\ b_{3,4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix}, \ b_4 = \begin{pmatrix} b_{4,1} \\ b_{4,2} \\ b_{4,3} \\ b_{4,4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \alpha^2 \end{pmatrix}$$

Wertet man die Bedingungen für die j-te Zeile für $1 \leqq j \leqq 4$ aus, so erhält man

$$\begin{pmatrix} a_{j,1} & a_{j,2} & a_{j,3} & a_{j,4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = b_{1,j}$$

$$\begin{pmatrix} a_{j,1} & a_{j,2} & a_{j,3} & a_{j,4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = b_{2,j}$$

$$\begin{pmatrix} a_{j,1} & a_{j,2} & a_{j,3} & a_{j,4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \alpha^2 \end{pmatrix} = b_{3,j}$$

$$\begin{pmatrix} a_{j,1} & a_{j,2} & a_{j,3} & a_{j,4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha^2 \\ 1 \end{pmatrix} = b_{4,j}$$

Dies ist für die j-te Zeile der Matrix A_α ein lineares Gleichungssystem mit 4 Gleichungen und 4 Unbekannten. Die zugehörige erweiterte Koeffizientenmatrix hat die Form:

$$\left[\begin{array}{rrrr||l} 1 & 0 & 0 & 0 & b_{1,j} \\ 1 & 1 & 0 & 0 & b_{2,j} \\ 0 & 0 & 1 & \alpha^2 & b_{3,j} \\ 0 & 0 & \alpha^2 & 1 & b_{4,j} \end{array}\right]$$

Die Koeffizientenmatrix ist dabei für jede Zeile dieselbe. Die vier linearen Gleichungssysteme für die vier Zeilen lassen sich also simultan lösen, sprich, man kann das folgende Schema für den Gauß-Algorithmus verwenden:

$$\left[\begin{array}{cccc||rrcc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha^2 & 0 & 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & \alpha^2 & 1 & 0 & 0 & 1 & \alpha^2 \end{array}\right]$$

Durch entsprechende Umformungen lässt sich dies auf die Form

$$\left[\begin{array}{cccc||cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha^2 & 0 & 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 1-\alpha^4 & 0 & 0 & 1-\alpha^2 & \alpha^2-\alpha^3 \end{array}\right]$$

bringen. Probleme mit der Lösbarkeit bekommen wir nur dann, wenn $1-\alpha^4=0$ ist – also genau dann, wenn $\alpha=-1$ oder $\alpha=1$.

Im Fall $\alpha=-1$ erhält man

$$\left[\begin{array}{cccc||cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right];$$

die letzte Spalte (die zum Gleichungssystem für die vierte Zeile der Matrix A_{-1} gehört) liefert einen Widerspruch. Für $\alpha=-1$ kann also keine solche Matrix gefunden werden, die die geforderten Bedingungen erfüllt.

Falls $\alpha\notin\{-1,1\}$, so ist $1-\alpha^4\neq 0$. Deswegen kann die erweiterte Koeffizientenmatrix weiter umgeformt werden zu

$$\left[\begin{array}{cccc||cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{1+\alpha^2} & \alpha-\alpha^2\frac{\alpha^2-\alpha^3}{1-\alpha^4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{1+\alpha^2} & \frac{\alpha^2-\alpha^3}{1-\alpha^4} \end{array}\right].$$

Die *Spalten* der rechten Seite(n) entsprechen nun den Lösungen der linearen Gleichungssysteme, die die Einträge der *Zeilen* der Matrix A_α als Unbekannte haben. Die gesuchte Matrix hat also für $\alpha\notin\{-1,1\}$ die folgende Form

$$A_\alpha=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1+\alpha^2} & \frac{1}{1+\alpha^2} \\ 0 & 0 & \alpha-\alpha^2\frac{\alpha^2-\alpha^3}{1-\alpha^4} & \frac{\alpha^2-\alpha^3}{1-\alpha^4} \end{pmatrix}$$

und ist in diesen Fällen insbesondere eindeutig.

Im Fall $\alpha=1$ besitzt die erweiterte Koeffizientenmatrix die Form

$$\left[\begin{array}{cccc||cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Dies bedeutet, dass jedes Gleichungssystem, das eine Zeile der gesuchten Matrix beschreibt, von einem reellen Parameter abhängt, und zwar unabhängig von einander. Für die Einträge der ersten Zeile der Matrix A_1 bedeutet dies zum Beispiel

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{1,2} \\ a_{1,3} \\ a_{1,4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{für } t_1 \in \mathbb{R}.$$

Es gibt unendlich viele solche Matrizen, abhängig von vier Parametern $t_1, t_2, t_3, t_4 \in \mathbb{R}$. Die Matrizen, welche die gewünschten Bedingungen erfüllen, sind genau diejenigen der folgende Form:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -t_1 & t_1 \\ 1 & -2 & -t_2 & t_2 \\ 0 & 0 & 1-t_3 & t_3 \\ 0 & 0 & 1-t_4 & t_4 \end{pmatrix} .$$

Zu Aufgabe H19:

zu (a) und (b): Weil wir später auch Inverse berechnen wollen, betrachten wir

$$\left[\begin{array}{cccc||cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & (1-\alpha)^2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & -\alpha^2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right],$$

Nach Lemma 3.9.7 ändert sich bei elementaren Zeilen- (oder Spalten-) umformungen der Rang der Matrix nicht. Mit Hilfe von Zeilenumformungen bringen wir die Matrix A_α auf die Gestalt mit linear unabhängigen Zeilen und Nullzeilen (und führen die vier rechten Seiten simultan mit). Wir berechnen

$$\begin{array}{r} \\ Z_2 - Z_1 : \\ Z_3 + Z_1 : \\ Z_4 + Z_1 : \end{array} \left[\begin{array}{cccc||cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\alpha)^2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1-\alpha^2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right],$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ \\ Z_4 + Z_2 : \end{array} \left[\begin{array}{cccc||cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\alpha)^2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\alpha^2 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]. \tag{1}$$

Für $\alpha = -1$ ergibt sich auf der linken Seite die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Diese besitzt den Rang 3 (denn sie hat 3 linear unabhängige Zeilen). Damit gilt $\operatorname{Rg} A_{-1} = 3$.
Für $\alpha = 1$ erhalten wir auf der linken Seite

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Der Rang beträgt nun 2 (es gibt 2 linear unabhängige Zeilen), also folgt $\operatorname{Rg} A_1 = 2$.
Für $\alpha \in \mathbb{R} \smallsetminus \{-1, 1\}$ gilt $\operatorname{Rg} A_\alpha = 4$. In diesem Fall existiert die Inverse A_α^{-1}. Ausgehend von (1) berechnen wir weiter:

$$\begin{array}{r} \\ \\ \frac{1}{(1-\alpha)^2}\, Z_3 : \\ \frac{1}{1-\alpha^2}\, Z_4 : \end{array} \left[\begin{array}{cccc||cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{(1-\alpha)^2} & 0 & \frac{1}{(1-\alpha)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{1-\alpha^2} & 0 & \frac{1}{1-\alpha^2} \end{array}\right],$$

$$\begin{array}{l} Z_1 - Z_4: \\ Z_2+Z_3: \\ \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{1-\alpha^2} & 0 & -\frac{1}{1-\alpha^2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1+\frac{1}{(1-\alpha)^2} & 1 & \frac{1}{(1-\alpha)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{(1-\alpha)^2} & 0 & \frac{1}{(1-\alpha)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{1-\alpha^2} & 0 & \frac{1}{1-\alpha^2} \end{array}\right].$$

Folglich ist für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ die Inverse A_α^{-1} gegeben durch

$$A_\alpha^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{1-\alpha^2} & 0 & -\frac{1}{1-\alpha^2} \\ -1+\frac{1}{(1-\alpha)^2} & 1 & \frac{1}{(1-\alpha)^2} & 0 \\ \frac{1}{(1-\alpha)^2} & 0 & \frac{1}{(1-\alpha)^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-\alpha^2} & 0 & \frac{1}{1-\alpha^2} \end{pmatrix}.$$

Zur **Probe** berechnet man $A_\alpha^{-1}\, A_\alpha = E_4$.

zu (c)

Nach der Dimensionsformel 3.8.18 gilt

$$\dim \operatorname{Kern}(\varphi_\alpha) + \dim \operatorname{Bild}(\varphi_\alpha) = 4.$$

Wegen $\dim \operatorname{Bild}(\varphi_\alpha) = \operatorname{Rg} A_\alpha$ folgt daraus

$$\dim \operatorname{Kern}(\varphi_\alpha) = 4 - \dim \operatorname{Bild}(\varphi_\alpha) = 4 - \operatorname{Rg} A_\alpha.$$

Um $\operatorname{Kern}(\varphi_\alpha)$ zu finden, müssen wir das lineare Gleichungssystem $A_\alpha x = 0$ lösen, also

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & & & & & x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ -x_1 & & & + & (1-\alpha)^2 x_3 & - & x_4 & = & 0 \\ -x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & \alpha^2 x_4 & = & 0\ . \end{array}$$

Für $\alpha = -1$ erhalten wir wie in (2)

$$\begin{array}{rcrcl} x_1 & + & x_4 & = & 0 \\ x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ & & x_3 & = & 0\ . \end{array}$$

Folglich gilt

$$\operatorname{Kern}(\varphi_{-1}) = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}, \quad \dim \operatorname{Kern}(\varphi_{-1}) = 1.$$

Aufgrund der Dimensionsformel ist $\dim \operatorname{Bild}(\varphi_{-1}) = 3$. Der Vektorraum $\operatorname{Bild}(\varphi_{-1})$ wird also aufgespannt durch drei linear unabhängige Vektoren, die sich als Bilder von geeigneten

Vektoren aus dem Definitionsbereich $\mathbb{R}^4$ ergeben. Die Spalten von A_{-1} sind die Bilder der Standardbasisvektoren, wir können unsere drei Erzeuger also aus diesen wählen. Beispielsweise gilt

$$\operatorname{Bild}(\varphi_{-1}) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\4\\1\end{pmatrix}\right) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right).$$

Man kann den Aufspann auch beschreiben als

$$\operatorname{Bild}(\varphi_{-1}) = \left\{\begin{pmatrix}a\\b\\-a+c\\-b\end{pmatrix} \,\middle|\, a,b,c\in\mathbb{R}\right\}.$$

Für $\alpha = 1$ haben wir

$$\begin{array}{rcrcl} x_1 & + & x_4 & = & 0 \\ x_2 & - & x_3 & = & 0\,. \end{array}$$

Daraus ergibt sich $\operatorname{Kern}(\varphi_1) =$

$$\mathrm{L}\left(\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}\right) = \left\{ s\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix} \,\middle|\, s,t\in\mathbb{R}\right\} = \left\{\begin{pmatrix}-s\\t\\t\\s\end{pmatrix} \,\middle|\, s,t\in\mathbb{R}\right\},$$

also $\dim\operatorname{Kern}(\varphi_1) = 2$. Aus der Dimensionsformel erhalten wir $\dim\operatorname{Bild}(\varphi_1) = 4-2 = 2$. Als Aufspann der Spalten ergibt sich

$$\operatorname{Bild}(\varphi_1) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}\right) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}\right) = \left\{\begin{pmatrix}a\\b\\-a\\-b\end{pmatrix} \,\middle|\, a,b\in\mathbb{R}\right\}.$$

Für $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{-1, 1\}$ haben wir vollen Rang, deswegen hat das homogene LGS $A_\alpha x = 0$ nur die triviale Lösung $x = 0$. Es ergibt sich

$$\operatorname{Kern}(\varphi_\alpha) = \{0\}, \quad \dim\operatorname{Kern}(\varphi_\alpha) = 0\,.$$

Mit der Dimensionsformel folgt dann unmittelbar $\dim\operatorname{Bild}(\varphi_\alpha) = 4$; damit stimmt $\operatorname{Bild}(\varphi_\alpha)$ als vierdimensionaler Teilraum von $\mathbb{R}^4$ mit $\mathbb{R}^4$ überein.

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Zu Aufgabe H20:

zu (a)

Um zu zeigen, dass das Erzeugendensystem T eine Basis ist, weisen wir nach, dass t_1, t_2, t_3 linear unabhängig sind. Dazu müssen wir nachweisen, dass

$$\forall\, x \in [0, 2\pi] \colon \alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot \cos(x) + \alpha_3 \cdot \sin(x) = 0$$

nur für $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ gilt.

Da die Gleichung für alle $x \in [0, 2\pi]$ gelten soll, muss sie auch für die speziellen Werte $x = 0$, $x = \pi/2$ und $x = \pi$ gelten. Somit erhalten wir nacheinander die folgenden Bedingungen für $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$:

$$\begin{array}{ccccccc} \alpha_1 & + & \alpha_2 & & & = & 0 \\ \alpha_1 & & & + & \alpha_3 & = & 0 \\ \alpha_1 & - & \alpha_2 & & & = & 0\ . \end{array}$$

Dieses System hat nur die triviale Lösung $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Somit ist T eine Basis.

zu (b)

B ist linear unabhängig, denn

$$0 = \alpha t_1 + \beta t_2 + \gamma(t_3 + t_2) \quad \Leftrightarrow \quad 0 = \alpha t_1 + (\beta + \gamma) t_2 + \gamma t_3\,,$$

und da T eine Basis ist, also t_1, t_2, t_3 linear unabhängig sind, kann die Null nur durch die triviale Linearkombination dargestellt werden; damit folgt $\alpha = 0$ sowie $\gamma = 0$ und schließlich $\beta = 0$. Nun erzeugt B einen dreidimensionalen Unterraum, der insbesondere in $\mathrm{L}\,(t_1, t_2, t_3)$ liegt, damit ist aus Dimensionsgründen B ebenfalls eine Basis von $\mathrm{L}\,(t_1, t_2, t_3)$.

zu (c)

Für die Matrixdarstellung ${}_TD_T$ brauchen wir die Spalten ${}_TD(t_1)$, ${}_TD(t_2)$, ${}_TD(t_3)$. Aus

$$D(t_1) = 0 \stackrel{!}{=} \alpha_1 + \alpha_2 \cos(x) + \alpha_3 \sin(x)$$

folgt

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = 0.$$

Somit lautet die erste Spalte von ${}_TD_T$:

$${}_TD(t_1) = {}_T0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Analog erhalten wir

$$D(t_2) = -\sin(x) \stackrel{!}{=} \alpha_1 + \alpha_2 \cos(x) + \alpha_3 \sin(x).$$

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = -1.$$

Somit ist die zweite Spalte von ${}_T D_T$ durch

$${}_T D(t_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Ebenso erhalten wir

$$D(t_3) = \cos(x) \stackrel{!}{=} \alpha_1 + \alpha_2 \cos(x) + \alpha_3 \sin(x)$$

und daraus sofort

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 1, \quad \alpha_3 = 0.$$

Die dritte Spalte von ${}_T D_T$ lautet nun

$${}_T D(t_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Somit erhalten wir die Matrixdarstellung

$${}_T D_T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Für die Matrixdarstellung ${}_B D_T$ erhalten wir aus

$$D(t_1) = 0 \stackrel{!}{=} \beta_1 + (\beta_2 + \beta_3) \cos(x) + \beta_3 \sin(x)$$

für die Koeffizienten

$$\beta_1 = 0, \quad \beta_2 = 0, \quad \beta_3 = 0.$$

Damit ist die erste Spalte

$${}_B D(t_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Analog erhalten wir

$$D(t_2) = -\sin(x) \stackrel{!}{=} \beta_1 + (\beta_2 + \beta_3) \cos(x) + \beta_3 \sin(x)$$

und daraus sofort

$$\beta_1 = 0, \quad \beta_2 = 1, \quad \beta_3 = -1,$$

was die zweite Spalte

$${}_B D(t_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

liefert. Ebenso folgern wir aus

$$D(t_3) = \cos(x) \stackrel{!}{=} \beta_1 + (\beta_2 + \beta_3)\cos(x) + \beta_3 \sin(x)$$

die Relationen

$$\beta_1 = 0, \quad \beta_2 = 1, \quad \beta_3 = 0,$$

und damit als dritte Spalte

$${}_BD(t_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Somit erhalten wir die Matrixdarstellung

$${}_BD_T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Für die Matrixdarstellung ${}_BD_B$ haben wir wegen $D(b_1) = D(t_1) = 0$ wieder

$${}_BD(b_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wegen

$$D(b_2) = D(t_2) = -\sin(x),$$

folgt aus (4) die zweite Spalte von ${}_BD_B$ zu

$${}_BD(t_2) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Für die dritte Spalte berechnen wir

$$D(t_3) = \cos(x) - \sin(x).$$

Mit

$$\cos(x) - \sin(x) = \beta_1 + (\beta_2 + \beta_3)\cos(x) + \beta_3 \sin(x)$$

folgt $\beta_1 = 0, \quad \beta_2 = 2, \quad \beta_3 = -1$. Somit lautet die dritte Spalte

$${}_BD(b_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Für die komplette Matrix erhalten wir nun

$${}_BD_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

zu (d)

Jedes $f \in \mathrm{L}(t_1, t_2, t_3)$ schreiben wir als

$$f = \alpha_1 + \alpha_2 \cos(x) + \alpha_3 \sin(x).$$

Da $\sin$ und $\cos$ linear unabhängig sind, erhalten wir aus

$$f' = -\alpha_2 \sin(x) + \alpha_3 \cos(x) = 0$$

die Bedingungen $\alpha_2 = 0$ und $\alpha_3 = 0$, während $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ frei gewählt werden kann. Es gilt also

$$\mathrm{Kern}(D) = \{\alpha_1 + 0 \cdot \cos(x) + 0 \cdot \sin(x) \mid \alpha_1 \in \mathbb{R}\} = \{\alpha_1 t_1 \mid \alpha_1 \in \mathbb{R}\}.$$

In Worten ausgedrückt: Der Kern der Abbildung D besteht aus allen konstanten Funktionen.

Zu Aufgabe H21:

zu (a) Nach Satz 3.8.8 ist die lineare Abbildung bereits durch die Bilder der Elemente einer Basis eindeutig festgelegt.

Konkret sind die Bilder von b_1 und b_2 schon vorgegeben, nämlich $\varphi(b_1) = b_1 + b_3$ und $\varphi(b_2) = b_2 + b_3$. Um $\varphi(b_3)$ zu bestimmen, nutzt man aus, dass φ eine lineare Abbildung ist und für das Bild von b_3 gefordert wird $\varphi(b_3 - b_2) = -b_1 - b_3$. Damit ergibt sich

$$\varphi(b_3) = \varphi(b_3 - b_2) + \varphi(b_2) = -b_1 - b_3 + b_2 + b_3 = b_2 - b_1.$$

Für $v \in V$ gibt es eine eindeutige Darstellung $v = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \alpha_3 b_3$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} \varphi(v) &= \varphi(\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \alpha_3 b_3) \\ &= \alpha_1 \varphi(b_1) + \alpha_2 \varphi(b_2) + \alpha_3 \varphi(b_3) \\ &= \alpha_1 (b_1 + b_3) + \alpha_2 (b_2 + b_3) + \alpha_3 (b_2 - b_1) \\ &= (\alpha_1 - \alpha_3) b_1 + (\alpha_2 + \alpha_3) b_2 + (\alpha_1 + \alpha_2) b_3. \end{aligned}$$

zu (b) Aus der Darstellung in (a) ergibt sich

$$_B\varphi_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

zu (c)

Aus $\varphi(v) = 0$ ergeben sich mit Hilfe der Darstellung in (a) oder der Matrixbeschreibung aus (b) die Bedingungen

$$\begin{aligned} \alpha_1 - \alpha_3 &= 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 &= 0\,. \end{aligned}$$

Daraus erhalten wir

$$\alpha_1 = t, \quad \alpha_2 = -t, \quad \alpha_3 = t, \quad \text{mit } t \in \mathbb{R}.$$

Somit gilt

$$\mathrm{Kern}\,(\varphi) = \{t(b_1 - b_2 + b_3) \mid t \in \mathbb{R}\}\,, \quad \dim \mathrm{Kern}\,(\varphi) = 1\,.$$

Die Dimensionsformel liefert nun $\dim \mathrm{Bild}\,(\varphi) = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \mathrm{Kern}\,(\varphi) = 3 - 1 = 2$. Unmittelbar lässt sich $\mathrm{Bild}\,(\varphi)$ angeben als Lineare Hülle der Bilder der Basisvektoren von B, also

$$\mathrm{Bild}\,(\varphi) = \mathrm{L}\,(\varphi(b_1), \varphi(b_2), \varphi(b_3)) = \mathrm{L}\,(b_1 + b_3, b_2 + b_3, b_2 - b_1)\ .$$

Da aber bereits klar ist, dass das Bild nur zweidimensional ist, benötigen wir nicht alle drei Vektoren, um das Bild von φ zu erzeugen. Es reicht, wenn wir zwei linear unabhängige Vektoren des angegebenen Erzeugendensystems auswählen. Damit erhalten wir zum Beispiel

$$\mathrm{Bild}\,(\varphi) = \mathrm{L}\,(b_1 + b_3, b_2 + b_3) = \mathrm{L}\,(b_1 + b_3, b_2 - b_1)\ \text{, etc.}$$

zu (d)

Wir schreiben $v \in V$ als

$$v = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3.$$

Damit gilt

$${}_F v = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$$

und

$$\langle v \mid f_1 \rangle = \alpha_1 \langle f_1 \mid f_1 \rangle + \alpha_2 \langle f_2 \mid f_1 \rangle + \alpha_3 \langle f_3 \mid f_1 \rangle\,. \tag{5}$$

Da F eine Orthonormalbasis darstellt, gelten

$$\langle f_j \mid f_k \rangle = 0 \quad \text{falls } j \neq k, \quad \text{und } \langle f_j \mid f_j \rangle = 1.$$

Damit folgt aus (5)

$$\langle v \mid f_1 \rangle = \alpha_1.$$

Analog folgen

$$\langle v \mid f_2 \rangle = \alpha_1 \langle f_1 \mid f_2 \rangle + \alpha_2 \langle f_2 \mid f_2 \rangle + \alpha_3 \langle f_3 \mid f_2 \rangle = \alpha_2,$$

$$\langle v \mid f_3 \rangle = \alpha_1 \langle f_1 \mid f_3 \rangle + \alpha_2 \langle f_2 \mid f_3 \rangle + \alpha_3 \langle f_3 \mid f_3 \rangle = \alpha_3.$$

Also gilt

$${}_F v = \begin{pmatrix} \langle v \mid f_1 \rangle \\ \langle v \mid f_2 \rangle \\ \langle v \mid f_3 \rangle \end{pmatrix}\ .$$

Dr. I. Rybak
S. Poppitz

Prof. Dr. M. Stroppel
Prof. Dr. N. Knarr

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

zu (e) Die Abbildungsmatrix ist ${}_F\varphi_B = \big(\langle \varphi(b_j) \,|\, f_k \rangle\big)_{1 \leqq k \leqq 3, 1 \leqq j \leqq 3}$, ausführlich geschrieben:

$$\begin{pmatrix} \langle \varphi(b_1) \,|\, f_1 \rangle & \langle \varphi(b_2) \,|\, f_1 \rangle & \langle \varphi(b_3) \,|\, f_1 \rangle \\ \langle \varphi(b_1) \,|\, f_2 \rangle & \langle \varphi(b_2) \,|\, f_2 \rangle & \langle \varphi(b_3) \,|\, f_2 \rangle \\ \langle \varphi(b_1) \,|\, f_3 \rangle & \langle \varphi(b_2) \,|\, f_3 \rangle & \langle \varphi(b_3) \,|\, f_3 \rangle \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \langle b_1 + b_3 \,|\, f_1 \rangle & \langle b_2 + b_3 \,|\, f_1 \rangle & \langle -b_1 + b_2 \,|\, f_1 \rangle \\ \langle b_1 + b_3 \,|\, f_2 \rangle & \langle b_2 + b_3 \,|\, f_2 \rangle & \langle -b_1 + b_2 \,|\, f_2 \rangle \\ \langle b_1 + b_3 \,|\, f_3 \rangle & \langle b_2 + b_3 \,|\, f_3 \rangle & \langle -b_1 + b_2 \,|\, f_3 \rangle \end{pmatrix}$$

Dr. I. Rybak
S. Poppitz

Höhere Mathematik I

Prof. Dr. M. Stroppel
Prof. Dr. N. Knarr

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Winter 2008/09

Zu Aufgabe H22:
zu (a)

Den Rang können wir für alle Matrizen berechnen, die Determinante nur für quadratische Matrizen, und die Inverse nur für quadratische Matrizen mit vollem Rang.

Für die quadratischen Matrizen A und B erhalten wir

$$\det A = -2, \qquad \det B = 12\,,$$

und da die Determinanten verschieden von 0 sind, kann man direkt ohne weitere Rechnug schließen, dass die Matrizen vollen Rang haben müssen, also

$$\operatorname{Rg} A = 2, \qquad \operatorname{Rg} B = 3\,.$$

Da A und B quadratisch sind und vollen Rang haben, besitzen sie eine Inverse. Diese erhalten wir durch Rechnung zu

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & \frac{5}{3} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{6} & 0 \\ \frac{3}{2} & -\frac{5}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Die Matrix C ist zwar quadratisch, hat aber nicht vollen Rang. Dies erkennen wir daran, dass die Summe der ersten und der zweiten Zeile gerade die dritte Zeile ergibt. Da weiter die zweite Zeile und die dritte Zeile linear unabhängig sind, gilt

$$\operatorname{Rg} C = 2.$$

Da C nicht vollen Rang besitzt, folgt sofort

$$\det C = 0.$$

Die Matrizen D und E sind nicht quadratisch, deshalb existieren deren Inversen nicht und auch deren Determinante kann nicht berechnet werden. In diesem Fall erhalten wir für den Rang durch Rechnung

$$\operatorname{Rg} D = 3, \quad \operatorname{Rg} E = 3.$$

zu (b)

Nach der Multiplikativität der Determinante 3.12.3 erhalten wir

$$\det(B \cdot C) = \det B \cdot \det C = 12 \cdot 0 = 0,$$
$$\det(C \cdot B) = \det C \cdot \det B = 0 \cdot 12 = 0.$$

Die Matrizen DE und ED sind quadratisch. Wir berechnen

$$DE = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 2 & 2 & -19 \\ 2 & 0 & -11 \end{pmatrix}, \qquad ED = \begin{pmatrix} 7 & -8 & -2 & 4 \\ 3 & -9 & 5 & -1 \\ 5 & 2 & -10 & 11 \\ 1 & 1 & -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Daraus erhalten wir deren Determinanten zu

$$\det(DE) = -90, \quad \det(ED) = 0.$$

Dass $\det(ED) = 0$ kann man auch ohne weitere Rechnung erkennen. Bei der Matrixmultiplikation ist jede Zeile der Produktmatrix eine Linearkombination der Zeilen des zweiten Faktors, in diesem Fall D. Nun besitzt aber D nur drei Zeilen, es können also aus diesen drei Zeilen maximal drei linear unabhängige Vektoren linear kombiniert werden, die vier Zeilen von ED müssen somit linear abhängig sein und das bedeutet $\det(ED) = 0$.

Zu Aufgabe H23:
Zunächst berechenn wir

$$\det\begin{pmatrix} -14 & x & -21 \\ 42 & y & 56 \\ 7 & z & 63 \end{pmatrix} = 7^2 \cdot \det\begin{pmatrix} -2 & x & -3 \\ 6 & y & 8 \\ 1 & z & 9 \end{pmatrix} \tag{1}$$
$$= 49(-46x - 15y - 2z) = -2254x - 735y - 98z\,.$$

zu (a)
Nach der Definition 3.8.1, ist die Abbildung $s\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^1$ linear, wenn für alle Vektoren $u, v \in \mathbb{R}^3$ und alle Skalare $k \in \mathbb{R}$

- $s(u + v) = s(u) + s(v)$,
- $s(ku) = ks(u)$

gilt.
Seien nun die Vektoren $u = (x_1, y_1, z_1)^\mathsf{T}, v = (x_2, y_2, z_2)^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^3$ und der Skalar $k \in \mathbb{R}$ beliebig. Mit Gleichung (1) gelten dann

$$s(u+v) = \det\begin{pmatrix} -14 & x_1 + x_2 & -21 \\ 42 & y_1 + y_2 & 56 \\ 7 & z_1 + z_2 & 63 \end{pmatrix} = -49(46\,(x_1 + x_2) + 15\,(y_1 + y_2) + 2\,(z_1 + z_2)$$
$$= -49\,(46x_1 + 15y_1 + 2z_1) + (-49\,(46x_2 + 15y_2 + 2z_2))$$
$$= \det\begin{pmatrix} -14 & x_1 & -21 \\ 42 & y_1 & 56 \\ 7 & z_1 & 63 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} -14 & x_2 & -21 \\ 42 & y_2 & 56 \\ 7 & z_2 & 63 \end{pmatrix} = s(u) + s(v).$$

$$s(kv) = \det\begin{pmatrix} -14 & kx & -21 \\ 42 & ky & 56 \\ 7 & kz & 63 \end{pmatrix} = -2254kx - 735ky - 98kz = k(-2254x - 735y - 98z)$$
$$= k\det\begin{pmatrix} -14 & x & -21 \\ 42 & y & 56 \\ 7 & z & 63 \end{pmatrix} = ks(v).$$

Folglich ist s eine lineare Abbildung.

Dieses Resultat kann man auch direkt mit Hilfe der Tatsache, dass die Determinante eine Volumenfunktion ist, und dem Satz 3.11.8 erhalten (eine Volumenfunktion ist homogen und additiv in jedem Argument).

zu (b)

Um $\mathrm{Kern}\,(s)$ zu finden, müssen wir die Gleichung

$$\det\begin{pmatrix} -14 & x & -21 \\ 42 & y & 56 \\ 7 & z & 63 \end{pmatrix} = 0$$

lösen. Aus (1) erhalten wir

$$-49(46x + 15y + 2z) = 0,$$

und daraus sofort

$$46x + 15y + 2z = 0.$$

Diese Gleichung besitzt drei Unbekannte. Deshalb wählen wir

$$x = t, \quad y = s, \quad t,\, s \in \mathbb{R}$$

und erhalten damit

$$z = -\frac{46t + 15s}{2}.$$

Für den Kern gilt somit

$$\mathrm{Kern}\,(s) = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ s \\ -\frac{46t+15s}{2} \end{pmatrix} \,\middle|\, t,\, s \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -23 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{15}{2} \end{pmatrix} \,\middle|\, t, s \in \mathbb{R} \right\}.$$

Andererseits kann man wieder mit Hilfe von Satz 3.11.8 schnell auf den Kern schließen, ohne dabei viel zu rechnen. Bekanntlich ergibt die Determinante den Wert 0, wenn die Spalten linear abhängig sind. Setzt man also in die Abbildung s die Vektoren

$$v_1 := \begin{pmatrix} -14 \\ 42 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad v_2 := \begin{pmatrix} -21 \\ 56 \\ 63 \end{pmatrix}$$

ein (also die erste und die letzte Spalte der Matrix, aus der die Determinate berechnet wird), so folgt sofort $s(v_1) = 0$ und $s(v_2) = 0$. Offensichtlich sind v_1 und v_2 linear unabhängig. Weiter ist $\mathrm{Bild}\,(s)$ mindestens eindimensional, da nicht alle Vektoren auf 0 abgebildet werden. Das heißt aber mit Hilfe der Dimensionsformel auch, der Kern kann höchstens zweidimensional sein, die Vektoren v_1 und v_2 sind also bereits eine Basis und es gilt

$$\mathrm{Kern}\,(s) = \mathrm{L}\,(v_1, v_2)\ .$$

zu (c) Für die Matrixdarstellung ${}_E s_B$ erhalten wir aus (1)

$$s(b_1) = s\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -49(46 \cdot 0 + 15 \cdot 0 + 2 \cdot 1) = -98.$$

Die Basis von $\mathbb{R}$ ist $E\colon 1$. Daraus folgt

$${}_E s(b_1) = -98.$$

Dies ist die erste „Spalte" von ${}_E s_B$.
Analog erhalten wir

$$s(b_2) = s\begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} = -49(46 \cdot (-2) + 15 \cdot 6 + 2 \cdot 1) = 0,$$

$$s(b_3) = s\begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ -9 \end{pmatrix} = -49(46 \cdot 3 + 15 \cdot (-8) + 2 \cdot (-9)) = 0.$$

Somit sind die zweite und die dritte „Spalte" von ${}_E s_B$ durch

$${}_E s(b_2) = 0 \quad \text{und} \quad {}_E s(b_3) = 0$$

gegeben. Folglich erhalten wir die Matrixdarstellung

$${}_E s_B = \begin{pmatrix} -98 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zu Aufgabe H24 (korrigierte Aufgabenstellung):

zu (a)

Für die Matrixdarstellung ${}_B\varphi_B$ haben wir

$$\varphi(b_1) = b_1 - 2b_3 \overset{!}{=} \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \alpha_3 b_3.$$

Daraus folgt

$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = -2.$$

Somit lautet die erste Spalte von ${}_B\varphi_B$:

$${}_B\varphi(b_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Analog erhalten wir

$$\varphi(b_2) = -b_2 \stackrel{!}{=} \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \alpha_3 b_3,$$

und folgern daraus

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = -1, \quad \alpha_3 = 0.$$

Somit ist die zweite Spalte von ${}_B\varphi_B$ durch

$${}_B\varphi(b_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gegeben. Ebenso erhalten wir

$$\varphi(b_3) = b_1 + b_2 - 2b_3 \stackrel{!}{=} \alpha_1 b - 1 + \alpha_2 b_2 + \alpha_3 b_3,$$

und daraus sofort

$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = 1, \quad \alpha_3 = -2.$$

Die dritte Spalte von ${}_B\varphi_B$ lautet nun

$${}_B\varphi(b_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Somit erhalten wir die Matrixdarstellung

$${}_B\varphi_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

zu (b)

Wegen $\mathrm{id}(b_i) = b_i$ folgt sofort

$${}_E\mathrm{id}_B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Daraus berechnen wir mit ${}_B\mathrm{id}_E = ({}_E\mathrm{id}_B)^{-1}$ sofort

$${}_B\mathrm{id}_E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

zu (c)

Wir berechnen

$$_E\varphi_E = {}_E\mathrm{id}_B \cdot {}_B\varphi_B \cdot {}_B\mathrm{id}_E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

zu (d)

Wir berechnen

$$\det\left({}_B\varphi_B\right) = 0, \quad \det\left({}_E\mathrm{id}_B\right) = 2\,.$$

Weiter gilt

$$\det\left({}_B\mathrm{id}_E\right) = \det\left({}_E\mathrm{id}_B{}^{-1}\right) = \det\left({}_E\mathrm{id}_B\right)^{-1} = \frac{1}{2}$$

sowie

$$\det\left({}_E\varphi_E\right) = \det\left({}_E\mathrm{id}_B \cdot {}_B\varphi_B \cdot {}_B\mathrm{id}_E\right) = \det\left({}_E\mathrm{id}_B\right) \cdot \det\left({}_B\varphi_B\right) \cdot \det\left({}_B\mathrm{id}_E\right) = 0\,.$$

Da ${}_B\varphi_B$ und ${}_E\varphi_E$ offensichtlich nicht vollen Rang besitzen, kann man auf $\det\left({}_B\varphi_B\right) = 0$ und $\det\left({}_E\varphi_E\right) = 0$ auch ohne weitere Rechnung schließen.

zu (e)

Gesucht ist eine Basis des Kerns in Koordinaten bezüglich der Standardbasis E. Der Kern kann also gleich anhand der Abbildungsmatrix ${}_E\varphi_E$ untersucht werden. Nun gilt einerseits offensichtlich $\mathrm{Rg}\,{}_E\varphi_E = 2$, andererseits ist wegen

$${}_E\varphi_E \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

direkt ersichtlich, dass $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^\intercal \in \mathrm{Kern}\,(\varphi)$. Da $\mathrm{Kern}\,(\varphi)$ wegen der Dimensionsformel eindimensional sein muss, ist dieser gefundene Vektor bereits eine Basis und wir erhalten

$$\mathrm{Kern}\,(\varphi) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Zu Aufgabe H25:

zu (a)

Wir wollen aus

$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\3\\0\end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix}2\\2\\4\\0\end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix}8\\-2\\6\\-4\end{pmatrix}$$

eine Orthonormalbasis F für $\mathbb{R}^4$ konstruieren. Wir überprüfen zunächst, ob v_1, v_2, v_3, v_4 eine Basis von $\mathbb{R}^4$ ist. Wegen

$$\operatorname{Rg}\begin{pmatrix}1&1&2&8\\1&0&2&-2\\1&3&4&6\\1&0&0&-4\end{pmatrix} = 4$$

sind v_1, v_2, v_3, v_4 linear unabhängig, also eine Basis ($\dim \mathbb{R}^4 = 4$). Wir führen das Schmidtsche Orthonormierungsverfahren durch. Man konstruiert den ersten Vektor durch Normieren

$$f_1 := \frac{v_1}{|f_1|} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Die Nebenbedingung $\mathrm{L}(f_1) = \mathrm{L}(v_1)$ ist offenbar erfüllt. Für den zweiten Vektor erhalten wir

$$f_2^* := v_2 - \langle v_2 \,|\, f_1\rangle f_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\3\\0\end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\3\\0\end{pmatrix} \middle| \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right\rangle \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\3\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{4}\cdot 4\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\\2\\-1\end{pmatrix},$$

$$|f_2^*| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{6},$$

$$f_2 := \frac{f_2^*}{|f_2^*|} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}0\\-1\\2\\-1\end{pmatrix}.$$

Weil f_2 eine Linearkombination von v_1, v_2 (und f_1 ein Vielfaches von v_1) ist, ist auch die Nebenbedingung $\mathrm{L}(f_1, f_2) = \mathrm{L}(v_1, v_2)$ erfüllt.

Wir haben jetzt bereits die ersten beiden Elemente unserer gesuchten ONB konstruiert. Wir gehen induktiv weiter vor. Für den dritten Vektor der Orthonormalbasis erhalten wir

$$\begin{aligned} f_3^* &:= v_3 - \langle v_3 \mid f_1 \rangle f_1 - \langle v_3 \mid f_2 \rangle f_2 \\ &= \begin{pmatrix} 2\\2\\4\\0 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 2\\2\\4\\0 \end{pmatrix} \middle| \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1\\1\\1\\1 \end{pmatrix} \right\rangle \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1\\1\\1\\1 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 2\\2\\4\\0 \end{pmatrix} \middle| \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 0\\-1\\2\\-1 \end{pmatrix} \right\rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 0\\-1\\2\\-1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2\\2\\4\\0 \end{pmatrix} - \frac{1}{4}\cdot 8 \begin{pmatrix} 1\\1\\1\\1 \end{pmatrix} - \frac{1}{6}\cdot 6 \begin{pmatrix} 0\\-1\\2\\-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\1\\0\\-1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$|f_3^*| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2},$$

$$f_3 := \frac{f_3^*}{|f_3^*|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0\\1\\0\\-1 \end{pmatrix}.$$

Die Nebenbedingung $\mathrm{L}\,(f_1, f_2, f_3) = \mathrm{L}\,(v_1, v_2, v_3)$ ergibt sich wieder aus $f_3 \in \mathrm{L}\,(f_1, f_2, v_3) = \mathrm{L}\,(v_1, v_2, v_3)$. Analog erhalten wir den vierten Vektor der gesuchten ONB

$$\begin{aligned} f_4^* &:= v_4 - \langle v_4 \mid f_1 \rangle f_1 - \langle v_4 \mid f_2 \rangle f_2 - \langle v_4 \mid f_3 \rangle f_3 \\ &= \begin{pmatrix} 8\\-2\\6\\-4 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 8\\-2\\6\\-4 \end{pmatrix} \middle| \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1\\1\\1\\1 \end{pmatrix} \right\rangle \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1\\1\\1\\1 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 8\\-2\\6\\-4 \end{pmatrix} \middle| \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 0\\-1\\2\\-1 \end{pmatrix} \right\rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 0\\-1\\2\\-1 \end{pmatrix} \\ &\quad - \left\langle \begin{pmatrix} 8\\-2\\6\\-4 \end{pmatrix} \middle| \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0\\1\\0\\-1 \end{pmatrix} \right\rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0\\1\\0\\-1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 8\\-2\\6\\-4 \end{pmatrix} - \frac{1}{4}\cdot 8 \begin{pmatrix} 1\\1\\1\\1 \end{pmatrix} - \frac{1}{6}\cdot 18 \begin{pmatrix} 0\\-1\\2\\-1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\cdot 2 \begin{pmatrix} 0\\1\\0\\-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6\\-2\\-2\\-2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$|f_4^*| = \sqrt{6^2 + (-2)^2 + (-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3},$$

$$f_4 := \frac{f_4^*}{|f_4^*|} = \frac{1}{4\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 6\\-2\\-2\\-2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 3\\-1\\-1\\-1 \end{pmatrix}.$$

Die Nebenbedingung $\mathrm{L}\,(f_1, f_2, f_3, f_4) = \mathrm{L}\,(v_1, v_2, v_3, v_4)$ ergibt sich auch hier wieder aus $f_4 \in \mathrm{L}\,(f_1, f_2, f_3, v_4) = \mathrm{L}\,(v_1, v_2, v_3, v_4)$.

Eine Probe ergibt

$$\langle f_1 \mid f_2 \rangle = \left\langle \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \middle| \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}0\\-1\\2\\-1\end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{2\sqrt{6}}(0-1+2-1) = 0,$$

$$\langle f_1 \mid f_3 \rangle = \left\langle \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \middle| \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}}(0+1+0-1) = 0,$$

$$\langle f_1 \mid f_4 \rangle = \left\langle \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \middle| \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix}3\\-1\\-1\\-1\end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{4\sqrt{3}}(3-1-1-1) = 0,$$

$$\langle f_2 \mid f_3 \rangle = \left\langle \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}0\\-1\\2\\-1\end{pmatrix} \middle| \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{12}}(0-1+0+1) = 0,$$

$$\langle f_2 \mid f_4 \rangle = \left\langle \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}0\\-1\\2\\-1\end{pmatrix} \middle| \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix}3\\-1\\-1\\-1\end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{2\sqrt{18}}(0+1-2+1) = 0,$$

$$\langle f_3 \mid f_4 \rangle = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix} \middle| \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix}3\\-1\\-1\\-1\end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{2\sqrt{6}}(0-1+0+1) = 0.$$

zu (b)

Wir berechnen

$$_E\mathrm{id}_F = \left({}_E\mathrm{id}(f_1), {}_E\mathrm{id}(f_2), {}_E\mathrm{id}(f_3), {}_E\mathrm{id}(f_4)\right) = \left({}_Ef_1, {}_Ef_2, {}_Ef_3, {}_Ef_4\right) = (f_1, f_2, f_3, f_4)\,.$$

Da die Spalten von Matrix $_E\mathrm{id}_F$ eine ONB in $\mathbb{R}^4$ bilden, ist diese Matrix orthogonal (Bemerkung 4.5.3).

Dr. I. Rybak
S. Poppitz

Höhere Mathematik I

Prof. Dr. M. Stroppel
Prof. Dr. N. Knarr

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Winter 2008/09

Zu Aufgabe H26:

Ein Kennzeichen von Bewegungen ist nach 4.6.4 aus der Vorlesung, dass der lineare Anteil orthogonal ist, d.h. die Matrizen A und B sind orthogonal. Nach Lemma 4.6.6 gilt

$$\beta \circ \alpha \colon x \mapsto BAx + (Bs + t)\,;$$

der lineare Anteil von $\beta \circ \alpha$ ist also BA, der Translationsanteil ist $Bs + t$. Um zu sehen, dass $\beta \circ \alpha$ eine Bewegung ist, braucht man nur den linearen Anteil zu betrachten, dieser muss nämlich orthogonal sein.

Nun gilt – da A und B orthogonal sind – nach Definition $A^{\mathsf{T}}A = E_n$ und $B^{\mathsf{T}}B = E_n$. Damit erhält man

$$(BA)^{\mathsf{T}}BA = A^{\mathsf{T}}B^{\mathsf{T}}BA = A^{\mathsf{T}}E_nA = A^{\mathsf{T}}A = E_n$$

also ist BA orthogonal und somit $\beta \circ \alpha$ eine Bewegung.

Man kann auch direkt mit der Definition 4.6.2 argumentieren. Damit folgt, dass für alle $P, Q \in \mathbb{R}^3$ gilt:

$$\big|\alpha(P) - \alpha(Q)\big| = \big|P - Q\big| \quad \text{und} \quad \big|\beta(P) - \beta(Q)\big| = \big|P - Q\big|\,.$$

Das heißt aber auch

$$\big|\beta \circ \alpha(P) - \beta \circ \alpha(Q)\big| = \big|\alpha(P) - \alpha(Q)\big| = \big|P - Q\big|$$

für beliebige $P, Q \in \mathbb{R}^3$. Somit ist $\beta \circ \alpha$ nach Definition eine Bewegung.

Da der lineare Anteil einer Bewegung eine orthogonale Matrix ist – diese sind nach Satz 4.5.6 der Vorlesung invertierbar –, kann man mit Lemma 4.6.6 mit Hilfe der unter 3. angegebenen Formel die Inverse einer jeden Bewegung explizit angeben, nämlich $\alpha^{-1} \colon x \mapsto A^{-1}x - A^{-1}s$, wenn die Bewegung $\alpha \colon x \mapsto Ax + s$ untersucht wird. Insbesondere gilt in diesem Fall $A^{-1} = A^{\mathsf{T}}$. Um einzusehen, dass α^{-1} eine Bewegung ist, muss der lineare Anteil $A^{-1} = A^{\mathsf{T}}$ auf Orthogonalität untersucht werden. Da aber $A = (A^{\mathsf{T}})^{\mathsf{T}}$ hier die Inverse von A^{T} ist, folgt dies unmittelbar. Damit ist die Inverse einer Bewegung ebenfalls eine Bewegung.

Zu Aufgabe H27:

zu (a)

Offenbar ist δ^0 eine Bewegung, denn der lineare Anteil von δ^0 ist die orthogonale Matrix $E_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Wir zeigen nun, dass δ auch eine Bewegung ist. Ihr linearer Anteil

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

ist orthogonal, da

$$AA^{\mathsf{T}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

somit ist δ eine Bewegung. Nach dem Resultat der Aufgabe H26 (die Komposition von Bewegungen ist eine Bewegung), ist $\delta^1 = \delta \circ \delta^0$ auch eine Bewegung. Mittels Induktion erhalten wir, dass $\delta \circ \delta^{n-1}$ für $n \in \mathbb{N}$ auch eine Bewegung ist.

Die Abbildung δ ist insbesondere eine Drehung mit Drehwinkel $\varphi = \pi/3$, da

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\pi/3) & -\sin(\pi/3) \\ \sin(\pi/3) & \cos(\pi/3) \end{pmatrix}.$$

zu (b)

Um die Fixpunkte von δ zu finden, müssen wir das lineare Gleichungssystem $Ax = x$ lösen. Wir erhalten

$$\begin{array}{rcrcl} \frac{1}{2}x_1 & - & \frac{\sqrt{3}}{2}x_2 & = & x_1, \\ \frac{\sqrt{3}}{2}x_1 & + & \frac{1}{2}x_2 & = & x_2, \end{array}$$

woraus sofort $x_1 = x_2 = 0$ folgt. Der einzige Fixpunkt ist durch $F = (0,0)$ gegeben.

zu (c)

Die Gerade g_0 ist durch

$$g_0 = \left\{ \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

gegeben. Wir berechnen

$$\begin{aligned} g_1 = \delta^1(g_0) = \delta(g_0) &= \left\{ \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \cdot \left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} + \frac{\lambda}{2} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

Für g_2 erhalten wir

$$\begin{aligned} g_2 = \delta(g_1) &= \left\{ \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \cdot \left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} + \frac{\lambda}{2} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \right) \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\lambda}{2} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

Analog berechnen wir für g_3

$$\begin{aligned} g_3 = \delta(g_2) &= \left\{ \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{\lambda}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \right) \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

Für g_4 erhalten wir

$$\begin{aligned} g_4 = \delta(g_3) &= \left\{ \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \cdot \left(-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} + \frac{\lambda}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

Für g_5 berechnen wir analog

$$g_5 = \delta(g_4) = \left\{ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \cdot \left(-\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} + \frac{\lambda}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix} \right) \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$
$$= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\lambda}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Für g_6 erhalten wir

$$g_6 = \delta(g_5) = \left\{ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \right) \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$
$$= \left\{ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{R} \right\} = g_0.$$

Wir sehen, dass $g_6 = g_0$ gilt. Analog erhalten wir $g_7 = g_1$ und allgemein $g_{k+6} = g_k$. Die angegebenen Mengen g_k haben offensichtlich die Form von Geraden, denn der jeweilige Richtungsvektor ist verschieden von 0.

zu (d)

Ein Blick auf die vorherigen Rechnungen zeigt sogar: Ist

$$x_\lambda = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in g_0\,,$$

dann ist $\delta^6(x_\lambda) = x_\lambda$, das heißt aber auch $\delta^7(x_\lambda) = \delta(x_\lambda)$. Nun sind aber δ und δ^7 nicht nur affine Abbildungen, sondern insbesondere auch lineare Abbildungen, sind also durch die Angabe der Bilder einer Basis bereits festgelegt. Zum Beispiel bilden die Punkte $x_0, x_1 \in g_0$ eine Basis von $\mathbb{R}^2$ und werden sowohl von δ als auch von δ^7 auf dieselben Werte abgebildet, deswegen stimmen δ und δ^7 überein.

zu (e)

Wir stellen zunächst folgende Vorüberlegung an:

Die Geraden g_k und g_l schneiden sich genau dann in dem Punkt x, wenn sich $\delta(g_k) = g_{k+1}$ und $\delta(g_l) = g_{l+1}$ in dem Punkt $\delta(x)$ schneiden.

[Liegt $x \in g_k$, so folgt $\delta(x) \in \delta(g_k)$, liegt $x \in g_l$, so folgt $\delta(x) \in \delta(g_l)$. Wenn also x im Schnitt der beiden Geraden liegt, dann liegt $\delta(x)$ im Schnitt der beiden Bildgeraden unter δ.

Ist andererseits $\delta(x) \in \delta(g_l) \cap \delta(g_k)$, so folgt mit obigen (nach 5-maligem Anwenden von δ):

$$x = \delta^6(x) = \delta^5(\delta(x)) \in \delta^5(\delta(g_k)) \cap \delta^5(\delta(g_l)) = \delta^6(g_k) \cap \delta^6(g_l) = g_k \cap g_l\,.$$
]

Wir können uns also darauf beschränken, die Schnittpunkte einer festen Geraden mit allen anderen zu betrachten und erhalten alle weiteren Schnittpunkte durch gegebenenfalls mehrfaches Anwenden von δ.

Gehen wir also von der Geraden g_0 aus.

Man sieht sofort, dass g_0 zu g_3 parallel ist, denn die Richtungsvektoren sind linear abhängig. Genauso ist g_1 parallel zu g_4, und g_2 ist parallel zu g_5. Allgemein ist g_k parallel zu g_{k+3}. Weiterhin sieht man anhand der Richtungsvektoren, dass g_0 jeweils einen Schnittpunkt mit g_1, g_2, g_4 und g_5 besitzt.

Den Schnittpunkt P_{01} von g_0 und g_1 bestimmen wir über Gleichsetzen und Lösen des resultierenden linearen Gleichungssystems und erhalten:

$$P_{01} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$$

Auf demselben Weg erhält man den Schnittpunkt P_{02} von g_0 und g_2:

$$P_{02} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Alle anderen Schnittpunkte von g_0 mit anderen Geraden können nun mit Hilfe von δ bestimmt werden. Denn

$$g_0 \cap g_4 = g_6 \cap g_4 = \delta^4(g_2) \cap \delta^4(g_0) = \delta^4(P_{02})$$

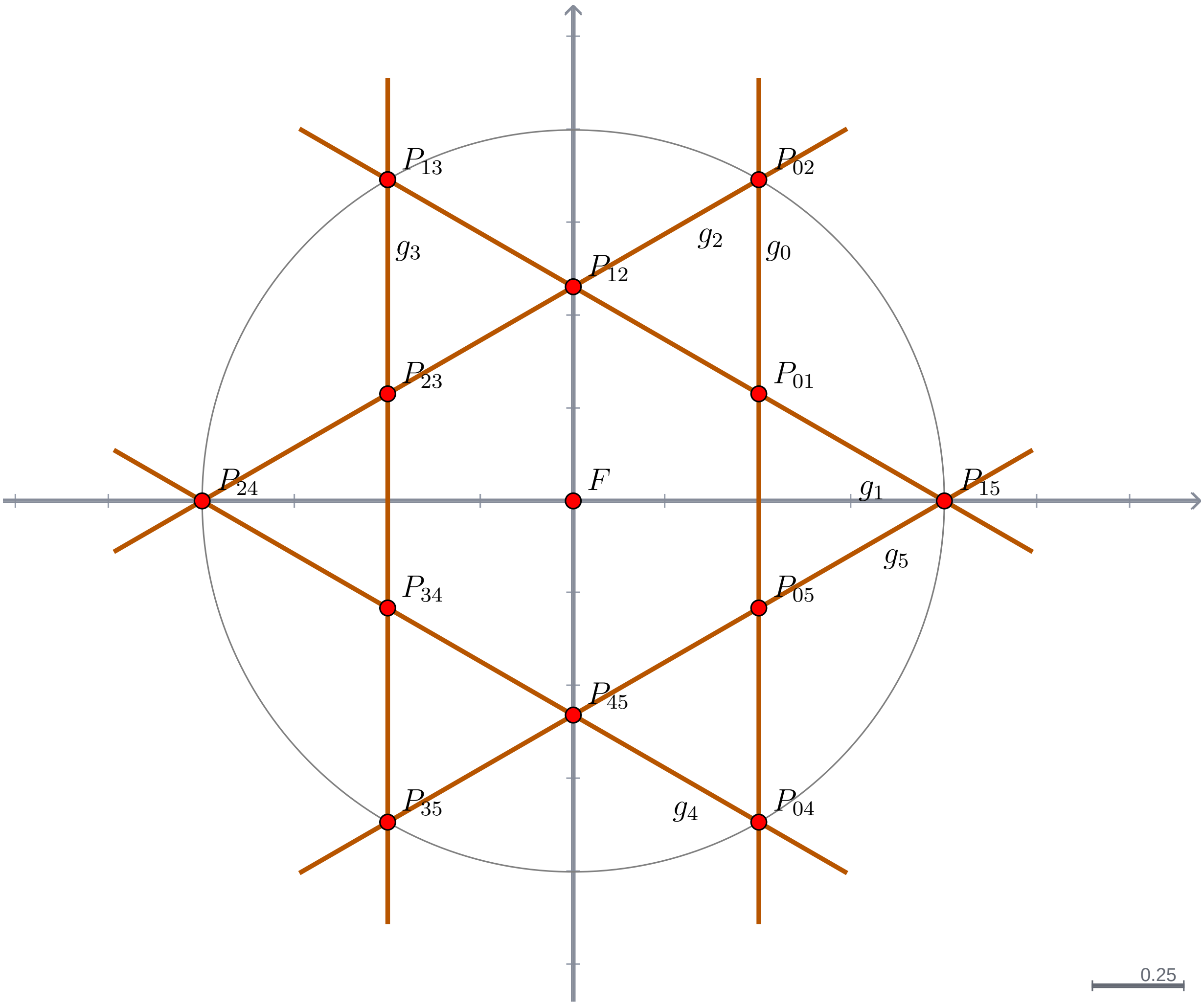
und

$$g_0 \cap g_5 = g_6 \cap g_5 = \delta^5(g_1) \cap \delta^5(g_0) = \delta^5(P_{01})\,.$$

Somit sind alle Schnittpunkte von g_0 mit den anderen Geraden bekannt, durch Anwendung von δ ergeben sich diese wie folgt:

$$\begin{aligned}
P_{12} = g_1 \cap g_2 = \delta(P_{01}) &= \left(0, \tfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\\
P_{13} = g_1 \cap g_3 = \delta(P_{02}) &= \left(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\\
P_{23} = g_2 \cap g_3 = \delta(P_{12}) &= \left(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2\sqrt{3}}\right)\\
P_{24} = g_2 \cap g_4 = \delta(P_{13}) &= \left(-1, 0\right)\\
P_{34} = g_3 \cap g_4 = \delta(P_{23}) &= \left(-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2\sqrt{3}}\right)\\
P_{35} = g_3 \cap g_5 = \delta(P_{24}) &= \left(-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\\
P_{45} = g_4 \cap g_5 = \delta(P_{34}) &= \left(0, -\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\\
P_{04} = g_0 \cap g_4 = \delta(P_{35}) &= \left(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\\
P_{05} = g_0 \cap g_5 = \delta(P_{45}) &= \left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2\sqrt{3}}\right)\\
P_{15} = g_1 \cap g_5 = \delta(P_{04}) &= \left(1, 0\right)
\end{aligned}$$

zu (f)


P_{13}
P_{02}
g_3
g_2
g_0
P_{12}
P_{23}
P_{01}
P_{24}
F
g_1
P_{15}
g_5
P_{34}
P_{05}
P_{45}
P_{35}
g_4
P_{04}
0.25

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Zu Aufgabe H28:

Das charakteristische Polynom für A lautet

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_3) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(1+\lambda^2).$$

Die Nullstellen dieses Polynoms (die Eigenwerte von A) sind

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = i, \quad \lambda_3 = -i.$$

Die Eigenvektoren v_k zu diesen Eigenwerten erhält man durch Lösen des entsprechendes LGS

$$(A - \lambda_k E_3)v_k = 0, \quad k = 1,2,3.$$

Für $\lambda_1 = 1$ erhalten wir

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} v_1 = 0,$$

woraus sofort folgt

$$v_1 = t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{C}\backslash\{0\}.$$

Als Eigenraum erhalten wir

$$V(\lambda_1) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Analog ergeben sich

$$V(\lambda_2) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -i \end{pmatrix}\right) \quad \text{und} \quad V(\lambda_3) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}\right).$$

Reell betrachtet besitzt die Matrix A also nur den Eigenwert λ_1 mit dem zugehörigen eindimensionalen Eigenraum $V(\lambda_1)$. Sie besitzt insbesonderen *keine* Basis aus Eigenvektoren und ist daher reell *nicht* diagonalisierbar.

Anders ist es im komplexen Fall. Da die Eigenvektoren $v_1 = (1,2,1)^\mathsf{T}$, $v_2 = (1,0,-i)^\mathsf{T}$, $v_3 = (1,0,i)^\mathsf{T}$ eine Basis des $\mathbb{C}^3$ bilden, ist die Matrix A komplex diagonalisierbar (Satz 5.3.1). Eine mögliche Transformationsmatrix T_A ist durch diese Basis aus Eigenvektoren via

$$T_A = (v_1, v_2, v_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & -i & i \end{pmatrix}$$

gegeben. Die zugehörige Diagonalmatrix D_A hat die Form

$$D_A = {T_A}^{-1} A T_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}.$$

(Die Rechnung $D_A = {T_A}^{-1} A T_A$ ist eine geeignete Probe.)

Weitere Möglichkeiten zum Diagonalisieren erhält man generell, wenn man andere Basen aus Eigenvektoren verwendet, um die Transformationsmatrix aufzustellen. Die Eigenwerte stehen dann wieder in der Reihenfolge auf der Diagonalen der Diagonalmatrix, in der die zugehörigen Eigenvektoren in der Transformationsmatrix stehen.

Das charakteristische Polynom von B ist

$$\chi_B(\lambda) = \det(B - \lambda E_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & -2-\lambda & 1 \\ 0 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\lambda(\lambda+1).$$

Aus der charakteristischen Gleichung $\det(B - \lambda E_3) = 0$ erhalten wir die folgenden Eigenwerte

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = -1.$$

Analog erhalten wir die Eigenvektoren v_k durch Lösen des entsprechendes LGS

$$(B - \lambda_k E_3) v_k = 0, \quad k = 1, 2, 3.$$

Für $\lambda_1 = 1$ erhalten wir

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} v_1 = 0,$$

woraus sofort

$$v_1 = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \quad \text{und} \quad V(\lambda_1) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

folgt. Analog ergeben sich

$$V(\lambda_2) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) \quad \text{und} \quad V(\lambda_3) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Die Matrix B besitzt verschiedene Eigenwerte, somit ist sie diagonalisierbar (Folgerung 5.3.3) und zwar sowohl reell als auch komplex. Eine mögliche Transformationsmatrix T_B lautet

$$T_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Diagonalmatrix D_B hat die Form

$$D_B = {T_B}^{-1}\, B\, T_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom von C lautet

$$\chi_C(\lambda) = \det(C - \lambda E_3) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 & -4 \\ -2 & 8-\lambda & -2 \\ -4 & -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (9-\lambda)^2\lambda.$$

Aus $\det(C - \lambda E_3) = 0$ erhalten wir die Eigenwerte von C zu

$$\lambda_{1,2} = 9, \quad \lambda_3 = 0.$$

Um den Eigenraum zu $\lambda_{1,2} = 9$ zu bestimmen, lösen wir $(C - 9E_3)v = 0$, also

$$\begin{pmatrix} -4 & -2 & -4 \\ -2 & -1 & -2 \\ -4 & -2 & -4 \end{pmatrix} v = 0,$$

woraus sofort

$$v = \begin{pmatrix} s \\ -2s-2t \\ t \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Für $s = -1$, $t = 1$ erhalten wir

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Analog erhalten wir für $s = -1$, $t = 0$:

$$v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Als Eigenräume erhalten wir

$$V(\lambda_{1,2}) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

Für $\lambda_3 = 0$ erhalten wir aus $Cv_3 = 0$:

$$V(\lambda_3) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right).$$

Die Eigenwert $\lambda_{1,2} = 9$ hat die algebraische Vielfachheit $e_9 = 2$. Die Dimension des Eigenraums $V(\lambda_{1,2})$ ist gleich $d_9 = 2$. Die Eigenwert $\lambda_3 = 0$ hat die algebraische Vielfachheit $e_0 = 1$ und $\dim V(\lambda_3)$ ist gleich $d_0 = 1$. Nach Folgerung 5.3.5 (z.B. $d_9 + d_0 = e_9 + e_0$) ist die Matrix C sowohl komplex als auch reell diagonalisierbar, und eine Tranformationsmatrix T_C ist zum Beispiel durch

$$T_C = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

gegeben. Die zugehörige Diagonalmatrix D_C hat die Form

$$D_C = {T_C}^{-1}\, C\, T_C = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nun erhalten wir für die Matrix B:

$$D_B = {T_B}^{-1}\, B\, T_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$B = T_B\, D_B\, {T_B}^{-1},$$

und damit

$$B^{100} = (T_B\, D_B\, {T_B}^{-1})^{100} = T_B\, D_B\, \underbrace{{T_B}^{-1} \cdot T_B}_{E_3}\, D_B\, {T_B}^{-1} \cdots T_B\, D_B\, {T_B}^{-1} = T_B\, D_B^{100}\, {T_B}^{-1}.$$

Leicht erkennt man

$$D_B^{2k-1} = D_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad D_B^{2k} = D_B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Folglich gilt

$$D_B^{100} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und daraus folgt

$$B^{100} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Zu Aufgabe H29:
zu (a)
Es gilt

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_3) = \det \begin{pmatrix} -3-\lambda & 2 & -2 \\ -2 & 2-\lambda & -1 \\ 2 & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = -(\lambda+1)(\lambda-1)^2$$

und

$$\chi_B(\lambda) = \det(B - \lambda E_3) = \det \begin{pmatrix} 5-\lambda & -\frac{13}{2} & \frac{3}{2} \\ 2 & -\frac{5}{2}-\lambda & \frac{1}{2} \\ -6 & \frac{19}{2} & -\frac{3}{2}-\lambda \end{pmatrix} = -(\lambda-1)(\lambda^2+1)\,.$$

zu (b)
Anhand des Charakteristischen Polynoms kann man ablesen, dass A die Eigenwerte $\lambda_1 = -1$ mit algebraischer Vielfachheit 1 und $\lambda_2 = 1$ mit algebraischer Vielfachheit 2 besitzt.

Zur Bestimmung der Eigenräume zu λ_1 ist das Gleichungssystem $A - \lambda_1 E_3 = 0$ zu lösen. Die zugehörige erweiterte Koeffizientenmatrix hat die Form

$$\left[\begin{array}{rrr||r} -2 & 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right].$$

Mit Hilfe des Gauß-Algorithmus erhält man

$$\left[\begin{array}{rrr||r} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

woraus man den Eigenraum zu λ_1 abliest:

$$V(\lambda_1) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Bei der Bestimmung des Eigenraumes zum Eigenwert λ_2 erhält man zum linearen Gleichungssystem $A - \lambda_2 E_3 = 0$ die erweiterte Koeffizientenmatrix

$$\left[\begin{array}{rrr||r} -4 & 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right],$$

die man mit dem Gauß-Algorithmus zu

$$\left[\begin{array}{ccc||c} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

umformt, woraus man wieder den Eigenraum zum Eigenwert λ_2 ablesen kann, nämlich

$$V(\lambda_2) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right) .$$

zu (c)
Der Punkt P besitzt bezüglich des Standardkoordinatensystems $\mathbb{E}$ die Koordinaten

$$_{\mathbb{E}}P = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} .$$

damit gilt

$$\begin{aligned} {}_{\mathbb{E}}\sigma_{\mathbb{E}}\left({}_{\mathbb{E}}P\right) &= A \cdot {}_{\mathbb{E}}P + s \\ &= \begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = {}_{\mathbb{E}}P \end{aligned}$$

also $\sigma(P) = P$. Analog erhält man

$${}_{\mathbb{E}}\delta_{\mathbb{E}}\left({}_{\mathbb{E}}P\right) = B \cdot {}_{\mathbb{E}}P + t = \begin{pmatrix} -8 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -11 \end{pmatrix} = {}_{\mathbb{E}}P$$

und somit $\delta(P) = P$.

zu (d)
Wir wählen

$$f_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Um ein Koordinatensystem zu bilden, muss f_1, f_2, f_3 eine Basis von $\mathbb{R}^3$ sein. Der Vektor f_2 muss also so gewählt werden, dass f_1 und f_2 linear unabhängig sind. Da $f_1 \in V(\lambda_1)$ und $V(\lambda_1)$ eindimensional ist, muss $f_2 \in V(\lambda_2)$ gelten. Wir wählen

$$f_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

und somit ergibt sich

$$f_3 = B\, f_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} .$$

Es ist nun auch leicht nachzuprüfen, dass f_1, f_2, f_3 eine Basis bildet. Um zu sehen, dass f_3 ein Eigenvektor von A ist, berechnen wir

$$A\, f_3 = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 \cdot f_3$$

und erkennen, dass in der Tat f_3 ein Eigenvektor von A zum Eigenwert 1 ist.

zu (e)

Wir stellen zunächst einmal fest, besitzt ein Punkt Q die Koordinaten ${}_{\mathbb{E}}Q = {}_{\mathbb{E}}P + v$ für ein geeignetes $v \in \mathbb{R}^3$, so gilt

$${}_{\mathbb{E}}\sigma_{\mathbb{E}}\left({}_{\mathbb{E}}Q\right) = A \cdot ({}_{\mathbb{E}}P + v) + s = A \cdot {}_{\mathbb{E}}P + A \cdot v + s = A \cdot v + A \cdot {}_{\mathbb{E}}P + s = A \cdot v + {}_{\mathbb{E}}\sigma_{\mathbb{E}}\left({}_{\mathbb{E}}P\right) .$$

Wir betrachten nun die Punkte $P_0, \dots, P_3$ mit

$${}_{\mathbb{F}}(P_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$${}_{\mathbb{F}}(P_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$${}_{\mathbb{F}}(P_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$${}_{\mathbb{F}}(P_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Nach 4.7.6 aus der Vorlesung gilt

$$\begin{aligned}
{}_{\mathbb{E}}(P_0) &= \ 0 + {}_{\mathbb{E}}P \\
{}_{\mathbb{E}}(P_1) &= f_1 + {}_{\mathbb{E}}P \\
{}_{\mathbb{E}}(P_2) &= f_2 + {}_{\mathbb{E}}P \\
{}_{\mathbb{E}}(P_3) &= f_3 + {}_{\mathbb{E}}P \,.
\end{aligned}$$

Dass P ein Fixpunkt unter σ ist, bedeutet ${}_{\mathbb{E}}\sigma_{\mathbb{E}}\left({}_{\mathbb{E}}P\right) = {}_{\mathbb{E}}P$, was wir für die folgende Berechnung der Bilder von $P_0, \ldots, P_3$ unter σ benutzen wollen. Es gilt nach obigem

$${}_{\mathbb{E}}\sigma_{\mathbb{E}}\left({}_{\mathbb{E}}(P_0)\right) = A \cdot 0 + {}_{\mathbb{E}}\sigma_{\mathbb{E}}\left({}_{\mathbb{E}}P\right) = 0 + {}_{\mathbb{E}}P = {}_{\mathbb{E}}P \,,$$

d.h. – wieder mit 4.7.6 aus der Vorlesung –, dass ${}_{\mathbb{F}}(\sigma(P_0)) = 0$. Die Tatsache, dass $f_1, \ldots, f_3$ Eigenvektoren von A sind, sorgt nun für

$$\begin{aligned}
{}_{\mathbb{E}}\sigma_{\mathbb{E}}\left({}_{\mathbb{E}}(P_1)\right) &= A \cdot f_1 + {}_{\mathbb{E}}\sigma_{\mathbb{E}}\left({}_{\mathbb{E}}P\right) = (-1) \cdot f_1 + {}_{\mathbb{E}}P \\
{}_{\mathbb{E}}\sigma_{\mathbb{E}}\left({}_{\mathbb{E}}(P_2)\right) &= A \cdot f_2 + {}_{\mathbb{E}}\sigma_{\mathbb{E}}\left({}_{\mathbb{E}}P\right) = 1 \cdot f_2 + {}_{\mathbb{E}}P \\
{}_{\mathbb{E}}\sigma_{\mathbb{E}}\left({}_{\mathbb{E}}(P_3)\right) &= A \cdot f_3 + {}_{\mathbb{E}}\sigma_{\mathbb{E}}\left({}_{\mathbb{E}}P\right) = 1 \cdot f_3 + {}_{\mathbb{E}}P
\end{aligned}$$

und damit gilt wieder

$$\begin{aligned}
{}_{\mathbb{F}}(\sigma(P_1)) &= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
{}_{\mathbb{F}}(\sigma(P_2)) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
{}_{\mathbb{F}}(\sigma(P_3)) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \,.
\end{aligned}$$

Nehmen wir an, die Abbildung σ habe bezüglich $\mathbb{F}$ die Form

$${}_{\mathbb{F}}\sigma_{\mathbb{F}} \colon x \mapsto \tilde{A}x + \tilde{s} \,.$$

Da ${}_{\mathbb{F}}P_0 = 0$ und ${}_{\mathbb{F}}(\sigma(P_0)) = 0$ heisst das

$$0 = {}_{\mathbb{F}}(\sigma(P_0)) = {}_{\mathbb{F}}\sigma_{\mathbb{F}}\left({}_{\mathbb{F}}P_0\right) = {}_{\mathbb{F}}\sigma_{\mathbb{F}}\,(0) = \tilde{A} \cdot 0 + \tilde{s} = \tilde{s} \,,$$

der Translationsanteil von σ verschwindet also bezüglich $\mathbb{F}$. Es bleibt der lineare Anteil zu bestimmen. Aufgrund

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = {}_{\mathbb{F}}(\sigma(P_1)) = {}_{\mathbb{F}}\sigma_{\mathbb{F}}\left({}_{\mathbb{F}}P_1\right) = {}_{\mathbb{F}}\sigma_{\mathbb{F}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \tilde{A} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = {}_{\mathbb{F}}(\sigma(P_2)) = {}_{\mathbb{F}}\sigma_{\mathbb{F}}\left({}_{\mathbb{F}}P_2\right) = {}_{\mathbb{F}}\sigma_{\mathbb{F}}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \tilde{A} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = {}_{\mathbb{F}}(\sigma(P_3)) = {}_{\mathbb{F}}\sigma_{\mathbb{F}}\left({}_{\mathbb{F}}P_3\right) = {}_{\mathbb{F}}\sigma_{\mathbb{F}}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \tilde{A} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

können wir direkt

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ablesen. Insgesamt haben wir also

$${}_{\mathbb{F}}\sigma_{\mathbb{F}} \colon x \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x\,.$$

Alternativ kann man ${}_{\mathbb{F}}\sigma_{\mathbb{F}}$ natürlich auch mit Hilfe von Koordinatentransformationen bestimmen. Es gilt nämlich ${}_{\mathbb{F}}\sigma_{\mathbb{F}} = {}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}} \circ {}_{\mathbb{E}}\sigma_{\mathbb{E}} \circ {}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$. Setzt man die Matrix $F := \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \end{pmatrix}$, so ergibt sich ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}} \colon v \mapsto Fv + {}_{\mathbb{E}}P$ und ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}} \colon v \mapsto F^{-1}(v - {}_{\mathbb{E}}P)$, vgl. 4.7.6 aus der Vorlesung. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
{}_{\mathbb{F}}\sigma_{\mathbb{F}}(v) &= {}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}} \circ {}_{\mathbb{E}}\sigma_{\mathbb{E}} \circ {}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}(v) \\
&= {}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}({}_{\mathbb{E}}\sigma_{\mathbb{E}}({}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}(v))) \\
&= {}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}({}_{\mathbb{E}}\sigma_{\mathbb{E}}(Fv + {}_{\mathbb{E}}P)) \\
&= {}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}(A(Fv + {}_{\mathbb{E}}P) + s) \\
&= F^{-1}(A(Fv + {}_{\mathbb{E}}P) + s - {}_{\mathbb{E}}P) \\
&= F^{-1}AFv + F^{-1}(A{}_{\mathbb{E}}P + s - {}_{\mathbb{E}}P)
\end{aligned}$$

Da aber P ein Fixpunkt von σ ist, folgt $A{}_{\mathbb{E}}P + s - {}_{\mathbb{E}}P = {}_{\mathbb{E}}\sigma_{\mathbb{E}}({}_{\mathbb{E}}P) - {}_{\mathbb{E}}P = 0$, und somit gilt

$${}_{\mathbb{F}}\sigma_{\mathbb{F}}(v) = F^{-1}AFv\,.$$

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

zu (f)
Wir berechnen

$$B\,f_1 = \begin{pmatrix} 5 & -\frac{13}{2} & \frac{3}{2} \\ 2 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ -6 & \frac{19}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und sehen also, f_1 ist ein Eigenvektor von B zum Eigenwert 1.

zu (g)
Wir berechnen

$$B\,f_3 = \begin{pmatrix} 5 & -\frac{13}{2} & \frac{3}{2} \\ 2 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ -6 & \frac{19}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = -f_2\,.$$

zu (h)
Wir nehmen an, ${}_{\mathbb{F}}\delta_{\mathbb{F}}$ besitzt die Form

$${}_{\mathbb{F}}\delta_{\mathbb{F}}\colon x \mapsto \tilde{B}x + \tilde{t}\,.$$

Da P auch bezüglich δ ein Fixpunkt ist, können wir wieder wie in (e) schließen, dass $\tilde{t} = 0$. Außerdem gilt

$$\begin{aligned} {}_{\mathbb{E}}\delta_{\mathbb{E}}\left({}_{\mathbb{E}}(P_1)\right) &= B \cdot f_1 + {}_{\mathbb{E}}\delta_{\mathbb{E}}\left({}_{\mathbb{E}}P\right) = f_1 + {}_{\mathbb{E}}P \\ {}_{\mathbb{E}}\delta_{\mathbb{E}}\left({}_{\mathbb{E}}(P_2)\right) &= B \cdot f_2 + {}_{\mathbb{E}}\delta_{\mathbb{E}}\left({}_{\mathbb{E}}P\right) = f_3 + {}_{\mathbb{E}}P \\ {}_{\mathbb{E}}\delta_{\mathbb{E}}\left({}_{\mathbb{E}}(P_3)\right) &= B \cdot f_3 + {}_{\mathbb{E}}\delta_{\mathbb{E}}\left({}_{\mathbb{E}}P\right) = -f_2 + {}_{\mathbb{E}}P \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= {}_{\mathbb{F}}(\delta(P_1)) = {}_{\mathbb{F}}\delta_{\mathbb{F}}\left({}_{\mathbb{F}}P_1\right) = {}_{\mathbb{F}}\delta_{\mathbb{F}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \tilde{B} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= {}_{\mathbb{F}}(\delta(P_2)) = {}_{\mathbb{F}}\delta_{\mathbb{F}}\left({}_{\mathbb{F}}P_2\right) = {}_{\mathbb{F}}\delta_{\mathbb{F}}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \tilde{B} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} &= {}_{\mathbb{F}}(\delta(P_3)) = {}_{\mathbb{F}}\delta_{\mathbb{F}}\left({}_{\mathbb{F}}P_3\right) = {}_{\mathbb{F}}\delta_{\mathbb{F}}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \tilde{B} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

das heißt

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$ {}_{\mathbb{F}}\delta_{\mathbb{F}} \colon x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} x \,. $$

zu (i)
Es gilt

$$ {}_{\mathbb{F}}(\sigma \circ \delta)_{\mathbb{F}}(x) = {}_{\mathbb{F}}\sigma_{\mathbb{F}}({}_{\mathbb{F}}\delta_{\mathbb{F}}(x)) = \tilde{A}\tilde{B}x = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} x $$

und

$$ {}_{\mathbb{F}}(\delta \circ \sigma)_{\mathbb{F}}(x) = {}_{\mathbb{F}}\delta_{\mathbb{F}}({}_{\mathbb{F}}\sigma_{\mathbb{F}}(x)) = \tilde{B}\tilde{A}x = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} x \,. $$

Dr. I. Rybak
S. Poppitz

Prof. Dr. M. Stroppel
Prof. Dr. N. Knarr

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Winter 2008/09

Zu Aufgabe H30:

Die Matrix A heißt symmetrisch, wenn $A = A^\intercal$ (Definition 5.4.1).

zu (a)

Leicht erkennt man $(A+B)^\intercal = A^\intercal + B^\intercal$. Für die Summe von symmetrischen Matrizen erhalten wir

$$\left(\sum_{k=1}^{n} A_k\right)^\intercal = \sum_{k=1}^{n} A_k^\intercal = \sum_{k=1}^{n} A_k .$$

Folglich, ist $\sum_{k=1}^{n} A_k$ auch eine symmetrische Matrix.

zu (b)

Da nach Lemma 3.10.5 gilt $(AB)^\intercal = B^\intercal A^\intercal = BA$ aber andererseits Matrizen existieren mit $AB \neq BA$, ist das Produkt von symmetrischen Matrizen $A_1 \cdot \ldots \cdot A_n$ im Allgemeinen *keine* symmetrische Matrix. Zum Beispiel

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}, \quad AB = \begin{pmatrix} -4 & 7 \\ -5 & 9 \end{pmatrix}.$$

zu (c)

Mit Hilfe der Rechenregel für Matrizen $(A\,B)^\intercal = B^\intercal\,A^\intercal$ (Lemma 3.10.5) und $(A\,B)C = A(B\,C)$ (Lemma 3.4.1) erhalten wir

$$\left(T^{-1}A_1T\right)^\intercal = \left(T^{-1}(A_1\,T)\right)^\intercal = (A_1T)^\intercal \left(T^{-1}\right)^\intercal = T^\intercal A_1^\intercal \left(T^{-1}\right)^\intercal . \tag{1}$$

Da A_1 eine symmetrische Matrix ist, gilt $A_1^\intercal = A_1$ (Definition 5.4.1). Da T eine orthogonale Matrix ist, erhalten wir $T^\intercal T = E_n$ (Definition 4.5.2) und somit $T^\intercal = T^{-1}$, $\left(T^{-1}\right)^\intercal = \left(T^\intercal\right)^\intercal = T$. Aus (1) erhalten wir $\left(T^{-1}A_1T\right)^\intercal = T^{-1}A_1T$. Folglich ist $T^{-1}A_1T$ eine symmetrische Matrix.

Zu Aufgabe H31:

zu (a)

Die Eigenwerte der Matrix A berechnen wir als Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\det(A - \lambda E_3) = 0$, also

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(2+\lambda)(\lambda-2)(\lambda-1) = 0,$$

woraus $\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 1$ folgt.

Die Eigenräume $V(\lambda_k)$ zu diesen Eigenwerten erhalten wir durch Lösen der entsprechenden LGS

$$(A - \lambda_k E_3)v_k = 0, \quad k = 1, 2, 3.$$

Hinweis zu den Hinweisen: Es nützt *nichts*, diese Hinweise nur zu kopieren und abzuheften. Es nützt auch wenig, diese nur einfach durchzulesen. Man sollte sich wenigstens zu jedem Schritt überlegen, wie man diesen rechtfertigen kann.
Am besten: Nach einem Blick auf die Hinweise erneut versuchen, die Aufgaben selbst zu lösen!

Für $\lambda_1 = -2$ erhalten wir den Eigenraum

$$V(-2) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Analog ergeben sich

$$V(2) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}\right) \quad \text{und} \quad V(1) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

Analog erhalten wir die Eigenwerte des Matrix B:

$$\det(B - \lambda E_3) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -\sqrt{3} & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-2)(\lambda+1)(\lambda-1) = 0 \Longrightarrow$$

$$\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = -1,\ \lambda_3 = 1.$$

Die Eigenräumen $V(\lambda_k)$ zu diesen Eigenwerten λ_k erhalten wir durch Lösen der entsprechenden LGS $(B - \lambda_k E_3)v_k = 0$. Als Eigenräume erhalten wir

$$V(2) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right), \quad V(-1) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad V(1) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}\right).$$

zu (b)

Da die Eigenvektoren $v_1 = (-\sqrt{3}, 0, 1)^\intercal$, $v_2 = (1, 0, \sqrt{3})^\intercal$, $v_3 = (0, 1, 0)^\intercal$ der Matrix A eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden, ist A reell diagonalisierbar (Satz 5.3.1). Eine mögliche Transformationsmatrix T_A ist durch

$$T_A = (v_1, v_2, v_3) = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben. Die zugehörige Diagonalmatrix D_A hat die Form

$$D_A = T_A^{-1} A T_A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Als Probe kann die Rechnung

$$T_A^{-1} A T_A = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

durchgeführt werden.

Analog erhalten wir die Transformationsmatrix T_B und die Diagonalmatrix D_B für die Matrix B. Die Eigenvektoren $v_1 = (0,1,0)^\intercal$, $v_2 = (\sqrt{3},0,1)^\intercal$, $v_3 = (1,0,\sqrt{3})^\intercal$ der Matrix B bilden eine Basis des $\mathbb{R}^3$, somit ist B reell diagonalisierbar. Eine Transformationsmatrix T_B ist durch

$$T_B = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

gegeben und die zugehörige Diagonalmatrix hat die Form

$$D_B = {T_B}^{-1}\, B\, T_B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wieder kann eine Probe

$${T_B}^{-1}\, B\, T_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 2 & 0 \\ -\sqrt{3} & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

durchgeführt werden.

zu (c)

Nach Definition 2.9.1 sind Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^n$ orthogonal, wenn $\langle v \,|\, w \rangle = 0$.

Man kann nun einerseits mit 5.4.5 aus der Vorlesung argumentieren, denn A ist symmetrisch und v_1, v_1, v_3 sind Eigenvektoren zu *verschiedenen* Eigenwerten, also sind sie orthogonal zueinander. Andererseits kann man auch direkt nachrechnen

$$\langle v_1 \,|\, v_2 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \right\rangle = 0, \quad \langle v_1 \,|\, v_3 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0,$$

$$\langle v_2 \,|\, v_3 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0.$$

Folglich sind die Eigenräume von A zueinander paarweise orthogonal.

Die Matrix B ist *nicht* symmetrisch. Lemma 5.4.5 kann deswegen *nicht* angewendet werden. Wir berechnen für Eigenvektoren von B:

$$\langle v_1 \,|\, v_2 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0, \quad \langle v_1 \,|\, v_3 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \right\rangle = 0,$$

$$\langle v_2 \,|\, v_3 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \right\rangle = 2\sqrt{3}\,.$$

Die Eigenvektoren v_2 und v_3 sind nicht orthogonal, folglich sind die Eigenräume von B nicht zueinander paarweise orthogonal.

zu (d)

Da die Eigenvektoren $v_1 = (-\sqrt{3}, 0, 1)^\intercal$, $v_2 = (1, 0, \sqrt{3})^\intercal$, $v_3 = (0, 1, 0)^\intercal$ der Matrix A zueinander paarweise orthogonal sind (**H31 (c)**), müssen wir sie nur noch normieren

$$f_1 := \frac{v_1}{|v_1|} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f_2 := \frac{v_2}{|v_2|} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad f_3 := \frac{v_3}{|v_3|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Zur Bildung eine ONB g_1, g_2, g_3 aus Eigenvektoren $v_1 = (0, 1, 0)^\intercal$, $v_2 = (\sqrt{3}, 0, 1)^\intercal$, $v_3 = (1, 0, \sqrt{3})^\intercal$ der Matrix B benutzt man das Schmidtsche Verfahren. Wegen $|v_1| = 1$ setzen wir

$$g_1 = v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Das Skalarprodukt $\langle v_1 \,|\, v_2 \rangle = 0$ liefert $g_2^* = v_2$ und

$$g_2 = \frac{g_2^*}{|g_2^*|} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Mit $\langle v_3 \,|\, g_1 \rangle = 0$ erhalten wir

$$g_3^* = v_3 - \langle v_3 \,|\, g_2 \rangle\, g_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix},$$

$$|g_3^*| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1, \quad g_3 := g_3^* = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

zu (e)

Wegen $f_i \in \mathrm{L}(v_i) = V(\lambda_i)$, sind f_1, f_2, f_3 auch Eigenvektoren von A.

Zur Probe oder als Alternative können wir

$$A\, f_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -2 \cdot f_1$$

berechnen und erkennen, dass in der Tat f_1 ein Eigenvektor von A zum Eigenwert -2 ist. Analog ergeben sich

$$A\, f_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = 2 \cdot f_2.$$

Folglich ist f_2 ein Eigenvektor von A zum Eigenwert 2. Für f_3 erhalten wir

$$A\,f_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot f_3.$$

Folglich ist f_3 ein Eigenvektor von A zum Eigenwert 1.

Andererseits erhalten wir für B:

$$B\,g_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 2 & 0 \\ -\sqrt{3} & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot g_1\,,$$

$$B\,g_2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 2 & 0 \\ -\sqrt{3} & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = -1 \cdot g_2\,,$$

$$B\,g_3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 2 & 0 \\ -\sqrt{3} & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 0 \\ \frac{3\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \neq \lambda \cdot g_3 \text{ für } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Folglich ist g_1 ein Eigenvektor von B zum Eigenwert 2, der Vektor g_2 ist ein Eigenvektor von B zum Eigenwert -1 aber g_3 ist *kein* Eigenvektor von B.

zu (f)

Wegen $f_i \in \mathrm{L}(v_i) = V(\lambda_i)$, ist $F = (f_1, f_2, f_3)$ auch eine Transformationsmatrix mit der man die Matrix A diagonalisieren kann. Da g_3 kein Eigenvektor von Matrix B ist, ist die Matrix $G = (g_1, g_2, g_3)$ *keine* Transformationsmatrix mit der man B diagonalisieren kann.

Zu Aufgabe H32:

zu (a) Die Matrixbeschreibung von Q hat die Form

$$Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^{\mathsf{T}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} x + 2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x + 1 = 0 \right\}$$

zu (b)

Um den Typ der Quadrik zu bestimmen stellt man die erweiterte Matrix auf:

$$A_{\text{erw}} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Man sieht nun $\operatorname{Rg} A = 3$ und $\operatorname{Rg} A_{\text{erw}} = 3 + 1 = \operatorname{Rg} A + 1$, nach 6.2.6 der Vorlesung liegt also eine Mittelpunktsquadrik vor.

zu (c)

Eine Ebene parallel zur x_1–x_2-Ebene mit Abstand d zum Ursprung hat die Form

$$E_d = \left\{ (x_1, x_2, x_3)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_3 = d \right\} .$$

Die Punkte im Schnitt $Q \cap E_d$ werden also durch die Gleichung

$$x_1^2 + x_2^2 - dx_2 + 1 = 0$$

beschrieben. Durch quadratisches Ergänzen erhält diese Gleichung die Form

$$x_1^2 + \left(x_2 - \frac{d}{2} \right)^2 - \frac{d^2}{4} + 1 = 0 .$$

Das heißt, $Q \cap E_d$ ist ein Kreis mit Radius $\sqrt{\frac{d^2}{4} - 1}$ und Mittelpunkt $(x_1, x_2) = (0, \frac{d}{2})$, insbesondere liegen für $d \in \left]-2, 2\right[$ keine Kreise vor, für $d \in \{-2, 2\}$ entartet der Schnitt jeweils zu einem Punkt.

Eine Ebene parallel zur x_1–x_3-Ebene mit Abstand d zum Ursprung hat die Form

$$F_d = \left\{ (x_1, x_2, x_3)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_2 = d \right\} .$$

Die Punkte im Schnitt $Q \cap F_d$ werden also durch die Gleichung

$$x_1^2 + d^2 - dx_3 + 1 = 0$$

beschrieben. Falls $d = 0$, so erhält die Gleichung die Form

$$x_1^2 + 1 = 0 ,$$

ist also nicht lösbar, d.h. der Schnitt ist in diesen Fällen leer. Gilt aber $d \neq 0$, so lässt sich diese Gleichung nach x_3 auflösen

$$x_3 = \frac{1}{d} x_1^2 + d + \frac{1}{d} ;$$

es liegt also eine Parabel mit Scheitel bei $(x_1, x_3) = (0, d + \frac{1}{d})$ vor.

Eine Ebene parallel zur x_2–x_3-Ebene mit Abstand d zum Ursprung hat die Form

$$G_d = \left\{ (x_1, x_2, x_3)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1 = d \right\} .$$

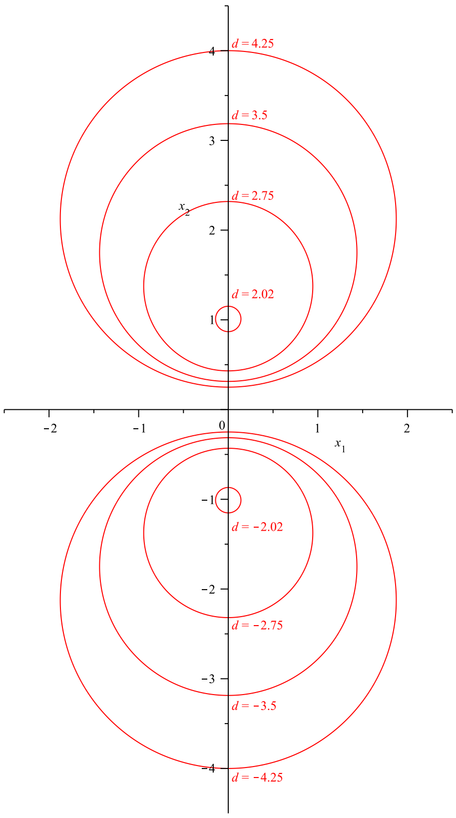
Die Schnittpunkt $Q \cap G_d$ werden also durch die Gleichung

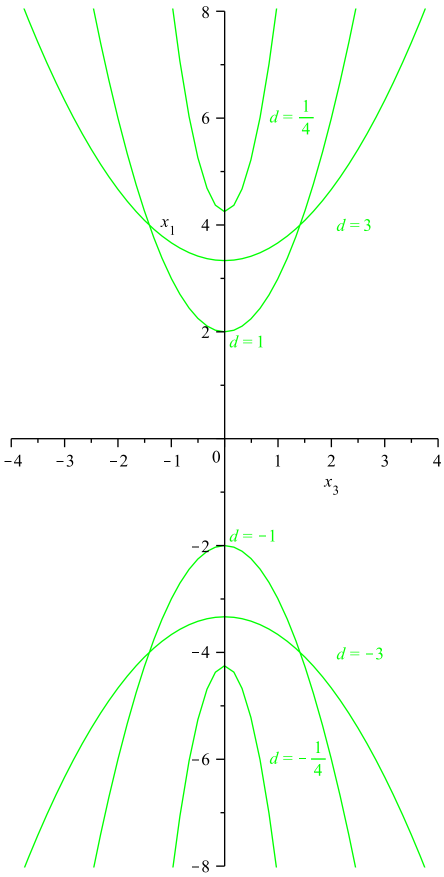
$$d^2 + x_2^2 - x_2 x_3 + 1 = 0$$

beschrieben. Im Fall $x_2 = 0$ wird daraus $d^2 + 1 = 0$, wir erhalten einen Widerspruch und somit gibt es keinen Punkt im Schnitt mit x_2-Komponente 0. Im Fall $x_2 \neq 0$ lässt sich die Bedingung für die Schnittpunkte umformen zu

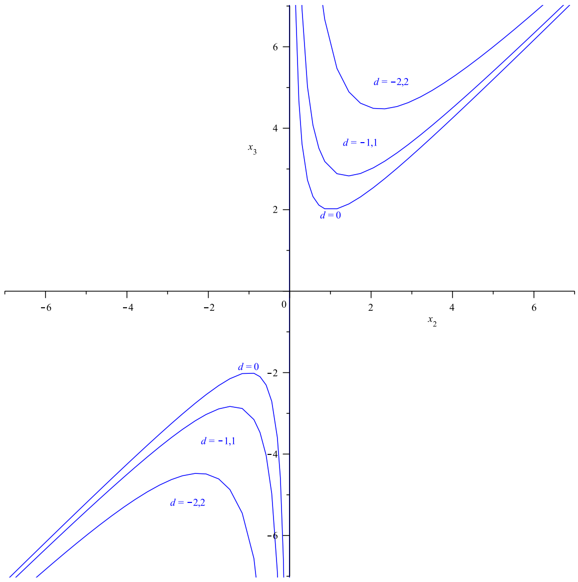
$$x_3 = \frac{1 + d^2}{x_2} + x_2\,;$$

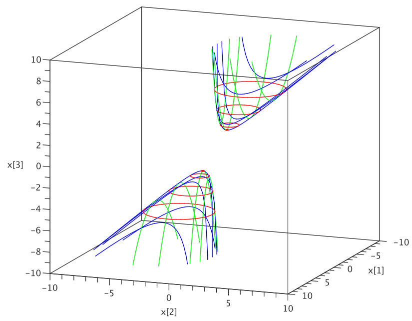
wir erhalten also bezüglich x_3–x_2-Koordinaten Hyperbeln mit einer vertikalen Asymptote bei $x_2 = 0$ und einer schrägen Asymptote $x_3 = 1 \cdot x_2$.

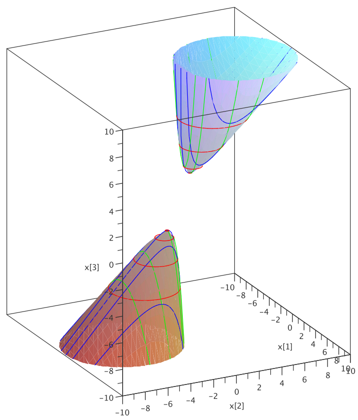




zu (d)







Dr. I. Rybak
S. Poppitz

Prof. Dr. M. Stroppel
Prof. Dr. N. Knarr

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Winter 2008/09

Zu Aufgabe H 33:

zu (a)

Setzt man

$$A_\alpha := \begin{pmatrix} \frac{3\alpha-1}{4} & -\frac{\sqrt{3}(1+\alpha)}{4} \\ -\frac{\sqrt{3}(1+\alpha)}{4} & \frac{\alpha-3}{4} \end{pmatrix} \qquad a_\alpha := \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}(\alpha-1) \\ -\frac{\alpha-1}{2} \end{pmatrix} \qquad c := 0\,,$$

so erhält man die Matrixdarstellung von Q_α bezüglich des Standardkoordinatensystem $\mathbb{E}$, wenn man mit $x := {}_{\mathbb{E}}X$ das Koordinatentupel eines Punktes X bezeichnet, als

$$Q_\alpha\colon\, x^\intercal A_\alpha x + 2a_\alpha^\intercal x + c\,.$$

zu (b)

Um den Typ der Quadrik zu bestimmen, muss man $\operatorname{Rg} A_\alpha$ mit $\operatorname{Rg} A_{\alpha,\mathsf{erw}}$ vergleichen; dabei ist

$$A_{\alpha,\mathsf{erw}} = \left(\begin{array}{c|c} c & a_\alpha^\intercal \\ \hline a_\alpha & A_\alpha \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & \frac{\sqrt{3}}{2}(\alpha-1) & -\frac{\alpha-1}{2} \\ \hline \frac{\sqrt{3}}{2}(\alpha-1) & \frac{3\alpha-1}{4} & -\frac{\sqrt{3}(1+\alpha)}{4} \\ -\frac{\alpha-1}{2} & -\frac{\sqrt{3}(1+\alpha)}{4} & \frac{\alpha-3}{4} \end{array}\right)$$

Da eine direkte Berechnung des Rangs mit Hilfe des Gauß-Algorithmus zwar möglich aber eher mühsam ist, verwenden wir hier etwas andere Argumente. Man erhält nämlich $\det(A_\alpha) = -\alpha$. Das heißt aber, für $\alpha \neq 0$ ist A_α invertierbar und besitzt damit vollen Rang, also $\operatorname{Rg} A_\alpha = 2$. Den Fall $\alpha = 0$ betrachtet man separat und erhält mit Hilfe des Gauß-Algorithmus

$$\operatorname{Rg} A_0 = \operatorname{Rg}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 \end{pmatrix} = \operatorname{Rg}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1\,.$$

Weiter berechnet man $\det(A_{\alpha,\mathsf{erw}}) = (\alpha-1)^2$. Wir sehen wieder, für $\alpha \neq 1$ ist $A_{\alpha,\mathsf{erw}}$ invertierbar und hat damit maximalen Rang, also $\operatorname{Rg} A_{\alpha,\mathsf{erw}} = 3$. Den Rang von $A_{1,\mathsf{erw}}$ kann man nun mit dem Gauß-Algorithmus bestimmen und erhält, dass $\operatorname{Rg} A_{1,\mathsf{erw}} = 2$.

Zusammenfassend stellen wir fest:

- Für $\alpha \notin \{0,1\}$ gilt $\operatorname{Rg} A_{\alpha,\mathsf{erw}} = \operatorname{Rg} A_\alpha + 1$; es liegt also eine Mittelpunktsquadrik vor.
- Für $\alpha = 0$ gilt $\operatorname{Rg} A_{0,\mathsf{erw}} = \operatorname{Rg} A_0 + 2$; es liegt also eine parabolische Quadrik vor.
- Für $\alpha = 1$ gilt $\operatorname{Rg} A_{1,\mathsf{erw}} = \operatorname{Rg} A_1$; es liegt also eine kegelige Quadrik vor.

zu (c)

Wir führen die Hauptachsentransformation durch, indem wir zuerst die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix A_α bestimmen. Mit Hilfe von Bemerkung 5.2.3 kann man die Bestimmung des charakteristischen Polynoms ohne langwierige Rechnung durchführen; es gilt nämlich:

$$\chi_{A_\alpha}(\lambda) = \lambda^2 - \operatorname{Sp} A_\alpha \cdot \lambda + \det(A_\alpha) = \lambda^2 - (\alpha-1)\lambda - \alpha\,.$$

Hinweis zu den Hinweisen: Es nützt *nichts*, diese Hinweise nur zu kopieren und abzuheften. Es nützt auch wenig, diese nur einfach durchzulesen. Man sollte sich wenigstens zu jedem Schritt überlegen, wie man diesen rechtfertigen kann.
Am besten: Nach einem Blick auf die Hinweise erneut versuchen, die Aufgaben selbst zu lösen!

Daraus erhalten wir die Eigenwerte $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = \alpha$.

Zur Bestimmung des Eigenraums $V(\lambda_1)$ ist das Gleichungssystem $(A_\alpha - \lambda_1 E_2)\, x = 0$ zu lösen. Das führt auf die erweiterte Koeffizientenmatrix

$$\left[\begin{array}{cc|c} \frac{3\alpha-1}{4}+1 & -\frac{\sqrt{3}(1+\alpha)}{4} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}(1+\alpha)}{4} & \frac{\alpha-3}{4}+1 & 0 \end{array}\right],$$

die zu

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3(\alpha+1) & -\sqrt{3}(1+\alpha) & 0 \\ -\sqrt{3}(1+\alpha) & \alpha+1 & 0 \end{array}\right]$$

umgeformt wird. Im Fall $\alpha = -1$ erhalten wir die Situation $\lambda_1 = \lambda_2$ und die erweiterte Koeffizientenmatrix

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

das heißt $V(\lambda_2) = V(\lambda_1) = \mathbb{R}^2$ und insbesondere ist A_{-1} bereits eine Diagonalmatrix.

Für $\alpha \neq -1$ kann im Zuge des Gauß-Algorithmus durch $1+\alpha$ dividiert werden und wir erhalten so die erweiterte Koeffizientenmatrix

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & -\sqrt{3} & 0 \\ -\sqrt{3} & 1 & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right];$$

folglich gilt

$$V(\lambda_1) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}\right).$$

Für $\alpha = -1$ wissen wir bereits $\lambda_1 = \lambda_2$ und wir können von vorneherein bei der Bestimmung von $V(\lambda_2)$ den Fall $\alpha = -1$ auschließen. Es kann insbesondere durch $\alpha + 1$ dividiert werden und die Lösung des Gleichungssystems $(A_\alpha - \lambda_2 E_2)\, x = 0$ erfolgt analog obigem mit Hilfe des Gauß-Algorithmus. Dies führt dann auf die Lösung

$$V(\lambda_2) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Wir können jetzt unabhängig von α eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren wählen. Sei

$$f_1 := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad f_2 := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix},$$

so ist das zugehörige Koordinatensystem $\mathbb{F} = (O; f_1, f_2)$ und mit $F := \begin{pmatrix} f_1 & f_2 \end{pmatrix}$ die Koordinatentransformation

$${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}} \colon {}_{\mathbb{F}}X \mapsto F\,{}_{\mathbb{F}}X$$

geeignet, die Quadrik auf eine Form zu bringen, in der der quadratische Teil Diagonalgestalt hat. Mit

$$\tilde{A_\alpha} = F^\intercal A_\alpha F = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}, \qquad \tilde{a_\alpha} = F^\intercal a_\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha - 1 \end{pmatrix}, \qquad \tilde{c} := 0\,,$$

erhält die Quadrik nämlich – wenn $y = {}_{\mathbb{F}}X$ das Koordinatentupel eines Punktes X ist – die Form

$$Q_\alpha \colon y^\intercal \tilde{A}_\alpha y + 2\tilde{a_\alpha}^\intercal y + \tilde{c}\,.$$

oder in Koordinaten ausgeschrieben

$$Q_\alpha \colon\; -y_1^2 + \alpha\, y_2^2 + 2(\alpha - 1)y_2 = 0\,.$$

Für $\alpha = 0$ reduziert sich der quadratische Teil und wir erhalten

$$Q_0 \colon\; -y_1^2 + 2(-1)y_2 = 0\,.$$

das Umschreiben zu

$$Q_0 \colon y_1^2 + 2y_2 = 0$$

stellt *keine* Transformation dar und wir erhalten damit sowohl die euklidische als auch die affine Normalform der Quadrik Q_0. Anhand der affinen Normalform lesen wir ab, dass Q_0 die Gestalt einer Parabel besitzt.

Im Fall $\alpha \neq 0$ liegt noch keine Normalform vor. Der nächste Schritt ist nun die Elimination des linearen Teils mit Hilfe quadratischen Ergänzens. Es gilt im Fall $\alpha \neq 0$ nämlich

$$Q_\alpha \colon \begin{cases} & -y_1^2 + \alpha\left(y_2^2 + 2\dfrac{\alpha-1}{\alpha}y_2\right) = 0 \\ \Leftrightarrow & -y_1^2 + \alpha\left(\left(y_2 + \dfrac{\alpha-1}{\alpha}\right)^2 - \left(\dfrac{\alpha-1}{\alpha}\right)^2\right) = 0 \\ \Leftrightarrow & -y_1^2 + \alpha\left(y_2 + \dfrac{\alpha-1}{\alpha}\right)^2 - \dfrac{(\alpha-1)^2}{\alpha} = 0 \end{cases}$$

Gesucht ist jetzt ein Koordinatensystem $\mathbb{G}$ mit folgender Eigenschaft: Ist $z = {}_{\mathbb{G}}X$ das Koordinatentupel eines Punktes X, so soll zwischen den Koordinaten $z = {}_{\mathbb{G}}X$ und $y = {}_{\mathbb{F}}X$ die Beziehung

$$\begin{aligned} z_1 &= y_1 \\ z_2 &= y_2 + \frac{\alpha - 1}{\alpha} \end{aligned}$$

gelten. Mit dieser Bedingung erhalten wir die Koordinatentransformation

$${}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{F}} \colon {}_{\mathbb{F}}X \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} {}_{\mathbb{F}}X + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\alpha-1}{\alpha} \end{pmatrix}$$

beziehungsweise

$$_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{G}}\colon {}_{\mathbb{G}}X \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} {}_{\mathbb{G}}X + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\alpha-1}{\alpha} \end{pmatrix}.$$

Bezüglich $\mathbb{G}$ besitzt Q_α dann in Koordinaten die Form

$$Q_\alpha\colon\ -z_1^2 + \alpha\, z_2^2 - \frac{(\alpha-1)^2}{\alpha} = 0\,.$$

Im Fall $\alpha = 1$ verschwindet der konstante Teil und wir erhalten

$$Q_1\colon\ -z_1^2 + z_2^2 = 0\,;$$

dies ist wieder sowohl euklidische als auch affine Normalform der Quadrik Q_1, anhand der affinen Normalform liest man ab, die Quadrik besitzt die Gestalt eines schneidenden Geradenpaares.

Bei der euklidischen Normalform muss der konstante Teil auf 1 normiert sein. Im Fall $\alpha \neq 1$ ist dies immer möglich und wir erhalten (auch dies ist wiederum *keine* Koordinatentransformation)

$$Q_\alpha\colon \frac{\alpha}{(\alpha-1)^2}\, z_1^2 - \frac{\alpha^2}{(\alpha-1)^2}\, z_2^2 + 1 = 0$$

als euklidische Normalform.

Um nun für die Fälle $\alpha \notin \{0,1\}$ die Gestalt zu bestimmen, transformieren wir die Quadrik noch auf affine Normalform. Auch hierbei sind wiederum zwei Fälle zu unterscheiden.

Im Fall $\alpha < 0$ besitzt die Quadrik die euklidische Normalform

$$Q_\alpha\colon\ -\frac{|\alpha|}{(\alpha-1)^2}\, z_1^2 - \frac{\alpha^2}{(\alpha-1)^2}\, z_2^2 + 1 = 0\,.$$

Wählt man nun ein Koordinatensystem $\mathbb{K}$ so, dass für die Koordinaten $(\hat{z_1}, \hat{z_2}) = {}_{\mathbb{K}}X$ gilt

$$\begin{aligned} \hat{z_1} &= \frac{(\alpha-1)}{\sqrt{|\alpha|}}\, z_1 \\ \hat{z_2} &= \frac{\alpha-1}{\alpha} z_2\,, \end{aligned}$$

dann erhält man die Koordinatentransformation (die *keine* Bewegung ist)

$$_{\mathbb{K}}\kappa_{\mathbb{G}}\colon {}_{\mathbb{G}}X \mapsto \begin{pmatrix} \frac{(\alpha-1)}{\sqrt{|\alpha|}} & 0 \\ 0 & \frac{\alpha-1}{\alpha} \end{pmatrix} {}_{\mathbb{G}}X$$

und bezüglich $\mathbb{K}$ die affine Normalform

$$Q_\alpha\colon\ -\hat{z_1}^2 - \hat{z_2}^2 + 1 = 0$$

und damit eine Ellipse.

Im Fall $\alpha > 0$ besitzt die Quadrik die euklidische Normalform

$$Q_\alpha\colon \frac{\alpha}{(\alpha-1)^2}\, z_1^2 - \frac{\alpha^2}{(\alpha-1)^2}\, z_2^2 + 1 = 0\,.$$

Wählt man das Koordinatensystem $\mathbb{K}$ nun so, dass für die Koordinaten $(\hat{z_1}, \hat{z_2}) = {}_{\mathbb{K}}X$ gilt

$$\begin{aligned} \hat{z_1} &= \frac{(\alpha-1)}{\sqrt{\alpha}}\, z_1 \\ \hat{z_2} &= \frac{\alpha-1}{\alpha} z_2\,, \end{aligned}$$

dann erhält man die Koordinatentransformation (die ebenfalls *keine* Bewegung ist)

$${}_{\mathbb{K}}\kappa_{\mathbb{G}}\colon {}_{\mathbb{G}}X \mapsto \begin{pmatrix} \frac{(\alpha-1)}{\sqrt{\alpha}} & 0 \\ 0 & \frac{\alpha-1}{\alpha} \end{pmatrix} {}_{\mathbb{G}}X$$

und bezüglich $\mathbb{K}$ die affine Normalform

$$Q_\alpha\colon \hat{z_1}^2 - \hat{z_2}^2 + 1 = 0$$

und damit eine Hyperbel.

Fassen wir die einzelnen Fällen noch einmal zusammen:

- Im Fall $\alpha < 0$ liegt eine Ellipse vor,
- im Fall $\alpha = 0$ liegt eine Parabel vor,
- im Fall $0 < \alpha < 1$ liegt eine Hyperbel vor,
- im Fall $\alpha = 1$ liegt ein schneidendes Geradenpaar vor und
- im Fall $\alpha > 1$ erhalten wir wieder eine Hyperbel.

zu (d)

Als Vorüberlegung untersuchen wir, wie von der Darstellung euklidischen Normalform auf die Darstellung bezüglich der ursprünglichen Koordinaten geschlossen werden kann. Dazu ist es nötig, das Koordinatensystem, bezüglich dessen die Normalform vorliegt, bezüglich des ursprünglichen Koordiantensystems darzustellen.

Im Fall $\alpha = 0$ lag bereits bezüglich $\mathbb{F}$ die euklidische Normalform vor.

Sonst musste noch die Transformation auf das Koordinatensystem $\mathbb{G}$ durchgeführt werden. Anhand der Koordiantentransformation

$${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{G}} = {}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}} \circ {}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{G}}$$

kann nun das Koordinatensystem $\mathbb{G}$ bezüglich $\mathbb{E}$ angegeben werden. Es ist nämlich

$$_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{G}}\colon {}_{\mathbb{G}}X \mapsto \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} {}_{\mathbb{G}}X + \frac{-(\alpha-1)}{2\alpha}\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix}$$

und damit

$$\mathbb{G} = \left(\frac{-(\alpha-1)}{2\alpha}\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix}; \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

Wir erkennen, dass die Basis des Koordinatensystems unabhängig von α ist und sich nur der Koordinatenursprung ändert.

Im Fall $\alpha = -1$ besitzt die Ellipse die euklidische Normalform

$$Q_{-1}\colon\ -\frac{1}{4}z_1^2 - \frac{1}{4}z_2^2 + 1 = 0\,.$$

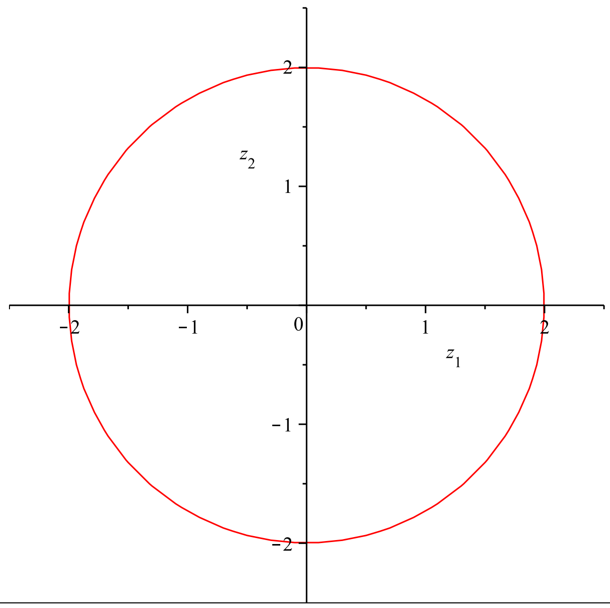
Da die Koeffizienten bei z_1^2 und z_2^2 gleich sind, liegt sogar ein Kreis vor. Formt man die Gleichung

$$-\frac{1}{4}z_1^2 - \frac{1}{4}z_2^2 + 1 = 0$$

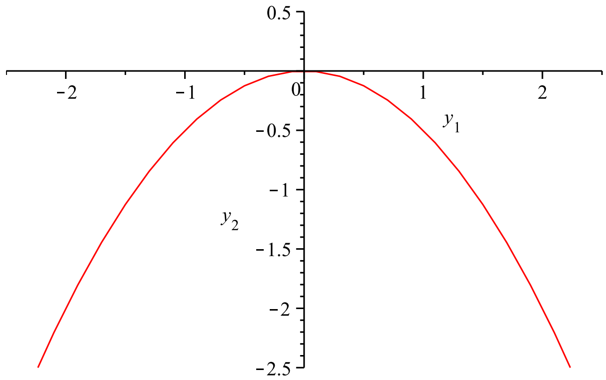
zu

$$z_1^2 + z_2^2 = 4 = 2^2$$

um, so erhält man eine aus der Schule vertrautere Form. Wir lesen direkt ab, es handelt sich um einen Kreis mit Radius 2 um den Ursprung – wohlgemerkt bezüglich des Koordinatensystems $\mathbb{G}$, das die Darstellung in euklidischer Normalform liefert. Das Koordinatensystem $\mathbb{G}$ besitzt in dem Fall den Ursprung $(-\sqrt{3}, 1)$.



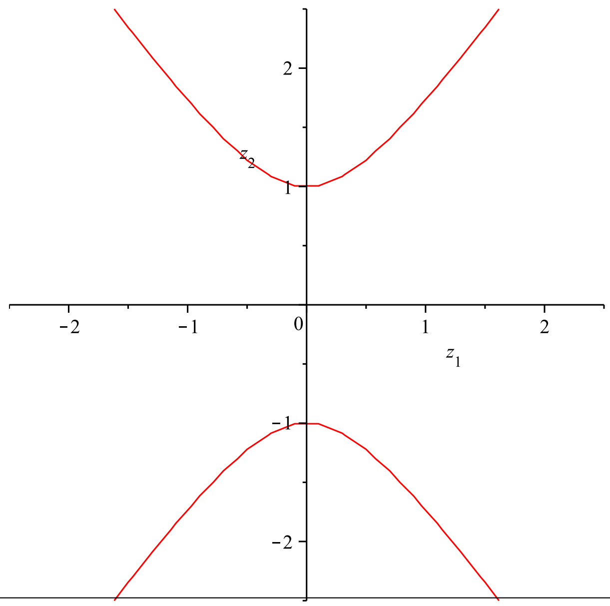
Im Fall $\alpha = 0$ liegt die oben bestimmte Parabel vor. Für die Beschreibung in Normalform ist das Koordinatensystem $\mathbb{F}$ mit Koordinatenursprung $(0, 0)$ zu verwenden.



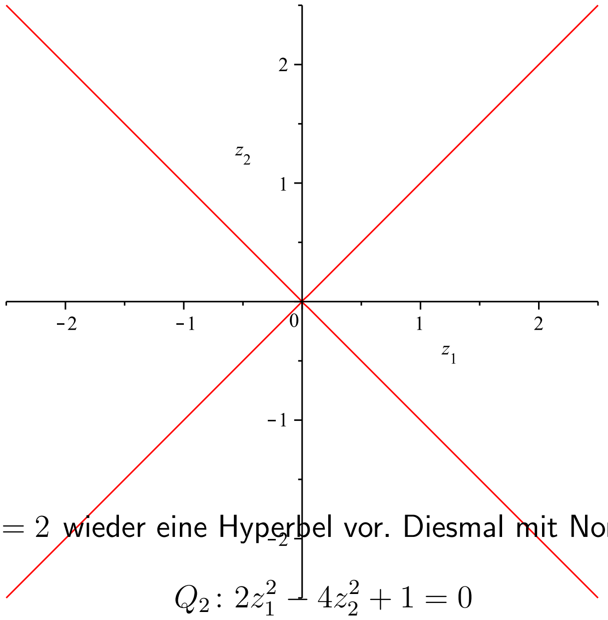
Für $\alpha = \frac{1}{2}$ erhalten wir eine Hyperbel mit Normalform

$$Q_{\frac{1}{2}} : 2z_1^2 - z_2^2 + 1 = 0\,.$$

Das Koordinatensystem $\mathbb{G}$ besitzt in dem Fall den Koordinatenursprung $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{-1}{2})$.



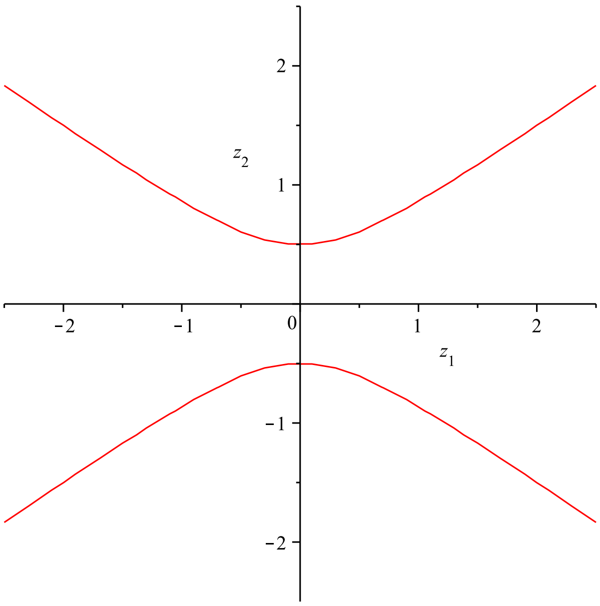
Im Fall $\alpha = 1$ liegt das oben bestimmte Paar schneidender Geraden vor; der Koordinatenursprung von $\mathbb{G}$ ist $(0, 0)$.



Schließlich liegt für $\alpha = 2$ wieder eine Hyperbel vor. Diesmal mit Normalform

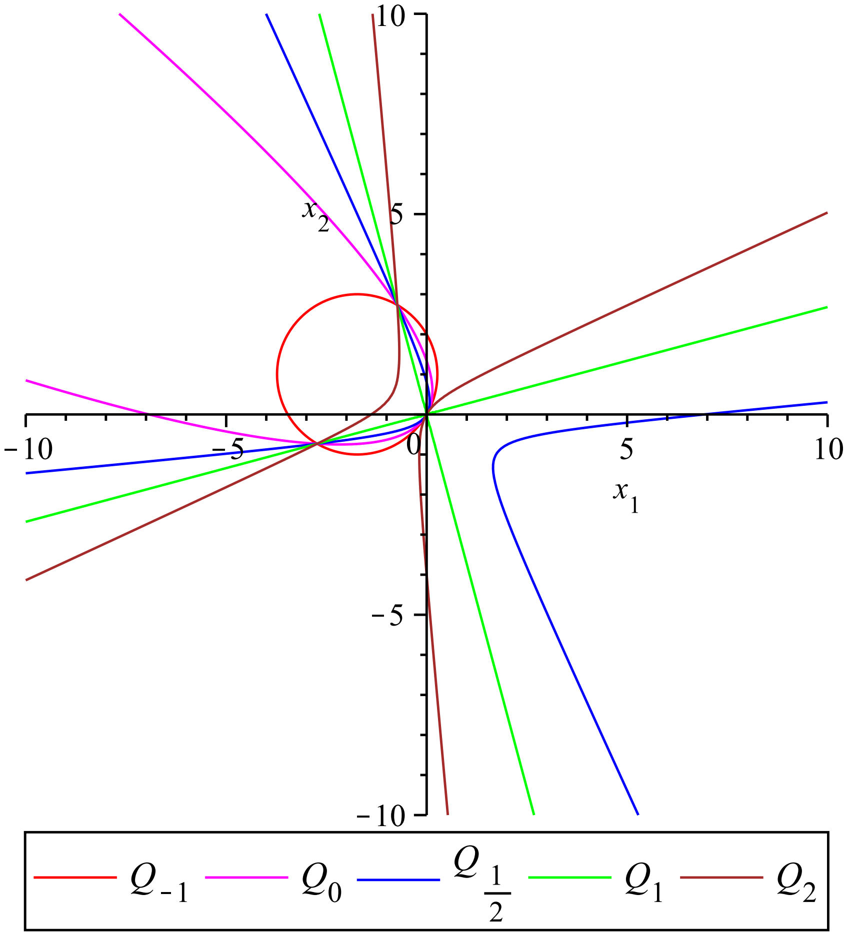
$$Q_2\colon\, 2z_1^2 - 4z_2^2 + 1 = 0$$

und Koordinatenursprung von $\mathbb{G}$ bei $\left(-\frac{1}{4}\sqrt{3}, \frac{1}{4}\right)$.



Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Im ursprünglichen Koordinatensystem $\mathbb{E}$ erhält man also



Dr. I. Rybak
S. Poppitz

Prof. Dr. M. Stroppel
Prof. Dr. N. Knarr

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Zu Aufgabe H 34:

zu (a)

Die Quadrik hat die Matrixbeschreibung $x^\mathsf{T}Ax + 2a^\mathsf{T}x + c = 0$ mit

$$A = \begin{pmatrix} -23 & 0 & 36 \\ 0 & 25 & 0 \\ 36 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} -15 \\ 25 \\ -20 \end{pmatrix}, \quad c = 75.$$

zu (b)

Um die euklidische Normalform der Quadrik zu bestimmen, macht man die folgenden Schritte.

Erster Schritt: Diagonalisierung

Die Eigenwerte der Matrix A berechnen wir als Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\det(A - \lambda E_3) = -(-25+\lambda)^2(50+\lambda)$, also zu $\lambda_{1,2} = 25$ und $\lambda_3 = -50$. Durch Lösen des entsprechenden linearen Gleichungssystems erhalten wir $V(25) = \mathrm{L}\left(f_1^*, f_2^*\right)$ und $V(-50) = \mathrm{L}\left(f_3^*\right)$, wobei

$$f_1^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f_2^* = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad f_3^* = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Die Vektoren f_1^*, f_2^*, f_3^* stehen senkrecht aufeinander. Wir müssen die f_i^* normieren

$$f_1 := f_1^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f_2 := \frac{1}{|f_2^*|} f_2^* = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad f_3 := \frac{1}{|f_3^*|} f_3^* = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Dies liefert die orthogonale Transformationsmatrix

$$F := (f_1, f_2, f_3) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Probe:

$$F^\mathsf{T} A F = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -23 & 0 & 36 \\ 0 & 25 & 0 \\ 36 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & -50 \end{pmatrix}.$$

Bezüglich des kartesischen Koordinatensystem $\mathbb{F} = (\vec{0}; f_1, f_2, f_3)$ hat unsere Quadrik die Gleichung

$$\begin{aligned}
0 &= y^\mathsf{T}\left(F^\mathsf{T}AF\right)y + 2\left(F^\mathsf{T}a\right)^\mathsf{T} y + 75 \\
&= y^\mathsf{T}\begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & -50 \end{pmatrix} y + 2\left(\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -15 \\ 25 \\ -20 \end{pmatrix}\right)^\mathsf{T} y + 75 \\
&= 25y_1^2 + 25y_2^2 - 50y_3^2 + 50y_1 - 50y_2 + 75.
\end{aligned}$$

Zweiter Schritt: Verschiebung

Durch quadratische Ergänzung sehen wir, wie wir verschieben müssen, um die lineare Terme in y_1 und y_2 zu beseitigen

$$\begin{aligned} 25y_1^2 + 50y_1 &= 25(y_1^2 + 2y_1 + 1) - 25 = 25(y_1 + 1)^2 - 25, \\ 25y_2^2 - 50y_2 &= 25(y_2^2 - 2y_2 + 1) - 25 = 25(y_2 - 1)^2 - 25. \end{aligned}$$

Also erhalten wir

$$25(y_1 + 1)^2 + 25(y_2 - 1)^2 - 50y_3^2 + 25 = 0.$$

Wir verwenden den neuen Ursprung $P = (1, -1, 0)^\mathsf{T}$, und erhalten bezüglich des Koordinatensystems $\mathbb{G} = (P; f_1, f_2, f_3)$ die Gleichung

$$25z_1^2 + 25z_2^2 - 50z_3^2 + 25 = 0.$$

Die euklidische Normalform erhält man, indem man diese Gleichung durch 25 dividiert

$$z_1^2 + z_2^2 - 2z_3^2 + 1 = 0.$$

zu (c)

Die benötigten Koordinatentransformationen erhält man durch

$${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}} \colon v \mapsto Fv + {}_{\mathbb{E}}P, \quad \text{und} \quad {}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}} \colon v \mapsto F^\mathsf{T}(v - {}_{\mathbb{E}}P).$$

Also erhält man für die Koordinatentransformation $\left(z = F^\mathsf{T}x - {}_{\mathbb{F}}P, \quad {}_{\mathbb{F}}P = (-1, 1, 0)^\mathsf{T}\right)$

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

und für die zugehorige Umkehrtransformation $\left(x = F(z + {}_{\mathbb{F}}P), \quad {}_{\mathbb{F}}P = (-1, 1, 0)^\mathsf{T}\right)$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} + \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

zu (d)

Die Gestalt der Quadrik: zweischaliges Hyperboloid.

Dr. I. Rybak
S. Poppitz

Höhere Mathematik I

Prof. Dr. M. Stroppel
Prof. Dr. N. Knarr

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Winter 2008/09

Zu Aufgabe H 35:

zu (a) Die nicht-rekursive Form lautet

$$a_n = 2(1+q)^n, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

was man leicht mit vollständiger Induktion nachprüfen kann.

zu (b) Für $q = 1$ erhalten wir die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $a_n = 2^{n+1}$:

$$2, \quad 4, \quad 8, \quad 16, \quad 32, \quad \ldots$$

Diese Folge ist streng monoton steigend und nach unten beschränkt $[s = 2]$ jedoch nicht nach oben.

Im Fall $q = 0$ lautet die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $a_n = 2$:

$$2, \quad 2, \quad 2, \quad 2, \quad 2, \quad \ldots$$

Diese Folge ist monoton steigend (auch monoton fallend). Sie ist nach oben und nach unten beschränkt $[S = s = 2]$.

Für $q = -1$ ergibt sich die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ zu

$$2, \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad \ldots$$

Diese Folge ist monoton fallend. Sie ist nach oben $[S = 2]$ und nach unten $[s = 0]$ beschränkt.

Im Fall $q = -2$ erhalten wir die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $a_n = 2(-1)^n$:

$$2, \quad -2, \quad 2, \quad -2, \quad 2, \quad -2, \quad \ldots$$

Diese alternierende Folge ist nicht monoton, aber nach oben $[S = 2]$ und nach unten $[s = -2]$ beschränkt.

zu (c) Für $q = 1$ erhalten wir den einzigen Häufungspunkt ∞.

Im Fall $q = 0$ ergibt sich der einziger Häufungspunkt zu $a = 2$. Limes superior und Limes inferior sind gleich: $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = 2$.

Für $q = -1$ erhalten wir den einzigen Häufungspunkt $a = 0$. Limes superior und Limes inferior sind durch $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = 0$ gegeben.

Für $q = -2$ erhalten wir die folgenden Häufungspunkte: $a = -2$, $a = 2$ und es gilt Limes superior $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = 2$, Limes inferior $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = -2$.

zu (d) Für $q = 1$ geht die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ gegen $+\infty$. Also ist die Folge bestimmt divergent:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty.$$

Es gibt keine konvergente Teilfolge.

Hinweis zu den Hinweisen: Es nützt *nichts*, diese Hinweise nur zu kopieren und abzuheften. Es nützt auch wenig, diese nur einfach durchzulesen. Man sollte sich wenigstens zu jedem Schritt überlegen, wie man diesen rechtfertigen kann.
Am besten: Nach einem Blick auf die Hinweise erneut versuchen, die Aufgaben selbst zu lösen!

Für $q = 0$ konvergiert die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ gegen 2 ($\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$). Also ist jede Teilfolge konvergent (gegen 2).

Für $q = -1$ konvergiert die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ gegen 0 ($\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$). Also ist jede Teilfolge konvergent (gegen 0).

Für $q = -2$ ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ divergent (alternierende Folge). Die Teilfolgen $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(a_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}_0}$ sind konvergent (gegen 2 bzw. -2).

zu (e)

Für $-2 < q \leqq 0$ ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergent, für $q \leqq -2$ ist sie divergent, und für $q > 0$ ist sie bestimmt divergent.

Zu Aufgabe H 36:

zu (a) Die durch $a_n = \dfrac{n}{n+1} = 1 - \dfrac{1}{n+1}$ gegebene Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{2}{3}, \quad a_3 = \frac{3}{4}, \quad a_4 = \frac{4}{5}, \quad \ldots$$

ist streng monoton steigend ($\forall n \in \mathbb{N}$ gilt $a_{n+1} > a_n$). Sie ist nach oben beschränkt, z.B. durch $S = 1$ oder auch durch $S = 5$ ($\forall n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n \leqq S$). Die Folge ist auch nach unten beschränkt, z.B. durch $s = \dfrac{1}{2}$ oder auch durch $s = -10^5$($\forall n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n \geqq s$).

zu (b) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = 1 + \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$:

$$a_1 = 1 - \frac{1}{2}, \quad a_2 = 1 + \frac{1}{4}, \quad a_3 = 1 - \frac{1}{8}, \quad a_4 = 1 + \frac{1}{16}, \quad \ldots$$

ist beschränkt [z.B. durch $S = 2$ und $s = \dfrac{1}{2}$], aber nicht monoton.

zu (c) Die alternierende Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = (-1)^n(2n+1)$:

$$a_1 = -3, \quad a_2 = 5, \quad a_3 = -7, \quad a_4 = 9, \quad \ldots$$

ist nicht monoton und weder nach oben noch nach unten beschränkt.

zu (d) Die durch $a_n = 8\cos\left(\dfrac{\pi n}{2}\right)$ gegebene Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$0, \quad -8, \quad 0, \quad 8, \quad 0, \quad -8, \quad 0, \quad 8, \quad \ldots$$

ist nicht monoton, aber nach oben und nach unten beschränkt [z.B. durch $s = -8$, $S = 8$].

Ergebnisse und Hinweise zu den Übungen

Winter 2008/09

Zu Aufgabe H 37:

zu (a) Die Folge $a_n = \sqrt{n+4} - \sqrt{n+2}$ konvergiert gegen 0. Wir erweitern

$$\sqrt{n+4} - \sqrt{n+2} = \frac{\left(\sqrt{n+4} - \sqrt{n+2}\right)\left(\sqrt{n+4} + \sqrt{n+2}\right)}{\sqrt{n+4} + \sqrt{n+2}} = \frac{n+4-(n+2)}{\sqrt{n+4} + \sqrt{n+2}}$$
$$= \frac{2}{\sqrt{n+4} + \sqrt{n+2}}.$$

Da der Nenner des rechts stehenden Ausdrucks über alle Grenzen wächst, konvergiert die Folge gegen 0:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+4} - \sqrt{n+2}\right) = 0.$$

zu (b) Die durch $a_n = (-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$ gegebene alternierende Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \ldots$$

ist divergent (die Folge hat 2 verschiedene Häufungspunkte).

zu (c) Die Folge $\left(\frac{1}{2n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen 0. Nach dem Archimedischen Prinzip 0.2.3 gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl n_ε mit $n_\varepsilon > \frac{1}{2\varepsilon}$. Für alle $n > n_\varepsilon$ gilt nun

$$\frac{1}{2n} < \frac{1}{2n_\varepsilon} < \frac{1}{2\frac{1}{2\varepsilon}} = \varepsilon.$$

Also gilt für alle $n > n_\varepsilon$:

$$\left|0 - \frac{1}{2n}\right| = \frac{1}{2n} < \varepsilon.$$

Damit haben wir $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2n} = 0$ bewiesen.

zu (d) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \cos(\pi(n+1))$ ist divergent. Für n ungerade erhalten wir $a_n = 1$ und für n gerade lautet $a_n = -1$. Die Folge hat 2 verschiedene Häufungspunkte, also kann sie nicht konvergent sein.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 38. *Sätze über Konvergenz*

Untersuchen Sie die nachstehenden Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenfalls die Grenzwerte

(a) $a_n = \dfrac{2n^5}{n^5+n^4+n^3+n^2+n+1}$

Lösungshinweise hierzu: Bei der Folge a_n lautet die höchste Potenz in Zähler und Nenner n^5, weshalb wir durch n^5 kürzen. Dann erhalten wir

$$a_n = \frac{2n^5}{n^5+n^4+n^3+n^2+n+1} = \frac{2}{1+1/n+1/n^2+1/n^3+1/n^4+1/n^5}.$$

Wenn jetzt n gegen Unendlich geht wird $1/n \to 0$ gehen. Genauso konvergieren auch $1/n^2$, $1/n^3$, $1/n^4$ und $1/n^5$ gegen Null, wenn n gegen Unendlich strebt. Insgesamt ergibt sich

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{1+1/n+1/n^2+1/n^3+1/n^4+1/n^5} = \frac{2}{1} = 2.$$

(b) $b_n = \left(\dfrac{5n}{2n+1}\right)^4$

Lösungshinweise hierzu: Die höchste vorkommende Potenz von n lautet n^4, und deshalb kürzen wir den Bruch durch n^4. Dann ist

$$b_n = \left(\frac{5n}{2n+1}\right)^4 = \left(\frac{5}{2+1/n}\right)^4.$$

Für $n \to \infty$ gilt $1/n \to 0$. Also erhalten wir

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{5}{2+1/n}\right)^4 = \left(\frac{5}{2}\right)^4 = \frac{625}{16}.$$

(c) $c_n = \sqrt{n(n+3)} - n$

Lösungshinweise hierzu: Wir erweitern c_n mit $\sqrt{n(n+3)} + n$. Das ergibt

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{\left(\sqrt{n(n+3)} - n\right)\left(\sqrt{n(n+3)} + n\right)}{\sqrt{n(n+3)} + n} = \frac{n(n+3) - n^2}{\sqrt{n(n+3)} + n} \\ &= \frac{n^2+3n-n^2}{\sqrt{n^2+3n}+n} = \frac{3n}{\sqrt{n^2+3n}+n}. \end{aligned}$$

Weil die höchste Potenz in Zähler und Nenner n lautet, kürzen wir den Bruch durch n:

$$c_n = \frac{3}{\sqrt{n^2/n^2 + 3n/n^2} + n/n} = \frac{3}{\sqrt{1 + 3/n} + 1}.$$

Für $n \to \infty$ geht $3/n \to 0$. Dann ist

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{\sqrt{1+3/n}+1} = \frac{3}{\sqrt{1}+1} = \frac{3}{2}.$$

(d) $d_n = \dfrac{n^3 + (-1)^n n^2}{2n^3 + 1}$

Lösungshinweise hierzu:

$$d_n = \frac{n^3 + (-1)^n n^2}{2n^3 + 1} = \frac{1 + (-1)^n/n}{2 + 1/n^3}.$$

Wenn jetzt n gegen Unendlich geht, konvergiert $1/n^3$ und $(-1)^n/n$ gegen Null. Dann ist

$$\lim_{n\to\infty} d_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + (-1)^n/n}{2 + 1/n^3} = \frac{1}{2}.$$

(e) $e_n = \dfrac{n^2}{n+1} - \dfrac{n^2}{n+3}$

Lösungshinweise hierzu: Wir berechnen

$$\begin{aligned} e_n &= \frac{n^2}{n+1} - \frac{n^2}{n+3} = \frac{n^2(n+3) - n^2(n+1)}{(n+1)(n+3)} = \frac{n^3 + 3n^2 - n^3 - n^2}{n^2 + 4n + 3} \\ &= \frac{2n^2}{n^2 + 4n + 3} = \frac{2}{1 + 4/n + 3/n^2}. \end{aligned}$$

Dann erhalten wir

$$\lim_{n\to\infty} e_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{1 + 4/n + 3/n^2} = 2.$$

(f) $f_n = \dfrac{(\sin n)^2}{n}$

Lösungshinweise hierzu: Es gilt

$$0 \leqq \frac{(\sin n)^2}{n} \leqq \frac{1}{n}.$$

Da $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, konvergiert nach dem Sandwichsatz (1.5.6) auch (f_n) gegen Null:

$$\lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sin n)^2}{n} = 0.$$

Aufgabe H 39. *Babylonisches Wurzelziehen*

Für $\alpha \geqq 0$ wird die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ rekursiv definiert durch

$$a_0 = \alpha + 1, \qquad\qquad a_n = \frac{a_{n-1} + \frac{\alpha}{a_{n-1}}}{2}.$$

(a) Verifizieren Sie mit vollständiger Induktion, dass alle Folgenglieder positiv sind.

Lösungshinweise hierzu: Wir wollen mit vollständiger Induktion zeigen:

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 \colon a_n > 0\,.$$

IA Da nach Voraussetzung $\alpha > 0$ erhalten wir

$$a_0 = \alpha + 1 \geqq 0 + 1 = 1 > 0\,.$$

IV Es gelte $a_n > 0$.

IS Da $\alpha \geqq 0$ und $a_n > 0$ nach **IV** folgt $\frac{\alpha}{a_n} \geqq 0$. Da heißt:

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{\alpha}{a_n}) > \frac{1}{2}(0 + \frac{\alpha}{a_n}) \geqq \frac{1}{2}(0+0) = 0\,.$$

(b) Zeigen Sie wiederum mit vollständiger Induktion, dass für alle $n \geqq 0$ die Ungleichung $a_n \geqq \sqrt{\alpha}$ gilt.

Lösungshinweise hierzu: Es soll mit Hilfe vollständiger Induktion gezeigt werden:

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 \colon a_n \geqq \sqrt{\alpha}\,.$$

IA Da die Wurzelfunktion monoton wächst und $\alpha^2 + 1 > 0$ sowie $\sqrt{2} > 1$ folgt:

$$a_0 = \alpha + 1 = \sqrt{(\alpha+1)^2} = \sqrt{\alpha^2 + 2\alpha + 1} \geqq \sqrt{2\alpha} = \sqrt{2}\sqrt{\alpha} \geqq \sqrt{\alpha}$$

IV Es gelte $a_n \geqq \sqrt{\alpha}$.

IS Es gilt

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{a_n^2 + \alpha}{2a_n} = \frac{a_n^2 - 2\sqrt{\alpha}a_n + \alpha + 2\sqrt{\alpha}a_n}{2a_n} = \frac{(a_n - \sqrt{\alpha})^2}{2a_n} + \frac{2\sqrt{\alpha}a_n}{2a_n} \\ &\geqq \frac{2\sqrt{\alpha}a_n}{2a_n} = \sqrt{\alpha}\,. \end{aligned}$$

(c) Zeigen Sie, die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ fällt monoton.

Lösungshinweise hierzu: Es gilt mit Teil (b):

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{1}{2}(a_n + \frac{\alpha}{a_n}) - a_n = \frac{1}{2}(-a_n + \frac{\alpha}{a_n}) \\ &\leqq \frac{1}{2}(-a_n + \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha}}) = \frac{1}{2}(-a_n + \sqrt{\alpha}) \\ &\leqq \frac{1}{2}(-\alpha + \alpha) = 0\,, \end{aligned}$$

das heißt, die Folge fällt monoton.

(d) Berechnen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Hinweis: Begründen Sie zunächst, warum der Grenzwert existieren muss. Nutzen Sie dann Sätze über Grenzwerte von Folgen aus, um ausgehend von der Rekursionsvorschrift auf den Grenzwert zu schließen.

Lösungshinweise hierzu: Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ fällt monoton nach (c) und ist wegen (a) nach unten beschränkt. Mit dem Satz von Bolzano-Weierstraß (1.6.5 aus der Vorlesung) sieht man, dass die Folge konvergiert.

Sei $a := \lim_{n\to\infty} a_n$, so gilt mit 1.4.12 aus der Vorlesung $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = a$. Es ist $a_{n+1} = \frac{a_n^2+\alpha}{2a_n}$ genau dann, wenn $a_n a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n^2+\alpha)$. Dies führt auf

$$\begin{aligned} a^2 &= \lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n a_{n+1} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}(a_n^2+\alpha) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}a_n^2 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}\alpha \end{aligned}$$

also

$$a^2 = \alpha\,.$$

Da die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ nur positive Glieder besitzt, kann sie lediglich einen positiven Grenzwert besitzen und wir erhalten

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a = \sqrt{\alpha}\,.$$

Mit Hilfe dieser rekursiven Folge ist es also möglich, Wurzeln näherungsweise zu bestimmen.

Aufgabe H 40.

Untersuchen Sie die folgenden rekursiv definierte Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenfalls die Grenzwerte

(a) $a_1 = 0, \quad a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}, \quad n \in \mathbb{N}$

Lösungshinweise hierzu: Falls a_n konvergiert sei $a := \lim_{n\to\infty} a_n$. Da die Wurzelfunktion stetig ist, gilt für beliebige konvergente Folgen $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{c_n} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} c_n}\,.$$

Also erhalten wir, wenn a_n konvergent ist:

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2+a_n} = \sqrt{\lim_{n\to\infty}(2+a_n)} = \sqrt{2+\lim_{n\to\infty} a_n} = \sqrt{2+a}$$

und damit $a = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$. Wegen $a_n \geqq 0$ folgt $a = 2$. Wir zeigen per vollständiger Induktion: $\forall n \in \mathbb{N} : a_n < a_{n+1} < 2$.

IA Wir erhalten $a_0 = 0 < \sqrt{2} = a_1 < 2$.

IV Es gelte $a_{n-1} < a_n < 2$.

IS Es gilt $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} > \sqrt{2+a_{n-1}} = a_n, \quad a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} < \sqrt{2+2} = 2$.

Daher konvergiert (a_n) nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß (1.6.5 aus der Vorlesung) mit $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$.

(b) $b_1 = 2, \quad b_{n+1} = \frac{3}{4-b_n}, \quad n \in \mathbb{N}$

Lösungshinweise hierzu: Wenn (b_n) gegen b konvergiert, dann ist $b = \frac{3}{4-b}$. Wir erhalten $b = 1 \vee b = 3$. Wir zeigen per vollständiger Induktion: $1 < b_{n+1} < b_n \leqq 2$.

IA Wir erhalten $1 < 1.5 = b_2 < 2 = b_1 \leqq 2$.

IV Es gelte $1 < b_n < b_{n-1} \leqq 2$.

IS Nach **IV** folgt $2 \leqq 4 - b_{n-1} < 4 - b_n < 3$. Damit erhalten wir

$$1 < \frac{3}{4-b_n} < \frac{3}{4-b_{n-1}} \leqq \frac{3}{2} < 2.$$

Damit ist (b_n) streng monoton fallend und beschränkt, und es gilt mit dem Satz von Bolzano-Weierstraß (1.6.5 aus der Vorlesung) $\lim_{n\to\infty} b_n = 1$.

(c) $c_1 = 0, \quad c_{n+1} = 3c_n + 2, \quad n \in \mathbb{N}$

Lösungshinweise hierzu: Wenn (c_n) gegen c konvergiert, dann ist $c = 3c + 2$. Wir erhalten $c = -1$. Aus $c_1 = 0$ folgt per Induktion sofort $c_n \geqq 0$. Damit konvergiert die Folge (c_n) nicht.