Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Kommentar zu allen Induktionsaufgaben: In **1.2.3** ist angemerkt, dass der Induktionsanfang nicht unbedingt bei $n = 1$ zu erfolgen hat. In diesen Lösungsvorschlägen wird der Induktionsanfang bei $n = 0$ durchgeführt, entsprechend **1.2.3** ist damit die Aussage für alle $n \geqq 0$, also für alle natürlichen Zahlen gezeigt.

Aufgabe H 1.

Beweisen Sie mit Hilfe von vollständiger Induktion die folgenden Aussagen:

(a) Für jede natürliche Zahl n ist $\sum\limits_{k=0}^{n} 2k+1$ eine Quadratzahl.

Hinweis: Finden Sie zunächst durch Einsetzen einiger Zahlen für n eine Formel der Form $\sum\limits_{k=0}^{n} 2k+1 = ?$ und beweisen Sie dann diese.

(b) Für jede natürliche Zahl m gilt $\sum\limits_{k=0}^{m} q^k = \dfrac{1-q^{m+1}}{1-q}$ für jede Zahl $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir zeigen $\sum\limits_{k=0}^{n} 2k+1 = (n+1)^2$.

IA $\sum\limits_{k=0}^{0} 2k+1 = 2\cdot 0+1 = 1 = (0+1)^2$.

IH Es gelte $\sum\limits_{k=0}^{n} 2k+1 = (n+1)^2$.

IS

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} 2k+1 &= \sum_{k=0}^{n} 2k+1 \; + \; 2(n+1)+1 \\
&= (n+1)^2 \; + \; 2(n+1)+1 \qquad \left(\text{nach IH}\right) \\
&= n^2+2n+1+2n+3 \\
&= n^2+4n+4 \\
&= (n+2)^2
\end{aligned}
$$

(b) IA $\sum\limits_{k=0}^{0} q^k = q^0 = 1 = \dfrac{1-q^{0+1}}{1-q}$

IH Es gelte $\sum\limits_{k=0}^{m} q^k = \dfrac{1-q^{m+1}}{1-q}$.

IS

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{m+1} q^k &= \sum_{k=0}^{m} q^k + q^{m+1} \\
&= \frac{1-q^{m+1}}{1-q} + q^{m+1} \qquad \Big(\text{nach IH}\Big) \\
&= \frac{1-q^{m+1}}{1-q} + \frac{q^{m+1}(1-q)}{1-q} \\
&= \frac{1-q^{m+1}+q^{m+1}-q^{m+1}q}{1-q} \\
&= \frac{1-q^{m+2}}{1-q}
\end{aligned}
$$

Aufgabe H 2. *Zweimal Induktion*

Sei $M(d,k)$ die Menge der k-Tupel mit maximaler Komponentensumme d gegeben durch

$$M(d,k) = \left\{ (d_1, \dots, d_k) \in \mathbb{N}_0^k \;\middle|\; \sum_{l=1}^{k} d_l \leqq d \right\}.$$

Zeigen Sie, dass die Anzahl der Elemente von $M(d,k)$ – geschrieben als $|M(d,k)|$ – berechnet werden kann durch

$$|M(d,k)| = \binom{d+k}{d}.$$

Machen Sie dazu die folgenden Hilfsüberlegungen:

(a) Zeigen Sie durch vollständige Induktion über m die Hilfsformel

$$\sum_{j=0}^{m} \binom{n+j}{n} = \binom{n+m+1}{n+1}.$$

(b) Zeigen Sie, dass gilt: $|M(d,1)| = \binom{d+1}{d}$.

(c) Zeigen Sie, dass gilt: $|M(d,k+1)| = \sum_{l=0}^{d} |M(d-l,k)|$.

(d) Zeigen Sie die gewünschte Aussage, durch eine Induktion über k und benutzen Sie dabei (a), (b) und (c).

Lösungshinweise hierzu:

(a) IA Für $m = 0$ erhalten wir $\sum_{j=0}^{0} \binom{n+j}{n} = \binom{n}{n} = 1 = \binom{n+0+1}{n+1}$.

IS Sei IH für m erfüllt. Wir zeigen, dass die Behauptung auch für $m+1$ erfüllt ist. Es gilt:

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{m+1} \binom{n+l}{n} &= \sum_{j=0}^{m} \binom{n+j}{n} + \binom{n+m+1}{n} \\ &= \binom{n+m+1}{n+1} + \binom{n+m+1}{n} \\ &= \binom{n+(m+1)+1}{n+1}\end{aligned}$$

Damit ist der Induktionsschritt gezeigt und die Behauptung bewiesen.

(b) Für $k = 1$ vereinfacht sich die Definition von $M(d,k)$ zu

$$M(d,1) = \left\{ d_1 \in \mathbb{N}_0 \,\middle|\, d_1 \leqq d \right\}.$$

Es ist offensichtlich, dass es $d+1$ Zahlen in $\mathbb{N}_0$ gibt, die kleiner gleich d sind. Also gilt $|M(d,1)| = d+1 = \binom{d+1}{d}$.

(c) Auf Grund der Tatsache, dass sich $M(d,k)$ schreiben lässt als

$M(d,k{+}1) = \left\{ (d_1,\ldots,d_{k+1}) \in \mathbb{N}_0^{k+1} \,\middle|\, d_{k+1} \leqq d \text{ und } (d_1,\ldots,d_k) \in M(d-d_{k+1},k) \right\}$

bekommen wir für die Anzahl der Elemente von $M(d,k+1)$ die Formel

$$|M(d,k+1)| = \sum_{l=0}^{d} |M(d-l,k)|.$$

Um $|M(d,k)| = \binom{d+k}{d}$ zu zeigen, wird eine Induktion über k gemacht.

IA Die Gleichung wurde bereits für $k = 1$ in (a) gezeigt.

IS Sei IH für k gegeben. Wir zeigen, dass die Behauptung auch für $k+1$ erfüllt ist.

$$\begin{aligned}|M(d,k+1)| &= \sum_{l=0}^{d} |M(d-l,k)| = \sum_{l=0}^{d} \binom{d-l+k}{d-l} = \sum_{l=0}^{d} \binom{d-l+k}{k} \\ &= \sum_{j=0}^{d} \binom{j+k}{k} = \binom{d+k+1}{k+1} = \binom{d+k+1}{d}.\end{aligned}$$

Damit ist die zweite Induktion beendet und die Behauptung bewiesen.

Aufgabe H 3.

(a) Skizzieren Sie die folgenden Mengen

$$M_1 := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, |x| + |y| = 1 \right\} ,$$
$$M_2 := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, |x| + |y| < 1 \right\} .$$

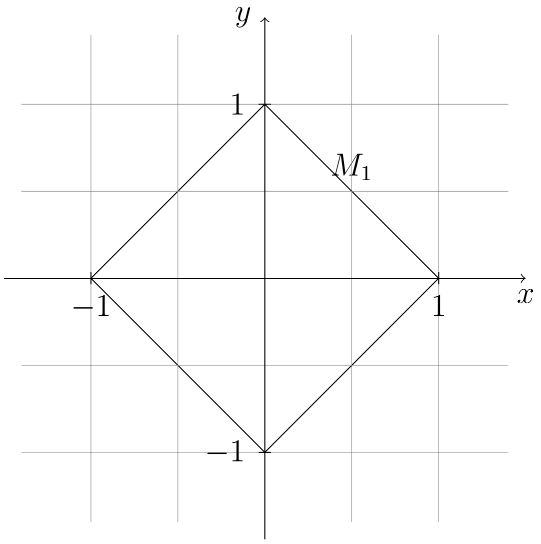
(b) Skizzieren Sie nun die Mengen

$$M_3 := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, (x-2)^2 + (y-1)^2 \leqq 1 \vee (x-2)^2 + (y+1)^2 \leqq 1 \right\} ,$$
$$M_4 := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, |y| > 1 \right\} .$$

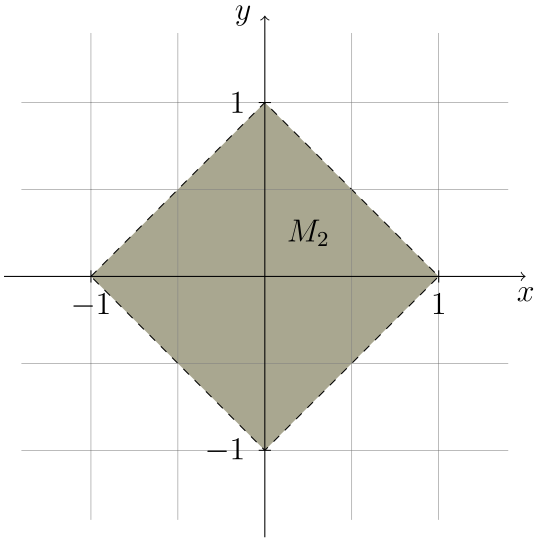
und die Schnittmenge von M_3 und M_4.

Lösungshinweise hierzu:

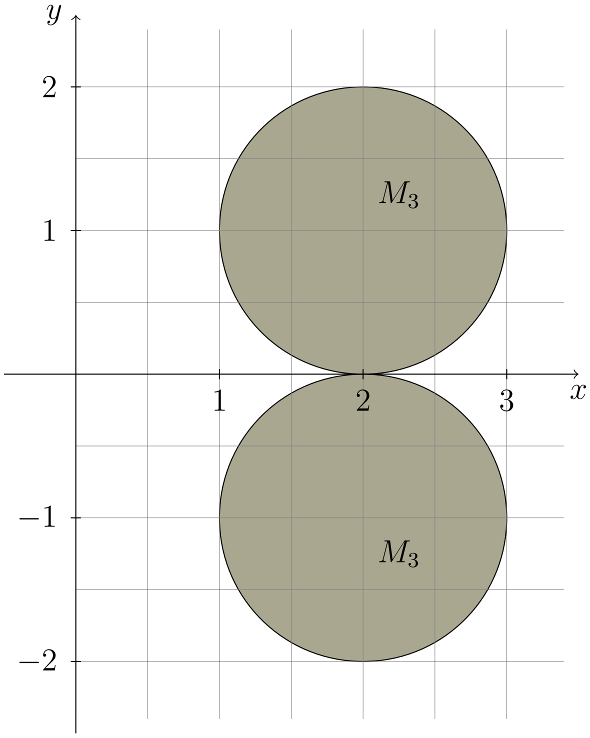
(a) Bei der Menge M_1 handelt es sich um den Rand einer Raute (nur die Grenzen).



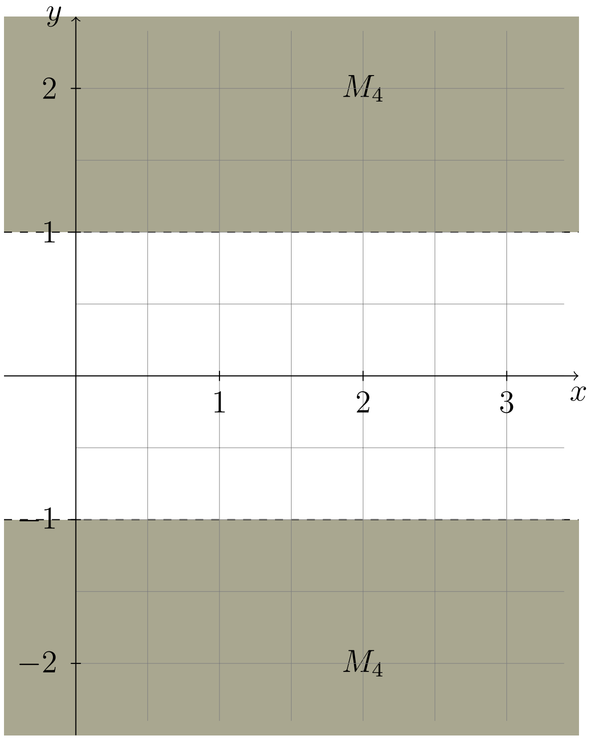
Die Menge M_2 ist eine Raute (nur das Innere, ohne Rand).



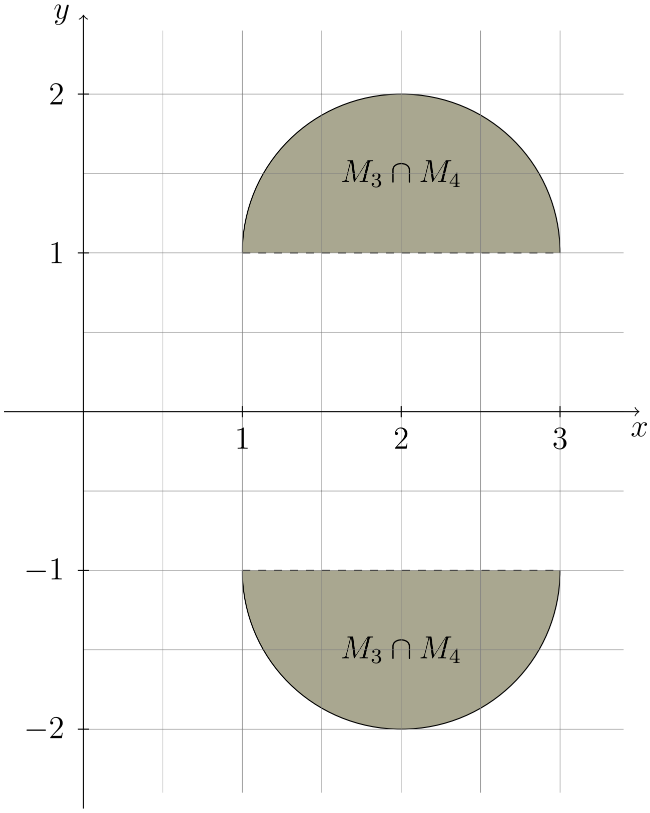
(b) Die Menge M_3 besteht aus zwei Kreisscheiben mit Radius 1 und den Mittelpunkten $(2,1)$ und $(2,-1)$, wobei der Rand Bestandteil der Menge ist.



Die Menge M_4 besteht aus zwei Halbebenen, wobei der Rand $y = \pm 1$ nicht zu der Menge gehört.



Also ist die Schnittmenge von M_3 und M_4:



Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 4. *Ungleichungen, vollständige Induktion*

(a) Mit Hilfe des Binomischen Satzes zeigen Sie für $x \in \mathbb{R}$, $x \geqq 0$ und $n \in \mathbb{N}$, $n \geqq 2$ die Abschätzung

$$(1+x)^n \geqq 1 + \frac{n^2}{4}x^2.$$

(b) Zeigen Sie: $a_n = (n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3$ ist für $n \in \mathbb{N}$ durch 9 teilbar.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Mit Hilfe des Binomischen Satzes 1.3.5 erhalten wir

$$\begin{aligned}(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^n 1^{n-k} &= \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^n \\ &\geqq \binom{n}{0} + \binom{n}{2}x^2 = 1 + \frac{(n-1)n}{2}x^2 \geqq 1 + \frac{n^2}{4}x^2,\end{aligned}$$

da $n-1 \geqq \dfrac{n}{2}$ für $n \geqq 2$.

(b) Der Beweis erfolgt über vollständige Induktion:

IA Für $n=1$ erhalten wir $a_1 = (1-1)^3 + 1^3 + (1+1)^3 = 9$ ist durch 9 teilbar.

IH Es gelte $a_n = (n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3$ ist für $n \in \mathbb{N}$ durch 9 teilbar.

IS Für $n+1$ erhalten wir

$$\begin{aligned}a_{n+1} &= n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 = n^3 + (n+1)^3 + ((n-1)+3)^3 \\ &= (n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3 + 9(n-1)^2 + 27(n-1) + 27 \\ &= a_n + 9\left((n-1)^2 + 3(n-1) + 3\right)\end{aligned}$$

ist durch 9 teilbar.

Aufgabe H 5. *Mengen*

Gegeben sind die Mengen M_1 bis M_5 und die Zahlen x_1 bis x_6:

$$\begin{aligned}M_1 &= \left\{k \in \mathbb{N} \;\middle|\; \exists n \in \mathbb{N}\colon n! = k\right\} \\ M_2 &= \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; 4x \in \mathbb{Z}\right\} \\ M_3 &= \left\{a \in \mathbb{R} \;\middle|\; \exists b \in \mathbb{R}\colon a^2 = -b^2\right\} \\ M_4 &= \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \forall y \in \mathbb{N}_0\colon x < y\right\} \\ M_5 &= \left\{z \in \mathbb{R} \;\middle|\; \exists n \in \mathbb{N}_0\colon |z-n| \leqq \frac{1}{2}\right\}\end{aligned}$$

$x_1 = 0$ $\qquad x_2 = 720$ $\qquad x_3 = -\frac{1}{2}$

$x_4 = 3000$ $\qquad x_5 = -25,25$ $\qquad x_6 = \sqrt{10}$

Erstellen Sie eine Tabelle und tragen Sie in die (k,l)-te Zelle "wahr" ein, falls die Aussage $x_k \in M_l$ wahr ist.

Lösungshinweise hierzu:

$\in$	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
x_1		wahr	wahr		wahr
x_2	wahr	wahr			wahr
x_3		wahr		wahr	wahr
x_4		wahr			wahr
x_5		wahr		wahr	
x_6					wahr

Aufgabe H 6. *Injektivität, Surjektivität und Bijektivität*

(a) Prüfen Sie folgenden Funktionen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität:

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x^3 - 2x$$
$$g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}\colon n \mapsto n!$$
$$h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}\colon n \mapsto \frac{5n^2 - 13n + 5}{2n - 5}$$

Lösungshinweise hierzu:

- f ist nicht injektiv, da $f(\sqrt{2}) = f(0)$.
  f ist surjektiv, da die Gleichung $x^3 - 2x - c = 0$ mindestens eine reelle Lösung x hat.
  f ist nicht bijektiv, da f nicht injektiv ist.
  Anmerkung: Man kann auf unterschiedliche Weise zeigen, dass $x^3 - 2x - c$ immer eine reelle Nullstelle hat. Wir benutzen hier eine Variante die den Fundametalsatz der Algebra benutzt:
  Der Fundamentalsatz der Algebra sagt, dass Polynome k-ten Grades genau k komplexe Nullstellen haben. Für Polynome mit reellen Koeffizienten weiß man sogar, dass Nullstellen entweder reell sind oder als Paar komplex konjugierter Nullstellen auftretten. Für ein Polynom 3-ten Grades folgt damit, dass es entweder 3 reelle Nullstellen oder 1 reelle Nullstelle und eine Paar komplex konjugierter Nullstellen hat.
- g ist injektiv, da für $n > m$ gilt $n! > m!$ und damit gilt
  $$n \neq m \Rightarrow g(n) \neq g(m).$$
  g ist nicht surjektiv, da $g(n) = 3$ keine Lösung besitzt, denn für $n > 3$ gilt
  $$n! > 3! > 3 > 2! > 1!.$$
  g ist nicht bijektiv, da g nicht surjektiv ist.

- h ist nicht injektiv, da $h(3) = h(4) = 11$ ist.
  h ist nicht surjektiv, da $h(n) = 0$ keine natürlichen Lösungen besitzt.
  h ist nicht bijektiv, da h nicht surjektiv ist.

(b) Es seien die Mengen $M_1 := \{0, 1, 2, 3\}$ und $M_2 := \{0, 1, 2, 3, 4\}$ gegeben. Existiert eine injektive, eine surjektive bzw. eine bijektive Abbildung von M_1 nach M_2?

Lösungshinweise hierzu:
Es existieren injektive, aber keine surjektiven oder bijektiven Abbildungen von M_1 nach M_2.
Begründung:

- Die Abbildung $k\colon M_1 \to M_2\colon x \mapsto x$ ist injektiv, da $x \neq y \Rightarrow k(x) \neq k(y)$.
- Es kann keine surjektive Abbildung $l : M_1 \to M_2$ geben, da $\operatorname{Bild}(l) \neq M_2$, weil

$$|\operatorname{Bild}(l)| \leqq |M_1| = 4 < 5 = |M_2|.$$

  Hier ist $|M|$ die Anzahl der Elemente der Menge M.
- Es gibt keine bijektiven Abbildungen von M_1 nach M_2, weil es keine surjektiven Abbildungen gibt.

(c) Existiert eine injektive, eine surjektive bzw. eine bijektive Abbildung vom Intervall $I_1 := [0, 3] \subsetneqq \mathbb{R}$ ins Intervall $I_2 := [0, 4] \subsetneqq \mathbb{R}$?

Lösungshinweise hierzu: Es gibt bijektive Abbildungen von I_1 nach I_2 und deshalb auch injektive und surjektive Abbildungen von I_1 nach I_2. Ein Beispiel für eine bijektive Abbildung ist

$$m\colon I_1 \to I_2\colon x \mapsto \frac{4}{3}x.$$

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 7. *Komplexe Zahlen*

Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil, Betrag und Argument, sowie das komplex Konjugierte der folgenden komplexen Zahlen:

(a) $z_1 = \dfrac{1+2i}{3-4i}$

(b) $z_2 = \dfrac{3}{2}i + \dfrac{2-i}{(1+i)^2}$

(c) $z_3 = \overline{\left(\dfrac{2}{1-i}\right)}$

(d) $z_4 = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1-i)\right)^8$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es ist

$$z_1 = \frac{1+2i}{3-4i} = \frac{(1+2i)\overline{(3-4i)}}{(3-4i)\overline{(3-4i)}} = \frac{(1+2i)(3+4i)}{|3-4i|^2} = \frac{3+6i+4i-8}{3^2+4^2} = -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i.$$

Also erhalten wir

$$\mathrm{Re}(z_1) = -\frac{1}{5},\ \mathrm{Im}(z_1) = \frac{2}{5},\ \overline{z_1} = -\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i,\ |z_1| = \sqrt{\left(-\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{5}},$$

$$\arg(z) = \pi - \arctan(2)$$

(b) Es gilt $(1+i)^2 = 2i$. Weiter ergibt sich

$$z_2 = \frac{3}{2}i + \frac{2-i}{(1+i)^2} = \frac{3}{2}i + \frac{2-i}{2i} = \frac{3}{2}i + \frac{(2-i)i}{2i^2} = \frac{3}{2}i + \frac{2i+1}{-2} = \frac{3}{2}i - i - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i.$$

Es gilt

$$\mathrm{Re}(z_2) = -\frac{1}{2}, \quad \mathrm{Im}(z_2) = \frac{1}{2}, \quad \overline{z_2} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i, \quad |z_2| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\arg(z) = \frac{3}{4}\pi.$$

(c) Wir berechnen

$$z_3 = \overline{\left(\frac{2}{1-i}\right)} = \overline{\left(\frac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)}\right)} = \overline{\left(\frac{2+2i}{2}\right)} = \overline{(1+i)} = 1-i.$$

Es gilt

$$\mathrm{Re}(z_3) = 1, \quad \mathrm{Im}(z_2) = -1, \quad \overline{z_3} = 1+i, \quad |z_3| = \sqrt{2},\ \arg(z) = \frac{7}{4}\pi.$$

(d) Es ist

$$z_4 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)\right)^8 = \frac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^8}(1-i)^8 = \frac{1}{16}(1-i)^8.$$

Es wurde $(1-i) = -2i$ bereits berechnet. Weiter ergibt sich $(1-i)^8 = (-2i)^4 = 16i^4 = 16$. Insgesamt ist also $z_4 = 1$. Es gilt

$$\mathrm{Re}(z_4) = 1, \quad \mathrm{Im}(z_4) = 0, \quad \overline{z_4} = 1, \quad |z_4| = 1, \ \arg(z) = 0.$$

Aufgabe H 8. *Wurzelziehen im Komplexen*

Bestimmen alle n-ten Wurzeln von z für die folgenden Werte n und z. Geben Sie das Ergebnis in der Form $a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

(a) $n = 8$ und $z = 1$ **(b)** $n = 2$ und $z = i$ **(c)** $n = 2$ und $z = 1+\sqrt{3}i$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Zuerst berechnen wir das Argument und den Betrag von 1 und erhalten damit die Darstellung

$$1 = 1 \cdot (\cos(0) + i\sin(0)).$$

Damit erhalten wir dann die folgenden acht 8-ten Wurzeln:

$$\begin{aligned}
z_1 &= 1 \cdot \left(\cos\left(0 \cdot \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(0 \cdot \frac{\pi}{4}\right)\right) = 1 \\
z_2 &= 1 \cdot \left(\cos\left(1 \cdot \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(1 \cdot \frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} + \sqrt{2}i\right) \\
z_3 &= 1 \cdot \left(\cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right)\right) = i \\
z_4 &= 1 \cdot \left(\cos\left(3 \cdot \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(3 \cdot \frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(-\sqrt{2} + \sqrt{2}i\right) \\
z_5 &= 1 \cdot \left(\cos\left(4 \cdot \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(4 \cdot \frac{\pi}{4}\right)\right) = -1 \\
z_6 &= 1 \cdot \left(\cos\left(5 \cdot \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(5 \cdot \frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(-\sqrt{2} - \sqrt{2}i\right) \\
z_7 &= 1 \cdot \left(\cos\left(6 \cdot \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(6 \cdot \frac{\pi}{4}\right)\right) = -i \\
z_8 &= 1 \cdot \left(\cos\left(7 \cdot \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(7 \cdot \frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} - \sqrt{2}i\right)
\end{aligned}$$

(b) Für i erhalten wir die Darstellung

$$i = 1 \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right).$$

Damit erhalten wir für die 2-ten Wurzeln gerade die Darstellung

$$\begin{aligned}
w_1 &= 1 \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} + \sqrt{2}i\right) \\
w_2 &= 1 \cdot \left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right) = -\frac{1}{2}\left(\sqrt{2} + \sqrt{2}i\right)
\end{aligned}$$

(c) Wir berechnen die Polardarstellung der Zahl $1+\sqrt{3}i$ und erhalten

$$1+\sqrt{3}i = 2\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right).$$

Mit dieser Darstellung erhalten wir die 2-ten Wurzeln durch

$$\begin{aligned} v_1 &= \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{3}+i\right)\\ v_2 &= \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{3}+i\right)\end{aligned}$$

Aufgabe H 9.

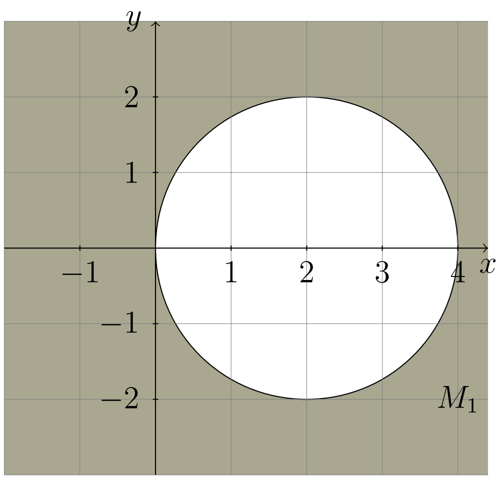
Gegeben sind folgende Mengen:

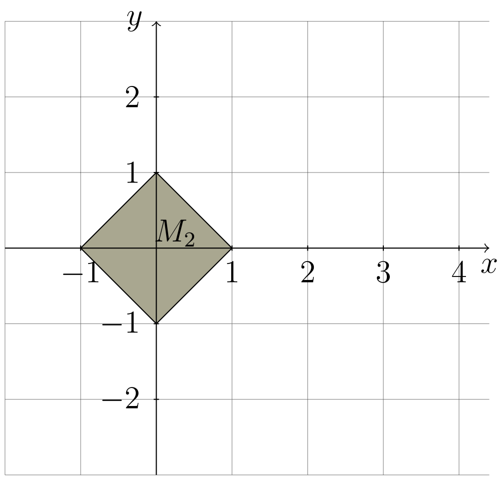
$$\begin{aligned} M_1 &= \left\{z\in\mathbb{C}\,\middle|\, |z-2|\geqq 2\right\},\\ M_2 &= \left\{z\in\mathbb{C}\,\middle|\, |\operatorname{Im} z|+|\operatorname{Re} z|\leqq 1\right\},\\ M_3 &= \mathbf{C}_{\mathbb{C}}(M_1\cup M_2),\\ M_4 &= \mathbf{C}_{\mathbb{C}}(M_1)\cap\mathbf{C}_{\mathbb{C}}(M_2).\end{aligned}$$

Zeichnen Sie die Mengen M_1, M_2, M_3 und M_4.

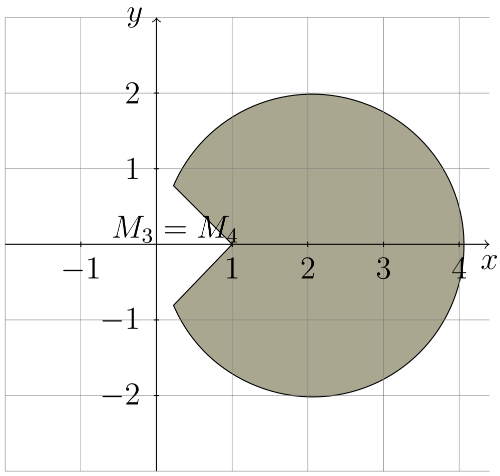
Lösungshinweise hierzu:

Für die Mengen M_1 und M_2 erhält man die folgenden Skizzen:





Für die Menge $M_3 = M_4$ erhält man mit Hilfe der Skizzen für M_1 und M_2 die folgende Skizze:



Aufgabe H 10.

Berechnen Sie alle komplexen Nullstellen der folgenden Polynome:

(a) $p_1(x) = x^3 - 8x^2 + 17x - 10$

(b) $p_2(x) = x^3 - x^2 + 2$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Das Polynom p_1 hat die Nullstelle $x_1 = 1$ (Raten). Polynomdivision ergibt $p_1(x) = (x-1)(x^2 - 7x - +10)$. Die Mitternachtsformel liefert die beiden anderen Nullstellen $x_2 = 2$ und$x_3 = 5$.

(b) Raten liefert die erste Nullstelle $x_1 = -1$. Nach Polynomdivision erhalten wir $p_2(x) = (x+1)(x^2 - 2x + 2)$. Quadratisches Ergänzen führt zu $x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1$. Wir substituieren $(x-1) = u$ und erhalten die Gleichung $u^2 + 1 = 0$. Diese hat die beiden Lösungen $u_1 = i$ und $u_2 = -i$. Rücksubstitution ergibt $x_2 = u_1 + 1 = i + 1$ und $x_3 = u_2 + 1 = -i + 1$.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 11.

In $\mathbb{R}^3$ seien die Punkte

$$P_1 = (0,0,1), \quad P_2 = (2,-1,1), \quad P_3 = (3,-2,2) \quad \text{sowie}$$

$$Q_1 = (1,1,1), \quad Q_2 = (2,0,2), \quad Q_3 = (1,0,\alpha)$$

gegeben. Geben Sie die Ebene, die P_1, P_2 und P_3 enthält, und die Ebene, die Q_1, Q_2 und Q_3 enthält, an. Berechnen Sie α so, dass die beiden Ebenen parallel sind.

Lösungshinweise hierzu: Nach 2.8.11 sind die zwei Ebenen genau dann parallel, wenn

$$\mathrm{L}(v_1, w_1) = \mathrm{L}(v_2, w_2).$$

Hierbei sind v_1 und w_1 Richtungsvektoren der ersten Ebene E_1 und v_2, w_2 Richtungsvektoren der zweiten Ebene E_2. Wir berechnen die Richtungsvektoren und erhalten

$$v_1 = P_2 - P_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad w_1 = P_3 - P_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$v_2 = Q_2 - Q_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad w_2 = Q_3 - Q_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ \alpha - 1 \end{pmatrix}.$$

Die Ebenen könnenalso beschrieben werden durch

$$\begin{aligned} E_P &= \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},\ t, r \in \mathbb{R} \right\} \text{und} \\ E_Q &= \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ \alpha - 1 \end{pmatrix},\ t, r \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

Weiter gilt

$$v_2 \in \mathrm{L}(v_1, w_1)\,, \text{da } v_2 = (-1) \cdot v_1 + 1 \cdot w_1$$

und

$$w_2 \in \mathrm{L}(v_1, w_1) \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 3,$$

da das Gleichungssystem

$$\beta v_1 + \gamma w_1 = w_2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{rrl} 2\beta & +3\gamma & = 0 \\ -1\beta & -2\gamma & = -1 \\ 0\beta & +1\gamma & = \alpha - 1 \end{array}$$

nur eine Lösung besitzt, nämlich $\alpha = 3$, $\beta = -3$ und $\gamma = 2$.
Insgesamt folgt damit

$$E_1 || E_2 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{L}(v_1, w_1) = \mathrm{L}(v_2, w_2) \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 3.$$

Aufgabe H 12.
Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$ (siehe 2.6.2.) und $b_1, b_2, b_3 \in V$ so, dass $\langle b_1 \,|\, b_1 \rangle = 1$, $\langle b_1 \,|\, b_2 \rangle = 2$, $\langle b_1 \,|\, b_3 \rangle = 0$, $\langle b_2 \,|\, b_2 \rangle = 2$, $\langle b_2 \,|\, b_3 \rangle = 2$ und $\langle b_3 \,|\, b_3 \rangle = 3$. Berechnen Sie $\langle b_1 + b_2 + b_3 \,|\, \alpha\, b_1 - 2b_3 - b_2 \rangle$ für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $|b_1 + b_2 + b_3|^2$.

Lösungshinweise hierzu:

$$\begin{aligned}
\langle b_1 + b_2 + b_3 \,|\, \alpha\, b_1 - 2b_3 - b_2 \rangle &= \langle b_1 \,|\, \alpha\, b_1 - 2b_3 - b_2 \rangle + \langle b_2 \,|\, \alpha\, b_1 - 2b_3 - b_2 \rangle \\
&\quad + \langle b_3 \,|\, \alpha\, b_1 - 2b_3 - b_2 \rangle \\
&= \langle b_1 \,|\, \alpha\, b_1 \rangle + \langle b_1 \,|\, -2b_3 \rangle + \langle b_1 \,|\, -b_2 \rangle + \langle b_2 \,|\, \alpha\, b_1 \rangle \\
&\quad + \langle b_2 \,|\, -2b_3 \rangle + \langle b_2 \,|\, -b_2 \rangle + \langle b_3 \,|\, \alpha\, b_1 \rangle + \langle b_3 \,|\, -2b_3 \rangle \\
&\quad + \langle b_3 \,|\, -b_2 \rangle \\
&= \alpha \langle b_1 \,|\, b_1 \rangle - 2 \langle b_1 \,|\, b_3 \rangle - \langle b_1 \,|\, b_2 \rangle \alpha \langle b_2 \,|\, b_1 \rangle - 2 \langle b_2 \,|\, b_3 \rangle \\
&\quad - \langle b_2 \,|\, b_2 \rangle + \alpha \langle b_3 \,|\, b_1 \rangle - 2 \langle b_3 \,|\, b_3 \rangle - \langle b_3 \,|\, b_2 \rangle \\
&= \alpha + 0 - 2 + 2\,\alpha - 4 - 2 + 0 - 6 - 2 = 3\alpha - 16 \\
|b_1 + b_2 + b_3|^2 &= \langle b_1 + b_2 + b_3 \,|\, b_1 + b_2 + b_3 \rangle \\
&= \langle b_1 \,|\, b_1 + b_2 + b_3 \rangle + \langle b_2 \,|\, b_1 + b_2 + b_3 \rangle + \langle b_3 \,|\, b_1 + b_2 + b_3 \rangle \\
&= \langle b_1 \,|\, b_1 \rangle + \langle b_1 \,|\, b_2 \rangle + \langle b_1 \,|\, b_3 \rangle + \langle b_2 \,|\, b_1 \rangle + \langle b_2 \,|\, b_2 \rangle \\
&\quad + \langle b_2 \,|\, b_3 \rangle + \langle b_3 \,|\, b_1 \rangle + \langle b_3 \,|\, b_2 \rangle + \langle b_3 \,|\, b_3 \rangle \\
&= 1 + 2 + 0 + 2 + 2 + 2 + 0 + 2 + 3 = 14
\end{aligned}$$

Aufgabe H 13. *Faktorisierung von Polynomen, Wurzelziehen bei komplexen Zahlen*
Berechnen Sie alle Lösungen der folgenden Gleichung

$$z^6 - 4z^5 + 5z^4 - 4z^3 + 5z^2 - 4z + 4 = 0$$

Hinweis: $z = 2$ ist mehrfache Lösung.

Lösungshinweise hierzu: Polynomdivision liefert

$$z^6 - 4z^5 + 5z^4 - 4z^3 + 5z^2 - 4z + 4 = (z-2)^2 \left(z^4 + z^2 + 1\right).$$

Nach dem Abspalten des Faktors $(z-2)^2$, der sich aus den ersten beiden Nullstellen $z_{1,2} = 2$ ergibt, sind noch die Nullstellen der biquadratischen Gleichung $z^4 + z^2 + 1 = 0$ zu bestimmen. Durch quadratische Ergänzung erhalten wir

$$z^4 + z^2 + 1 = z^4 + 2\frac{1}{2}z^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = \left(z^2 + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.$$

Die biquadratischen Gleichung $z^4 + z^2 + 1 = 0$ kann umgefort werden zu

$$\left(z^2 + \frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{3}{4}.$$

Wir erhalten

$$z^2 + \frac{1}{2} = \sqrt{-\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{-1} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Daraus ergeben sich

$$z^2 = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Für $z^2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ erhalten wir

$$z^2 = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right).$$

Also, die Nullstellen laufen

$$\begin{aligned} z_3 &= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \\ z_4 &= \cos\left(\frac{\pi}{3} + \pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} + \pi\right) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i. \end{aligned}$$

Für $z^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ erhalten wir ebenfalls

$$z_5 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \qquad z_6 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Aufgabe H 14.

Wir betrachten den Vektorraum $\mathrm{Pol}_2\,\mathbb{R} := \left\{\sum_{j=0}^{2} \alpha_j X^j \;\middle|\; \alpha_j \in \mathbb{R}\right\}$ der reellen Polynome vom Grad höchstens 2 und die Mengen $B = \{1, X, X^2\}$ und $C = \{X^2, X-1, X+1\}$. Weisen Sie nach, dass es sich um Basen von $\mathrm{Pol}_2\,\mathbb{R}$ handelt.

Lösungshinweise hierzu: Wir beweisen zuerst die lineare Unabhängigkeit von B. Hierzu betrachten wir die Gleichung

$$\begin{aligned} \lambda_1\, b_1 + \lambda_2\, b_2 + \lambda_3\, b_3 &= 0 \\ \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot X + \lambda_3 \cdot X^2 &= 0 \cdot 1 + 0 \cdot X + 0 \cdot X^2 \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich ergibt $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 0$. Die Elemente von B sind also linear unabhängig. Jetzt soll untersucht werden, ob B ein Erzeugendensysten von V ist. Hierzu ist zu klären, ob die Gleichung

$$\lambda_1\, b_1 + \lambda_2\, b_2 + \lambda_3\, b_3 = \sum_{j=0}^{2} \alpha_j X^j$$

für jede Wahl von $\alpha_j \in \mathbb{R}$ eine Lösung hat. Koeffizientenvergleich ergibt

$$\lambda_1 = \alpha_0,\ \lambda_2 = \alpha_1,\ \lambda_3 = \alpha_2.$$

Da somit jedes Element von V als Linearkombination der Elemente von B geschrieben werden kann, ist B ein Erzeugendensystem.

Nun soll die lineare Unabhängigkeit von C überprüft werden. Wir betrachten also die Gleichung

$$\begin{aligned}
\lambda_1\, c_1 + \lambda_2\, c_2 + \lambda_3\, c_3 &= 0 \\
\lambda_1 \cdot X^2 + \lambda_2 \cdot (X-1) + \lambda_3 \cdot (X+1) &= 0 \cdot 1 + 0 \cdot X + 0 \cdot X^2 \\
\lambda_1 \cdot X^2 + (\lambda_2 + \lambda_3) \cdot X + (\lambda_2 - \lambda_3) \cdot 1 &= 0 \cdot 1 + 0 \cdot X + 0 \cdot X^2
\end{aligned}$$

und erhalten durch Koeffizientenvergleich

$$\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0,\ \lambda_2 - \lambda_3 = 0.$$

Addition der letzten beiden Gleichungen ergibt $2\,\lambda_2 = 0$, durch Einsetzen in die zweite Gleichung ergibt sich $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 0,$. Damit ist die lineare Unabhängigkeit von C gezeigt.

Da schon nachgewiesen wurde, dass B eine Basis ist, ist die Dimension von V drei, woraus sich ohne weitere Rechnung schließen lässt, dass C eine Basis ist, da jede Basis die selbe Anzahl von Elementen enthält.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 15. *Vektoren, Skalarprodukt, Vektorprodukt*

Gegeben seien drei Vektoren $a,\, b,\, c \in \mathbb{R}^3$.

(a) Beweisen Sie den folgenden Entwicklungssatz durch elementare Rechnung:

$$a \times (b \times c) = \langle a \,|\, c \rangle\, b - \langle a \,|\, b \rangle\, c.$$

(b) Gegeben seien zwei nicht parallele Vektoren $a \neq 0$ und $c \neq 0$. Für welche Vektoren $b \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$a \times (b \times c) = (a \times b) \times c?$$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir berechnen

$$\begin{aligned} a \times (b \times c) &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \left(\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_2c_3 - b_3c_2 \\ b_3c_1 - b_1c_3 \\ b_1c_2 - b_2c_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_2(b_1c_2 - b_2c_1) - a_3(b_3c_1 - b_1c_3) \\ a_3(b_2c_3 - b_3c_2) - a_1(b_1c_2 - b_2c_1) \\ a_1(b_3c_1 - b_1c_3) - a_2(b_2c_3 - b_3c_2) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wir erhalten

$$\langle a \,|\, c \rangle\, b - \langle a \,|\, b \rangle\, c = \begin{pmatrix} b_1(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) - c_1(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) \\ b_2(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) - c_2(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) \\ b_3(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) - c_3(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) \end{pmatrix}.$$

Folglich es gilt

$$a \times (b \times c) = \langle a \,|\, c \rangle\, b - \langle a \,|\, b \rangle\, c.$$

(b) Wir berechnen

$$\begin{aligned} a \times (b \times c) - (a \times b) \times c &= \langle a \,|\, c \rangle\, b - \langle a \,|\, b \rangle\, c + c \times (a \times b) \\ &= \langle a \,|\, c \rangle\, b - \langle a \,|\, b \rangle\, c + \langle c \,|\, b \rangle\, a - \langle c \,|\, a \rangle\, b \\ &= - \langle a \,|\, b \rangle\, c + \langle c \,|\, b \rangle\, a = 0. \end{aligned}$$

Da $a \neq 0$ und $c \neq 0$ und nicht parallel sind, folgt $\langle a \,|\, b \rangle = 0 = \langle c \,|\, b \rangle$, d.h., $b \perp a$ und $b \perp c$ bzw. b parallel zu $a \times c$.

Aufgabe H 16.

Gegeben seien die Basen $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$ und $\mathcal{C} = \{c_1, c_2, c_3\}$ des $\mathbb{R}^3$ durch

$$b_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix} \quad b_3 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad c_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \quad c_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \qquad c_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Weiter seien die Vektoren v, w in den Basen $\mathcal{B}$ bzw. $\mathcal{C}$ gegeben durch

$$_{\mathcal{B}}v = \begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}, \quad _{\mathcal{C}}w = \begin{pmatrix}1\\3\\3\end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $_{\mathcal{C}}v$, $_{\mathcal{B}}w$ sowie $_{\mathcal{B}}(3v + 3w)$.

Lösungshinweise hierzu: Es gilt

$$v = 2\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-3\\1\end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

Der Vektor v hat also in $\mathcal{C}$ die Koordinaten $_{\mathcal{C}}v = \begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix}$. Weiter gilt

$$w = 1\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\4\\6\end{pmatrix} = 7\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

Der Vektor w hat also in $\mathcal{B}$ die Koordinaten $_{\mathcal{B}}w = \begin{pmatrix}7\\-3\\6\end{pmatrix}$.

Die $\mathcal{B}$-Koordinaten von $3v + 3w$ sind

$$_{\mathcal{B}}(3v + 3w) = {_{\mathcal{B}}(3v)} + {_{\mathcal{B}}(3w)} = 3_{\mathcal{B}}(v) + 3_{\mathcal{B}}(w) = 3\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}7\\-3\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}27\\-15\\21\end{pmatrix}.$$

Aufgabe H 17.

Im $\mathbb{R}^3$ sei E die Ebene durch die Punkte

$$P_1 = (0, 0, 3), \qquad P_2 = (0, 3, 0), \qquad P_3 = (1, 1, 0)$$

(a) Berechnen Sie die Hessesche Normalform von E.

(b) Berechnen Sie das Spiegelbild der Geraden g an E, wobei

$$g: \quad x = \begin{pmatrix}-2\\-4\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}3\\3\\1\end{pmatrix}.$$

Lösungshinweise hierzu: Die Ebene kann beschrieben werden als

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix},\ t, s \in \mathbb{R} \right\}.$$

Der Vektor $v = (6,3,3)^\mathsf{T}$ steht orthogonal auf E (er ist das Vektorprodukt der Richtungsvektoren). Die Hessesche Normalform von E lautet also

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{\sqrt{6}}{2} \right\}.$$

Einsetzen der Geradengleichung liefert $Q_1 = \left(\frac{13}{10}, \frac{-7}{10}, \frac{11}{10} \right)$ als Schnittpunkt von g und E. Das Spiegelbild des Punktes $(-2,-4,0) \in g$ kann wie folgt berechnet werden: Die Gerade orthogonal zu E durch $(-2,-4,0)$ ist

$$h = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ r \in \mathbb{R} \right\}.$$

Einsetzen in die Ebenengleichung ergibt, dass der Schnittpunkt mit der Ebene bei $r = \frac{11}{6}$ liegt. Der Spiegelpunkt Q_2 liegt also bei $r = \frac{22}{6}$ und ist der Punkt $\left(\frac{16}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{11}{3} \right)$. Das Spiegelbild der Geraden ist nun die Verbindung von Q_1 und Q_2, also die Gerade

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{10} \\ \frac{-7}{10} \\ \frac{11}{10} \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 121 \\ 11 \\ 77 \end{pmatrix},\ r \in \mathbb{R} \right\}.$$

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 18.

Entscheiden Sie ob die folgenden Terme definiert sind und berechnen Sie diese (falls sie definiert sind):

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 7 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \qquad C := \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -2 & -3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) AB

(b) BA

(c) $C + A$

(d) $C^\intercal AB$

(e) $(B + C)^\intercal A$

Lösungshinweise hierzu:

(a)

$$AB = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ -18 & 23 \\ -5 & -12 \end{pmatrix}$$

(b) Dieses Matrizenprodukt ist nicht definiert.

(c) Diese Summe ist nicht definiert.

(d)

$$C^\intercal AB = \begin{pmatrix} 44 & -10 \\ 94 & -57 \end{pmatrix}$$

(e)

$$(B + C)^\intercal A = \begin{pmatrix} 24 & -6 & -6 \\ -3 & 33 & -26 \end{pmatrix}$$

Aufgabe H 19.

Bestimmen Sie alle Lösungen des linearen Gleichungssystem $Ax = b$ mit Hilfe des Gauß-Algorithmus, dabei sind A und b gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Lösungshinweise hierzu: Wendet man den Gauß-Algorithmus an, so erhält man die folgenden Zwischenschritte:

$$\left[\begin{array}{ccccc||c} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 4 & -2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right] \qquad Z_2 - 2\,Z_1: \left[\begin{array}{ccccc||c} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right]$$

$$Z_3 + 4\,Z_2: \left[\begin{array}{ccccc||c} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{r} \\ -1 \cdot S_2: \\ \frac{1}{2} \cdot S_3: \\ \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccccc||c} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$Z_3 + \tfrac{1}{2} \cdot Z_4: \left[\begin{array}{ccccc||c} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad Z_2 + Z_3: \left[\begin{array}{ccccc||c} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$Z_1 - 2\,Z_2: \left[\begin{array}{cccc|c||c} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Aus dem letzten Ergebnis kann man die Lösungsmenge $\mathcal{L}$ ablesen (vgl. 3.7.6). Man erhält

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Aufgabe H 20.

Wir betrachten die 2×2-Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Welche Bedingungen müssen die Einträge von A erfüllen, damit für beliebige 2×2-Matrizen B die Gleichung $AB = BA$ gilt?

Lösungshinweise hierzu: Da für beliebige 2×2-Matrizen B die Gleichung $AB = BA$ gelten soll, muss insbesondere

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

gelten. Hieraus ergibt sich
$$\begin{pmatrix} 0 & a_{11} \\ 0 & a_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Es muss also $a_{21} = 0$ und $a_{11} = a_{22}$ gelten. Weiter muss
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$
gelten, was
$$\begin{pmatrix} a_{12} & 0 \\ a_{22} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_{11} & a_{12} \end{pmatrix}.$$
und damit $a_{12} = 0$ zur Folge hat. Die Matrix A muss also die Form $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{11} \end{pmatrix}$ haben. Eine Matrix dieser Form erfüllt $AB = BA$ für beliebiges B, da sie ein sklalares Vielfaches der Einheitsmatrix ist.

Aufgabe H 21. *Lineares Gleichungssystem*

Es soll nach folgender Tabelle (Nährstoffanteile (in %)) ein Obstsalat zusammengestellt werden, der insgesamt 9 g Eiweiß, 5 g Fett und 194 g Kohlenhydrate enthält.

	Eiweiß	Fett	Kohlenhydrate
Äpfel	0,3	0,6	15
Bananen	1,1	0,2	22
Orangen	1,0	0,2	12

Stellen Sie hierfür ein lineares Gleichungssystem auf und lösen Sie es.
Interpretieren Sie das Ergebnis.

Lösungshinweise hierzu: Als Gleichungssystem erhalten wir $Ax = b$, wobei A und b gegeben sind durch

$$A = \begin{pmatrix} 0,3 & 1,1 & 1,0 \\ 0,6 & 0,2 & 0,2 \\ 15 & 22 & 12 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ 194 \end{pmatrix}.$$

Der Gauß-Algorithmus liefert:

$$\left[\begin{array}{ccc||c} 0,3 & 1,1 & 1,0 & 9 \\ 0,6 & 0,2 & 0,2 & 5 \\ 15 & 22 & 12 & 194 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{r} \\ Z_2 - 2\,Z_1 : \\ Z_3 - 50\,Z_1 : \end{array} \left[\begin{array}{ccc||c} 0,3 & 1,1 & 1,0 & 9 \\ 0 & -2,0 & -1,8 & -13 \\ 0 & -33 & -38 & -256 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \frac{10}{3}\,Z_1 : \\ -\frac{1}{2}\,Z_2 : \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc||c} 1 & \frac{11}{3} & \frac{10}{3} & 30 \\ 0 & 1 & \frac{9}{10} & \frac{13}{2} \\ 0 & -33 & -38 & -256 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{r} \\ \\ Z_3 + 33\,Z_2 : \end{array} \left[\begin{array}{ccc||c} 1 & \frac{11}{3} & \frac{10}{3} & 30 \\ 0 & 1 & \frac{9}{10} & \frac{13}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{83}{10} & -\frac{83}{2} \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ -\frac{10}{83}\,Z_3 : \end{array} \left[\begin{array}{ccc||c} 1 & \frac{11}{3} & \frac{10}{3} & 30 \\ 0 & 1 & \frac{9}{10} & \frac{13}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{r} Z_1 - \frac{11}{3}\,Z_2 : \\ \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc||c} 1 & 0 & \frac{1}{30} & \frac{37}{6} \\ 0 & 1 & \frac{9}{10} & \frac{13}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} Z_1 - \frac{1}{30}\,Z_3 : \\ Z_2 - \frac{9}{10}\,Z_3 : \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc||c} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right]$$

Als Lösung des Gleichungssystem erhalten wir also

$$\mathcal{L} = \left\{(6, 2, 5)^\intercal\right\}.$$

Damit müssen wir 600 g Äpfel, 200 g Bananen und 500 g Orangen für den Obstsalat verwenden. Der Faktor 100 kommt durch die Angaben in Prozent zustande.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 22.

Es sei die Matrix B gegeben durch

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Inverse der Matrix B.

Lösungshinweise hierzu: Wendet man den Gauß-Algorithmus an, so erhält man die folgenden Zwischenschritte:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{r} \\ Z_2 - Z_1 : \\ Z_3 - Z_1 : \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 8 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ Z_3 - 3\,Z_2 : \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -3 & 1 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{r} \\ \\ \frac{1}{2} \cdot Z_3 : \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \\ Z_2 - 2\,Z_3 : \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right] \qquad \begin{array}{r} Z_1 - Z_2 : \\ \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 4 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} Z_1 - Z_3 : \\ \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

Aufgabe H 23.

Gegeben seien der Vektor $b = (1, 0, 2, 3 - t^2)^\intercal$ und die Matrix

$$A(t) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -3 \\ -2 & -2t & t & 4+t \\ -4t & -4 & 2-2t & 8t \\ 6 & -6 & 3+t & -9+t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(a) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von t den Rang der Matrix A sowie die Dimension des Lösungsraumes des homogenen linearen Gleichungssystems $Ax = 0$.

(b) Geben Sie für $t = 0$ eine Basis des Kerns von A an.

(c) Für welche Werte von t ist das inhomogene Gleichungssystem $Ax = b$ lösbar?

Lösungshinweise hierzu:

(a) Nach Lemma 3.9.7 ändert sich bei elementaren Zeilen-(Spalten)umformungen der Rang der Matrix nicht. Mit Hilfe von Zeilenumformungen bringen wir die Matrix $A(t)$ auf die Gestalt mit linear unabhängigen Zeilen und Nullzeilen. Wir berechnen

$$\begin{array}{r} \\ Z_2 + Z_1 : \\ \\ Z_4 - 3\,Z_1 : \end{array} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & -2-2t & 1+t & 1+t \\ -4t & -4 & 2-2t & 8t \\ 0 & 0 & t & t \end{bmatrix} . \tag{1}$$

Für $t = 0$ erhalten wir die Matrix mit 3 linear unabhängigen Zeilen

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{array}{r} Z_1 - Z_2 : \\ \\ Z_3 - 2\,Z_2 : \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \tag{2}$$

Also gilt $\operatorname{Rg} A(0) = 3$.

Für $t \neq 0$ berechnen wir weiter (siehe (1)):

$$\begin{array}{r} \\ \\ Z_3 + 2t\,Z_1 : \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & -2-2t & 1+t & 1+t \\ 0 & -4-4t & 2 & 2t \\ 0 & 0 & t & t \end{bmatrix},$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ Z_3 - 2\,Z_2 : \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & -2-2t & 1+t & 1+t \\ 0 & 0 & -2t & -2 \\ 0 & 0 & t & t \end{bmatrix},$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ \\ Z_4 + \frac{1}{2}\,Z_3 : \end{array} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & -2-2t & 1+t & 1+t \\ 0 & 0 & -2t & -2 \\ 0 & 0 & 0 & t-1 \end{bmatrix} . \tag{3}$$

Für $t = -1$ die zweite Zeile ist eine Nullzeile

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} .$$

Die Matrix $A(-1)$ besteht aus drei linear unabhängigen Zeilen, also ist der Rang gleich drei: $\operatorname{Rg} A(-1) = 3$.

Für $t = 1$ erhalten wir aus (3):

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

folglich gilt $\operatorname{Rg} A(1) = 3$.
Für $t \notin \{-1, 0, 1\}$ erhalten wir die Matrix mit vollen Rang $\operatorname{Rg} A(t) = 4$.
Es gilt (Definition 3.8.16)

$$\dim \mathcal{L} = \dim \operatorname{Kern}(A(t)).$$

Nach der Dimensionsformel 3.8.18 erhalten wir

$$\dim \operatorname{Kern}(A(t)) + \dim \operatorname{Bild}(A(t)) = 4.$$

Wegen $\dim \operatorname{Bild}(A(t)) = \operatorname{Rg} A(t)$ folgt daraus

$$\dim \operatorname{Kern}(A(t)) = 4 - \dim \operatorname{Bild}(A(t)) = 4 - \operatorname{Rg} A(t).$$

Für $t \in \{-1, 0, 1\}$ erhalten wir

$$\dim \operatorname{Kern}(A(0)) = \dim \operatorname{Kern}(A(1)) = \dim \operatorname{Kern}(A(-1)) = 4 - 3 = 1.$$

Für alle anderen $t \in \mathbb{R}$ gilt $\dim \operatorname{Kern}(A(t)) = 0$.

(b) Für $t = 0$ erhalten wir wie in (2):

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x_1 & & & & & - & 4x_4 & = & 0, \\ & - & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0, \\ & & & & & - & 2x_4 & = & 0. \end{array}$$

Die Lösung ist $x_1 = 0,\ x_2 = s,\ x_3 = 2s,\ x_4 = 0,\ s \in \mathbb{R}$. Folglich gilt

$$\operatorname{Kern}(A(0)) = \left\{ s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; s \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

(c) Wegen Bemerkung 3.10.8, ist das Gleichungssystem für $t \notin \{-1, 0, 1\}$ eindeutig lösbar (die Matrix A ist invertierbar, $\operatorname{Rg} A(t) = 4$). Wenn $A(t)$ nicht vollen Rang hat gibt es Fälle, in denen die Lösung nicht eindeutig ist oder in denen es keine Lösung gibt.
Für den Fall $t = 0$ starten wir mit der erweiterten Koeffizientenmatrix

$$\left[\begin{array}{cccc||c} 2 & -2 & 1 & -3 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 0 & 2 \\ 6 & -6 & 3 & -9 & 3 \end{array}\right].$$

Mit Gauß-Algorithmus erhalten wir wie in (1)-(2):

$$\left[\begin{array}{cccc||c} 2 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Dieses System ist lösbar, wir erhalten unendlich viele Lösungen.
Für den Fall $t = 1$ erhalten wir analog die folgende erweiterte Koeffizientenmatrix

$$\left[\begin{array}{cccc||c} 2 & -2 & 1 & -3 & 1 \\ -2 & -2 & 1 & 5 & 0 \\ -4 & -4 & 0 & 8 & 2 \\ 6 & -6 & 4 & -8 & 2 \end{array}\right].$$

Wir berechnen wie in (1),(3):

$$\left[\begin{array}{cccc||c} 2 & -2 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -4 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Dieses System ist auch lösbar, wir erhalten unendlich viele Lösungen.
Für den Fall $t = -1$ erhalten wir

$$\left[\begin{array}{cccc||c} 2 & -2 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right].$$

Dieses Gleichungssystem ist nicht lösbar.

Aufgabe H 24.
Gegeben sei die lineare Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & -4 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Matrix B, die die Abbildung φ bezüglich der folgenden Basen ausdrückt:

$$v_1 = (1,1,1)^\intercal, \quad v_2 = (1,1,0)^\intercal, \quad v_3 = (1,0,0)^\intercal \quad \text{im } \mathbb{R}^3, \quad \text{und}$$
$$w_1 = (1,3)^\intercal, \quad w_2 = (2,5)^\intercal \quad \text{im } \mathbb{R}^2.$$

(b) Welche Koordinaten hat $\varphi\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ bezüglich der Basis $\{w_1, w_2\}$?

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir wollen die Matrix $B = {}_W\varphi_V$ aufstellen mit $V = \{v_1,\, v_2,\, v_3\}$ und $W = \{w_1,\, w_2\}$. Nach dem Satz 3.10.11 gilt

$$ {}_W\varphi_V = {}_W\,\mathrm{id}_E \cdot {}_E\varphi_E \cdot {}_E\,\mathrm{id}_V . $$

Wegen $\mathrm{id}(v_i) = v_i\,,\ i = 1, 2, 3$ folgt sofort

$$ {}_E\,\mathrm{id}_V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} . $$

Analog erhalten wir

$$ {}_E\,\mathrm{id}_W = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} . $$

Daraus berechnen wir mit ${}_W\,\mathrm{id}_E = \left({}_E\,\mathrm{id}_W\right)^{-1}$ sofort

$$ {}_W\,\mathrm{id}_E = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} . $$

Für ${}_E\varphi_E$ brauchen wir

$$ {}_E\varphi(e_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad {}_E\varphi(e_2) = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}, \qquad {}_E\varphi(e_3) = \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \end{pmatrix}, $$

es ergibt sich

$$ {}_E\varphi_E = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & -4 & -7 \end{pmatrix} . $$

Die Matrix ${}_W\varphi_V$ erhalten wir als

$$ \begin{aligned} {}_W\varphi_V = {}_W\,\mathrm{id}_E \cdot {}_E\varphi_E \cdot {}_E\,\mathrm{id}_V &= \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & -4 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -40 & -41 & -8 \\ 22 & 24 & 5 \end{pmatrix} . \end{aligned} $$

Die Aufgabe kann auch mit Satz 3.8.6 direkt gerechnet werden.

(b) Wir berechnen

$$ \varphi \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 5 \cdot 2 - 3 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 - 4 \cdot 2 - 7 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -14 \end{pmatrix} . $$

Mit Hilfe von Satz 3.10.11 erhalten wir

$$ {}_W\varphi \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = {}_W\,\mathrm{id}_E \cdot {}_E\varphi \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ -14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -73 \\ -41 \end{pmatrix} . $$

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 25.

Berechnen Sie die Determinante der Matrix A, die gegeben ist durch

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lösungshinweise hierzu: Um die Determinante von A zu berechnen, entwickeln wir dreimal jeweils nach der ersten Spalte (siehe 3.13.4) und erhalten

$$\det A = (-1) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}.$$

Für die übrigbleibende 3×3-Matrix verwenden wir die Regel von Sarrus (siehe 3.11.5), wir erhalten als Ergebnis

$$\det A = (-1) \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = (-1)\,(60 + 2 - 2 + 4 - 6 - 10) = -48.$$

Aufgabe H 26.

Gegeben sei für $\alpha \in \mathbb{R}$ die Matrix A_α durch

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & \alpha \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ die Matrix A_α invertierbar ist.

(b) Berechnen Sie die inverse Matrix von A_α, falls sie existiert.

Lösungshinweise hierzu: Mit der Regel von Sarrus (siehe 3.11.5) bestimmen wir die Determinante von A_α und erhalten

$$\det A_\alpha = 0 + \alpha + 4 + 6 + \alpha + 0 = 2\alpha + 10$$

Also wissen wir dass für $\alpha \neq -5$ die Determinate nicht null ist und damit die Matrix invertierbar ist.
Um die Inverse zu berechnen benutzen wir die Gleichung, die wir in **Aufgabe P30 (d)** gewonnen haben. Sie lautet

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\tilde{A}^{\mathsf{T}},$$

wobei $\tilde{A}$ die adjunkte Matrix ist, die die Einträge $\tilde{a}_{jk} = (-1)^{j+k}\det \tilde{A}_{jk}$ hat. Siehe auch Skript Definition 3.13.1. Wir berechnen die adjunkte Matrix $\tilde{A}_\alpha$ zu A_α und erhalten

$$\tilde{A}_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha & -5 \\ 2 & 2 & 2 \\ \alpha+6 & -\alpha-4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mit der Gleichung erhalten wir die Inverse als

$$A_\alpha^{-1} = \frac{1}{2\alpha+10}\begin{pmatrix} \alpha & 2 & \alpha+6 \\ \alpha & 2 & -\alpha-4 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Um uns zu vergewissern, dass keine Fehler gemacht wurden, machen wir eine Probe:

$$A_\alpha^{-1}\cdot A_\alpha = \frac{1}{2\alpha+10}\begin{pmatrix} \alpha & 2 & \alpha+6 \\ \alpha & 2 & -\alpha-4 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & \alpha \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe H 27.
Gegeben sei die folgende Matrix

$$A_n = \begin{pmatrix} \cos(x) & 1 & & & & \\ 1 & 2\cos(x) & 1 & & & \\ & 1 & 2\cos(x) & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & 1 & 2\cos(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion $\det A_n = \cos(nx)$.

Lösungshinweise hierzu:
Im Weiteren wird mehrmals eine wichtige Rechenregel für den Kosinus verwendet:

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left(\cos(a+b)+\cos(a-b)\right). \tag{4}$$

Man kann diese Regel einfach nachrechnen, indem man das Additionstheorem (im Skript 1.8.3) auf die rechte Seite anwendet.

IA Wir beginnen mit dem Induktionsanfang, indem wir die Behauptung für $n = 1$ und für $n = 2$ nachrechnen:

$$\det A_1 = \det(\cos(x)) = \cos(x) = \cos(1 \cdot x)$$
$$\det A_2 = \det \begin{pmatrix} \cos(x) & 1 \\ 1 & 2\cos(x) \end{pmatrix} = 2\cos(x)\cos(x) - 1 \overset{(4)}{=} \cos(2 \cdot x)$$

IH Sei die Induktionshypotese für $n-1$ und $n-2$ bereits erfüllt. Das heißt es gelte

$$\det A_{n-1} = \cos((n-1)x) \qquad \text{und} \qquad \det A_{n-2} = \cos((n-2)x)\,.$$

IS Wir beweisen, dass die Behauptung auch für n erfüllt ist. Dazu berechnen wir die Determinate von A_n, indem wir nach der letzten Spalte entwickeln. Die erste Matrix, der dabei auftrettenden Matrizen, erkennen wir als A_{n-1}. Die zweite müssen wir weiter berechnen, indem wir nach der letzten Zeile entwickeln. Insgesamt erhalten wir

$$\begin{aligned}\det A_n &= 2\cos(x)\det A_{n-1} + (-1)\begin{vmatrix} \cos(x) & 1 & & & & \\ 1 & 2\cos(x) & 1 & & & \\ & 1 & 2\cos(x) & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ & & & 1 & 2\cos(x) & 1 \\ & & & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 2\cos(x)\det A_{n-1} + (-1)\det A_{n-2}.\end{aligned}$$

Benutzen wir nun die Induktionshypotese, dann erhalten wir das Ergebnis

$$\begin{aligned}\det A_n &= 2\cos(x)\cos((n-1)x) - \cos((n-2)x) \\ &\overset{(4)}{=} \cos(nx) + \cos((n-2)x) - \cos((n-2)x) \\ &= \cos(nx)\,.\end{aligned}$$

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 28. *Schmidtsches Orthonormierungsverfahren*

In $\mathbb{R}^3$ sind die Vektoren $v_1 = (1,0,-1)^\intercal$, $v_2 = (1,1,-1)^\intercal$ und $v_3 = (-1,2,-2)^\intercal$ gegeben.

(a) Konstruieren Sie (mit Hilfe des Schmidtschen Orthonormierungsverfahrens) eine Orthonormalbasis $F\colon f_1, f_2, f_3$ von $\mathbb{R}^3$ derart, dass $\mathrm{L}(f_1) = \mathrm{L}(v_1)$, $\mathrm{L}(f_1, f_2) = \mathrm{L}(v_1, v_2)$ und $\mathrm{L}(f_1, f_2, f_3) = \mathrm{L}(v_1, v_2, v_3)$.

(b) Lässt sich mit Hilfe dieses Verfahrens auch eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ konstruieren, wenn $\widetilde{v_3} = (-1,2,1)^\intercal$ statt v_3 verwendet werden soll?

Lösungshinweise hierzu:

(a) Nach dem Schmidtschen Orthonormierungsverfahren erhalten wir den ersten Vektor als

$$f_1 := \frac{v_1}{|v_1|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Weiter erhalten wir

$$f_2^* := v_2 - \langle v_2 \mid f_1 \rangle f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f_2 := \frac{f_2^*}{|f_2^*|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Zuletzt erhalten wir den dritten Vektor als

$$f_3^* := v_3 - \langle v_3 \mid f_1 \rangle f_1 - \langle v_3 \mid f_2 \rangle f_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$f_3 := \frac{f_3^*}{|f_3^*|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Insgesamt erhalten wir die Orthonormalbasis

$$f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, f_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(b) Ersetzt man nun v_3 durch $\widetilde{v_3}$, so erhält man entsprechend zu f_3^* den Nullvektor als Ergebnis

$$\widetilde{v_3} - \langle \widetilde{v_3} \mid f_1 \rangle f_1 - \langle \widetilde{v_3} \mid f_2 \rangle f_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{-2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

den man nicht normieren kann. Dieses Problem tritt auf, weil die Vektoren $v_1, v_2, \widetilde{v_3}$ linear abhängig sind.

Aufgabe H 29. *Drehachsen und Drehwinkel*

Gegeben seien die affinen Abbildungen $\alpha : u \mapsto Au$, $\beta : v \mapsto Av + s$ und $\gamma : w \mapsto Aw + t$ von $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}^3$ mit

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad s = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad t = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestätigen Sie, dass α, β und γ Bewegungen sind. Handelt es sich um eigentliche oder uneigentliche Bewegungen?

(b) Zeigen Sie, dass α eine Drehung ist, indem Sie die Drehachse (die Menge aller Fixpunkte x mit $x = \alpha(x)$) und den Drehwinkel bestimmen.

Hinweis: Finden Sie zur Berechnung des Drehwinkels einen Vektor y, der orthogonal zur Drehachse ist, und berechnen Sie den Winkel zwischen y und $\alpha(y)$ oder benutzen Sie **4.6.20**.

(c) Bestimmen Sie die Fixpunkte von β und γ (also die Punkte x mit $\beta(x) = x$ beziehungsweise $\gamma(x) = x$). Kann es sich auch bei β und γ um Drehungen handeln?

Lösungshinweise hierzu:

(a) Nach **4.6.4** ist eine affine Abbildung eine Bewegung falls ihr linearer Anteil durch eine orthogonale Matrix beschrieben wird. Wir berechnen also

$$AA^{\intercal} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = E_3.$$

Also sind α, β und γ Bewegungen. Da die Determinante von A den Wert $+1$ hat, sind alle drei Bewegungen eigentlich.

(b) Nach **4.6.16** ist α eine Drehung. Die Bedingung $x = \alpha(x) = Ax$ lässt sich umschreiben in $(A - E)x = 0$. Die Fixpunkte werden also durch das LGS

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

beschrieben. Die allgemeine Lösung dieses Gleichungssystems ist $\mathrm{L}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$. Ein Vektor, der senkrecht auf der Drehachse steht ist beispielsweise $v = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$. Hier gilt $\alpha(v) = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$. Der Drehwinkel φ erfüllt also (nach **4.6.20** $\cos\varphi = \frac{\langle v \mid \alpha(v)\rangle}{|v|^2} = \frac{1}{2}$ und beträgt damit $\frac{\pi}{3}$.

(c) Die Fixpunkte der Abbildung β werden durch die Gleichung

$$\left(\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\ 2 & 2 & -1\\ -1 & 2 & 2\end{pmatrix} - E_3\right)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}1\\-5\\4\end{pmatrix}$$

beschrieben. Die Lösung dieses Gleichungssystems ist $\mathrm{L}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix}5\\-4\\-1\end{pmatrix}$. Es kann sich also um eine Drehung handeln (es ist auch tatsächlich eine).
Die Fixpunkte der Abbildung γ werden durch die Gleichung

$$\left(\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\ 2 & 2 & -1\\ -1 & 2 & 2\end{pmatrix} - E_3\right)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

beschrieben. Diese Gleichung hat keine Lösung, daher kann es sich nicht um eine Drehung handeln (γ beschreibt eine Schraubung).

Aufgabe H 30. *Komposition und Inverse von Bewegungen*

Gegeben sind Bewegungen $\alpha\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n\colon x \mapsto Ax + s$ und $\beta\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n\colon x \mapsto Bx + t$.
Zeigen Sie, dass die Komposition $\beta \circ \alpha$ ebenfalls eine Bewegung ist.
Zusatz: Ist jede Bewegung invertierbar?
Sind die Inversen von Bewegungen wieder Bewegungen?

Lösungshinweise hierzu: Die Komposition $\beta \circ \alpha$ ist die Abbildung

$$\beta \circ \alpha\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n\colon x \mapsto B(Ax + s) + t$$

welche den linearen Anteil BA hat. Es ist also zu zeigen, dass BA eine orthogonale Matrix ist, dass also $(BA)(BA)^\intercal = E$ gilt. Wir berechnen

$$(BA)(BA)^\intercal = (BA)(A^\intercal B^\intercal) = B(AA^\intercal)B^\intercal = BEB^\intercal = BB^\intercal = E.$$

Also ist $\beta \circ \alpha$ eine Bewegung. Die inverse einer Bewegung $\gamma\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n\colon x \mapsto Cx + u$ ist die Abbildung $\gamma^{-1}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n\colon x \mapsto C^{-1}(x-t)$ welche den linearen Anteil C^{-1} hat. Da C eine orthogonale Matirx ist, gilt $C^{-1} = C^{\mathsf{T}}$. Wir berechnen

$$C^{-1}\left(C^{-1}\right)^{\mathsf{T}} = C^{\mathsf{T}}\left(C^{\mathsf{T}}\right)^{\mathsf{T}} = C^{\mathsf{T}}C = E.$$

Also ist γ^{-1} eine Bewegung.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 31.

Gegeben ist im $\mathbb{R}^3$ die Ebene, die beschrieben wird durch die Gleichung

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 = 15.$$

Finden Sie eine Matrix A und einen Vektor t so, dass die Spiegelung an der Ebene beschrieben wird durch die affine Abbildung $x \mapsto Ax + t$.

Lösungshinweise hierzu: Um die Spiegelung an der Ebene zu beschreiben, bilden wir zu jedem Punkt $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3) \in \mathbb{R}^3$ den Spiegelpunkt $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$. Der Vektor $n = (2, 2, 1)^\mathsf{T}$ steht orthogonal auf der Ebene (Satz 2.9.5), folglich ist die folgende Gerade orthogonal zur Ebene und geht durch den Punkt $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)$.

$$h = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Um den Schnittpunkt der Geraden h mit der Ebene zu erhalten setzen wir die Punkte von h in die Ebenengleichung ein:

$$2\tilde{x}_1 + 4t + 2\tilde{x}_2 + 4t + \tilde{x}_3 + t = 15,$$

daher liegt der Schnittpunkt mit der Ebene bei

$$t_0 = \frac{15 - 2\tilde{x}_1 - 2\tilde{x}_2 - \tilde{x}_3}{9}$$

Der Spiegelpunkt $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$ liegt also bei

$$2t_0 = \frac{30 - 4\tilde{x}_1 - 4\tilde{x}_2 - 2\tilde{x}_3}{9},$$

und ist durch die folgenden Koordinaten gegeben:

$$\hat{x}_1 = \frac{1}{9}\left(60 + \tilde{x}_1 - 8\tilde{x}_2 - 4\tilde{x}_3\right),$$

$$\hat{x}_2 = \frac{1}{9}\left(60 - 8\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 - 4\tilde{x}_3\right),$$

$$\hat{x}_3 = \frac{1}{9}\left(30 - 4\tilde{x}_1 - 4\tilde{x}_2 + 7\tilde{x}_3\right).$$

Also erhalten wir

$$\alpha\left(\begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{8}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{8}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{7}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{20}{3} \\ \frac{20}{3} \\ \frac{10}{3} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe H 32.
Gegeben sind das Standard-Koordinatensystem $\mathbb{E}$ und das affine Koordinatensystem

$$\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$$

im $\mathbb{R}^3$ sowie die lineare Abbildung $\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : v \mapsto Av$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -3 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie die Koordinatentransformationen ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$ und ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$ sowie die Beschreibung der Abbildung α bzgl. des Koordinatensystems $\mathbb{F}$ an.

Lösungshinweise hierzu: Man erhält mit der Formel ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}(v) = Fv + P$ aus der Vorlesung direkt

$${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}} : v \mapsto \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & -3 \\ -3 & 4 & 3 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und mit der Formel ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}(v) = F^{-1}(v - P)$ für die Umkehrabbildung

$${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}} : v \mapsto \begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 \\ 3 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \left(v - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 \\ 3 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Nach Satz 4.7.12 wird die Abbildung α bzgl. des Koordinatensystems $\mathbb{F}$ durch

$$v \mapsto F^{-1}AFv + F^{-1}(AP - P + t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 2 & -5 & -8 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \\ -4 \end{pmatrix}$$

mit $t = 0$ beschrieben.

Zusatzaufgabe H 33. *Fortsetzung von* **Aufgabe P 36.**
Die Fourier Approximation N-ter Stufe ist gegeben durch

$$f_N(x) := \sum_{n=-N}^{N} a_n \varphi_n(x).$$

Benutzen Sie ein Computerprogramm ihrer Wahl (WolframAlpha.com, Maple, Mathematica, Matlab, ...) oder einen Taschenrechner um f_1, f_3, f_5, f_7, ... zu zeichnen. Zeichnen Sie

zum Vergleich auch f selbst.
Berechnen Sie den Fehler e_N für $N = 1, 3, 5, 7, \dots$, der definiert wird durch

$$e_N := \|f - f_N\| = \sqrt{\langle f - f_N \,|\, f - f_N \rangle}.$$

Hinweis: Die auftretenden Integrale dürfen nachgeschlagen oder näherungsweise berechnet werden.

Lösungshinweise hierzu: (inclusive Lösungshinweisen zu **Aufgabe P 36.**)
Wir machen eine Fallunterscheidung und erhalten für $n > 0$

$$a_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\varphi_n(x)\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\pi} \sin(nx)\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\cos(0) - \cos(n\pi)\right) = \frac{1-(-1)^n}{\sqrt{\pi}n}.$$

Für $n < 0$ erhalten wir mit der selben Rechnung

$$a_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\varphi_n(x)\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{\sqrt{\pi}n}\left(\sin(n\pi) - \sin(0)\right) = 0.$$

Bleibt der Spezialfall $n = 0$.

$$a_0 = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\varphi_0(x)\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\pi} 1\,\mathrm{d}\,x = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Zusammenfassend kann man die Koeffizienten aufschreiben durch

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{für } n < 0 \\ \sqrt{\frac{\pi}{2}} & \text{für } n = 0 \\ \frac{1-(-1)^n}{\sqrt{\pi}n} & \text{für } n > 0 \end{cases}.$$

Mit diesen Koeffizienten ergeben sich die Funktionen f_N als

$$f_N(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N} \frac{1-(-1)^n}{\pi n}\sin(nx).$$

Um die Funktionen f_3 zu zeichnen kann bei WolframAlpha.com zum Beispiel der Befehl

VORSICHT: Beim Kopieren der folgenden Quellcodes kann es passieren, dass die Zeichen $*$ und ^ kaputt gehen, sie müssen neu eingetippt werden.

Um die Funktionen f_3 zu zeichnen kann bei WolframAlpha.com zum Beispiel der Befehl

```
1/2 + 2*Sin[x]/Pi + 2*Sin[3*x]/3/Pi
```

eingeben werden. In Mathematica zeichnet der Befehl

```
Plot[1/2 + Sum[(1-(-1)^m)/m/Pi*Sin[m*x], {m, 1, 5}], {x, -Pi, Pi}]
```

die Funktion f_5. Und dann zeichnen wir noch f_7 in Matlab:

```
x = linspace(-pi, pi, 100);
y = 1/2;
for k=1:7
y = y + (1-(-1)^k)/k/pi*sin(k*x);
end
plot(x,y);
```

Um die Fehler $e_1, \ldots, e_7$ zu berechnen benutzen wir Maple:

```
f := x -> piecewise(x<0, 0, 1);
fn := (n, x) -> 1/2 + sum( (1-(-1)^m)/(Pi*m)*sin(m*x) , m=1..n );
seq( int( (f(x)-fn(n, x))^2 , x=-Pi..Pi ), n=1..7);
evalf(%);
```

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 34.

Gegeben ist die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 8 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie alle Eigenwerte von den Matrizen A, A^2 und A^{100}.

Lösungshinweise hierzu: Das charakteristische Polynom von A lautet

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_3) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 & -4 \\ -2 & 8-\lambda & -2 \\ -4 & -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda-9)^2.$$

Die Nullstellen dieses Polynoms (die Eigenwerte von A) sind

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 9.$$

Wenn λ ein Eigenwert von A ist, existiert $v \in \mathbb{R}^3$ mit

$$Av = \lambda v. \tag{1}$$

Mit (1) erhalten wir

$$A^2 v = A \cdot Av = A\lambda v = \lambda A v = \lambda^2 v.$$

Also ist $\mu = \lambda^2$ ein Eigenwert von A^2 zum Eigenvektor v. In unserem Fall sind die Eigenwerte von A^2

$$\mu_1 = 0, \quad \mu_2 = \mu_3 = 9^2 = 81.$$

Analog berechnen wir Eigenwert γ von A^{100} ($A^{100}v = \gamma v$):

$$\underbrace{A \cdot A \ldots A}_{100} v = \lambda \underbrace{A \cdot A \ldots A}_{99} v = \lambda^2 \underbrace{A \cdot A \ldots A}_{98} v = \lambda^{100} v.$$

Also, $\gamma = \lambda^{100}$, und wir erhalten

$$\gamma_1 = 0, \quad \gamma_2 = \gamma_3 = 9^{100}.$$

Aufgabe H 35.

Finden Sie eine 3×3-Matrix, die die Eigenwerte $1, 2$ und 3 hat und zu diesen die Eigenräume

$$V(1) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right), \qquad V(2) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right), \qquad V(3) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Lösungshinweise hierzu: Die Vektoren

$$\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

bilden eine Basis aus Eigenvektoren von A. Nach **5.3.1** muss also gelten $T^{-1}AT = D$ mit

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Berechnung der Inversen ergibt

$$T^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Damit gilt

$$A = TDT^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe H 36.

Berechnen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix A.

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Lösungshinweise hierzu: Das charakteristische Polynom für A lautet

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_3) = \begin{vmatrix} \frac{2}{3}-\lambda & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3}-\lambda & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3}-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2-\lambda+1).$$

Die Nullstellen dieses Polynoms (die Eigenwerte von A) sind

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad \lambda_3 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Die Eigenvektoren v_k zu diesen Eigenwerten erhält man durch Lösen des entsprechendes LGS

$$(A - \lambda_k E_3)v_k = 0, \quad k = 1,2,3.$$

Für $\lambda_1 = 1$ erhalten wir

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} v_1 = 0,$$

woraus sofort folgt

$$v_1 = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{C}\backslash\{0\}.$$

Als Eigenraum erhalten wir

$$V(\lambda_1) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Analog ergeben sich für $\lambda_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}i & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}i & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{pmatrix} v_2 = 0.$$

Wir erhalten

$$V(\lambda_2) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Für $\lambda_3 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ erhalten wir

$$V(\lambda_3) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Aufgabe H 37.

Es seien die Matrizen A, E_n, $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gegeben, wobei A eine beliebige Matrix, E_n die Einheitsmatrix und $\mathbf{0}$ die Nullmatrix ist. Wir definieren die Matrix $M \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$ durch

$$M = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & A \\ E_n & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie: Ist v ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ, dann sind w^+ bzw. w^- Eigenvektoren von M zum Eigenwert μ^+ bzw. μ^-. Hierbei sind

$$w^+ = \begin{pmatrix} \mu^+ v \\ v \end{pmatrix}, \qquad w^- = \begin{pmatrix} \mu^- v \\ v \end{pmatrix}, \qquad \mu^+ = +\sqrt{\lambda}, \qquad \mu^- = -\sqrt{\lambda}.$$

Lösungshinweise hierzu: Der Beweis geht in gleicher Weise für w^+ und w^-, deshalb schreiben wir in den Gleichungen $w^\pm$. Wir betrachten $Mw^\pm$ und erhalten:

$$\begin{aligned} Mw^\pm &= \begin{pmatrix} \mathbf{0} & A \\ E_n & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu^\pm v \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Av \\ \mu^\pm E_n v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda v \\ \mu^\pm v \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (\mu^\pm)^2 v \\ \mu^\pm v \end{pmatrix} = \mu^\pm \begin{pmatrix} \mu^\pm v \\ v \end{pmatrix} = \mu^\pm w^\pm \end{aligned}$$

Also ist w^+ ein Eigenvektor zum Eigenwert μ^+ und w^- ein Eigenvektor zum Eigenwert μ^-.

Aufgabe H 38.
Berechnen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $M \in \mathbb{R}^{6\times 6}$ gegeben durch

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Benutzen Sie die Aussage von **Aufgabe H 37.**

Lösungshinweise hierzu: Nach **Aufgabe H 37.** genügt es die Matrix A gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

auf Eigenwerte und -vektoren zu untersuchen. Diese werden dann verwendet um die Eigenwerte und -vektoren von M aufzuschreiben. Wir berechnen die Determinate von $A - \lambda E_3$ und erhalten

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda E_3) &= (3-\lambda)(4-\lambda)(5-\lambda) + 2 - 2 - (2(3-\lambda) + 2(5-\lambda) - (4-\lambda)) \\ &= (3-\lambda)(4-\lambda)(5-\lambda) - (12 - 3\lambda) \\ &= (4-\lambda)\left((3-\lambda)(5-\lambda) - 4\right) \\ &= (4-\lambda)(2-\lambda)(6-\lambda) \end{aligned}$$

Wir untersuchen die Matrix A weiter auf Eigenvektoren zu den Eigenwerten $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 4$ und $\lambda_3 = 6$.

$$\lambda_1 = 2 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow V(2) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$\lambda_2 = 4 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow V(4) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\lambda_3 = 6 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow V(6) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Damit hat M die Eigenwerte $\mu_1 = \sqrt{2}$, $\mu_2 = -\sqrt{2}$, $\mu_3 = \sqrt{4} = 2$, $\mu_4 = -\sqrt{4} = -2$, $\mu_5 = \sqrt{6}$ und $\mu_6 = -\sqrt{6}$. Und die dazugehörenden Eigenvektoren:

$$w_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$w_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad w_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{6} \\ \sqrt{6} \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 39.

Gegeben sei die quadratische Form

$$q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon (x_1, x_2, x_3) \mapsto x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3.$$

Bestimmen Sie die symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, so dass sich q schreiben lässt als

$$q(x) = x^\mathsf{T} A x.$$

Bestimmen Sie, ob q positiv definit, negativ definit oder indefinit ist.

Lösungshinweise hierzu: Wir erhalten die Matrix A, gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Nach Lemma 6.1.8 können wir die Eigenwerte von A untersuchen, um zu entscheiden, ob q positiv-, negativ- oder indefinit ist. Wir erhalten das charakteristische Polynom

$$\begin{aligned}
\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_n) &= (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda) - (1-\lambda) - (3-\lambda) \\
&= (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda) - 2(2-\lambda) \\
&= (2-\lambda)\left(\lambda^2 - 4\lambda + 3 - 2\right) \\
&= (2-\lambda)\left(\lambda - (2+\sqrt{3})\right)\left(\lambda - (2-\sqrt{3})\right).
\end{aligned}$$

Daher besitzt A die Eigenwerte $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 2+\sqrt{3}$ und $\lambda_3 = 2-\sqrt{3}$. Damit ist q positiv definit nach Lemma 6.1.8, weil alle Eigenwerte positiv sind.

Aufgabe H 40.

Gegeben sei die folgende Familie von Quadriken

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2axz = 1, \qquad a \in \mathbb{R}.$$

Bestimmen Sie um welchen Typ (nach Definition **6.2.6**) es sich in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$ handelt.

Lösungshinweise hierzu: Zuerst wird die Quadrik in die Form $x^\mathsf{T} A x + 2a^\mathsf{T} x + c = 0$ gebracht. Wir erhalten

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \qquad c = -1.$$

Hiermit können wir A_{erw} aufstellen und bekommen

$$A_{\text{erw}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Weiter berechnen wir die Ränge von A und A_{erw}. Wir erhalten

$$\operatorname{Rg} A = \begin{cases} 2 & \text{für } a \in \{-1, 1\} \\ 3 & \text{für } a \notin \{-1, 1\} \end{cases} \qquad \operatorname{Rg} A_{\text{erw}} = \begin{cases} 3 & \text{für } a \in \{-1, 1\} \\ 4 & \text{für } a \notin \{-1, 1\} \end{cases}$$

Also ist $\operatorname{Rg} A_{\text{erw}} - \operatorname{Rg} A = 1$ und damit ist die Quadrik Q eine Mittelpunktsquadrik für alle $a \in \mathbb{R}$.

Aufgabe H 41.

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 17 & 0 & 2\sqrt{3} \\ 0 & 21 & 0 \\ 2\sqrt{3} & 0 & 13 \end{pmatrix}.$$

Der Vektor $\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist ein Eigenvektor von A. Bestimmen Sie alle Eigenräume und alle Eigenwerte von A.

Lösungshinweise hierzu: Wir multiplizieren A mit dem gegebenen Eigenvektor v_1 um den Eigenwert λ_1 zu bestimmen. Wir erhalten

$$Av_1 = \begin{pmatrix} 17 & 0 & 2\sqrt{3} \\ 0 & 21 & 0 \\ 2\sqrt{3} & 0 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19\sqrt{3} \\ 0 \\ 19 \end{pmatrix} = 19 \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Damit ist $\lambda_1 = 19$. Einen zweiten Eigenwert mit Eigenvektor kann man aus der Matrix direkt ablesen. Wir erhalten

$$\lambda_2 = 21 \quad \text{und} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Da die Matrix A symmetrisch ist, können wir den dritten Eigenvektor bestimmen, indem wir v_3 orthogonal zu v_1 und v_2 wählen. Wir berechnen

$$v_3 = v_1 \times v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

und erhalten mit

$$Av_3 = \begin{pmatrix} 17 & 0 & 2\sqrt{3} \\ 0 & 21 & 0 \\ 2\sqrt{3} & 0 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ 0 \\ 11\sqrt{3} \end{pmatrix} = 11 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix},$$

dass der Eigenwert $\lambda_3 = 11$ ist. Die Eigenräume sind also

$$V(19) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\0\\1\end{pmatrix}\right), \qquad V(21) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right), \qquad V(3) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix}-1\\0\\\sqrt{3}\end{pmatrix}\right).$$

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 42.

Gegeben sei folgende Quadrik

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2axz = 1, \qquad a \in \mathbb{R}.$$

(a) Klassifizieren Sie diese Quadrik in Abhängigkeit von a.

(b) Geben Sie eine auf Hauptachsenlage transformierende Drehung an, sowie die Quadrik nach dieser Transformation.

Lösungshinweise hierzu: Die Gleichung der Quadrik lautet $x^\mathsf{T} A x + 2a^\mathsf{T} x + c = 0$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \qquad c = -1.$$

Für $a = 0$ ist diese Quadrik bereits in Normalform, wir können also im folgenden $a \neq 0$ annehmen. Die Eigenwerte von A erhalten wir als Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_3) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & a \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ a & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 1 + a)(-\lambda + 1 + a)\,,$$

also als

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 1 - a, \quad \lambda_3 = 1 + a.$$

Jede symmetrische reelle Matrix ist orthogonal diagonalisierbar (Satz 5.4.2). Deshalb existiert eine reguläre Matrix F mit

$$F^\mathsf{T} A F = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 1+a \end{pmatrix},$$

und die transformierte Quadrik hat die Gleichung

$$y_1^2 + (1-a)y_2^2 + (1+a)y_3^2 - 1 = 0,$$

oder nach Division

$$-y_1^2 - (1-a)y_2^2 - (1+a)y_3^2 + 1 = 0.$$

(a) Dies ist ein elliptischer Zylinder für $a = -1$ und $a = 1$, ein Ellipsoid für $-1 < a < 1$ (dies gilt auch im oben erwähnten Fall $a = 0$) und ein einschaliges Hyperboloid für $a < -1$ oder $a > 1$.

(b) Falls $a = 0$ gilt, ist die Drehung die identische Abblidung. Im Fall $a \neq 0$ erhalten wir die Eigenvektoren v_k zu den Eigenwerten λ_k durch Lösen des entsprechendes LGS

$$(A - \lambda_k)v_k = 0, \qquad k = 1, 2, 3.$$

Für $\lambda_1 = 1$ erhalten wir

$$V(1) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

Analog ergeben sich

$$V(1-a) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \text{und } V(1-a) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Dies liefert die Transformationsmatrix

$$F = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die benötigen Koordinatentransformationen erhalt man mit F als

$$_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}(v) = Fv, \quad _{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}(v) = F^{\mathsf{T}}v.$$

Die Gleichung der Quadrik nach dieser Transformation ist durch

$$-y_1^2 - (1-a)y_2^2 - (1+a)y_3^2 + 1 = 0$$

gegeben.

Aufgabe H 43.

Gegeben sei die Quadrik Q durch

$$Q := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 4x^2 + y^2 + z^2 - 4xy + 4xz - 2yz - 4x + 2y - 2z = 0\right\}.$$

Die Gestalt von Q ist ein paralleles Ebenenpaar. Bestimmen Sie Ebenen $E_1 \neq E_2$, die in Q liegen. Bestimmen Sie den Abstand zwischen E_1 und E_2.

Lösungshinweise hierzu: Nach der affinen Klassifikation (6.3.7) besitzt ein paralleles Ebenenpaar die Normalform $\Lambda_1 x_1^2 = 1$. In diesem Fall bekommt man die parallelen Ebenen durch $x_1 = +1$ und $x_1 = -1$. Wir wollen Q auf diese Form bringen und betrachten dazu

$$\begin{aligned}
&(ax + by + cz + d)^2 - 1 \\
&= a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 + 2abxy + 2acxz + 2bcyz + 2adx + 2bdy + 2cdz + d^2 - 1 \\
&\overset{!}{=} 4x^2 + y^2 + z^2 - 4xy + 4xz - 2yz - 4x + 2y - 2z
\end{aligned}$$

Was für $a = 2$, $b = -1$, $c = 1$ und $d = -1$ erfüllt ist. Wir können also Q beschreiben durch

$$(2x - y + z - 1)^2 = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad 2x - y + z - 1 = +1 \text{ oder } 2x - y + z - 1 = -1$$

Damit haben wir eine Beschreibung für die Ebenen E_1 und E_2 gefunden, nämlich

$$E_1 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 2x - y + z = 2\right\} \quad \text{und} \quad E_2 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 2x - y + z = 0\right\}.$$

Wir bestimmen den Abstand von E_1 zu E_2, indem wir den Abstand zwischen $(0, 0, 0) \in E_2$ und E_1 messen und erhalten $\frac{2}{\sqrt{6}}$.

Aufgabe H 44.
Gegeben sei die Quadrik

$$Q := \left\{x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 + \sqrt{6}x_3 = 0\right\}.$$

Berechnen Sie eine euklidische Normalform von Q. Geben Sie das Koordinatensystem, in dem Q diese Normalform hat und die zugehörige Koordinatentransformation an.

Lösungshinweise hierzu: Die Gleichung der Quadrik lautet $x^\intercal A x + 2a^\intercal x + c = 0$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{\frac{3}{2}} \end{pmatrix} \text{ und } \qquad c = 0.$$

Erster Schritt: Diagonalisierung.
Wir erhalten die Eigenwerte von A als Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_3) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2(3 - \lambda),$$

also als

$$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

Die Eigenvektoren v_k zu diesen Eigenwerten erhält man durch Lösen des entsprechendes LGS

$$(A - \lambda_k)v_k = 0, \qquad k = 1, 2, 3.$$

Für $\lambda_1 = 3$ erhalten wir

$$V(3) = \mathrm{L}\left(f_1^*\right), \text{ mit } f_1^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Analog ergeben sich für $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} v = 0,$$

woraus sofort folgt

$$v = \begin{pmatrix} -t-s \\ t \\ s \end{pmatrix}, \quad t, s \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

Als Eigenraum (zweidimensional) erhalten wir

$$V(0) = \mathrm{L}\left(\tilde{f}_2^*, \tilde{f}_3^*\right), \quad \text{mit } \tilde{f}_2^* = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \tilde{f}_3^* = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Vektoren $\tilde{f}_2^*$, $\tilde{f}_3^*$ stehen nicht senkrecht aufeinander, deshalb bilden wir eine orthogonale Basis

$$f_2^* = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad f_3^* = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Wir müssen die f_j^* normieren:

$$f_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Dies liefert die Transformationsmatrix

$$F = (f_1, f_2, f_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix},$$

und transformiert den linearen Anteil der Gleichung auf

$$a^* = F^{\mathsf{T}} a = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bezüglich des kartesischen Koordinatensystems $\mathbb{F} = (\vec{0}; f_1, f_2, f_3)$ hat unsere Quadrik die Gleichung

$$3y_1^2 + \frac{2}{\sqrt{2}} y_1 + 2y_3 = 0.$$

Zweite Schritt: Verschiebung.
Durch quadratische Ergänzung sehen wir, wie wir verschieben müssen, um den linearen Term in y_1 zu beseitigen

$$3\left(y_1 + \frac{1}{3\sqrt{2}}\right)^2 + 2\left(y_3 - \frac{1}{12}\right) = 0.$$

Wir verwenden als neuen Ursprung also den Punkt ${}_{\mathbb{F}}P = \left(\frac{1}{3\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{12}\right)^{\mathsf{T}}$, und erhalten bezüglich des Koordinatensystems $\mathbb{G} = (P; f_1, f_2, f_3)$ mit

$$P = {}_{\mathbb{E}}P = F^{\mathsf{T}}\,{}_{\mathbb{F}}P = \left(\frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{12\sqrt{3}}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{6\sqrt{3}} - \frac{1}{6\sqrt{6}}\right)^{\mathsf{T}},$$

die Gleichung

$$6z_1^2 + 2z_3 = 0.$$

Dieses ist ein parabolischer Zylinder. Die benötigen Koordinatentransformationen erhalt man mit F und P als

$${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{G}}(v) = Fv - P, \quad {}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{E}}(v) = F^{\mathsf{T}}(v + P).$$

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 45.

Gegeben seien die folgenden rekursiv definierten Folgen

$$a_0 = 2, \quad a_n = a_{n-1} + 5, \qquad b_0 = 3, \quad b_n = 4b_{n-1}, \qquad c_0 = 5, \quad c_n = 2c_{n-1} + 1.$$

Bestimmen Sie eine explizite Form dieser Folgen, d.h. eine Ausdruck der nur von n aber nicht von a_{n-1}, a_{n-2}, ... abhängt.

Lösungshinweise hierzu: Wir berechnen die ersten Folgenglieder um ein Muster zu erkennen, wir erhalten:

$$a_0 = 2, \quad a_1 = 2 + 5, \quad a_2 = 2 + 2 \cdot 5, \quad a_3 = 2 + 3 \cdot 5, \quad a_4 = 2 + 4 \cdot 5, \quad \ldots$$

Es liegt die Vermutung nach, dass a_n sich schreiben lässt als

$$a_n \stackrel{?}{=} 2 + 5n.$$

Wir wollen durch vollständige Induktion beweisen, dass dies der Fall ist.

IA Wir haben die Behauptung bereits für $n = 0$ überprüft.

IH Im Weiteren nehmen wir an, dass die Behauptung für $n - 1$ bereits gezeigt wurde.

IS Wir erhalten

$$a_n = a_{n-1} + 5 \stackrel{*}{=} 2 + 5(n-1) + 5 = 2 + 5n$$

und haben damit die Behauptung auch für n nachgewiesen. Bei $*$ wurde die Induktionshypotese verwendet.

Wir verwenden bei der Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ das selbe Vorgehen und erhalten

$$b_0 = 3, \quad b_1 = 3 \cdot 4, \quad b_2 = 3 \cdot 4^2, \quad b_3 = 3 \cdot 4^3, \quad b_4 = 3 \cdot 4^4, \quad \ldots$$

Wir überprüfen die Vermutung

$$b_n \stackrel{?}{=} 3 \cdot 4^n$$

anhand einer Induktion, wobei wir nur noch auf den Induktionsschritt eingehen:

$$b_n = 4b_{n-1} \stackrel{*}{=} 4 \cdot 3 \cdot 4^{n-1} = 3 \cdot 4^n$$

Bei $*$ wurde wieder die Induktionshypotese verwendet.

Gleiches Vorgehen auch bei der letzten Folge:

$$c_0 = 5, \quad c_1 = 2 \cdot 5 + 1, \quad c_2 = 5 \cdot 2^2 + 2 + 1, \quad c_3 = 5 \cdot 2^3 + 2^2 + 2 + 1, \quad \ldots$$

Wir stellen die Vermutung

$$c_n \stackrel{?}{=} 5 \cdot 2^n + \sum_{k=0}^{n-1} 2^k$$

auf und beweisen sie durch vollständige Induktion

$$c_n = 2c_{n-1} + 1 \overset{*}{=} 2\left(5 \cdot 2^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} 2^k\right) + 1 = 5 \cdot 2^n + 1 + \sum_{k=0}^{n-2} 2^{k+1}$$
$$= 5 \cdot 2^n + 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k = 5 \cdot 2^n + \sum_{k=0}^{n-1} 2^k.$$

Damit haben wir c_n in expliziter Form dargestellt. Durch berechnen der Summe kann man die Form noch weiter vereinfachen, man erhält

$$c_n = 5 \cdot 2^n + \sum_{k=0}^{n-1} 2^k = 5 \cdot 2^n + \frac{1-2^n}{1-2} = 5 \cdot 2^n + 2^n - 1 = 6 \cdot 2^n - 1.$$

Aufgabe H 46.

Gegeben sind die Folgen

$$a_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$
$$b_0 = 0, \qquad b_1 = 1, \qquad b_n = b_{n-1} + b_{n-2} \text{ für } n \geqq 2.$$

Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass $a_n = b_n$ gilt.

Lösungshinweise hierzu:

IA Wir überprüfen die Behauptung für $n = 0$ und $n = 1$. Wir erhalten

$$a_0 = \frac{\sqrt{5}}{5}(1-1) = 0 = b_0 \quad \text{und} \quad a_1 = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1 = b_1.$$

IH Wir nehmen an, dass die Behauptung bereits für $n-1$ und $n-2$ bewiesen ist, d.h.

$$a_{n-1} = b_{n-1} \qquad \text{und} \qquad a_{n-2} = b_{n-2}.$$

IS Wir betrachten

$$\begin{aligned}
b_n &= b_{n-1} + b_{n-2} \\
&= \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\right) \\
&= \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} - \frac{3-\sqrt{5}}{2}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\right) \\
&= \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right) \\
&= a_n
\end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung für alle $n \geqq 0$ bewiesen.

Aufgabe H 47. *Monotonie und Beschränkheit*

Untersuchen Sie die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jeweils auf Monotonie und Beschränkheit. Finden Sie gegebenenfalls eine obere und untere Schranke.

(a) $a_n = \dfrac{n+2}{2n}$

(b) $a_n = n\cos(\pi n)$

(c) $a_n = 1 + \left(-\dfrac{2}{3}\right)^n$

(d) $a_n = \sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\sin\left(\dfrac{\pi n}{2}\right)$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir berechnen die ersten Folgenglieder

$$a_1 = \frac{3}{2}, \quad a_2 = \frac{4}{4} = 1, \quad a_3 = \frac{5}{6}, \quad a_4 = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}, \quad a_5 = \frac{7}{10}, \quad \dots$$

Auf Grund dieser Ergebnisse versuchen wir zu zeigen, dass die Folge monoton fallend ist.

$$\begin{aligned} a_{n+1} \overset{!}{\leqq} a_n \quad &\iff \quad \frac{n+3}{2n+2} \leqq \frac{n+2}{2n} \\ &\iff \quad (n+3)\cdot 2n \leqq (n+2)\cdot(2n+2) \\ &\iff \quad 0 \leqq 4 \end{aligned}$$

Damit ist die untersuchte Folge monoton fallend und deshalb auch nach oben beschränkt durch $a_1 = \frac{3}{2}$. Um eine untere Schranke zu finden schätzen wir die Folge ab und erhalten

$$a_n = \frac{n+2}{2n} \geqq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Damit haben wir auch eine untere Schranke gefunden, nämlich $\frac{1}{2}$. Also ist die betrachtete Folge beschränkt.

(b) Bevor wir die Folge auf Monotonie und Beschränktheit untersuchen, vereinfachen wir sie zu

$$a_n = (-1)^n n.$$

Wir berechnen wieder die ersten Folgenglieder und erhalten

$$a_1 = -1, \quad a_2 = 2, \quad a_3 = -3, \quad \dots$$

Schon nach den ersten 3 Folgengliedern ist klar dass die Folge weder monoton fallend noch monoton steigend ist. Bleibt noch zu klären, ob die Folge beschränkt ist. Dazu betrachtet man die Teilfolge $a_{2k} = 2k \to \infty$ und sieht, dass die Folge nicht beschränkt sein kann.

(c) Wir berechnen die ersten Folgenglieder und erhalten

$$a_1 = \frac{1}{3}, \quad a_2 = \frac{13}{9}, \quad a_3 = \frac{19}{27}, \quad \dots$$

Aus dieser Betrachtung sehen wir, dass die Folge nicht monoton ist. Auf Grund der ersten Folgenglieder liegen den Verdacht nahe, dass die Folge beschränkt ist durch 2 von oben und durch 0 von unten. Wir bestätigen diesen Verdacht durch die Überlegungen

$$a_n = 1 + \left(-\frac{2}{3}\right)^n \leqq 1 + 1 = 2$$

und

$$a_n = 1 + \left(-\frac{2}{3}\right)^n \geqq 1 - 1 = 0.$$

(d) An der Struktur der Folge sieht man sofort, dass sie beschränkt ist. Obere bzw. untere Schranke ist 1 bzw. -1, weil

$$|a_n| = \left|\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)\right| = \left|\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right| \cdot \left|\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)\right| \leqq 1 \cdot 1 = 1$$

Um die Folge auf Monotonie zu untersuchen berechnen wir die ersten Folgenglieder und erhalten

$$a_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad a_4 = 0, \quad \dots$$

An den ersten vier Folgengliedern erkennt man, dass die Folge nicht monoton ist.

Aufgabe H 48. *Konvergenz*

Untersuchen Sie die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jeweils auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenfalls den Grenzwert

(a) $a_n = \dfrac{(-1)^n n}{n+1}$

(b) $a_n = \dfrac{4\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{n+4}$

(c) $a_n = \dfrac{2n + (-1)^n}{n}$

(d) $a_n = 2^{-n}\cos(\pi n)$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Die durch $a_n = \dfrac{(-1)^n n}{n+1}$ gegebene alternierende Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$a_1 = -\frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{2}{3}, \quad a_3 = -\frac{3}{4}, \quad a_4 = \frac{4}{5}, \quad \dots$$

ist divergent.

(b) Wir betrachten

$$0 \leqq |a_n| = \left| \frac{4\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{n+4} \right| \leqq \frac{4}{n+4} \to 0$$

und erhalten nach dem Sandwichsatz (1.5.6), dass $|a_n|$ und damit auch a_n gegen 0 konvergiert.

(c) Da die Folge $\frac{(-1)^n}{n}$ gegen 0 konvergiert, konvergiert die Folge

$$a_n = \frac{2n + (-1)^n}{n} = 2 + \frac{(-1)^n}{n},$$

gegen 2 (Lemma 1.5.4).

(d) Wir argumentieren wie in (b) und erhalten

$$0 \leqq |a_n| = \left|2^{-n}\cos(\pi n)\right| \leqq \frac{1}{2^n} \to 0.$$

Mit dem Sandwichsatz erhalten wir, dass die Folge a_n gegen 0 konvergiert.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Hinweis: Die Abgaben zu diesen Aufgaben werden in der ersten Übung des kommenden Semesters eingesammelt und zählen zum HM2-Schein.

Aufgabe H 49.

Gegeben sei die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben durch

$$a_n = \left(\frac{1+2(-1)^n}{2}\right)^n .$$

(a) Bestimmen Sie $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$ und $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$.

(b) Bestimmen Sie $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ und $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$, falls sie existieren.

(c) Bestimmen Sie alle Häufungspunkte von a_n.

(d) Entscheiden Sie, ob a_n konvergent ist.

Lösungshinweise hierzu: Zuerst bemerken wir, dass sich die Folge auch in der folgenden Form schreiben lässt:

$$a_n = \left(\frac{1+2(-1)^n}{2}\right)^n = \begin{cases} \left(\frac{3}{2}\right)^n & \text{für } n \text{ gerade} \\ \left(-\frac{1}{2}\right)^n & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

(a) Dank dieser Darstellung sieht man, dass man die Folge a_n in zwei Teilfolgen mit unterschiedlichem Konvergenzverhalten aufteilen kann:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^n \to +\infty \qquad \text{und} \qquad \left(-\frac{1}{2}\right)^n \to 0 \qquad \text{für } n \to \infty. \tag{2}$$

Deshalb gilt

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = +\infty \qquad \text{und} \qquad \underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = 0.$$

(b) $\left(\frac{3}{2}\right)^n$ ist monoton wachsend und deshalb gilt

$$\inf_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ n \text{ gerade}}} \left(\frac{3}{2}\right)^n = \left(\frac{3}{2}\right)^0 = 1.$$

$\left|\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right|$ ist monoton fallend und deshalb kann die Teilfolge keine kleineren Werte als $-\frac{1}{2} = \left(-\frac{1}{2}\right)^1$ annehmen. Insgesamt gilt damit

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n = +\infty \quad \text{und} \qquad \inf_{n\in\mathbb{N}} a_n = -\frac{1}{2}.$$

(c) Mit (2) sieht man, dass 0 der einzige Häufungspunkt ist. $+\infty$ wird als uneigentlicher Häufungspunkt bezeichnet.

(d) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt eine divergente Teilfolge und ist deshalb selbst auch divergent.

Aufgabe H 50. *Sätze über Konvergenz*

Untersuchen Sie die nachstehenden Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenfalls die Grenzwerte

(a) $a_n = \dfrac{5n^3 - 7n}{1 - 2n^2}$

(b) $b_n = \dfrac{\sqrt{n} - 6n}{3n + 1}$

(c) $c_n = \dfrac{\sqrt{2n^2 + 1}}{2n - 1}$

(d) $d_n = \dfrac{5n^2}{1 - n^2} + 2^{1/n}$

(e) $e_n = \dfrac{1 + 2 + 3 + \cdots + n}{\sqrt{9n^4 + 1}}$

(f) $f_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

Lösungshinweise hierzu:

(a)

$$|a_n| = \left|\frac{5n^3 - 7n}{1 - 2n^2}\right| > \left|\frac{5n^3}{1 - 2n^2}\right| = \left|\frac{5n^3}{-1 + 2n^2}\right| > \left|\frac{5n^3}{2n^2}\right| = \frac{5}{2}n$$

Da $\frac{5}{2}n$ für $n \to \infty$ gegen ∞ strebt, ist die Folge a_n divergent.

(b) Wir zeigen zunächst: Wenn $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit $x_k > 0$ ist und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x > 0$ gilt, dann konvergiert auch die Folge $(\sqrt{x_n})_{n\in\mathbb{N}}$ und es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{x}$.

$$\sqrt{x_n} - \sqrt{x} = (\sqrt{x_n} - \sqrt{x})\frac{\sqrt{x_n} + \sqrt{x}}{\sqrt{x_n} + \sqrt{x}} = \frac{x_n - x}{\sqrt{x_n} + \sqrt{x}}$$

Für $n \to \infty$ konvergiert der Zähler gegen 0, der Nenner ist größer oder gleich x, somit gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{x_n} - \sqrt{x} = 0$$

und die Folge $(\sqrt{x_n})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen $\sqrt{x}$.

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n} - 6n}{3n + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - 6\right)}{n\left(3 + \frac{1}{n}\right)} = \frac{0 - 6}{3 + 0} = -2$$

(c)

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} c_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2n^2+1}}{2n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2\left(2+\frac{1}{n^2}\right)}}{2n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{|n|\sqrt{\left(2+\frac{1}{n^2}\right)}}{2n-1} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n\sqrt{\left(2+\frac{1}{n^2}\right)}}{2n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{\left(2+\frac{1}{n^2}\right)}}{2-\frac{1}{n}} = \frac{\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}$$

(d) Nach **1.5.7** gilt $\lim\limits_{n\to\infty} 2^{1/n} = 1$. Ferner ist

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n^2}{1-n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{5}{\frac{1}{n^2}-1} = -5.$$

Dies ergibt zusammen $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = -5+1 = -4$.

(e) Nach **1.2.2** der linearen Algebra ist

$$\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Also gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} e_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{1+2+3+\cdots+n}{\sqrt{9n^4+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{\sqrt{n^4(9+\frac{1}{n^4})}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\frac{(n^2+n)}{|n^2|\sqrt{(9+\frac{1}{n^4})}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\frac{(1+\frac{1}{n})}{\sqrt{(9+\frac{1}{n^4}}} = \frac{1}{2}\frac{1+0}{\sqrt{9+0}} = \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

(f)

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} f_n &= \lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n+1})^2-(\sqrt{n})^2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0
\end{aligned}$$

Aufgabe H 51.

Berechnen Sie den Grenzwert der folgenden Reihen.

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ **(b)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{-n}+3^{-n}}{5}$ **(c)** $\displaystyle\sum_{n=5}^{\infty} 5^{1-n}$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Nach Beispiel 1.8.4 aus der Vorlesung berechnet man geometrische Reihen durch die Formel

$$\sum_{j=0}^{\infty} q^j = \frac{1}{1-q}.$$

Wendet man diese Formel für $q = \frac{1}{2}$ an, erhält man

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$$

(b) Durch Umformungen kann man diese Reihe auf geometrische Reihen zurückführen, man erhält

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{-n}+3^{-n}}{5} = \frac{1}{5}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n\right) = \frac{1}{5}\left(2+\frac{3}{2}\right) = \frac{7}{10}.$$

(c) Auch diese Reihe kann man auf eine geometrische Reihe zurückführen, man erhält

$$\sum_{n=5}^{\infty} 5^{1-n} = 5\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n - 5 - 1 - \frac{1}{5} - \frac{1}{25} - \frac{1}{125} = \frac{1}{500}$$