Dr. B. Ackermann,
M. Borgart,
Dr. I Rybak, M. Kutter,
J. Veenman

1. Gruppenübung zur Vorlesung
Höhere Mathematik 1

Prof. Dr. M. Stroppel
Prof. Dr. A. Sändig

Wintersemester 2010/11

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 1. *Binomialkoeffizienten*

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $\binom{n}{k}\binom{k}{j} = \binom{n}{j}\binom{n-j}{k-j}$

(b) $\binom{n}{k}\binom{n-k}{j} = \binom{n}{j}\binom{n-j}{k}$

(c) $\forall\, n \in \mathbb{N}\colon \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} = 0$

Lösungshinweise hierzu:

(a)

$$\binom{n}{k}\binom{k}{j} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{k!}{j!(k-j)!} = \frac{n!(n-j)!}{j!(k-j)!(n-k)!(n-j)!} =$$

$$= \frac{n!}{j!(n-j)!}\frac{(n-j)!}{(k-j)!(n-j-(k-j))!} = \binom{n}{j}\binom{n-j}{k-j}$$

(b)

$$\binom{n}{k}\binom{n-k}{j} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{(n-k)!}{j!(n-k-j)!} =$$

$$= \frac{n!}{j!(n-j)!}\frac{(n-j)!}{k!(n-j-k)!} = \binom{n}{j}\binom{n-j}{k}$$

(c) Erinneren Sie sich, dass

$$(a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{n-j} b^j.$$

Mit $a = 1$ und $b = -1$ bekommen wir

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (1)^{n-j}(-1)^j = (1-1)^n = 0.$$

Aufgabe H 2. *Summen*

Entscheiden Sie, welche der folgenden Ausdrücke gleich sind.

(a) $\displaystyle\sum_{l=0}^{n} \frac{\left(1+(-1)^{l+1}\right)}{2} a_{2l+1} - \sum_{l=1}^{n} a_{2l}$

(b) $\displaystyle\sum_{k=5}^{n+5} a_{2k-9}$

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n+1} \cos(\pi + \pi k) a_k$

(d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} a_{2k-1}$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Da $\dfrac{\left(1+(-1)^{l+1}\right)}{2} = \begin{cases} 1 & \text{für } l \text{ ungerade} \\ 0 & \text{für } l \text{ gerade} \end{cases}$, bekommen wir

$$\sum_{l=0}^{n} \frac{\left(1+(-1)^{l+1}\right)}{2} a_{2l+1} = \begin{cases} a_3 + a_7 + a_{11} + \ldots + a_{2n+1}, & n \text{ ungerade} \\ a_3 + a_{11} + a_7 + \ldots + a_{2(n-1)+1}, & n \text{ gerade} \end{cases}.$$

Insgesamt ergibt sich somit

$$\sum_{l=0}^{n} \frac{\left(1+(-1)^{l+1}\right)}{2} a_{2l+1} - \sum_{l=1}^{n} a_{2l} = \begin{cases} a_3 + a_7 + \ldots + a_{2n+1} - a_2 - a_4 - \ldots - a_{2n}, & n \text{ ungerade} \\ a_3 + a_7 + \ldots + a_{2n-1} - a_2 - a_4 - \ldots - a_{2n}, & n \text{ gerade} \end{cases}.$$

(b) $\displaystyle\sum_{k=5}^{n+5} a_{2k-9} = a_{(2\cdot 5-9)} + a_{(2\cdot 6-9)} + \ldots + a_{(2\cdot(n+5)-9)} = a_1 + a_3 + a_5 + \ldots + a_{2n+1}.$

Alternativ kann man auch eine Indexverschiebung benutzen.
Mit $l = k - 4$ erhalten wir

$$\sum_{k=5}^{n+5} a_{2k-9} = \sum_{k=5}^{n+5} a_{2(k-4)-1} = \sum_{l=1}^{n+1} a_{2l-1}.$$

Damit ergibt sich der gleiche Ausdruck wie in Teil $(\mathbf{d})$.

(c) Wegen

$$\cos(\pi + \pi k) = \begin{cases} 1 & \text{für } k \text{ ungerade} \\ -1 & \text{für } k \text{ gerade} \end{cases}$$

ergibt sich

$$\sum_{k=1}^{2n+1} \cos(\pi + \pi k) a_k = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + a_{2n-1} - a_{2n} + a_{2n+1}.$$

(d) $\sum_{k=1}^{n+1} a_{2k-1} = a_1 + a_3 + a_5 + \ldots + a_{2(n+1)-1} = a_1 + a_3 + a_5 + \ldots + a_{2n+1}$.

Aufgabe H 3.

(a) Skizzieren Sie die folgenden Mengen:

$$M_1 := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, |x| < 2\right\} ,$$
$$M_2 := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, y < 2x - 1\right\} ,$$
$$M_3 := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, (x-1)^2 + (y+1)^2 \leqq 4\right\} .$$

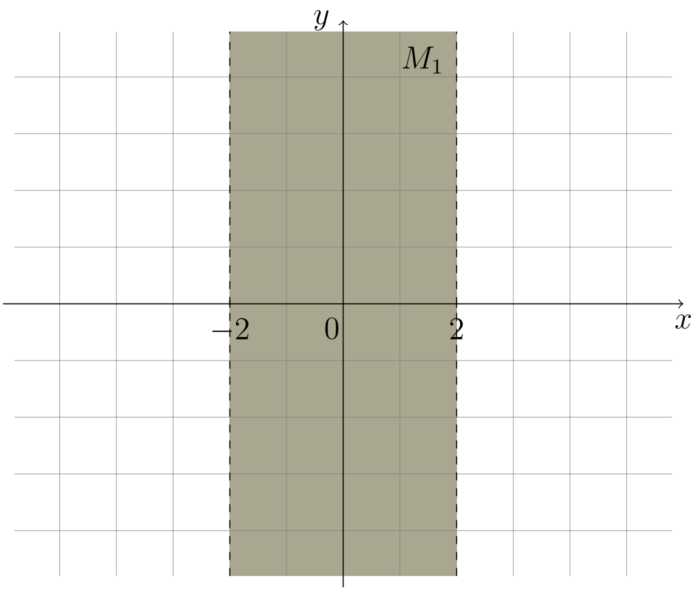
(b) Skizzieren Sie nun die Menge

$$M_4 := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, (x-2)^2 + (y-1)^2 \leqq 1 \vee (x-2)^2 + (y+1)^2 \leqq 1\right\} ,$$

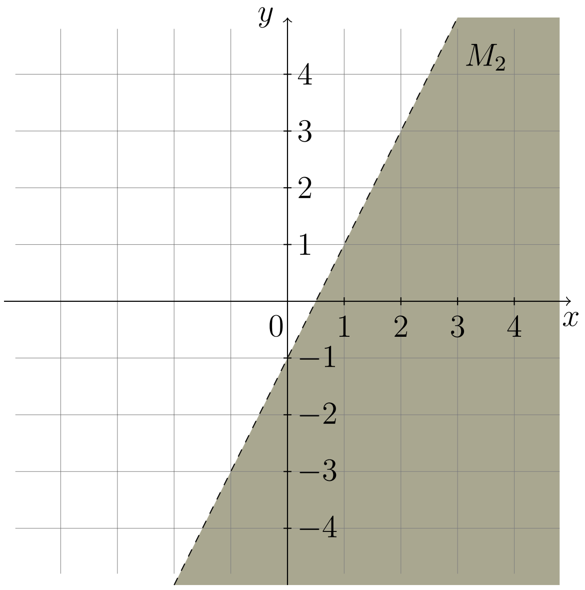
und die Schnittmenge von M_2 und M_3.

Lösungshinweise hierzu:

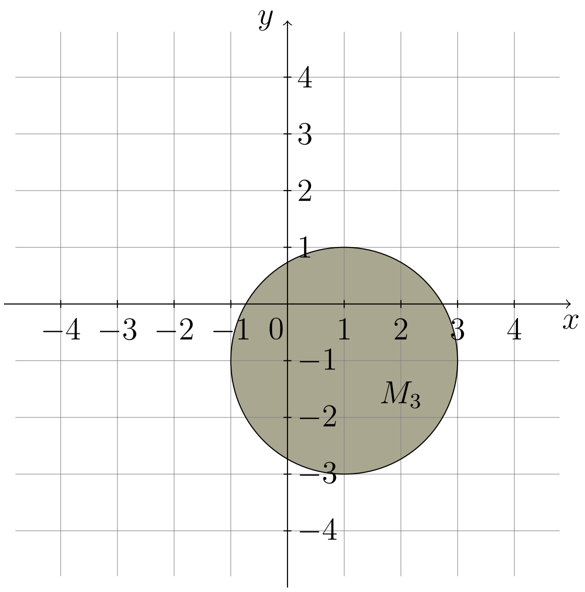
(a) Die Menge M_1 ist der Streifen, wobei der Rand $x = \pm 2$ nicht zu der Menge gehört.



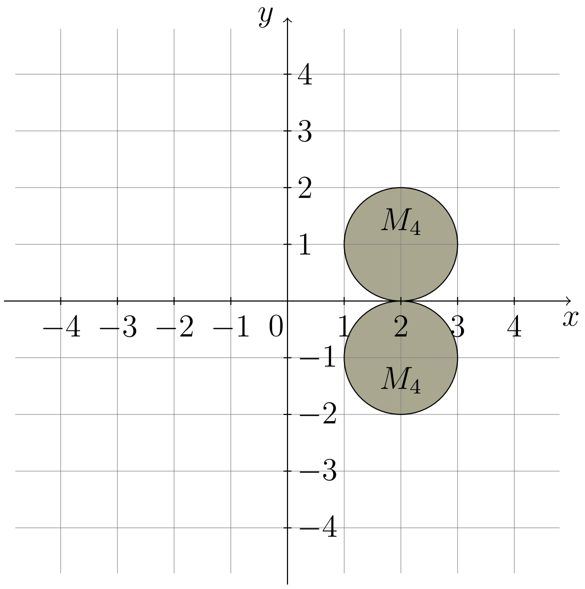
M_2 ist die graue Halbebene, wobei die Gerade $y = 2x - 1$ nicht zu der Menge gehört.



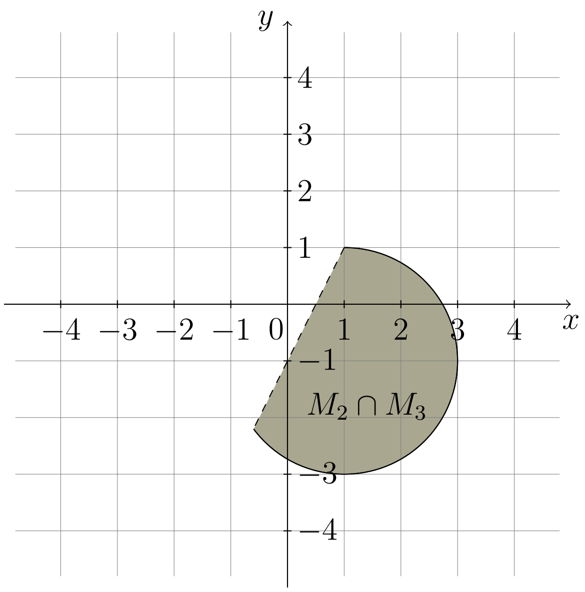
Die Menge M_3 ist eine Kreisscheibe mit Radius 2 und dem Mittelpunkt $(1, -1)$, wobei der Rand Bestandteil der Menge ist.



(b) Die Menge M_4 besteht aus zwei Kreisscheiben mit Radius 1 und den Mittelpunkten $(2, 1)$ und $(2, -1)$, wobei der Rand Bestandteil der Menge ist.



Die Schnittmenge von M_2 und M_3 ist die folgende Menge:



Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 4.

Bestimmen Sie die Menge aller reellen Zahlen, die die folgenden Ungleichungen erfüllen:

(a) $x + 3 > x^2(x+3)$

(b) $|x^2 + 3x - 4| + 1 < |x+4| + |x-1|$

(c) $\dfrac{|x-1|}{|x-2|} \leqq 1$

Lösungshinweise hierzu:

(a) *1. Fall:* $x < -3$.

Man kann in diesem Fall auf beiden Seiten durch den Faktor $x+3$ teilen. Da dieser Faktor negativ ist, dreht sich dabei das Ungleichheitszeichen um:

$$\begin{aligned} & x + 3 > x^2(x+3) \\ \Leftrightarrow\quad & 1 < x^2 \\ \Leftrightarrow\quad & 1 < |x| \end{aligned}$$

Dies gilt für alle $x < -3$.

2. Fall: $x = -3$.

$$x + 3 > x^2(x+3) \quad \Rightarrow \quad 0 > 0$$

Dies ist ein Widerspruch.

3. Fall: $x > -3$

$$\begin{aligned} & x + 3 > x^2(x+3) \\ \Leftrightarrow\quad & 1 > x^2 \\ \Leftrightarrow\quad & 1 > |x| \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge ist daher gegeben durch

$$\{x \in \mathbb{R} : \ x < -3 \ \vee \ -1 < x < 1\}.$$

(b) Die Nullstellen von $x^2 + 3x - 4$ sind -4 und 1, wobei $x^2 + 3x - 4$ für $-4 < x < 1$ negativ ist, sonst positiv (oder gleich Null an den Nullstellen).

1. Fall: $x < -4$.

$$\begin{aligned} & x^2 + 3x - 4 + 1 < -x - 4 - x + 1 \\ \Leftrightarrow\quad & x^2 + 5x < 0 \\ \Leftrightarrow\quad & -5 < x < 0 \ (\wedge \quad x < -4 \ \text{ nach Voraussetzung}) \end{aligned}$$

2. Fall: $x = -4$.

$$1 < 5 \quad \checkmark$$

3. Fall: $-4 < x < 1$.

$$-x^2 - 3x + 4 + 1 < x + 4 - x + 1$$
$$\Leftrightarrow \quad -x^2 - 3x < 0$$
$$\Leftrightarrow \quad x < -3 \ \vee \ x > 0 \ (\wedge \quad -4 < x < 1 \ \text{ nach Voraussetzung})$$

4. Fall: $x = 1$.

$$1 < 5 \quad \checkmark$$

5. Fall: $x > 1$.

$$x^2 + 3x - 4 + 1 < x + 4 + x - 1$$
$$\Leftrightarrow \quad x^2 + x - 6 < 0$$
$$\Leftrightarrow \quad -3 < x < 2 \ (\wedge \quad x > 1 \ \text{ nach Voraussetzung})$$

Die Lösungsmenge ist daher gegeben durch

$$\{x \in \mathbb{R} : \ -5 < x < -3 \ \vee \ 0 < x < 2\}.$$

(c) Für $x = 2$ ist der Ausdruck auf der linken Seite der Ungleichung nicht definiert. Ansonsten gilt folgende Äquivalenz:

$$\frac{|x-1|}{|x-2|} \leqq 1 \quad \Leftrightarrow \quad |x-1| \leqq |x-2|.$$

1. Fall: $x < 1$.

$$1 - x \leqq 2 - x$$

Dies ist erfüllt für alle $x < 1$ (sogar für alle $x \in \mathbb{R}$).

2. Fall: $x = 1$.

$$0 \leqq 1 \quad \checkmark$$

3. Fall: $1 < x < 2$.

$$x - 1 \leqq 2 - x \quad \Leftrightarrow \quad 2x \leqq 3 \quad \Leftrightarrow \quad x \leqq \tfrac{3}{2} \quad (\wedge \quad 1 < x < 2)$$

4. Fall: $x = 2$.
Siehe oben.

5. Fall: $x > 2$.

$$x - 1 \leqq x - 2$$

Dies ist für kein $x \in \mathbb{R}$ erfüllt.

Die Lösungsmenge ist daher gegeben durch

$$\{x \in \mathbb{R} : \ x \leqq \tfrac{3}{2}\}.$$

Aufgabe H 5. *Ungleichungen, Vollständige Induktion*

Beweisen Sie folgende Formeln für $n \in \mathbb{N}_0$ mit Hilfe der vollständigen Induktion:

(a) $2^n > n^2, \quad n > 4$

(b) $\dfrac{1}{\sqrt{1}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}, \quad n > 1$

(c) $\cos(x)\cos(2x)\cos(4x)\ldots\cos(2^n x) = \dfrac{\sin(2^{n+1}x)}{2^{n+1}\sin(x)}$

Dabei dürfen Sie die folgende Gleichung, die für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt, ohne Beweis benutzen: $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x)$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) IA $n = 5$:

$$2^5 > 5^2.$$

Wegen $32 > 25$ ist die Behauptung für $n = 5$ wahr.

IS $n \to (n+1)$:

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > 2n^2 = n^2 + n^2 > n^2 + (2n+1) = (n+1)^2.$$

Hier wurde benutzt, dass $n^2 > 2n + 1$ für alle $n \geqq 3$. Dass diese Ungleichung gilt ist leicht einzusehen, denn sie ist äquivalent zu $n^2 - 2n + 1 > 2$, was wegen $n^2 - 2n + 1 = (n-1)^2$ für alle $n \geqq 3$ erfüllt ist.

(b) IA $n = 2$:

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} > \sqrt{2} \qquad \Leftrightarrow \qquad \sqrt{2} + 1 > 2.$$

Die Behauptung für $n = 2$ ist wahr.

IS

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} > \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} > \sqrt{n} + \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = \sqrt{n+1}.$$

Hier haben wir die Ungleichung

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} > \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

benutzt, deren Gültigkeit nach einer Multiplikation mit $\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$ offensichtlich wird, denn man erhält

$$1 + \sqrt{\frac{n}{n+1}} > 1.$$

(c) IA $n = 0$:

$$\cos(x) = \frac{\sin(2x)}{2\sin(x)}.$$

Wegen $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$ ist die Behauptung für $n = 0$ wahr.

IS $n \to (n+1)$:

$$\cos(x)\cos(2x)\cos(4x)\cdots\cos(2^n x)\cos\left(2^{n+1}x\right) = \frac{\sin(2^{n+1}x)}{2^{n+1}\sin(x)}\cos\left(2^{n+1}x\right) =$$
$$\frac{\sin(2^{n+1}x)\cos(2^{n+1}x)}{2^{n+1}\sin(x)} = \frac{\frac{1}{2}\sin(2\cdot 2^{n+1}x)}{2^{n+1}\sin(x)} = \frac{\sin(2^{n+2}x)}{2^{n+2}\sin(x)}.$$

Deshalb ist die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}_0$ wahr.

Aufgabe H 6. *Betrag*

Bestimmen Sie alle Lösungen der folgenden Gleichungen:

(a) $x^2 - 6|x| + 5 = 0$

(b) $||3 - 2x| - 1| = |2x|$

(c) $\left|x^2 - x\right| + |x - a| = 0, \qquad a \in \mathbb{R}$

Lösungshinweise hierzu:

(a) **Lösung I.**

Fall: $x \geqq 0$.

Wir erhalten die Gleichung

$$x^2 - 6x + 5 = 0,$$

die die folgenden Nullstellen $x_1 = 1$ und $x_2 = 5$ hat.

Fall: $x < 0$.

Wir erhalten

$$x^2 + 6x + 5 = 0$$

mit den Nullstellen $x_3 = -1$ und $x_4 = -5$.

Lösung II.
Mit $z = |x|$ erhalten wir die Gleichung

$$z^2 - 6z + 5 = 0$$

mit den Nullstellen $z = 1$ und $z = 5$. Da $z = |x|$, gilt $x = \pm z$. Deshalb haben wir

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 5, \quad x_3 = -1, \quad x_4 = -5.$$

(b)

$$\begin{aligned} ||3-2x|-1| &= |2x| \\ \Leftrightarrow \quad (|3-2x|-1)^2 &= 4x^2 \\ \Leftrightarrow \quad |3-2x|^2 - 2|3-2x| + 1 &= 4x^2 \\ \Leftrightarrow \quad 9 - 12x + 4x^2 - 2|3-2x| + 1 &= 4x^2 \\ \Leftrightarrow \quad 5 - 6x &= |3-2x|. \end{aligned}$$

Fall: $3 - 2x \geqq 0$.

$$5 - 6x = 3 - 2x \Leftrightarrow x = 0.5.$$

Da $3 - 2 \cdot 0.5 \geqq 0$, ist $x = 0.5$ eine Lösung.
Fall: $3 - 2x < 0$.

$$5 - 6x = -3 + 2x \Leftrightarrow x = 1.$$

Da $3 - 2 \cdot 1 > 0$, ist $x = 1$ keine Lösung.

(c) Da $|z| \geqq 0$ folgt aus $|x^2 - x| + |x - a| = 0$, dass

$$\left(\left|x^2 - x\right| = 0\right) \wedge (|x - a| = 0).$$

Also erhalten wir

$$(x(x-1) = 0) \wedge (x = a).$$

Deshalb gilt

- ist $a = 0$, so lautet die Lösung $x = 0$,
- ist $a = 1$, so lautet die Lösung $x = 1$,
- ist $a \in \mathbb{R} \smallsetminus \{0, 1\}$, so existiert keine Lösung.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 7. *Eigenschaften von Abbildungen*

Untersuchen Sie, ob folgenden Abbildungen surjektiv, injektiv oder bijektiv sind:

(a) $f_1 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+ \colon x \mapsto |x|$

Lösungshinweise hierzu: f_1 ist nicht injektiv, da z.B. $f_1(1) = 1 = f_1(-1)$ ist. Also ist f_1 auch nicht bijektiv. Wir zeigen, dass f_1 surjektiv ist. Dazu betrachten wir ein Element x aus der Bildmenge $\mathbb{R}_0^+$. Offensichtlich ist x ein Element des Definitionsbereichs $\mathbb{R}$ und es gilt $f_1(x) = x$. Wir haben also ein Element gefunden, das auf $x \in \mathbb{R}_0^+$ abgebildet wird. f_1 ist surjektiv.

(b) $f_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \colon x \mapsto e^x$

Lösungshinweise hierzu: Für $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$ gilt $e^x < e^y$. Also ist f_2 injektiv. Aus der Tatsache, dass f_2 stetig ist und der Asymptotik $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ und $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ folgt außerdem, dass f_2 surjektiv ist (man erkennt das auch sehr gut an einer Skizze des Funktionsgraphen). Damit ist f_2 bijektiv.

(c) $f_3 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \colon x \mapsto \sin x$

Lösungshinweise hierzu: Es ist $\sin(x) = \sin(x + 2\pi)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Außerdem ist $|\sin(x)| < 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Es gibt also kein x im Definitionsbereich so, dass $f_3(x) = 2$ ist. Daher ist f_3 weder injektiv noch surjektiv noch bijektiv.

(d) $f_4 \colon \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R} \colon x \mapsto \cos x$

Lösungshinweise hierzu: Es ist $\cos(-x) = \cos(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Außerdem ist $|\cos(x)| < 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Es gibt also kein x im Definitionsbereich so, dass $f_4(x) = 2$ ist. Daher ist f_4 weder injektiv noch surjektiv noch bijektiv.

(e) $f_5 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \colon\; x \mapsto x^4 + 1$

Lösungshinweise hierzu: Es ist $x^4 = (-x)^4$ und damit auch $f_5(x) = f_5(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Da $x^4 \geqq 0$ ist, gibt es kein x im Definitionsbereich so, dass $f_5(x) = \frac{1}{2}$ ist. Daher ist f_5 weder injektiv noch surjektiv noch bijektiv.

Aufgabe H 8. *Komplexe Zahlen, Wurzelziehen im Komplexen*

Geben Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an:

(a) $z_1 = (2 + 3i)\overline{(3 - 2i)}$

(b) $z_2 = \dfrac{4 - 3i}{4 + 3i}$

(c) $z_3 = (1 + i)^{10}$

(d) Bestimmen Sie alle Wurzeln $z_{4,5,6} = \sqrt[3]{i}$. Geben Sie das Ergebnis in der Form $a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es gilt

$$z_1 = (2+3i)\overline{(3-2i)} = (2+3i)(3+2i) = 6 + 9i + 4i - 6 = 13i.$$

(b) Wir berechnen

$$z_2 = \frac{4-3i}{4+3i} = z_2 = \frac{(4-3i)(4-3i)}{(4+3i)(4-3i)} = \frac{(4-3i)^2}{4^2-(3i)^2} = \frac{16-24i-9}{16+9} = \frac{7}{25} - \frac{24}{25}i.$$

(c) Es ist $(1+i)^2 = 2i$. Weiter ergibt sich

$$z_3 = (1+i)^{10} = (2i)^5 = 2^5 \cdot i^2 \cdot i^2 \cdot i = 32 \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot i = 32i.$$

(d) Zuerst berechnen wir das Argument und den Betrag von i und erhalten damit die Darstellung

$$i = 1 \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right).$$

Damit erhalten wir für die 3-ten Wurzeln gerade die Darstellung

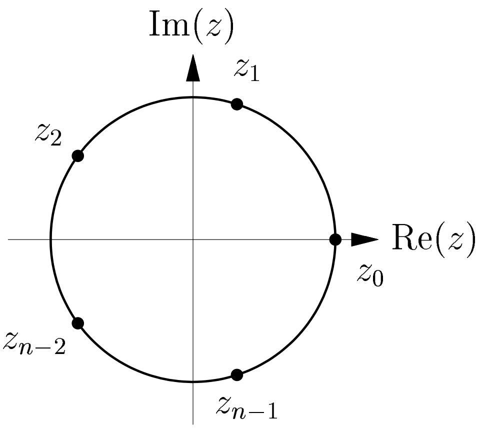
$$z_4 = \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i,$$

$$z_5 = \left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right)\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i,$$

$$z_6 = \left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3}\right)\right) = -i.$$

Aufgabe H 9. *Komplexe Einheitswurzeln*

Zeigen Sie, dass die n–ten komplexen Einheitswurzeln $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$ eine abelsche Gruppe bzgl. der Multiplikation bilden.



Lösungshinweise hierzu:
Sei $G_n = \{z_k \mid z_k = \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right), k = 0, 1, ..., n-1\}$.

Abgeschlossenheit:

Für $z_k, z_l \in G_n$ gilt:

$$\begin{aligned} z_k \cdot z_l &= \left[\cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right)\right]\left[\cos\left(\frac{2\pi l}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi l}{n}\right)\right] \\ &= \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right)\cos\left(\frac{2\pi l}{n}\right) - \sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right)\sin\left(\frac{2\pi l}{n}\right) + \\ &\quad + i\left(\cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right)\sin\left(\frac{2\pi l}{n}\right) + \cos\left(\frac{2\pi l}{n}\right)\sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right)\right) \\ &= \cos\left(\frac{2\pi(k+l)}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi(k+l)}{n}\right) \end{aligned}$$

Also ist das Produkt $z_k \cdot z_l$ auch eine Einheitswurzel und liegt somit in G_n.

Neutralelement:

Es ist $z_k \cdot z_0 = z_k \cdot 1 = z_k$ für $k = 0, 1, ..., n-1$. Also enthält G_n auch das Neutralelememt bezüglich der Multiplikation.

Inverse:

Für $k = 0, 1, ..., n-1$ und $l = n-k$ ist $z_l \in G_n$ und

$$z_k \cdot z_l = \cos\left(\frac{2\pi(k+l)}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi(k+l)}{n}\right) = 1.$$

Also ist z_l das inverse Element von z_k.

Da $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ein Körper ist, ist die Multiplikation in $\mathbb{C}$ und damit auch in G_n assoziativ und kommutativ. Damit ist gezeigt, dass $(G_n, \cdot)$ eine abelsche (kommutative) Gruppe ist.

Bemerkung:

Man kann die n–ten komplexen Einheitswurzeln auch in der Form

$$z_k = e^{i\frac{2\pi k}{n}}$$

darstellen. Obige Rechnungen sind dann noch einfacher.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 10. *Komplexe Zahlen*

(a) Skizzieren Sie die folgenden Mengen in der Gaußschen Zahlenebene:

$$M_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z - \mathrm{i}| = 2|z + \mathrm{i}|\} \quad \text{und} \quad M_2 = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\left(\tfrac{1}{z}\right) = 1\}.$$

Lösungshinweise hierzu:
Zuerst skizzieren wir die Menge $M_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z - \mathrm{i}| = 2|z + \mathrm{i}|\}$.
Wir schreiben die komplexe Zahl als $z = x + \mathrm{i}y$ und somit $z - \mathrm{i} = x + (y-1)\mathrm{i}$ und $z + \mathrm{i} = x + (y+1)\mathrm{i}$.
Damit lässt sich die Gleichung $|z - \mathrm{i}| = 2|z + \mathrm{i}|$ wie folgt schreiben:

$$\sqrt{x^2 + (y-1)^2} = 2\sqrt{x^2 + (y+1)^2}.$$

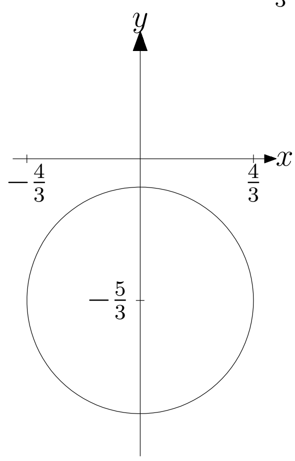
Durch Quadrieren und anschließendes Umformen erhalten wir

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 2y + 1 &= 4(x^2 + y^2 + 2y + 1) \\ 0 &= 3x^2 + 3y^2 + 10y + 3 \\ 0 &= x^2 + y^2 + \frac{10}{3}y + 1. \end{aligned}$$

Es handelt sich dabei um eine Kreisgleichung. Durch quadratische Ergänzung erhält man die Normalform.

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 + y^2 + \frac{10}{3}y + \frac{25}{9} - \frac{25}{9} + 1 \\ 0 &= x^2 + \left(y + \frac{5}{3}\right)^2 - \frac{16}{9} \\ \frac{16}{9} &= x^2 + \left(y + \frac{5}{3}\right)^2. \end{aligned}$$

Die Menge M_1 ist also ein Kreis mit dem Radius $r = \frac{4}{3}$ und den Mittelpunkt $M(0|-\frac{5}{3})$:



Um die Menge $M_2 = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(\frac{1}{z}) = 1\}$ skizzieren zu können, bestimmen wir zuerst Re $\left(\frac{1}{z}\right)$. Es gilt

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x+\mathrm{i}y} = \frac{x-\mathrm{i}y}{(x+\mathrm{i}y)(x-\mathrm{i}y)} = \frac{x-\mathrm{i}y}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y}{x^2+y^2}\mathrm{i}.$$

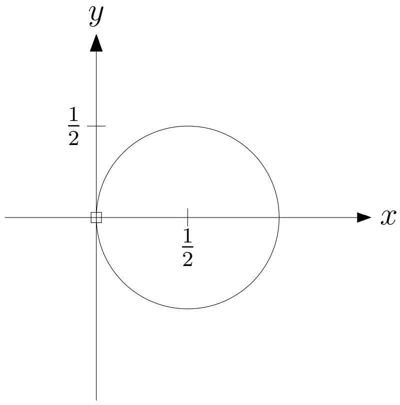
Damit erhalten wir also die Gleichung

$$1 = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

Multiplikation der Gleichung mit x^2+y^2 ergibt

$$\begin{aligned} x &= x^2+y^2 \\ 0 &= x^2-x+y^2 \\ 0 &= x^2-x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+y^2 \\ 0 &= \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2-\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} &= \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2. \end{aligned}$$

Man erhält eine Kreisgleichung mit dem Radius $r = \frac{1}{2}$ und dem Mittelpunkt $M(\frac{1}{2}|0)$, wobei jedoch $z = 0$ aufgrund der Bedingung Re$(\frac{1}{z}) = 1$ ausgeschlossen ist (Division durch Null).



(b) Bestimmen Sie jeweils alle komplexen Lösungen der folgenden Gleichungen:

(i) $z^3 - z^2 - z - 2 = 0$

Lösungshinweise hierzu: Man erkennt durch Raten, dass $z_1 = 2$ die Gleichung löst. Polynomdivision durch den Faktor $(z-2)$ liefert

$$z^3 - z^2 - z - 2 = (z^2+z+1)(z-2).$$

Die quadratische Lösungsformel liefert dann die restlichen Lösungen:

$$z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{i\frac{2\pi}{3}}, \qquad z_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

(ii) $z^2 + z\bar{z} = 2$

Lösungshinweise hierzu: Es ist

$$z^2 + z\bar{z} = z\underbrace{(z+\bar{z})}_{=2\,\mathrm{Re}(z)}.$$

Für $z = a + bi$ gilt also

$$(a+bi)2a = 2.$$

Es folgt, dass $a \neq 0$ und $b = 0$ ist, da die rechte Seite der Gleichung ungleich Null und reell ist. Damit erhält man

$$a^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad a = \pm 1.$$

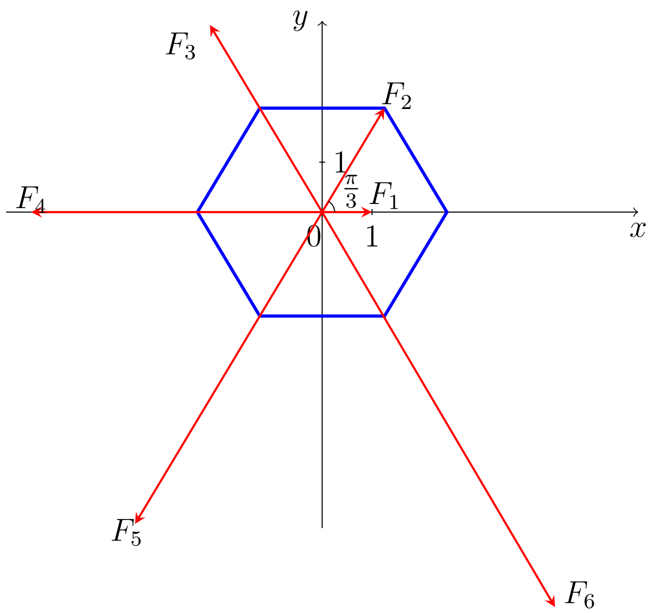
Die Lösungen der Gleichung sind also

$$z_1 = 1, \qquad z_2 = -1.$$

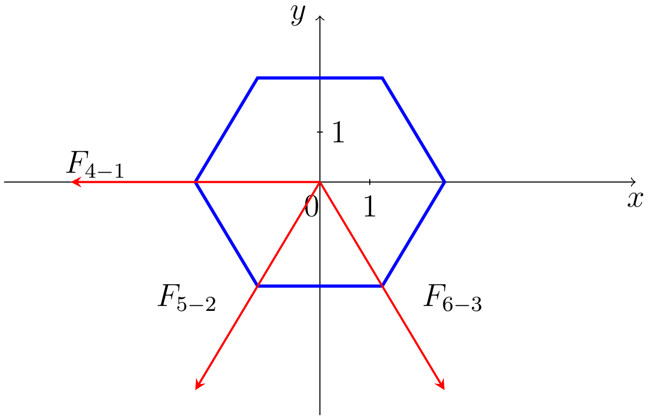
Aufgabe H 11. *Vektorrechnung*

Gegeben ist ein regelmäßiges Sechseck mit den Eckpunkten $P_1, \ldots, P_6$, die in mathematisch positiver Richtung (also gegen den Uhrzeigersinn) durchlaufen werden. Vom Zentrum des Sechsecks aus wirken Kräfte $\overrightarrow{F_1}, \ldots, \overrightarrow{F_6}$, wobei die Kraft $\overrightarrow{F_k}$ zum Eckpunkt P_k gerichtet ist für $k = 1, \ldots, 6$. Die Beträge der Kräfte sind gegeben durch $|\overrightarrow{F_1}| = 1$, $|\overrightarrow{F_2}| = 3$, $|\overrightarrow{F_3}| = 5$, $|\overrightarrow{F_4}| = 7$, $|\overrightarrow{F_5}| = 9$ und $|\overrightarrow{F_6}| = 11$. Skizzieren Sie ein solches Sechseck mit den dazugehörigen Kräften! Berechnen Sie den Betrag und die Richtung der resultierenden Kraft.

Lösungshinweise hierzu: Um die Rechnungen zu vereinfachen, können wir das Koordinatensystem so auswählen, dass das Zentrum des Sechecks im Ursprung liegt und $\overrightarrow{F_1}$ in Richtung der positiven x-Achse wirkt. Die restlichen Kräfte werden der Reihe nach in der positiven Umlaufrichtung eingetragen.



Zuerst können wir die Kräfte zusammenrechnen, die in entgegengesetzte Richtungen wirken. Wir erhalten das folgende Bild:



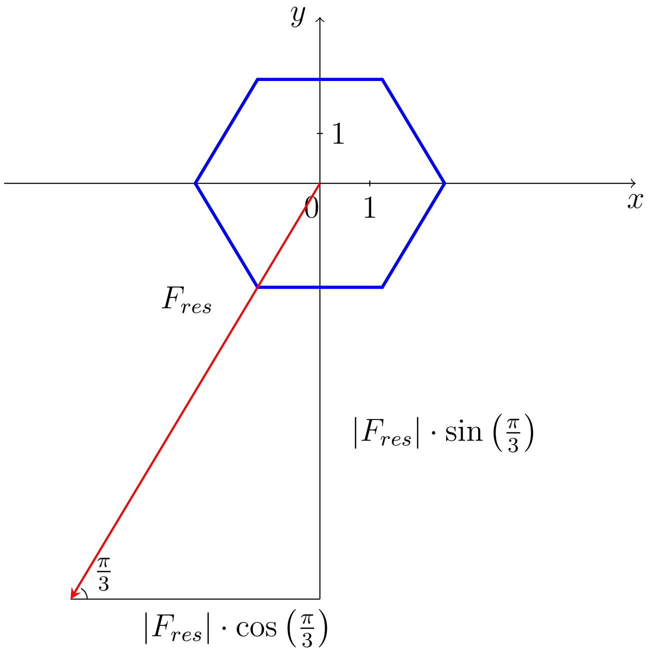
mit $|\overrightarrow{F_{4-1}}| = |\overrightarrow{F_{5-2}}| = |\overrightarrow{F_{6-3}}| = 6$.

Wie man jetzt erkennen kann, spannen die beiden Vektoren $\overrightarrow{F_{4-1}}$ und $\overrightarrow{F_{6-3}}$ ein Parallelogramm mit der Diagonale $\overrightarrow{F_{5-2}} = \overrightarrow{F_{4-1}} + \overrightarrow{F_{6-3}}$. Für die resultierende Kraft gilt also

$$\overrightarrow{F_{res}} = \overrightarrow{F_{4-1}} + \overrightarrow{F_{6-3}} + \overrightarrow{F_{5-2}} = 2\overrightarrow{F_{5-2}}$$

und damit auch $|\overrightarrow{F_{res}}| = 12$.

Die Richtung von $\overrightarrow{F_{res}}$ können wir mit Hilfe der folgenden Skizze auch schnell bestimmen:



Es gilt $\overrightarrow{F_{res}} = \left(-|F_{res}| \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}\right), -|F_{res}| \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^{\mathsf{T}} = \left(-6, -6\sqrt{3}\right)^{\mathsf{T}}$.

Aufgabe H 12. *Geraden und Ebenen*

Gegeben sind die Punkte $P_1 = (1,1,1)$, $P_2 = (2,1,-3)$, $P_3 = (0,-4,1)$, $P_4 = (-2,-4,9)$, $P_5 = (-2,-4,0)$ und $P_6 = (1,1,\alpha)$.

(a) Berechnen Sie eine Parameterdarstellung der Ebene E_1, die die Punkte P_1, P_2 und P_3 beinhaltet.

Lösungshinweise hierzu:

$$E_1 : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

(b) Liegt der Punkt P_4 auf der Ebene E_1?

Lösungshinweise hierzu: Es gilt

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (-2) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 9 \end{pmatrix},$$

also liegt der Punkt P_4 auf der Ebene E_1.

(c) Bestimmen Sie α so, dass die Gerade g durch die Punkte P_5 und P_6 parallel zu der Ebene E_1 verläuft.

Lösungshinweise hierzu: Die Gerade g ist genau dann parallel zu der Ebene E_1, wenn der Richtungsvektor $\overrightarrow{P_5P_6}$ linear abhängig von den Spannvektoren der Ebene E_1 ist. Es gilt also

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow \mu = -1 \Longrightarrow \lambda = 2 \Longrightarrow \alpha = -8$.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

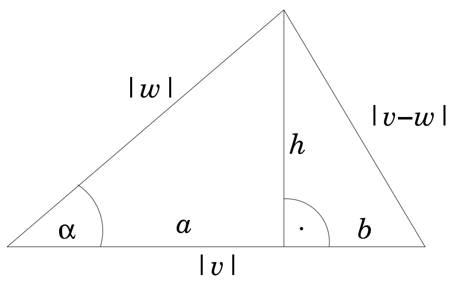
Aufgabe H 13. *Kosinussatz, Vektorprodukt*

(a) Geben Sie einen elementargeometrischen Beweis des Kosinussatzes an: Für zwei Vektoren $v = (v_1, v_2)^\top, w = (w_1, w_2)^\top \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$|v - w|^2 = |v|^2 + |w|^2 - 2|v||w|\cos(\alpha),$$

wobei α der Winkel ist, den die beiden Vektoren einschließen.

Lösungshinweise hierzu: Ohne Einschränkung nehmen wir v und w ungleich Null an (ansonsten ist die Aussage trivial). Zunächst setzen wir $0 < \alpha \leqq \frac{\pi}{2}$ voraus und betrachten folgendes Dreieck:



Der Winkel α liegt zwischen den Seiten mit Längen $|v|$ und $|w|$, die Seite mit Länge $|v-w|$ liegt dem Winkel α gegenüber. Wir fällen die Höhe senkrecht auf die Seite mit Länge $|v|$ und teilen diese Seite damit in zwei Strecken der Länge a bzw. b. Falls die Höhe die untere Seite nicht trifft, dann vertauschen wir die Rollen von v und w. Der Satz des Pythagoras liefert

$$|w|^2 - a^2 = h^2 = |v - w|^2 - b^2.$$

Für den Kosinus von α gilt:

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{a}{|w|}.$$

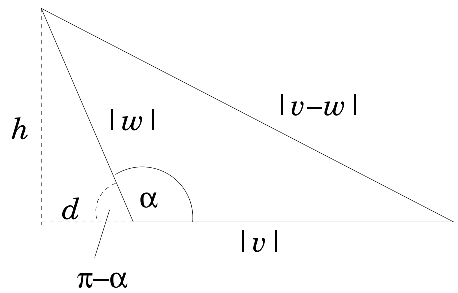
Außerdem gilt nach Konstruktion

$$b = |v| - a, \qquad \Rightarrow \quad b^2 = |v|^2 - 2a|v| + a^2.$$

Die Behauptung folgt durch Einsetzen:

$$\begin{aligned} |v - w|^2 &= |w|^2 - a^2 + b^2 \\ &= |w|^2 - a^2 + |v|^2 - 2a|v| + a^2 \\ &= |w|^2 + |v|^2 - 2|v||w|\cos(\alpha). \end{aligned}$$

Es bleibt noch der Fall, dass $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, siehe die folgende Skizze:



Es folgt durch analoge Überlegungen, dass

$$|v-w|^2 - (|v|+d)^2 = h^2 = |w|^2 - d^2$$

und

$$\cos(\pi-\alpha) = \frac{d}{|w|}.$$

Aus der Eigenschaft $\cos(\pi-\alpha) = -\cos(\alpha)$ erhält man durch Zusammensetzen obiger Gleichungen:

$$\begin{aligned} |v-w|^2 &= |w|^2 - d^2 + |v|^2 + 2d|v| + d^2 \\ &= |w|^2 + |v|^2 - 2|v||w|\cos(\alpha). \end{aligned}$$

(b) Für welche Vektoren $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$a \times (b \times c) = (a \times b) \times c?$$

Lösungshinweise hierzu: Man kann direkt überprüfen, dass folgende Gleichheit gilt:

$$(a \times b) \times c = \langle a, c\rangle b - \langle b, c\rangle a \qquad \text{Probiere es aus!}$$

Jetzt können wir die Gleichung umschreiben:

$$\begin{aligned} (a \times b) \times c &= \langle a, c\rangle b - \langle b, c\rangle a \\ a \times (b \times c) &= -(b \times c) \times a \\ &= -\langle b, a\rangle c + \langle c, a\rangle b \\ &= \langle a, c\rangle b - \langle b, a\rangle c \end{aligned}$$

Also gilt die Gleichung

$$a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$$

dann und nur dann, wenn

$$\langle a, c\rangle b - \langle b, a\rangle c = \langle a, c\rangle b - \langle b, c\rangle a$$

und damit

$$\langle b, a\rangle c = \langle b, c\rangle a.$$

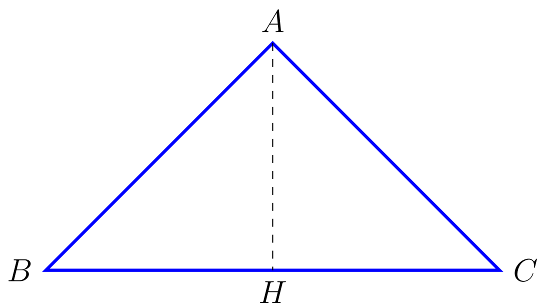
Die letzte Gleichung gilt, wenn

- b ist senkrecht sowohl zu a als auch zu c (d.h. $\langle b, a\rangle = \langle b, c\rangle = 0$)
- a und c sind parallel (d.h. $c = \alpha a$ für ein $\alpha \in \mathbb{R}$)
- Einer der Vektoren ist der Nullvektor

Aufgabe H 14. *Orthogonalität, Winkel*

Gegeben sei das Dreieck $\triangle ABC$ mit Ecken $A = (2, -1, 3)$, $B = (1, 1, 1)$ und $C = (0, 0, 5)$. Berechnen Sie die Innenwinkel des Dreiecks, die Länge der Seiten, die Höhe des Dreiecks ausgehend vom Punkt A und die Fläche des Dreiecks.

Lösungshinweise hierzu:



Wir berechnen

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Die Längen der Seiten sind

$$AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-2)^2} = 3, \qquad AC = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 2^2} = 3,$$

$$BC = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 4^2} = 3\sqrt{2}.$$

Da $\left\langle \overrightarrow{AB} \,\middle|\, \overrightarrow{AC} \right\rangle = 0$, stehen die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ senkrecht aufeinander. Folglich ist der Innenwinkel gleich $\sphericalangle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}$. Der Innenwinkel $\sphericalangle(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$ zwischen den Vektoren $\overrightarrow{BA}$ und $\overrightarrow{BC}$ berechnen wir mit Hilfe des Skalarprodukts,

$$\cos\left(\sphericalangle(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})\right) = \frac{\left\langle \overrightarrow{BA} \,\middle|\, \overrightarrow{BC} \right\rangle}{|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} = \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 4^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Also ist $\sphericalangle(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \frac{\pi}{4}$. Da die Summe alle Innenwinkel des Dreiecks gleich π ist, ist der Winkel $\sphericalangle(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \frac{\pi}{4}$.

Die Höhe des Dreiecks ausgehend vom Punkt A berechnen wir mit dem Sinus,

$$\frac{AH}{AB} = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Wir erhalten $AH = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

Die Fläche des Dreiecks ist

$$S_{\triangle ABS} = \frac{BC \cdot AH}{2} = \frac{9}{2}.$$

Aufgabe H 15. *Geraden und Ebenen, Vektorprodukt*

Gegeben sei in $\mathbb{R}^3$ das gleichseitige Tetraeder mit den Ecken

$A = (-2, 0, 0), \quad B = (2, 0, 0), \quad C = (c_1, c_2, 0),\ c_2 > 0,$ und $D = (d_1, d_2, d_3),\ d_3 > 0.$

(a) Berechnen Sie die fehlenden Koordinaten von C und D.

Lösungshinweise hierzu:

$$\begin{aligned} |AC|^2 &= |BC|^2 \\ (c_1+2)^2 + c_2^2 &= (c_1-2)^2 + c_2^2 \\ c_1^2 + 4c_1 + 4 &= c_1^2 - 4c_1 + 4 \end{aligned}$$

$\Longrightarrow c_1 = 0$

$$\begin{aligned} |AC|^2 &= |AB|^2 \\ 4 + c_2^2 &= 16 \end{aligned}$$

$\Longrightarrow c_2 = 2\sqrt{3}$, da $c_2 > 0$

$$\begin{aligned} |AD|^2 &= |BD|^2 \\ (d_1+2)^2 + d_2^2 + d_3^2 &= (d_1-2)^2 + d_2^2 + d_3^2 \\ d_1^2 + 4d_1 + 4 &= d_1^2 - 4d_1 + 4 \end{aligned}$$

$\Longrightarrow d_1 = 0$

$$\begin{aligned} |AD|^2 &= |CD|^2 \\ 4 + d_2^2 + d_3^2 &= (d_2 - 2\sqrt{3})^2 + d_3^2 \\ 4 + d_2^2 &= d_2^2 - 4\sqrt{3}d_2 + 12 \end{aligned}$$

$\Longrightarrow d_2 = \frac{2}{3}\sqrt{3}$

$$\begin{aligned} |AD|^2 &= |AB|^2 \\ 4 + \frac{4}{3} + d_3^2 &= 16 \\ d_3^2 &= \frac{32}{3} \end{aligned}$$

$\Longrightarrow d_3 = \frac{4}{3}\sqrt{6}$, da $d_3 > 0$

Also insgesamt $C = \left(0, 2\sqrt{3}, 0\right)$ und $D = \left(0, \frac{2}{3}\sqrt{3}, \frac{4}{3}\sqrt{6}\right)$.

(b) Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung der Geraden g durch A und D sowie den Abstand des Punktes B zur Geraden g.

Lösungshinweise hierzu:

$$g: \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \widetilde{\lambda} \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{2}{3}\sqrt{3} \\ \frac{4}{3}\sqrt{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ \sqrt{3} \\ 2\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

Der Abstand von B zu g ergibt sich als

$$\left| \frac{1}{\left\| \begin{pmatrix} 3 \\ \sqrt{3} \\ 2\sqrt{6} \end{pmatrix} \right\|} \begin{pmatrix} 3 \\ \sqrt{3} \\ 2\sqrt{6} \end{pmatrix} \times \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \right| = \left| \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 \\ 8\sqrt{6} \\ -4\sqrt{3} \end{pmatrix} \right| = 2\sqrt{3}$$

Alternativ: Ebene durch B mit Richtungsvektor von g als Normalenvektor; Schnitt dieser Ebene mit g; Abstand dieses Schnittpunkts zu B.

(c) Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung und die Hesse-Normalform der Ebene durch die Punkte A, B, D. Unter welchem Winkel schneiden sich diese Ebene und die Ebene durch die Punkte A, B, C?

Lösungshinweise hierzu: Ebene durch A, B und D:

$$E_1 : \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ \sqrt{3} \\ 2\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

mit Normalenvektor

$$\widetilde{n}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ \sqrt{3} \\ 2\sqrt{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2\sqrt{6} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad n_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ -2\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

damit lautet die Hessesche Normalform von E_1:

$$E_1 : \frac{1}{3} \left(-2\sqrt{2}\, x_2 + x_3 \right) = 0$$

Ebene durch A, B und C:

$$E_2 : \nu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \widetilde{\xi} \begin{pmatrix} 2 \\ 2\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} = \nu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \xi \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit Normalenvektor

$$n_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Winkel α zwischen den Ebenen (entspricht Winkel zwischen n_1 und n_2):

$$\cos(\alpha) = \langle n_1 \,|\, n_2 \rangle = \frac{1}{3} \quad \Longrightarrow \quad \alpha \approx 70.53^\circ$$

(d) Berechnen Sie die Oberfläche des Tetraeders mit Hilfe des Vektorprodukts.

Lösungshinweise hierzu:

$$\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 2\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8\sqrt{3} \end{pmatrix}\right| = 4\sqrt{3}$$

Damit ist die gesamte Oberfläche des Tetraeders $16\sqrt{3}$.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 16. *Matrizenmultiplikationen*

Gegeben seien die Matrizen

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3\sqrt{5}}{10} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3\sqrt{5}}{10} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{5}}{10} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{5}}{10} & \frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{3}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie:

(a) $Q^\intercal Q$,

Lösungshinweise hierzu: I_3

(b) $Q^\intercal A$,

Lösungshinweise hierzu: $R := Q^\intercal A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \sqrt{5} & \frac{3\sqrt{5}}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{6}}{2} \end{pmatrix}$

(c) $Q^\intercal A S$,

Lösungshinweise hierzu: I_3

(d) $SQ^\intercal A S Q^\intercal A - S S^\intercal A^\intercal Q Q^\intercal A$.

Lösungshinweise hierzu:

$$SQ^\intercal ASQ^\intercal A - SS^\intercal A^\intercal QQ^\intercal A = S\left(Q^\intercal AS - S^\intercal A^\intercal Q\right) Q^\intercal A = S\,(I - I)\,Q^\intercal A = 0_{3\times 3}$$

oder

$$SQ^\intercal ASQ^\intercal A - SS^\intercal A^\intercal QQ^\intercal A = SQ^\intercal A - SQ^\intercal A = I_3 - I_3 = 0_{3\times 3}$$

Hinweis: Für beliebige Matrizen M und N, für die das Produkt MN definiert ist, gilt: $(MN)^\intercal = N^\intercal M^\intercal$.

Aufgabe H 17. *Lineare Gleichungssysteme*

Geben Sie für die folgenden Gleichungssysteme jeweils die Koeffizientenmatrix und die rechte Seite an und bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathcal{L}$. Machen Sie eine Probe.

(a)
$$\begin{array}{rcrcrcr} -2x_1 & - & 6x_2 & + & 2x_3 & = & 2 \\ -x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & 1 \end{array}$$

Lösungshinweise hierzu: Das LGS ist $Ax = b$ mit der Koeffizientenmatrix A und der rechte Seite b:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -6 & 2 \\ -1 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dies führt auf die erweiterte Koeffizientenmatrix

$$[A||b] = \left[\begin{array}{rrr||r} -2 & -6 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right].$$

Wir berechnen

$$\begin{array}{r} \\ \\ Z_3 + \frac{1}{2} Z_1 : \end{array} \left[\begin{array}{rrr||r} -2 & -6 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right].$$

Nach Satz 3.7.2, ist dieses LGS nicht lösbar, da $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 \neq 2$, das heißt $\mathcal{L} = \{\}$.

(b)
$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & -4 \\ 2x_1 & - & 2x_3 & - & 4x_2 & = & 10 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & 4x_3 & = & 15 \end{array}$$

Lösungshinweise hierzu: Das LGS führt auf die erweiterte Koeffizientenmatrix

$$\left[\begin{array}{rrr||r} 3 & 1 & -2 & -4 \\ 2 & -4 & -2 & 10 \\ 1 & -2 & 4 & 15 \end{array}\right].$$

Vertauschen der ersten und dritten Zeile liefert

$$Z_1 \leftrightarrow Z_3 : \left[\begin{array}{rrr||r} 1 & -2 & 4 & 15 \\ 2 & -4 & -2 & 10 \\ 3 & 1 & -2 & -4 \end{array}\right].$$

Weiter berechnen wir

$$\begin{array}{r} \\ Z_2 - 2\,Z_1 : \\ Z_3 - 3\,Z_1 : \end{array} \left[\begin{array}{rrr||r} 1 & -2 & 4 & 15 \\ 0 & 0 & -10 & -20 \\ 0 & 7 & -14 & -49 \end{array}\right],$$

$$Z_2 \leftrightarrow Z_3 : \left[\begin{array}{rrr||r} 1 & -2 & 4 & 15 \\ 0 & 7 & -14 & -49 \\ 0 & 0 & -10 & -20 \end{array}\right],$$

$$\begin{array}{r} \\ \frac{1}{7}\,Z_2: \\ -\frac{1}{10}\,Z_3: \end{array} \left[\begin{array}{rrr||r} 1 & -2 & 4 & 15 \\ 0 & 1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right],$$

$$\begin{array}{r} Z_1 - 4\,Z_3: \\ Z_2 + 2\,Z_3: \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{rrr||r} 1 & -2 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right],$$

$$\begin{array}{r} Z_1 + 2\,Z_2: \\ \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{rrr||r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right].$$

Daraus erhalten wir die Lösung zu $x_1 = 1,\ x_2 = -3,\ x_3 = 2$, also die Lösungsmenge

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Probe: Wir setzen $x_1 = 1,\ x_2 = -3,\ x_3 = 2$ in die ursprüngliche Gleichung ein.

(c) $$\begin{array}{rcrcr} (1+i)z_1 & + & 2z_2 & = & 4 \\ (1-i)z_2 & + & 2z_1 & = & 2 \end{array}$$

Lösungshinweise hierzu: Das LGS führt auf die erweiterte Koeffizientenmatrix

$$\left[\begin{array}{rr||r} 1+i & 2 & 4 \\ 2 & 1-i & 2 \end{array}\right].$$

Aus der zweiten Zeile des LGS erhalten wir

$$z_1 = 1 - \frac{1-i}{2} z_2.$$

Substitution in die erste Zeile ergibt

$$(1+i) - \frac{(1+i)(1-i)}{2} z_2 + 2z_2 = 4,$$

woraus sofort

$$z_2 = 3 - i$$

folgt.

Wir berechnen

$$z_1 = 1 - \frac{1-i}{2} z_2 = 1 - \frac{(1-i)(3-i)}{2} = 2i\,.$$

Damit erhalten wir die Lösungsmenge

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 2i \\ 3-i \end{pmatrix} \right\}.$$

Probe: Ob das Element von $\mathcal{L}$ tatsächlich die Lösung ist, überprüft man durch Einsetzen.

Aufgabe H 18. *Lineare Gleichungssysteme*

Jeden Montag um halb sieben liefert Bauer Klaus Kartoffeln, Zwiebeln und Tomaten an die 3 Gemüsehändler in der Nordbahnhofstraße. Diese Woche sind es folgende Mengen (in kg):

	Kartoffeln	Zwiebeln	Tomaten
Händler 1	200	100	120
Händler 2	150	50	80
Händler 3	280	150	120

Der erste Händler bezahlt 600 Euro, der zweite 415 Euro und der dritte 750 Euro. Wieviel kostet also jeweils 1 kg Kartoffeln, Zwiebeln oder Tomaten? Die Preise sind natürlich für alle Händler gleich.

Lösungshinweise hierzu: Wir bezeichnen die Kilopreise für Kartoffeln, Zwiebeln oder Tomaten mit x_1,x_2 bzw. x_3. Man erhält folgendes lineares Gleichungssystem:

$$200x_1 + 100x_2 + 120x_3 = 600 \tag{1}$$
$$150x_1 + \ 50x_2 + \ 80x_3 = 415 \tag{2}$$
$$280x_1 + 150x_2 + 120x_3 = 750 \tag{3}$$

Zunächst multiplizieren wir Gleichung (2) mit 2 bzw. 3 und subtrahieren dies dann von (1) bzw. (3) und erhalten

$$-100x_1 - 40x_3 = -230 \tag{4}$$
$$-170x_1 - 120x_3 = -495 \tag{5}$$

Subtraktion vom dreifachen von (4) von (5) liefert

$$130x_1 = 195 \quad \Rightarrow x_1 = \frac{3}{2}.$$

Einsetzen in (4) ergibt

$$x_3 = 2.$$

Durch erneutes Einsetzen in (1) bekommen wir

$$x_2 = \frac{3}{5}.$$

Ein Kilogramm Kartoffeln kostet also 1,50 Euro, ein Kilogramm Zwiebeln 0,60 Euro und ein Kilogramm Tomaten 2 Euro.

Dr. B. Ackermann,
M. Borgart,
Dr. I Rybak, M. Kutter,
J. Veenman

7. Gruppenübung zur Vorlesung
Höhere Mathematik 1

Prof. Dr. M. Stroppel
Prof. Dr. A. Sändig

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 19. *Lineare Abbildungen*

Es sei $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine lineare Abbildung mit

$$\varphi(1,1,0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \varphi(1,0,2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \varphi(0,0,1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Außerdem seien

$$B = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\} \quad \text{und} \quad C = \{(1,1,0),(1,0,2),(0,0,1)\}$$

jeweils eine Basis des $\mathbb{R}^3$.

(a) Berechnen Sie die Bilder der Basisvektoren von B unter der Abbildung φ.

Lösungshinweise hierzu: Man erkennt, dass

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Es gilt also (da φ linear ist)

$$\varphi(1,0,0) = \varphi(1,0,2) - 2\varphi(0,0,1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Weiter ist

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und daher

$$\varphi(0,1,0) = \varphi(1,1,0) - \varphi(0,1,0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(b) Geben Sie die Matrizen ${}_B\varphi_B$ und ${}_B\varphi_C$ an, die obige Abbildung in den jeweiligen Basen beschreiben.

Lösungshinweise hierzu: Die Spalten der Matrizen ${}_B\varphi_B$ bzw. ${}_B\varphi_C$ sind gegeben durch die Bilder der Basisvektoren von B bzw. C, dargestellt in der Basis B. Aus (a) folgt also

$${}_B\varphi_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 6 & 4 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

und

$$_B\varphi_C = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 7 & 9 & 4 \\ 6 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

(c) Bestimmen Sie $\mathrm{Kern}(\varphi)$ und $\mathrm{Bild}(\varphi)$.

Lösungshinweise hierzu: Wir verwenden im Folgenden die Standardbasis B sowohl im Urbild-, als auch im Bildraum. Für einen Vektor $x \in \mathrm{Kern}\,\varphi$ gilt nach Definition

$$\varphi(x) = {_B\varphi_B} x = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 6 & 4 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Der Lösungsraum dieses homogenen LGS ist der Kern von φ, d.h. hier:

$$\mathrm{Kern}(\varphi) = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : \ x = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \exists\, \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Das Bild von φ wird durch die Bilder der drei Basisvektoren von B (oder alternativ von C) erzeugt. Aus der Dimensionsformel

$$\dim(\mathrm{Bild}(\varphi)) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\mathrm{Kern}(\varphi)) = 3 - 1 = 2$$

wissen wir aber, dass wir nur zwei Vektoren brauchen um $\mathrm{Bild}(\varphi)$ aufzuspannen (d.h. die Bilder der drei Basisvektoren müssen linear abhängig sein). Wir nehmen z.B. die Vektoren $\varphi(1,0,0)$ und $\varphi(0,1,0)$ und erkennen, dass diese linear unabhängig sind.Es folgt, dass

$$\mathrm{Bild}(\varphi) = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : \ x = \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}, \exists\, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

Aufgabe H 20. *Gauss/LGS*

Gegeben sei das LGS

$$\begin{pmatrix} 10 & -4 & 1 & -3 & -2 \\ -2 & 1 & -3 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -2 & -3 \\ -2 & -4 & 4 & 1 & -1 \\ 7 & -4 & 3 & 1 & -2 \\ 6 & -4 & 3 & -2 & -3 \\ -1 & 8 & -7 & -2 & 3 \\ -5 & 4 & 3 & -3 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ -6 \\ -2 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}$$

(a) Transformieren Sie das LGS auf ein LGS der Gestalt $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$ wobei $\tilde{A}$, $\tilde{x}$ und $\tilde{b}$ definiert sind wie in Satz $3.7.2$.

Lösungshinweise hierzu: Das LGS führt auf die erweiterte Koeffizientenmatrix

$$[A||b] = \left[\begin{array}{ccccc||c} 10 & -4 & 1 & -3 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -3 & -2 & -1 & -7 \\ 1 & -1 & -1 & -2 & -3 & -6 \\ -2 & -4 & 4 & 1 & -1 & -2 \\ 7 & -4 & 3 & 1 & -2 & 5 \\ 6 & -4 & 3 & -2 & -3 & 0 \\ -1 & 8 & -7 & -2 & 3 & 1 \\ -5 & 4 & 3 & -3 & -6 & -7 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} Z_1 - 10Z_3: \\ Z_2 + 2Z_3: \\ \\ Z_4 + 2Z_3: \\ Z_5 - 7Z_3: \\ Z_6 - 6Z_3: \\ Z_7 + Z_3: \\ Z_8 + 5Z_3: \end{array} \left[\begin{array}{ccccc||c} 0 & 6 & 11 & 17 & 28 & 62 \\ 0 & -1 & -5 & -6 & -7 & -19 \\ 1 & -1 & -1 & -2 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & 2 & -3 & -7 & -14 \\ 0 & 3 & 10 & 15 & 19 & 47 \\ 0 & 2 & 9 & 10 & 15 & 36 \\ 0 & 7 & -8 & -4 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & -2 & -13 & -21 & -37 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \\ -Z_2: \\ Z_3 \leftrightarrow Z_1: \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccccc||c} 1 & -1 & -1 & -2 & -3 & -6 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 7 & 19 \\ 0 & 6 & 11 & 17 & 28 & 62 \\ 0 & -6 & 2 & -3 & -7 & -14 \\ 0 & 3 & 10 & 15 & 19 & 47 \\ 0 & 2 & 9 & 10 & 15 & 36 \\ 0 & 7 & -8 & -4 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & -2 & -13 & -21 & -37 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ Z_3 - 6Z_2: \\ Z_4 - 6Z_2: \\ Z_5 - 3Z_2: \\ -(Z_6 - 2Z_2): \\ Z_7 - 7Z_2: \\ Z_8 + Z_2: \end{array} \left[\begin{array}{ccccc||c} 1 & -1 & -1 & -2 & -3 & -6 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 7 & 19 \\ 0 & 0 & -19 & -19 & -14 & -52 \\ 0 & 0 & 32 & 33 & 35 & 100 \\ 0 & 0 & -5 & -3 & -2 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -43 & -46 & -49 & -138 \\ 0 & 0 & 3 & -7 & -14 & -18 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ Z_3+19Z_6: \\ Z_4-32Z_6: \\ Z_5+5Z_6: \\ \\ Z_7+43Z_6: \\ Z_8-3Z_6: \end{array}\left[\begin{array}{ccccc||c} 1 & -1 & -1 & -2 & -3 & -6 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 7 & 19 \\ 0 & 0 & 0 & 19 & -33 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & -31 & 67 & 36 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 40 & -92 & -52 \\ 0 & 0 & 0 & -13 & -11 & -24 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ \\ \\ Z_5/7: \\ Z_3 \leftrightarrow Z_6: \\ \\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{ccccc||c} 1 & -1 & -1 & -2 & -3 & -6 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 7 & 19 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -31 & 67 & 36 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 19 & -33 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 40 & -92 & -52 \\ 0 & 0 & 0 & -13 & -11 & -24 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ \\ Z_4+31Z_5: \\ \\ Z_6-19Z_5: \\ Z_7-40Z_5: \\ Z_8+13Z_5: \end{array}\left[\begin{array}{ccccc||c} 1 & -1 & -1 & -2 & -3 & -6 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 7 & 19 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 36 & 36 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -14 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -52 & -52 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -24 & -24 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ \\ Z_4/36: \\ \\ -Z_6/14: \\ -Z_7/52: \\ -Z_8/8: \end{array}\left[\begin{array}{ccccc||c} 1 & -1 & -1 & -2 & -3 & -6 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 7 & 19 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ \\ \\ Z_5 \leftrightarrow Z_4: \\ \\ \\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{ccccc||c} 1 & -1 & -1 & -2 & -3 & -6 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 7 & 19 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$
\begin{array}{r}
\\ \\ \\ \\ \\
Z_6 - Z_5: \\
Z_7 - Z_5: \\
Z_8 - Z_5:
\end{array}
\left[\begin{array}{ccccc||c}
1 & -1 & -1 & -2 & -3 & -6 \\
0 & 1 & 5 & 6 & 7 & 19 \\
0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]
$$

$$
\begin{array}{r}
Z_1 + Z_2 - 4Z_3 + 4Z_4 - 4Z_5: \\
Z_2 - 5Z_3 + 4Z_4 - 8Z_5: \\
Z_3 - 2Z_4 - Z_5: \\
Z_4 + Z_5: \\ \\ \\ \\ \\
\end{array}
\left[\begin{array}{ccccc||c}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]
$$

Wir erhalten

$$
\tilde{A} = \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}, \quad \tilde{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

Probe:

$$
\begin{pmatrix}
10 & -4 & 1 & -3 & -2 \\
-2 & 1 & -3 & -2 & -1 \\
1 & -1 & -1 & -2 & -3 \\
-2 & -4 & 4 & 1 & -1 \\
7 & -4 & 3 & 1 & -2 \\
6 & -4 & 3 & -2 & -3 \\
-1 & 8 & -7 & -2 & 3 \\
-5 & 4 & 3 & -3 & -6
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}
= \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ -6 \\ -2 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}. \quad \checkmark
$$

(b) Begründen Sie, warum das LGS lösbar ist.

Lösungshinweise hierzu: Es gilt für alle $j > 5$, dass $\tilde{b}_j$ null ist.

Aufgabe H 21. *Lineares Gleichungssystem*

Gegeben ist das reelle, lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$
A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & \alpha & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ \beta \\ -1 \end{pmatrix}.
$$

(a) Für welche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ besitzt das System eine eindeutige Lösung? Berechnen Sie diese Lösung.

(b) Für welche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ besitzt das System unendlich viele Lösungen? Berechnen Sie die Lösungsmenge.

(c) Für welche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ besitzt das System keine Lösungen?

Lösungshinweise hierzu:

(a) Ein LGS mit quadratischer Koeffizientenmatrix hat eine eindeutige Lösung genau dann, wenn die Determinante der Koeffizientenmatrix nicht verschwindet. Wir berechnen

$$\det A = 1 + 5\alpha\,.$$

Also besitzt das LGS eine eindeutige Lösung, falls

$$\det A \neq 0 \qquad \iff \qquad \alpha \neq -\frac{1}{5}\,.$$

Um die Lösung in diesem Fall zu berechnen betrachtet man das augmentierte System

$$[A||b] = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & \alpha & 2 & \beta \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

und vereinfacht es mit Gauss-Algoritmus zu

$$[\tilde{A}||\tilde{b}] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 1+5\alpha & -5\alpha-\beta-4 \end{array}\right).$$

Aus dieser Schreibweise kann man die Lösung dann ablesen und erhält

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{1+5\alpha} \begin{pmatrix} 5\alpha - 3\beta - 8 \\ 5\beta + 15 \\ -5\alpha - \beta - 4 \end{pmatrix}.$$

(b) Aus **(a)** weiß man, dass die Matrix nur für den Fall $\alpha = -\frac{1}{5}$ unendlich viele Lösungen haben kann. Betrachtet man die letzte Zeile von $[\tilde{A}||\tilde{b}]$, so erhält man für die Lösbarkeit auch noch die Bedingung $\beta = -3$.

Wir setzen nun $\alpha = -\frac{1}{5}$ und $\beta = -3$ in die augmentierte Matrix $[\tilde{A}||\tilde{b}]$ ein und erhalten

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Die Lösung kann man daraus ablesen, man erhält die Lösungsmenge

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}.$$

(c) Aus **(b)** erhält man, dass für $\alpha = -\frac{1}{5}$ und $\beta \neq -3$ das lineare Gleichungssystem keine Lösung besitzt.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 22. *Inverse*

Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Inverse A^{-1}.

(b) Lösen Sie die linearen Gleichungssysteme $Ax = b_i$ für die Vektoren

$$b_1 = (1, -1, 0, 1)^\mathsf{T}, \quad b_2 = (2, -2, 3, 1)^\mathsf{T}, \quad b_3 = (4, -1, 1, 1)^\mathsf{T}, \quad b_4 = (0, 2, -5, 1)^\mathsf{T}.$$

Hinweis: Benutzen Sie die oben berechnete Inverse.

Lösungshinweise hierzu:

(a)

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -1 & -4 \\ 7 & 4 & -1 & -5 \\ 19 & 11 & -2 & -14 \\ -16 & -9 & 2 & 12 \end{pmatrix}.$$

(b) Wir berechnen $x_i = A^{-1}b_i$, $i = 1, 2, 3, 4$:

$$x_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad x_3 = \begin{pmatrix} 16 \\ 18 \\ 49 \\ -41 \end{pmatrix}, \quad x_4 = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 18 \\ -16 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe H 23. *Volumen*

Gegeben ist die Pyramide ABCD mit den Ecken $A = (3, 0, 0)$, $B = (0, 5, 0)$, $C = (0, 0, 3)$, $D = (0, -2, 0)$.

(a) Bestimmen Sie die Höhe h der Pyramide über der Grundfläche mit den Eckpunkten A, B und C.

Lösungshinweise hierzu: Die Höhe h ist gleich dem Abstand des Punktes D von der Ebene E durch A, B und C. Die Ebene E ist gegeben durch die Parameterdarstellung

$$E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Daraus ergibt sich die Hesse-Normalform

$$E : \frac{1}{\sqrt{59}}(5x_1 + 3x_2 + 5x_3) = \frac{15}{\sqrt{59}}.$$

Damit ist $h = \frac{1}{\sqrt{59}}\left|5 \cdot 0 + 3 \cdot (-2) + 5 \cdot 0 - 15\right| = \frac{21}{\sqrt{59}}$.

(b) Berechnen Sie das Volumen V der Pyramide mit Hilfe von Teil (a).
Benutzen Sie dazu die Formel

$$V = \frac{1}{3}G \cdot h$$

mit G = Inhalt der Grundfläche, h = Höhe über dieser Grundfläche.

Lösungshinweise hierzu: Zuerst bestimmen wir den Inhalt der Grundfläche (ABC). Es gilt

$$G_{(ABC)} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} 15 \\ 9 \\ 15 \end{pmatrix}\right| = \frac{\sqrt{531}}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{59}.$$

Mit der Höhe h aus Teil (a) erhalten wir dann

$$V = \frac{1}{3}G_{(ABC)} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2}\sqrt{59} \cdot \frac{21}{\sqrt{59}} = \frac{21}{2}.$$

Aufgabe H 24. *Inverse Blockmatrizen*

(a) Seien $M, N \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar. Das Produkt MN ist dann auch invertierbar. Zeigen Sie, dass die Inverse durch $(MN)^{-1} = N^{-1}M^{-1}$ gegeben ist.

Lösungshinweise hierzu: Eine einfache Rechung zeigt:

$$(MN)(N^{-1}M^{-1}) = I = (N^{-1}M^{-1})(MN).$$

Dies war zu zeigen.

(b) Sei wieder $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und I die Einheitsmatrix in $\mathbb{R}^{n\times n}$. Zeigen Sie, dass

$$\begin{pmatrix} I & M \\ 0 & I \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} I & -M \\ 0 & I \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} I & 0 \\ M & I \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ -M & I \end{pmatrix}.$$

Dabei ist mit 0 die Nullmatrix in $\mathbb{R}^{n\times n}$ gemeint.

Lösungshinweise hierzu: Unter Verwendung der Rechenregeln aus Aufgabe P28 bekommt man

$$\begin{pmatrix} I & M \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & -M \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & -M+M \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$$

und
$$\begin{pmatrix} I & -M \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & M \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & M-M \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$
Daraus folgt, dass
$$\begin{pmatrix} I & M \\ 0 & I \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} I & -M \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$
Analog ergibt sich
$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ M & I \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ -M & I \end{pmatrix}.$$

(c) Es seien nun $A, B, C, D \in \mathbb{R}^{n\times n}$, wobei A, D sowie $(A - BD^{-1}C)$ invertierbar vorausgesetzt werden. Rechnen Sie nach, dass
$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & BD^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A - BD^{-1}C & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ D^{-1}C & I \end{pmatrix}.$$

Lösungshinweise hierzu: Verwende die Rechenregeln aus Aufgabe P28! Dann gilt:
$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} I & BD^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A - BD^{-1}C & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ D^{-1}C & I \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} I & BD^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A - BD^{-1}C & 0 \\ DD^{-1}C & D \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} A - BD^{-1}C + BD^{-1}C & BD^{-1}D \\ C & D \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(d) Benutzen Sie nun die Ergebnisse aus den Teilaufgaben (a)-(b), um
$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1}$$
zu berechnen. Was ergibt sich im Fall $n = 1$?

Lösungshinweise hierzu: Es folgt aus (a) und (b), dass
$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ D^{-1}C & I \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A - BD^{-1}C & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} I & BD^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix}^{-1}.$$
Für den Moment führen wir die Abkürzung $X := A - BD^{-1}C$ ein. Wir wissen aus (b) bzw. durch kurze Überlegung, dass
$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} I & 0 \\ D^{-1}C & I \end{pmatrix}^{-1} &= \begin{pmatrix} I & 0 \\ -D^{-1}C & I \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}^{-1} &= \begin{pmatrix} X^{-1} & 0 \\ 0 & D^{-1} \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} I & BD^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix}^{-1} &= \begin{pmatrix} I & -BD^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Der Rest ist einfache Matrizenmultiplikation:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} &= \begin{pmatrix} I & 0 \\ D^{-1}C & I \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} I & BD^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix}^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} I & 0 \\ -D^{-1}C & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^{-1} & 0 \\ 0 & D^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -BD^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} X^{-1} & 0 \\ -D^{-1}CX^{-1} & D^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -BD^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} X^{-1} & -X^{-1}BD^{-1} \\ -D^{-1}CX^{-1} & D^{-1}CX^{-1}BD^{-1} + D^{-1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (A - BD^{-1}C)^{-1} & -(A - BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1} \\ -D^{-1}C(A - BD^{-1}C)^{-1} & D^{-1}[C(A - BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1} + I] \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Für $n = 1$ kann man dieses Ergebnis noch vereinfachen: Die Einträge sind nun reelle Zahlen, die hier der Übersichtlichkeit halber mit Kleinbuchstaben bezeichnet werden. Es ergibt sich

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{a-\frac{bc}{d}} & -\frac{b}{d\left(a-\frac{bc}{d}\right)} \\ -\frac{c}{d\left(a-\frac{bc}{d}\right)} & \frac{1}{d}\left[\frac{bc}{d\left(a-\frac{bc}{d}\right)} + 1\right] \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & \frac{bc+ad-bc}{d} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\det\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 25. *Determinante, Entwicklungssatz*

Berechnen Sie die Determinante der Matrix A, die gegeben ist durch

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lösungshinweise hierzu: Um die Determinante von A zu berechnen, entwickeln wir dreimal jeweils nach der ersten Zeile (siehe 3.13.4) und erhalten

$$\det A = (-1) \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-1) \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \cdot (-1) \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -6 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Für die übrigbleibende 3×3-Matrix verwenden wir die Regel von Sarrus (siehe 3.11.5), wir erhalten als Ergebnis

$$\det A = -6 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -6\,(8 + 5 - 2 - 20 + 4 - 1) = 36.$$

Aufgabe H 26. *Orthonormalbasis, affine Abbildungen*

(a) In $\mathbb{R}^3$ sind die Vektoren $v_1 = (2, 4, -4)^\intercal$, $v_2 = (11, 13, -4)^\intercal$, $v_3 = (-2, -13, 4)^\intercal$ gegeben. Zeigen Sie, dass $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist und wandeln Sie B mit Hilfe des Schmidtschen Orthonormierungsverfahrens in eine Orthonormalbasis um.

Lösungshinweise hierzu: Es gilt

$$Rg \begin{pmatrix} 2 & 11 & -2 \\ 4 & 13 & -13 \\ -4 & -4 & 4 \end{pmatrix} = Rg \begin{pmatrix} 2 & 11 & -2 \\ 4 & 13 & -13 \\ 0 & 9 & -9 \end{pmatrix} = Rg \begin{pmatrix} 2 & 11 & -2 \\ 0 & -9 & -9 \\ 0 & 9 & -9 \end{pmatrix}$$

$$= Rg \begin{pmatrix} 2 & 11 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3.$$

Also ist B eine Basis der $\mathbb{R}^3$. Nun können wir die Orthonormalbasis $\{f_1, f_2, f_3\}$ bestimmen. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
f_1 &= \frac{v_1}{|v_1|} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \\
f_2^* &= v_2 - \langle v_2 \,|\, f_1 \rangle\, f_1 \\
&= \begin{pmatrix} 11 \\ 13 \\ -4 \end{pmatrix} - \frac{1}{9}\left\langle \begin{pmatrix} 11 \\ 13 \\ -4 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \\
\Rightarrow f_2 &= \frac{f_2^*}{|f_2 *|} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

und schließlich

$$\begin{aligned}
f_3^* &= v_3 - \langle v_3 \,|\, f_1 \rangle\, f_1 - \langle v_3 \,|\, f_2 \rangle\, f_2 \\
&= \begin{pmatrix} -2 \\ -13 \\ 4 \end{pmatrix} - \frac{1}{9}\left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ -13 \\ 4 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \\
&\qquad - \frac{1}{9}\left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ -13 \\ 4 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \\
\Rightarrow f_3 &= \frac{f_3^*}{|f_3 *|} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

(b) Gegeben sei die affine Abbildung

$$\alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}$$

mit Fixpunktgerade $y = x + 1$ und $\alpha((1,1)^\intercal) = (2,3)^\intercal$.
Bestimmen Sie die Matrix A und den Translationsanteil $t = (t_1, t_2)^\intercal$ von α.

Lösungshinweise hierzu:
Aus $\alpha((x, x+1)^\intercal) = (x, x+1)^\intercal$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $\alpha((1,1)^\intercal) = (2,3)^\intercal$ erhält man jeweils eine Gleichung:

(i) $A\begin{pmatrix} x \\ x+1 \end{pmatrix} + t = \begin{pmatrix} x \\ x+1 \end{pmatrix}$

(ii) $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Kombination der beiden Gleichungen ergibt eine Bestimmungsgleichung für A:

$$A\begin{pmatrix} x-1 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-2 \\ x-2 \end{pmatrix}.$$

Diese Gleichung gilt für alle $x \in \mathbb{R}$. Also insbesondere gilt diese für $x = 0$ und $x = 1$. Daraus findet man relativ rasch die Matrix A:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Der Verschiebungsvektor t wird nun bestimmt indem man $\alpha((1,1)^\mathsf{T}) = (2,3)^\mathsf{T}$ benutzt. Man erhält:

$$t = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe H 27. *Eigentlich und uneigentlich orthogonale Matrizen*

Gegeben seien die Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, B_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, B_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix},$$

sowie die Abbildungen

$$\alpha_1 \colon v \mapsto A_1 v, \quad \alpha_2 \colon v \mapsto A_2 v, \quad \beta_1 \colon w \mapsto B_1 w, \quad \beta_2 \colon w \mapsto B_2 w.$$

(a) Welche der obigen Abbildungen sind Isometrien? Welche von diesen sind eigentlich und welche uneigentlich?

Lösungshinweise hierzu: Alle obigen Abbildungen sind Isometrien, weil alle vier Matrizen orthogonal sind, d.h. es gilt $A_1^\mathsf{T} A_1 = A_1 A_1^\mathsf{T} = I$ und entsprechendes für die anderen drei Matrizen. Um zu entscheiden, welche Abbildungen eigentlich und welche uneigentlich sind, müssen die Determinanten der Matrizen berechnet werden. Es ergibt sich

$$\det(A_1) = \det(B_1) = 1,$$
$$\det(A_2) = \det(B_2) = -1.$$

Also sind α_1 und β_1 eigentliche, α_2 und β_2 uneigentliche Isometrien.

(b) Eigentlich orthogonale Matrizen beschreiben Drehungen. Bestimmen Sie für alle eigentlich orthogonalen Matrizen aus der Menge $\{A_1, A_2, B_1, B_2\}$ den Drehwinkel und gegebenenfalls die Drehachse.

Lösungshinweise hierzu: Jede eigentlich orthogonale 2×2-Matrix hat die Form

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Also gilt für die Drehung, die durch A_1 beschrieben wird:

$$2\cos\varphi = \mathrm{Sp}\,(A_1) = \sqrt{3}, \quad \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{6}.$$

Eine Drehachse gibt es in diesem Fall nicht. Für die 3×3-Matrix B_1 können wir die Formel aus 4.6.20. verwenden:

$$2\cos\varphi = \mathrm{Sp}\,(B_1) - 1 = \frac{5}{3} - 1 = \frac{2}{3}, \quad \Rightarrow \varphi \approx 1,231.$$

Die Drehachse ist die Menge aller Fixpunkte von β_1, d.h. alle Vektoren w für die $\beta_1(w) = w$ gilt. Dazu lösen wir das homogene lineare Gleichungssystem

$$(B_1 - I)w = 0$$

und erhalten für die Drehachse:

$$D = \left\{ w \in \mathbb{R}^3 : \ w = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \exists \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

(c) Jede uneigentlich orthogonale Matrix beschreibt eine Komposition aus einer Drehung und einer Spiegelung. Geben Sie für alle uneigentlich orthogonalen Matrizen aus der Menge $\{A_1, A_2, B_1, B_2\}$ eine solche Drehung sowie Spiegelung an. Bestimmen Sie zu diesen den Drehwinkel und gegebenenfalls die Drehachse, sowie die Spiegelungsachse bzw. -ebene.

Lösungshinweise hierzu: Wir beginnen mit der Matrix A_2. Es sei gesagt, dass es verschiedene Möglichkeiten gibt, die dadurch beschriebene Drehspiegelung in eine Drehung und eine Spiegelung zu zerlegen. Eine einfache ergibt sich aus folgender Gleichheit:

$$A_2 = A_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Wir wissen bereits, dass A_1 eine Drehung mit Drehwinkel $\frac{\pi}{6}$ beschreibt. Überzeugen wir uns, dass die orthogonale Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ zu einer Spiegelung gehört: Sei $(x, y)^\mathsf{T}$ eine beliebiger Vektor in $\mathbb{R}^2$, dann gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}.$$

$(x, y)^{\mathsf{T}}$ wurde offensichtlich an der x-Achse gespiegelt. Damit haben wir für A_2 eine Drehung und eine Spiegelung gefunden, deren Komposition die von A_2 beschriebene Drehspiegelung ist.

Analog verfahren wir mit B_2: Die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

beschreibt eine Spiegelung an der x-y-Ebene. Aus

$$B_2 = B_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

folgt, dass die von B_2 beschriebene Drehspiegelung eine Komposition aus der Spiegelung an der x-y-Ebene und der durch B_1 beschriebenen Drehung mit Drehwinkel $1,23\ldots$ und Drehachse D ist.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 28. *Cofaktor-Matrix und Hauptinvarianten*

Gegeben sei eine quadratische Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Wir bezeichnen mit $\operatorname{Cof}(A)$ die Cofaktor-Matrix von A (siehe Def. 3.13.1.) und setzen $\iota(A) := \frac{1}{2}\big((\operatorname{Sp}(A))^2 - \operatorname{Sp}(A^2)\big)$. Zeigen Sie:

(a) Es gilt

$$\iota(A) = \operatorname{Sp}(\operatorname{Cof}(A)).$$

Lösungshinweise hierzu: Wir bezeichnen im Folgenden die Einträge von A mit a_{ij}, $i,j = 1,\ldots,3$. Die Eintrag an der Stelle (i,j) der Cofaktor-Matrix von A ist die (i,j)-Adjunkte von A: Sei $\operatorname{Cof}(A) = (d_{ij})_{i,j=1,\ldots,3}$, dann ist

$$d_{ij} = (-1)^{i+j} \det \tilde{A}_{ij},$$

wobei $\tilde{A}_{ij}$ die 2×2-Matrix ist, die entsteht, wenn man die i-te Zeile und j-te Spalte von A streicht. Damit bekommen wir

$$\begin{aligned}\operatorname{Sp}(\operatorname{Cof}(A)) &= \det \tilde{A}_{11} + \det \tilde{A}_{22} + \det \tilde{A}_{33} \\ &= a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} + a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31} + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.\end{aligned}$$

Weiterhin gilt:

$$\operatorname{Sp}(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33}$$

und

$$\operatorname{Sp}(A^2) = a_{11}^2 + a_{12}a_{21} + a_{13}a_{31} + a_{12}a_{21} + a_{22}^2 + a_{23}a_{32} + a_{13}a_{31} + a_{23}a_{32} + a_{33}^2.$$

Es folgt

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\big[(\operatorname{Sp}(A))^2 - \operatorname{Sp}(A^2)\big] &= \frac{1}{2}\big[a_{11}^2 + a_{22}^2 + a_{33}^2 + 2a_{11}a_{22} + 2a_{11}a_{33} + 2a_{22}a_{33} \\ &\quad - (a_{11}^2 + a_{22}^2 + a_{33}^2 + 2a_{12}a_{21} + 2a_{13}a_{31} + 2a_{23}a_{32})\big] \\ &= a_{11}a_{22} + a_{11}a_{33} + a_{22}a_{33} - a_{12}a_{21} - a_{13}a_{31} - a_{23}a_{32} \\ &= \operatorname{Sp}(\operatorname{Cof}(A)).\end{aligned}$$

(b) $\iota(A)$ ist eine Invariante von A, d.h. für jede invertierbare Matrix $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ gilt

$$\iota(BAB^{-1}) = \iota(A).$$

Lösungshinweise hierzu: Aus der Vorlesung ist bekannt, dass die Spur eine Invariante ist, d.h. für jede beliebige 3×3-Matrix M und jede invertierbare 3×3-Matrix B gilt:

$$\operatorname{Sp}(M) = \operatorname{Sp}(BMB^{-1}). \qquad \text{(Dies gilt sogar für } n\times n\text{-Matrizen!)}$$

Da sowohl A als auch A^2 3×3-Matrizen sind, gilt:

$$\mathrm{Sp}\,(A) = \mathrm{Sp}\,(BAB^{-1}), \quad \mathrm{Sp}\,(A^2) = \mathrm{Sp}\,(BA^2B^{-1}).$$

Aus der Gleichheit

$$(BAB^{-1})^2 = BAB^{-1}BAB^{-1} = BA^2B^{-1}$$

folgt damit

$$\iota(BAB^{-1}) = \iota(A).$$

Bemerkung: $\iota(A)$ ist neben der Spur und der Determinante die dritte *Hauptinvariante* der 3×3-Matrix A und tritt als Koeffizient im charakteristischen Polynom auf (siehe das Kapitel über Eigenwerte).

Aufgabe H 29.

Gegeben sind das Standard-Koordinatensystem $\mathbb{E}$ und das affine Koordinatensystem

$$\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

im $\mathbb{R}^4$ sowie die lineare Abbildung $\alpha : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4 : v \mapsto Av$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie die Koordinatentransformationen ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$ und ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$ sowie die Beschreibung der Abbildung α bzgl. des Koordinatensystems $\mathbb{F}$ an.

Lösungshinweise hierzu: Man erhält mit der Formel ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}(v) = Fv + P$ aus der Vorlesung direkt

$${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}} : v \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

und mit der Formel ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}(v) = F^{-1}(v-P)$ für die Umkehrabbildung

$$\begin{aligned} {}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}} : v \mapsto & \begin{pmatrix} -11 & -2 & 5 & -4 \\ 4 & 1 & -2 & 2 \\ 5 & 1 & -2 & 2 \\ 9 & 2 & -4 & 3 \end{pmatrix} \left(v - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right) \\ = & \begin{pmatrix} -11 & -2 & 5 & -4 \\ 4 & 1 & -2 & 2 \\ 5 & 1 & -2 & 2 \\ 9 & 2 & -4 & 3 \end{pmatrix} v - \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Nach Satz 4.7.12 wird die Abbildung α bzgl. des Koordinatensystems $\mathbb{F}$ durch

$$v \mapsto F^{-1}AFv + F^{-1}(AP - P + t) = \begin{pmatrix} -25 & -27 & 1 & -20 \\ 9 & 10 & -2 & 8 \\ 11 & 11 & 0 & 9 \\ 21 & 22 & 1 & 16 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 35 \\ -11 \\ -14 \\ -29 \end{pmatrix}$$

mit $t = 0$ beschrieben.

Aufgabe H 30. *Spiegelung*

Gegeben ist im $\mathbb{R}^3$ die Ebene, die beschrieben wird durch die Gleichung

$$3x_1 - 3x_2 + x_3 = 0.$$

Finden Sie eine Matrix A und einen Vektor t so, dass die Spiegelung an der Ebene beschrieben wird durch die affine Abbildung $x \mapsto Ax + t$.

Lösungshinweise hierzu: Um die Spiegelung an der Ebene zu beschreiben, bilden wir zu jedem Punkt $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3) \in \mathbb{R}^3$ den Spiegelpunkt $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$. Der Vektor $n = (3, -3, 1)^\intercal$ steht orthogonal auf der Ebene (Satz 2.9.5), folglich ist die folgende Gerade orthogonal zur Ebene und geht durch den Punkt $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)$.

$$h = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Um den Schnittpunkt der Geraden h mit der Ebene zu erhalten setzen wir die Punkte von h in die Ebenengleichung ein:

$$3\tilde{x}_1 + 9t - 3\tilde{x}_2 + 9t + \tilde{x}_3 + t = 0,$$

daher liegt der Schnittpunkt mit der Ebene bei

$$t_0 = \frac{-3\tilde{x}_1 + 3\tilde{x}_2 - \tilde{x}_3}{19}.$$

Der Spiegelpunkt $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$ liegt also bei

$$2t_0 = \frac{-6\tilde{x}_1 + 6\tilde{x}_2 - 2\tilde{x}_3}{19},$$

und ist durch die folgenden Koordinaten gegeben:

$$\hat{x}_1 = \frac{1}{19}\left(\tilde{x}_1 + 18\tilde{x}_2 - 6\tilde{x}_3\right),$$

$$\hat{x}_2 = \frac{1}{19}\left(18\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 + 6\tilde{x}_3\right),$$

$$\hat{x}_3 = \frac{1}{19}\left(-6\tilde{x}_1 + 6\tilde{x}_2 + 17\tilde{x}_3\right).$$

Also erhalten wir

$$\begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{19}\begin{pmatrix} 1 & 18 & -6 \\ 18 & 1 & 6 \\ -6 & 6 & 17 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{pmatrix}.$$

Matrix A und Vektor t sind durch

$$A = \frac{1}{19}\begin{pmatrix} 1 & 18 & -6 \\ 18 & 1 & 6 \\ -6 & 6 & 17 \end{pmatrix}, \qquad t = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gegeben.

M. Borgart,
M. Kutter,
Dr. I Rybak,
J. Veenman

11. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 1

Prof. Dr. M. Stroppel
Prof. Dr. A. Sändig

Wintersemester 2010/11

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 31.

Im $\mathbb{R}^3$ gegeben seien ein Rechtssystem Q mit Orthonormalbasis $\{v_1, v_2, v_3\}$ sowie die Winkel α, β, γ.

(a) Geben Sie die Matrizen R_α, R_β und R_γ an, die eine Drehung des Rechtssystems Q um die Achse v_1, v_2 bzw. v_3 um den jeweiligen Winkel beschreiben.

Lösungshinweise hierzu:

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \qquad R_\beta = \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix},$$

$$R_\gamma = \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Geben Sie mindestens zwei mögliche Matrixdarstellungen für eine beliebige Drehung von Q um die Ursprung an. Berechnen Sie für eine dieser Darstellungen die Determinante und die Inverse.

Lösungshinweise hierzu: R_α, R_β und R_γ können in beliebiger Reihenfolge multipliziert werden. Z.B: $R_1 := R_\alpha R_\beta R_\gamma$ oder $R_2 := R_\gamma R_\beta R_\alpha$. $\det(R_1) = \det(R_2) = 1$. $R_1^{-1} = R_1^T$, $R_2^{-1} = R_2^T$.

(c) Betrachten Sie den Vektor $v = (1,1,1)^\mathsf{T}$. Nehmen Sie an, dass $\alpha = \frac{\pi}{6}$, $\beta = \frac{\pi}{4}$, $\gamma = \frac{\pi}{3}$ und berechnen Sie die neuen Koordinaten von v um den Ursprung gedrehten Rechtssystem mit Hilfe von Teil (b).

Lösungshinweise hierzu:

$$\begin{aligned} R_1(\alpha,\beta,\gamma)v &= R_\alpha\left(\frac{\pi}{6}\right) R_\beta\left(\frac{\pi}{4}\right) R_\gamma\left(\frac{\pi}{3}\right) v \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0.448 \\ 0.700 \\ 1.520 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Aufgabe H 32. *Diagonalisierbarkeit*

Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 4 & -6 & -2 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und zugehörigen Eigenräume von den Matrizen A, B und C.

Lösungshinweise hierzu:

<u>**Matrix A**</u>

Das charakteristische Polynom der Matrix A lautet

$$\chi_A = \det(A - \lambda E_3) = -\lambda(\lambda - 2)^2.$$

Die Nullstellen dieses Polynoms (die Eigenwerte von A) sind

$$\lambda_1 = 0 \quad \text{und} \quad \lambda_2 = 2 \quad \text{mit} \quad e_0 = 1 \quad \text{und} \quad e_2 = 2\,.$$

Die Eigenvektoren v_k zu diesen Eigenwerten erhält man durch Lösen des entsprechenden LGS

$$(A - \lambda_k E_3)v_k = 0, \quad k = 1, 2.$$

Für $\lambda_1 = 0$ erhalten wir

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

woraus sofort folgt

$$v_1 = t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; t \in \mathbb{C}.$$

Als Eigenraum erhalten wir

$$V(\lambda_1) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Analog ergeben sich für $\lambda_2 = 2$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten

$$v_2 = s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; s, t \in \mathbb{C}.$$

Als Eigenraum erhalten wir

$$V(\lambda_2) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right).$$

Matrix B

Die Eigenwerte der Matrix B berechnen wir als Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\chi_B = -(\lambda+2)(\lambda-1)^2$, also

$$-(\lambda+2)(\lambda-1)^2 = 0,$$

woraus

$$\lambda_1 = -2 \quad \text{und} \quad \lambda_2 = 1 \quad \text{mit} \quad e_{-2} = 1 \quad \text{und} \quad e_1 = 2\,.$$

folgt.

Als Eigenräume erhalten wir

$$(A - \lambda_1 E_3) = \begin{pmatrix}6 & -3 & 0\\3 & 0 & 0\\4 & -6 & 0\end{pmatrix} \;\Rightarrow\; V(\lambda_1) = \left\{ s\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \;\middle|\; s \in \mathbb{C}\right\},$$

$$(A - \lambda_2 E_3) = \begin{pmatrix}3 & -3 & 0\\3 & -3 & 0\\4 & -6 & -3\end{pmatrix} \;\Rightarrow\; V(\lambda_2) = \left\{ s\begin{pmatrix}3\\3\\-2\end{pmatrix} \;\middle|\; s \in \mathbb{C}\right\}.$$

Matrix C

Das charakteristische Polynom der Matrix C ist $\chi_C = -(\lambda+1)(\lambda^2+4)$ und die Eigenwerte sind damit

$$\lambda_1 = -1, \qquad \lambda_2 = -2i, \qquad \text{und} \qquad \lambda_3 = 2i\,.$$

Eigenräume:

$$(A - \lambda_1 E_3) = \begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\0 & 0 & 0\\-2 & 0 & 1\end{pmatrix} \;\Rightarrow\; V(\lambda_1) = \left\{ s\begin{pmatrix}3\\-5\\6\end{pmatrix} \;\middle|\; s \in \mathbb{C}\right\},$$

$$(A - \lambda_2 E_3) = \begin{pmatrix}2i & 3 & 2\\0 & -1+2i & 0\\-2 & 0 & 2i\end{pmatrix} \;\Rightarrow\; V(\lambda_2) = \left\{ s\begin{pmatrix}i\\0\\1\end{pmatrix} \;\middle|\; s \in \mathbb{C}\right\},$$

$$(A - \lambda_3 E_3) = \begin{pmatrix}-2i & 3 & 2\\0 & -1-2i & 0\\-2 & 0 & -2i\end{pmatrix} \;\Rightarrow\; V(\lambda_3) = \left\{ s\begin{pmatrix}-i\\0\\1\end{pmatrix} \;\middle|\; s \in \mathbb{C}\right\}.$$

(b) Geben Sie in den diagonalisierbaren Fällen jeweils eine Transformationsmatrix T an, die die entsprechende Matrix in Diagonalgestalt transformiert. Bestimmen Sie die dazugehörige Diagonalmatrix D.

Lösungshinweise hierzu:

<u>Matrix A</u>

Der Eigenwert $\lambda_1 = 0$ hat algebraische Vielfachheit $e_0 = 1$ und geometrische Vielfachheit $d_0 = 1$. Der Eigenwert $\lambda_2 = 2$ hat algebraische und geometrische Vielfachheit 2. Nach der Folgerung 5.3.5 ist die Matrix A diagonalisierbar. Eine mögliche Transformationsmatrix T_A ist durch

$$T_A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Die zugehörige Diagonalmatrix D_A hat die Form

$$D_A = T_A^{-1} A T_A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

<u>Matrix B</u>

Die Matrix B ist nicht diagonalisierbar, weil die algebraische Vielfachheit des Eigenwerts $\lambda_2 = 1$ $(e_1 = 2)$ nicht gleich der geometrischen Vielfachheit von $\lambda_2 = 1$ $(d_1 = 1)$ ist (Folgerung 5.3.5).

<u>Matrix C</u>

Die Matrix C ist komplex diagonalisierbar, weil sie verschiedene Eigenwerte $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$ hat (Folgerung 5.3.3). Eine mögliche Transformationsmatrix T_C ist durch

$$T_C = (v_1,\, v_2,\, v_3) = \begin{pmatrix} 3 & i & -i \\ -5 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Die zugehörige Diagonalmatrix D_C hat die Form

$$D_C = T_C^{-1} C T_C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2i & 0 \\ 0 & 0 & 2i \end{pmatrix}.$$

(c) Berechnen Sie alle Eigenwerte der Matrizen A^2, A^{10}, B^2 und C^{100}.

Lösungshinweise hierzu:

<u>Matrix A</u>

Aus $D_A = T_A^{-1} A T_A$ erhalten wir $A = T_A D_A T_A^{-1}$, woraus sofort

$$A^2 = T_A D_A T_A^{-1} T_A D_A T_A^{-1} = T_A D_A^2 T_A^{-1}$$

folgt, d.h. A^2 und D_A^2 sind konjugiert zueinander und haben die gleichen Eigenwerte (Satz 5.2.2.). Wir berechnen

$$D_A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

und erhalten die Eigenwerte von A^2:

$$\mu_1 = 0, \quad \mu_2 = \mu_3 = 4.$$

Analog berechnen wir

$$D_A^{10} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{10} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{10} \end{pmatrix},$$

und erhalten die Eigenwerte von A^{10}:

$$\nu_1 = 0, \quad \nu_2 = \nu_3 = 2^{10}.$$

Matrix B

Die Matrix B ist nicht diagonalisierbar. Deshalb berechnen wir

$$B^2 = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 4 & -6 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 4 & -6 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -6 & 0 \\ 6 & -5 & 0 \\ -10 & 12 & 4 \end{pmatrix}$$

und erhalten die Eigenwerte von B^2 als Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\det(B^2 - \mu E_3) = 0$. Wir erhalten die folgenden Eigenwerte von B^2:

$$\mu_1 = 4, \quad \mu_2 = \mu_3 = 1.$$

Matrix C

Aus $D_C = T_C^{-1} C T_C$ erhalten wir $C = T_C D_C T_C^{-1}$, woraus sofort

$$C^{100} = \underbrace{C \cdot C \ldots C}_{100} = \underbrace{T_C D_C T_C^{-1} \cdot T_C D_C T_C^{-1} \ldots T_C D_C T_C^{-1}}_{100} = T_C D_C^{100} T_C^{-1}$$

folgt. Wir berechnen

$$D_C^{100} = \begin{pmatrix} (-1)^{100} & 0 & 0 \\ 0 & (-2i)^{100} & 0 \\ 0 & 0 & (2i)^{100} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{100} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{100} \end{pmatrix},$$

und erhalten die Eigenwerte von C^{100}

$$\mu_1 = 1, \quad \mu_2 = \mu_3 = 2^{100}.$$

Alternative

Wenn λ ein Eigenwert von C ist, existiert $v \in \mathbb{R}^3$ mit

$$Cv = \lambda v\,.$$

Damit erhalten wir

$$\underbrace{C \cdot C \dots C}_{100} v = \lambda \underbrace{C \cdot C \dots C}_{99} v = \lambda^2 \underbrace{C \cdot C \dots C}_{98} v = \lambda^{100} v.$$

Also ist $\mu = \lambda^{100}$ ein Eigenwert von C^{100} zum Eigenvektor v. In unserem Fall sind die Eigenwerte von C^{100}

$$\mu_1 = (-1)^{100} = 1, \quad \mu_2 = (-2i)^{100} = (2i)^{100} = 2^{100}, \quad \mu_3 = 2^{100}.$$

Bemerkung

Mit der gleichen Argumentation wie eben kann man für beliebige Matrizen folgenden Schluss ziehen: Wenn λ ein Eigenwert einer Matrix $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ist, dann ist λ^k ein Eigenwert von M^k. Wenn λ ein mehrfacher Eigenwert von M ist, dann weiß man allerdings dadurch noch nicht, dass λ^k ein mehrfacher Eigenwert von M^k mit gleicher algebraischer Vielfachheit ist. Es stimmt trotzdem (siehe z.B. die Matrix B und den Eigenwert 1), man kann dies selbst für nicht diagonalisierbare Matrizen beweisen. Der Beweis ist für diese Übungsaufgabe aber zu umfangreich.

Aufgabe H 33. *Eigenwerte, Eigenräume*

Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 12 & -11 & 6 & 6 \\ 15 & -10 & 2 & 7 \\ 4 & -1 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

.

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A.

Lösungshinweise hierzu: Für das charakteristische Polynom der Matrix A erhalten wir nach dem Anwenden des Entwicklungssatzes:

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) &= \lambda^4 - 4\lambda^3 + 5\lambda^2 - 4\lambda + 4 \\ &= \lambda^4 + \lambda^2 - 4\lambda^3 + 4\lambda^2 - 4\lambda + 4 \\ &= \lambda^2(\lambda^2 + 1) - 4\lambda^2(\lambda - 1) - 4(\lambda - 1) \\ &= \lambda^2(\lambda^2 + 1) - 4(\lambda - 1)(\lambda^2 + 1) \\ &= (\lambda^2 + 1)(\lambda^2 - 4\lambda + 4) \\ &= (\lambda^2 + 1)(\lambda - 2)^2. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir die Eigenwerte $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = \mathrm{i}, \lambda_3 = -\mathrm{i}$.

(b) Geben Sie die zugehörigen Eigenräume an.

Lösungshinweise hierzu: Die Eigenvektoren v_k zu diesen Eigenwerten erhält man durch Lösen des entsprechendes LGS

$$(A - \lambda_k E_4)v_k = 0, \quad k = 1, 2, 3.$$

Für $\lambda_1 = 2$ erhalten wir

$$\begin{pmatrix} 10 & -11 & 6 & 6 \\ 15 & -12 & 2 & 7 \\ 4 & -1 & -3 & 1 \\ 5 & -1 & -4 & 1 \end{pmatrix} v_1 = 0,$$

woraus folgt

$$v_1 = t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{C}\backslash\{0\}.$$

Als Eigenraum erhalten wir daher

$$V(2) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Analoge Berechnung für den Eigenwert $\lambda_2 = \mathrm{i}$ führt zu:

$$\begin{pmatrix} 12-\mathrm{i} & -11 & 6 & 6 \\ 15 & -10-\mathrm{i} & 2 & 7 \\ 4 & -1 & -1-\mathrm{i} & 1 \\ 5 & -1 & -4 & 3-\mathrm{i} \end{pmatrix} v_2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad V(\mathrm{i}) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} \mathrm{i}+1 \\ \mathrm{i}+5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right)$$

Der Eigenraum von $\lambda_3 = -\mathrm{i}$ lässt sich aus demjenigen von $\lambda_2 = \mathrm{i}$ herleiten:

$$Av = \mathrm{i}v \quad \Rightarrow \quad \overline{Av} = \overline{\mathrm{i}v} \quad \Rightarrow \quad A\bar{v} = -\mathrm{i}\bar{v}.$$

Und damit folgt für den Eigenraum von $\lambda_3 = -\mathrm{i}$

$$V(-\mathrm{i}) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} -\mathrm{i}+1 \\ -\mathrm{i}+5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right).$$

(c) Geben sie zu allen Eigenwerten jeweils die algebraische und geometrische Vielfachheit an. Existiert eine Basis des $\mathbb{C}^4$ aus Eigenvektoren von A?

Lösungshinweise hierzu: Die algebraische Vielfachheit und die geometrische Vielfachheitder Eigenwerte lauten somit:

$$\begin{array}{lll} e_{\mathrm{i}} = 1, & e_{-\mathrm{i}} = 1, & e_2 = 2 \\ d_{\mathrm{i}} = 1, & d_{-\mathrm{i}} = 1, & d_2 = 1 \end{array}$$

Es lässt sich keine Basis für $\mathbb{C}^4$ bilden, da e_2 und d_2 nicht den gleichen Wert haben.

M. Borgart
M. Kutter
Dr. I Rybak
J. Veenman

12. Gruppenübung zur Vorlesung
Höhere Mathematik 1

Prof. Dr. M. Stroppel
Prof. Dr. A. Sändig

Wintersemester 2010/11

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 34. *Quadriken*

Gegeben sind die folgenden Quadriken

$$Q_1 := \left\{ (x_1, x_2)^\intercal \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x_1^2 + 4x_2^2 - 2x_1 - 3 = 0 \right\},$$

$$Q_2 := \left\{ (x_1, x_2, x_3)^\intercal \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; -x_1^2 - x_2^2 + 2x_3 + 4 = 0 \right\}.$$

(a) Geben Sie für jede Quadrik die Matrixbeschreibung an.

Lösungshinweise hierzu:

Quadrik Q_1

Die Gleichung der Quadrik Q_1 lautet $x^\intercal A x + 2a^\intercal x + c = 0$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad a = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad c = -3.$$

Quadrik Q_2

Für die Quadrik Q_2 gilt

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad c = 4.$$

(b) Entscheiden Sie, ob Q_i, $i = 1, 2$ eine kegelige, eine parabolische oder eine Mittelpunktsquadrik ist.

Lösungshinweise hierzu:

Quadrik Q_1

Um den Typ der Quadrik Q_1 zu bestimmen, berechnen wir

$$r = \operatorname{Rg} A = \operatorname{Rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 2,$$

$$r_{\text{erw}} = \operatorname{Rg} A_{\text{erw}} = \operatorname{Rg} \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 3.$$

Es gilt $r_{\text{erw}} = r + 1$ und es liegt eine Mittelpunktsquadrik vor.

Quadrik Q_2

Analog berechnen wir für die Quadrik Q_2:

$$r = \operatorname{Rg} A = \operatorname{Rg}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2,$$

$$r_{\text{erw}} = \operatorname{Rg} A_{\text{erw}} = \operatorname{Rg}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 4.$$

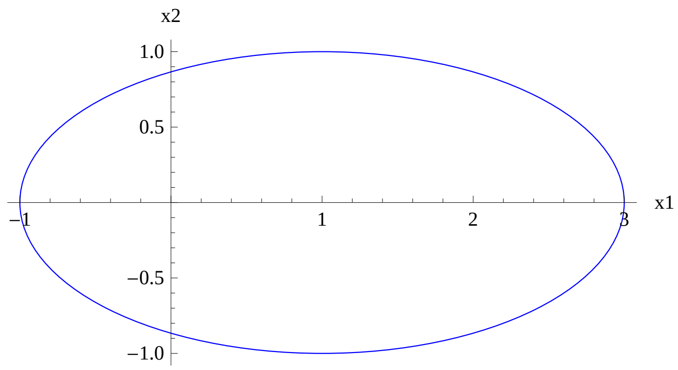
Also, ergibt sich $r_{\text{erw}} = r + 2$: parabolische Quadrik.

(c) Skizzieren Sie die Quadrik Q_1.

Lösungshinweise hierzu: Durch quadratische Ergänzung beseitigen wir den linearen Term in x_1:

$$\begin{aligned} x_1^2 + 4x_2^2 - 2x_1 - 3 &= 0, \\ \left(x_1^2 - 2x_1 + 1 - 1\right) + 4x_2^2 - 3 &= 0, \\ (x_1 - 1)^2 + 4x_2^2 &= 4, \\ \frac{(x_1 - 1)^2}{4} + x_2^2 &= 1. \end{aligned}$$

Das ist eine Ellipse mit dem Mittelpunkt $(1, 0)$ und den Halbachsen 2 und 1.



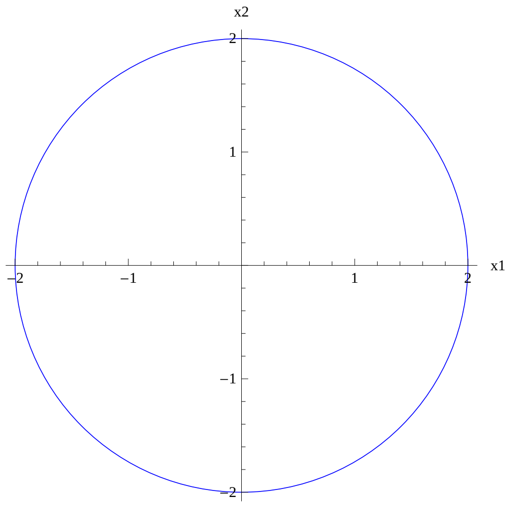
(d) Schneiden Sie die Quadrik Q_2 mit den Ebenen $x_3 = 0$, $x_3 = -2$, $x_3 = -4$, $x_2 = 0$. Geben Sie jeweils eine Gleichung für den Schnitt, die Gestalt des Schnitts an, und skizzieren Sie den Schnitt.

Lösungshinweise hierzu:

$x_3 = 0$:

Gleichung für den Schnitt: $x_1^2 + x_2^2 = 4$.

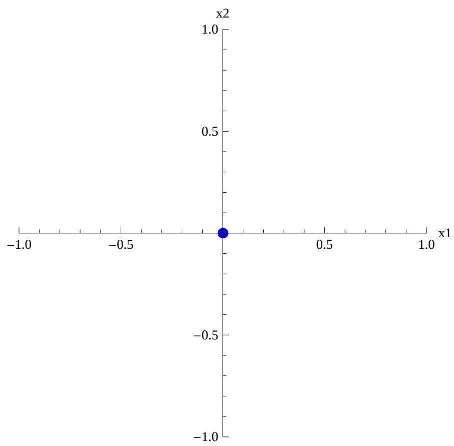
Gestalt des Schnitts: Kreis um $(0, 0)$ mit Radius 2.



$x_3 = -2$:

Gleichung für den Schnitt: $x_1^2 + x_2^2 = 0$.

Gestalt des Schnitts: Punkt $(0, 0)$.



$x_3 = -4$:

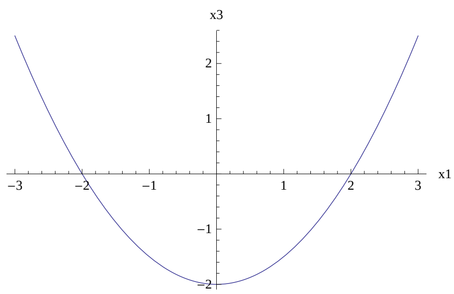
Gleichung für den Schnitt: $x_1^2 + x_2^2 = -4$.

Gestalt des Schnitts: leere Menge (kein Punkt).

$x_2 = 0$:

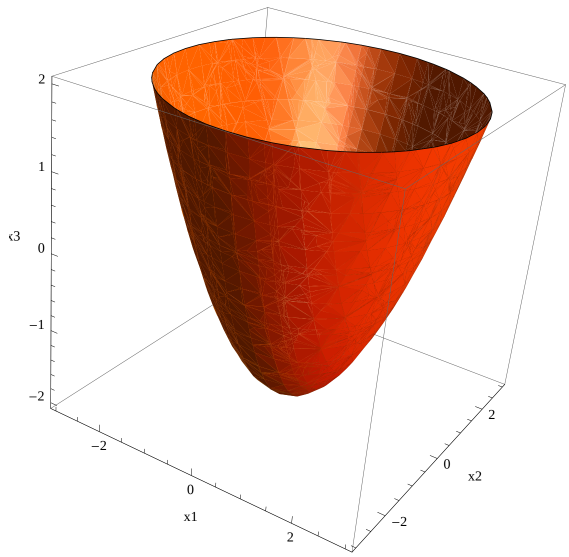
Gleichung für den Schnitt: $-x_1^2 + 2x_3 + 4 = 0$.

Gestalt des Schnitts: Parabel.



(e) Skizzieren Sie nun die Quadrik Q_2.

Lösungshinweise hierzu:



Aufgabe H 35. *Quadratische Form*

Für welche Werte von $a, b \in \mathbb{R}$ ist die quadratische Form

$$q(x) = a(x_1^2 + x_2^2) + bx_1x_2$$

positiv definit, negativ definit beziehungsweise indefinit?

Lösungshinweise hierzu: Die quadratische Form $q(x)$ lässt sich in Matrixform umschreiben:

$$q(x) = a(x_1^2 + x_2^2) + bx_1x_2 = x^{\mathsf{T}} \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & a \end{pmatrix} x$$

Um heraus zu finden ob diese quadratische Form positiv definit, negativ definit oder indefinit ist, werden die Eigenwerte betrachtet (Lemma 6.1.8).
Es gilt nun $\mathrm{Sp}(A) = \lambda_1 + \lambda_2$ und $\det(A) = \lambda_1\lambda_2$. Daraus lässt sich folgendes über die Matrix sagen:

$$\begin{array}{lllll} \det(A) > 0 \;\wedge\; \mathrm{Sp}(A) > 0 & \iff & \lambda_1, \lambda_2 > 0 & \iff & A \text{ positiv definit} \\ \det(A) > 0 \;\wedge\; \mathrm{Sp}(A) < 0 & \iff & \lambda_1, \lambda_2 < 0 & \iff & A \text{ negativ definit} \\ \det(A) < 0 & \iff & \lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0 \;\vee\; \lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0 & \iff & A \text{ indefinit} \end{array}$$

Auf die Aufgabe angewandt heisst das nun $\det(A) = a^2 - \frac{b^2}{4}$ und $\mathrm{Sp}(A) = 2a$. Also:

$$\begin{array}{lll} 2|a| > |b| \;\wedge\; a > 0 & \iff & A \text{ positiv definit} \\ 2|a| > |b| \;\wedge\; a < 0 & \iff & A \text{ negativ definit} \\ 2|a| < |b| & \iff & A \text{ indefinit} \end{array}$$

Aufgabe H 36. *Symmetrische Matrizen, Positiv/Negativ definite Matrizen*

Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrische Matrizen. Wir sagen, dass $A \succ 0$, wenn A positiv definit ist, und $A \succ B$, wenn $A - B \succ 0$. Welche der folgenden Aussagen sind richtig? Begründen Sie Ihre Antworten.

(a) Es sei $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine beliebige Matrix. $A \succ 0$ genau dann, wenn $T^T AT \succ 0$.

Lösungshinweise hierzu: Dies stimmt im Allgemeinen nicht. Es gilt nur wenn $\mathsf{Rg}(T) = n$. Genau dann ist die Abbildung $x \mapsto Tx$ bijektiv und für $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt $x^\intercal T^\intercal ATx = y^\intercal Ay > 0$, mit $y = Tx$.

(b) Es gilt $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \succ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Lösungshinweise hierzu: Nein! Die Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

hat die Eigenwerte $\lambda = 3$ und $\lambda = -1$.

(c) Es seien $\lambda_{\mathsf{max}}(A)$ bzw. $\lambda_{\mathsf{max}}(B)$ die größten Eigenwerte von A bzw. B. Aus $A \succ B$ folgt $\lambda_{\mathsf{max}}(A+B) > \lambda_{\mathsf{max}}(A) + \lambda_{\mathsf{max}}(B)$.

Lösungshinweise hierzu: Nein! Ein Gegenbeispiel ist

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Man sieht, dass $\lambda_{\mathsf{max}}(A) = 3$, $\lambda_{\mathsf{max}}(B) = -1$ und $\lambda_{\mathsf{max}}(A+B) = 1$.

(d) Wir betrachten eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, die Blockstruktur besitzt, d.h. $A = \begin{pmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{pmatrix}$. Dann gilt:

- $A \succ 0$ genau dann, wenn $Q \succ 0$ und $R - S^T Q^{-1} S \succ 0$.
- $A \succ 0$ genau dann, wenn $R \succ 0$ und $Q - SR^{-1}S^T \succ 0$.

Hinweis: Sehen Sie sich die Aufgabe $H24$ an.

Lösungshinweise hierzu: Stimmt! Wir können A faktorisieren als

$$A = T_1^T D_1 T_1 := \begin{pmatrix} I & Q^{-1}S \\ 0 & I \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & R - S^T Q^{-1} S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & Q^{-1}S \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

und

$$A = T_2^T D_2 T_2 := \begin{pmatrix} I & 0 \\ RS^T & I \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} Q - SR^{-1}S^T & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ RS^T & I \end{pmatrix}$$

Dabei sind T_1 und T_2 reguläre Matrizen. Die Behauptung folgt dann wie in Teil (a).

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 37.

Bestimmen Sie eine euklidische Normalform der Quadrik

$$Q := \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 3x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2 + 12x_1 - 4x_2 + 2 = 0 \right\}$$

und ermitteln Sie die zugehörigen Koordinatentransformationen. Bestimmen Sie anhand der Normalform die Gestalt der Quadrik und fertigen Sie eine Skizze der Quadrik in Standardkoordinaten an. Zeichnen Sie in Ihre Skizze auch das Koordinatensystem ein, bezüglich dessen die Quadrik Normalform hat.

Lösungshinweise hierzu: Die Gleichung der Quadrik lautet $x^\mathsf{T} A x + 2a^\mathsf{T} x + c = 0$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad a = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad c = 2.$$

Das charakteristische Polynom der Matrix A lautet $\chi_A(\lambda) = (3-\lambda)^2 - 1$ und die Eigenwerte sind damit

$$\lambda_1 = 4 \qquad \text{und} \qquad \lambda_2 = 2\,.$$

Zur Bestimmung der Eigenvektoren ergeben sich die Gleichungssysteme

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und daraus die Eigenvektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix der orthogonalen Transformation $y = F^\mathsf{T} x$ lautet also

$$F = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

und diese transformiert den linearen Anteil der Gleichung auf

$$\tilde{a} = F^\mathsf{T} a = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Dies ergibt die transformierte Gleichung

$$4y_1^2 + 2y_2^2 + 8\sqrt{2}y_1 + 4\sqrt{2}y_2 + 2 = 0\,.$$

Quadratische Ergänzung liefert

$$4\left(y_1+\sqrt{2}\right)^2+2\left(y_2+\sqrt{2}\right)^2-10=0\,.$$

Die euklidische Normalform ergibt sich schließlich aus $z=y-P=y+(\sqrt{2},\sqrt{2})^\intercal$ und lautet demnach

$$-\frac{2}{5}z_1^2-\frac{1}{5}z_2^2+1=0\,.$$

Die Gestalt ist eine Ellipse mit Halbachsen $\sqrt{5/2}$ und $\sqrt{5}$.

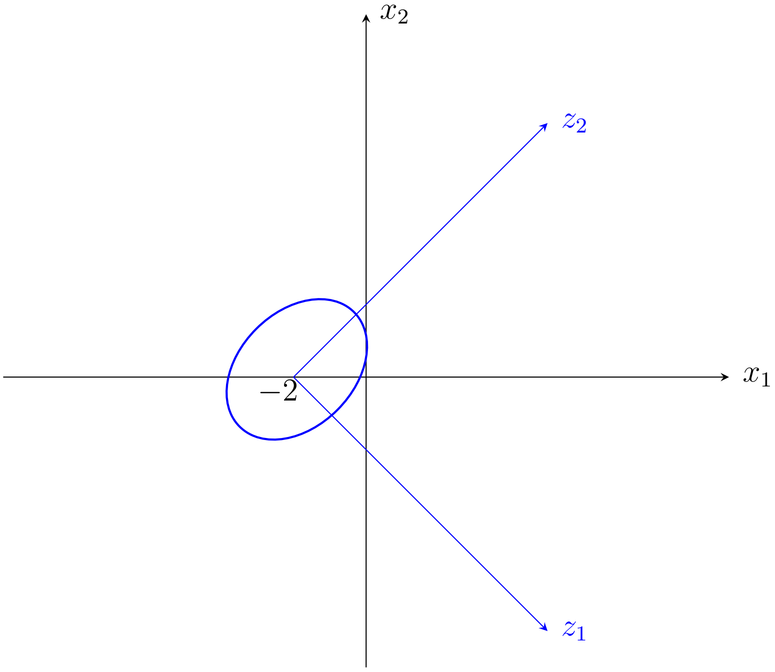
Für die Koordinatentransformation erhält man

$$z=y-P=F^\intercal x-P=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}x+\sqrt{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

und

$$x=F(z+P)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}z-\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}.$$

Also ergibt sich die folgende Skizze der Quadrik.



Aufgabe H 38.

Gegeben sei die Quadrik

$$Q:=\left\{x\in\mathbb{R}^3\;\middle|\;2x_1^2+8x_2^2-4x_3^2-8x_1x_2+12x_1-24x_2+14=0\right\}\,.$$

Geben Sie die Matrixbeschreibung der Quadrik an. Bestimmen Sie eine euklidische Normalform der Quadrik und geben Sie die zugehörigen Koordinatentransformationen an. Bestimmen Sie weiter anhand der Normalform die Gestalt der Quadrik.

Lösungshinweise hierzu: Die Gleichung der Quadrik lautet $x^\intercal Ax + 2a^\intercal x + c = 0$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -4 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c = 14, \quad A_{\mathsf{erw}} = \begin{pmatrix} 14 & 6 & -12 & 0 \\ 6 & 2 & -4 & 0 \\ -12 & -4 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom der Matrix A lautet $\chi_A = (-4-\lambda)\lambda(\lambda-10)$ und die Eigenwerte sind damit

$$\lambda_1 = -4, \qquad \lambda_2 = 0, \qquad \text{und} \qquad \lambda_3 = 10\,.$$

Zur Bestimmung der Eigenvektoren ergeben sich die drei Gleichungssysteme

$$\begin{pmatrix} -6 & 4 & 0 \\ 4 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 4 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 8 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 14 \end{pmatrix} v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und daraus die Eigenvektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix der orthogonalen Transformation $y = F^\intercal x$ lautet also

$$F = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ \sqrt{5} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und diese transformiert den linearen Anteil der Gleichung auf

$$\tilde{a} = F^\intercal a = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 30 \end{pmatrix}.$$

Dies ergibt die transformierte Gleichung

$$-4y_1^2 + 10y_3^2 + \frac{60}{\sqrt{5}} y_3 + 14 = 0\,.$$

Quadratische Ergänzung liefert

$$-4y_1^2 + 10\left(y_3 + \frac{3}{\sqrt{5}}\right)^2 - 2 = 0\,.$$

Die euklidische Normalform ergibt sich schließlich aus $z = y + P$, wobei $P = \left(0, 0, \frac{3}{\sqrt{5}}\right)^\intercal$.
Sie lautet

$$2z_1^2 - 5z_3^2 + 1 = 0\,.$$

Die Gestalt ist ein hyperbolischer Zylinder.

Für die Koordinatentransformation $z = F^\mathsf{T} x + P$ erhält man

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sqrt{5} \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \frac{3}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

die zugehörige Umkehrtransformation $x = F(z - P)$ ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ \sqrt{5} & 0 & 0 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} - \frac{3}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Aufgabe H 39.

Betrachten Sie die von einem Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ abhängige Quadrik

$$Q := \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1^2 - 2x_2^2 + \alpha x_3^2 + 4x_1x_2 + 2\sqrt{5}\,x_1 + 4\sqrt{5}\,x_2 + \alpha = 0 \right\}.$$

(a) Schreiben Sie die Quadrik Q in Matrixform.

Lösungshinweise hierzu: Für die Matrixform der Quadrik erhalten wir

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}, \qquad a = \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 2\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad c = \alpha.$$

(b) Bestimmen Sie eine euklidische Normalform von Q und geben Sie die Gestalt der Quadrik in Abhängigkeit von α an.

Lösungshinweise hierzu:

Die Matrix A hat das charakteristische Polynom $(\alpha - \lambda)(\lambda^2 + \lambda - 6)$. Daraus ergeben sich die Eigenwerte

$$\lambda_1 = 2, \qquad \lambda_2 = -3, \qquad \lambda_3 = \alpha.$$

Die zugehörigen Eigenvektoren lauten

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Somit erhalten wie die Transformationsmatrix

$$F = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix}$$

Mit $F^{\intercal} a = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ ergibt sich die transformierte Gleichung

$$2y_1^2 - 3y_2^2 + \alpha y_3^2 + 8y_1 - 6y_2 + \alpha = 0.$$

Mit quadratischer Ergänzung erhalten wir schließlich die Gleichung

$$2(y_1 + 2)^2 - 3(y_2 + 1)^2 + \alpha y_3^2 + (\alpha - 5) = 0.$$

Nun können wir die Normalform und die Gestalt der Quadrik genauer spezifizieren:

- Falls $\alpha = 5$ ist, fällt der konstante Teil weg und wir erhalten die Normalform

  $$2z_1^2 - 3z_2^2 + 5z_3^2 = 0.$$

  Dies entspricht einem Doppelkegel.
- Falls $\alpha = 0$ ist, ergibt sich die Normalform

  $$-\frac{2}{5} z_1^2 + \frac{3}{5} z_2^2 + 1 = 0.$$

  In diesem Fall haben wir mit einem hyperbolischen Zylinder zu tun.
- Für $\alpha \neq 0, 5$ erhalten wir schließlich die Normalform

  $$\frac{2}{\alpha - 5} z_1^2 - \frac{3}{\alpha - 5} z_2^2 + \frac{\alpha}{\alpha - 5} z_3^2 + 1 = 0.$$

  Die Gestalt der Quadrik hängt jetzt davon ab, welches Vorzeichen α und $\alpha - 5$ haben.

Dr. B. Ackermann,
M. Borgart,
Dr. I Rybak, M. Kutter,
J. Veenman

14. Gruppenübung zur Vorlesung
Höhere Mathematik 1

Prof. Dr. M. Stroppel
Prof. Dr. A. Sändig

Wintersemester 2010/11

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Hinweis: Die Abgaben zu diesen Aufgaben werden in der ersten Übung des kommenden Semesters eingesammelt und zählen zum HM2-Schein.

Aufgabe H 40. *Monotonie und Beschränkheit*

Untersuchen Sie die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jeweils auf Monotonie und Beschränkheit. Finden Sie gegebenenfalls eine obere und untere Schranke.

(a) $a_n = \dfrac{n+1}{2n+1}$

(b) $a_n = n\sin\left(\pi\left(n-\dfrac{1}{2}\right)\right)$

(c) $a_n = 1+\left(-\dfrac{3}{4}\right)^n$

(d) $a_n = \cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\cos\left(\dfrac{\pi n}{2}\right)$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir berechnen die ersten Folgenglieder

$$a_1 = \frac{2}{3},\quad a_2 = \frac{3}{5},\quad a_3 = \frac{4}{7},\quad a_4 = \frac{5}{9},\quad a_5 = \frac{6}{11},\quad \ldots$$

Auf Grund dieser Ergebnisse versuchen wir zu zeigen, dass die Folge monoton fallend ist.

$$\begin{aligned}
a_{n+1} \overset{!}{\leqq} a_n \quad &\iff \quad \frac{n+2}{2n+3} \leqq \frac{n+1}{2n+1} \\
&\iff \quad (2n+1)(n+2) \leqq (2n+3)(n+1) \\
&\iff \quad 2n^2+5n+2 \leqq 2n^2+5n+3 \\
&\iff \quad 2 \leqq 3
\end{aligned}$$

Damit ist die untersuchte Folge monoton fallend und deshalb auch nach oben beschränkt durch $a_1 = \frac{2}{3}$. Um eine untere Schranke zu finden schätzen wir die Folge ab und erhalten

$$a_n = \frac{n+1}{2n+1} = \frac{n+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{2(n+\frac{1}{2})} = \frac{n+\frac{1}{2}}{2(n+\frac{1}{2})} + \frac{\frac{1}{2}}{2(n+\frac{1}{2})} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4n+2} \geqq \frac{1}{2}.$$

Damit haben wir auch eine untere Schranke gefunden, nämlich $\frac{1}{2}$. Also ist die betrachtete Folge beschränkt.

(b) Bevor wir die Folge auf Monotonie und Beschränktheit untersuchen, vereinfachen wir sie zu

$$a_n = (-1)^{n-1} n.$$

Wir berechnen wieder die ersten Folgenglieder und erhalten

$$a_1 = 1, \quad a_2 = -2, \quad a_3 = 3, \quad \ldots$$

Schon nach den ersten 3 Folgengliedern ist klar, dass die Folge weder monoton fallend noch monoton steigend ist. Bleibt noch zu klären, ob die Folge beschränkt ist. Dazu betrachtet man die Teilfolge $a_{2k} = 2k \to \infty$ und sieht, dass die Folge nicht beschränkt sein kann.

(c) Wir berechnen die ersten Folgenglieder und erhalten

$$a_1 = \frac{1}{4}, \quad a_2 = \frac{25}{9}, \quad a_3 = \frac{37}{64}, \quad \ldots$$

Aus dieser Betrachtung sehen wir, dass die Folge nicht monoton ist. Man sieht auch, dass die Folge beschränkt ist durch 2 von oben und durch 0 von unten. Es gilt nämlich

$$a_n = 1 + \left(-\frac{3}{4}\right)^n \leqq 1 + 1 = 2$$

und

$$a_n = 1 + \left(-\frac{3}{4}\right)^n \geqq 1 - 1 = 0.$$

(d) An der Struktur der Folge sieht man sofort, dass sie beschränkt ist. Obere bzw. untere Schranke ist 1 bzw. -1, weil

$$|a_n| = \left|\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)\right| = \left|\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right| \cdot \left|\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)\right| \leqq 1 \cdot 1 = 1$$

Um die Folge auf Monotonie zu untersuchen berechnen wir die ersten Folgenglieder und erhalten

$$a_1 = 0, \quad a_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad a_3 = 0, \quad a_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \ldots$$

An den ersten vier Folgengliedern erkennt man, dass die Folge nicht monoton ist.

Aufgabe H 41. *Konvergenz*

Untersuchen Sie die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jeweils auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenfalls den Grenzwert

(a) $a_n = -\dfrac{n-1}{n+1}$

Lösungshinweise hierzu:

Wir berechnen

$$a_n = -\frac{n-1}{n+1} = -\frac{n+1-2}{n+1} = -1 + \frac{2}{n+1}.$$

Da $\dfrac{2}{n+1} \to 0$ für $n \to \infty$, konvergiert die Folge (a_n) gegen -1.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -1.$$

(b) $a_n = (-1)^n \dfrac{n-1}{n+1}$

Lösungshinweise hierzu:
Wie in **(a)** erhalten wir

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n+1} = 1.$$

Es gilt

$$\varliminf_{n\to\infty} a_n = -1, \qquad \varlimsup_{n\to\infty} a_n = 1.$$

Die Folge (a_n) häuft sich bei 1 und -1, und ist divergent.

(c) $a_n = \dfrac{2\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{n^2+1}$

Lösungshinweise hierzu:
Es gilt

$$|a_n| = \left|\frac{2\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{n^2+1}\right| \leqq \frac{2}{n^2+1}.$$

Da $\dfrac{2}{n^2+1} \to 0$ für $n \to \infty$, ist die Folge (a_n) gegen Null konvergent.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

(d) $a_n = \sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\cos(\pi n)$

Lösungshinweise hierzu:
Die Folge (a_n) ist eine alternierende Folge

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \ldots$$

Wegen

$$\varliminf_{n\to\infty} a_n = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \varlimsup_{n\to\infty} a_n = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

ist die Folge (a_n) divergent.

Aufgabe H 42. *Babylonisches Wurzelziehen*

Wir untersuchen einen Algorithmus zum Berechnen der Quadratwurzel einer Zahl $x \geqq 1$, der schon in den Gesetzestafeln des Hammurabi im Jahre 1950 v.Chr stand. Wir definieren rekursiv eine Folge reeller Zahlen w_i mit

$$w_0 = x \quad w_{n+1} = \frac{1}{2}\left(w_n + \frac{x}{w_n}\right) .$$

(a) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Zahlen w_n positiv sind und $w_n^2 \geqq w_{n+1}^2 \geqq x$ gilt, also jedes w_{n+1} die Wurzel mindestens so gut annähert wie w_n.

Lösungshinweise hierzu: Aus der Iterationsvorschrift sehen wir, dass $w_{n+1} \geqq 0$, wenn $x \geqq 0$ und $w_n \geqq 0$. Nun ist $w_0 = x \geqq 0$ und somit gilt mit vollständiger Induktion $w_n \geqq 0 \; \forall n \in \mathbb{N}$.
Allgemein gilt: $0 \leqq (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad \Rightarrow \quad 2ab \leqq a^2 + b^2$.
Durch quadratische Ergänzung erhält man

$$2ab + 2ab \leqq a^2 + b^2 + 2ab = (a+b)^2 \quad \Leftrightarrow ab \leqq \frac{1}{4}(a+b)^2.$$

Setzt man $a := w_n$ und $b := \frac{x}{w_n}$, so ergibt sich $1 \leqq x \leqq \frac{1}{4}(w_n + \frac{x}{w_n})^2 = w_{n+1}^2$.
Wegen $w_0 = x$ gilt somit $1 \leqq w_n$ und $x \leqq w_n^2 \; \forall n \in \mathbb{N}$ und folglich ist

$$1 \leqq w_{n+1} = \frac{1}{2}(w_n + \frac{x}{w_n}) \leqq \frac{1}{2}(w_n + \frac{w_n^2}{w_n}) = w_n .$$

(b) Berechnen Sie $\sqrt{3}$ auf 4 Stellen hinter dem Komma durch Verwendung des obigen Algorithmus, d.h. es ist ein w_n mit $w_n - \sqrt{3} < 0.5 \cdot 10^{-4}$ zu berechnen. Zur Abschätzung der Genauigkeit kann man folgende Ungleichung verwenden:

$$w_n - \sqrt{3} = \frac{w_n^2 - 3}{w_n + \sqrt{3}} \leqq \frac{w_n^2 - 3}{w_n + 1} ,$$

da $1 \leqq \sqrt{3}$.

Lösungshinweise hierzu: Es ist

$$\begin{aligned}
w_0 &= 3, \\
w_1 &= \frac{1}{2}\left(3 + \frac{3}{3}\right) = 2, \\
w_2 &= \frac{1}{2}\left(2 + \frac{3}{2}\right) = \frac{7}{4}, \\
w_3 &= \frac{1}{2}\left(\frac{7}{4} + 3 \cdot \frac{4}{7}\right) = \frac{97}{56}, \\
w_4 &= \frac{1}{2}\left(\frac{97}{56} + 3 \cdot \frac{56}{97}\right) = \frac{18817}{10864}.
\end{aligned}$$

Überprüfung der Genauigkeit:

$$w_3 - \sqrt{3} = \frac{w_3^2 - 3}{w_3 + \sqrt{3}} \leqq \frac{w_3^2 - 3}{w_3 + 1} \geqq 1.1 \cdot 10^{-4} > \; 0.5 \cdot 10^{-4}$$

$$w_4 - \sqrt{3} = \frac{w_4^2 - 3}{w_4 + \sqrt{3}} \leqq \frac{w_4^2 - 3}{w_4 + 1} \leqq 3 \cdot 10^{-9} < \; 0.5 \cdot 10^{-4}$$

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 43.

Bestimmen Sie eine euklidische Normalform der Quadrik

$$Q := \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 3x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2 + 12x_1 - 4x_2 + 2 = 0 \right\}$$

und ermitteln Sie die zugehörigen Koordinatentransformationen. Bestimmen Sie anhand der Normalform die Gestalt der Quadrik und fertigen Sie eine Skizze der Quadrik in Standardkoordinaten an. Zeichnen Sie in Ihre Skizze auch das Koordinatensystem ein, bezüglich dessen die Quadrik Normalform hat.

Lösungshinweise hierzu: Die Gleichung der Quadrik lautet $x^{\mathsf{T}}Ax + 2a^{\mathsf{T}}x + c = 0$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad a = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad c = 2.$$

Das charakteristische Polynom der Matrix A lautet $\chi_A(\lambda) = (3-\lambda)^2 - 1$ und die Eigenwerte sind damit

$$\lambda_1 = 4 \qquad \text{und} \qquad \lambda_2 = 2\,.$$

Zur Bestimmung der Eigenvektoren ergeben sich die Gleichungssysteme

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und daraus die Eigenvektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix der orthogonalen Transformation $y = F^{\mathsf{T}}x$ lautet also

$$F = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

und diese transformiert den linearen Anteil der Gleichung auf

$$\tilde{a} = F^{\mathsf{T}}a = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Dies ergibt die transformierte Gleichung

$$4y_1^2 + 2y_2^2 + 8\sqrt{2}y_1 + 4\sqrt{2}y_2 + 2 = 0\,.$$

Quadratische Ergänzung liefert

$$4\left(y_1+\sqrt{2}\right)^2+2\left(y_2+\sqrt{2}\right)^2-10=0\,.$$

Die euklidische Normalform ergibt sich schließlich aus $z=y-P=y+(\sqrt{2},\sqrt{2})^\intercal$ und lautet demnach

$$-\frac{2}{5}z_1^2-\frac{1}{5}z_2^2+1=0\,.$$

Die Gestalt ist eine Ellipse mit Halbachsen $\sqrt{5/2}$ und $\sqrt{5}$.

Für die Koordinatentransformation erhält man

$$z=y-P=F^\intercal x-P=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}x+\sqrt{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

und

$$x=F(z+P)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}z-\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}.$$

Also ergibt sich die folgende Skizze der Quadrik.