Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Hausübungen Teil 1, empfohlener Bearbeitungszeitraum: 25.-31. Oktober

Aufgabe H 1. *Vollständige Induktion*

Beweisen Sie folgende Aussagen mit vollständiger Induktion:

(a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $(n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3$ durch 9 teilbar.

(b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $11^{n+1} + 12^{2n-1}$ durch 133 teilbar.

Hinweis: Eine Summe ist durch eine Zahl teilbar, wenn jeder Summand durch die Zahl teilbar ist (aber natürlich nicht nur dann). Versuchen Sie daher eine Aufteilung in Summanden zu finden, von denen Sie wissen, dass sie durch die entsprechende Zahl teilbar sind.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Der Beweis erfolgt über vollständige Induktion:

IA Für $n = 1$ erhalten wir $a_1 = (1-1)^3 + 1^3 + (1+1)^3 = 9$ ist durch 9 teilbar.

IH Es gelte $a_n = (n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3$ ist für $n \in \mathbb{N}$ durch 9 teilbar.

IS Für $n+1$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 = n^3 + (n+1)^3 + ((n-1)+3)^3 \\
&= (n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3 + 9(n-1)^2 + 27(n-1) + 27 \\
&= a_n + 9\left((n-1)^2 + 3(n-1) + 3\right) .
\end{aligned}$$

Da nach **IH** a_n durch 9 teilbar ist, ist auch a_{n+1} als Summe zweier durch 9 teilbarer Zahlen durch 9 teilbar.

(b) Der Beweis erfolgt über vollständige Induktion:

IA Für $n = 1$ erhalten wir $a_1 = 11^{1+1} + 12^{2\cdot 1-1} = 121 + 12 = 133$ ist durch 133 teilbar.

IH Es gelte $a_n = 11^{n+1} + 12^{2n-1}$ ist für $n \in \mathbb{N}$ durch 133 teilbar.

IS Für $n+1$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= 11^{n+1+1} + 12^{2(n+1)-1} = 11 \cdot 11^{n+1} + 144 \cdot 12^{2n-1} \\
&= (144 - 133)11^{n+1} + 144 \cdot 12^{2n-1} \\
&= 144 \left(\underbrace{11^{n+1} + 12^{2n-1}}_{=a_n} \right) - 133 \cdot 11^{n+1} .
\end{aligned}$$

Da nach **IH** a_n durch 133 teilbar ist, ist auch a_{n+1} als Differenz zweier durch 133 teilbarer Zahlen durch 133 teilbar.

Aufgabe H 2. *Binomialkoeffizienten*

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $\binom{n}{k}\binom{k}{j} = \binom{n}{j}\binom{n-j}{k-j}$, **(b)** $\binom{n}{k}\binom{n-k}{j} = \binom{n}{j}\binom{n-j}{k}$

(c) $\forall\, n \in \mathbb{N}\colon\ \sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j} = 0$

Hinweis: Für diese Aussagen ist keine vollständige Induktion notwendig. Es genügt, die Definition der Binomialkoeffizienten und den Binomischen Lehrsatz anzuwenden.

Lösungshinweise hierzu:

(a)

$$\binom{n}{k}\binom{k}{j} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{k!}{j!(k-j)!} = \frac{n!(n-j)!}{j!(k-j)!(n-k)!(n-j)!} =$$

$$= \frac{n!}{j!(n-j)!}\frac{(n-j)!}{(k-j)!(n-j-(k-j))!} = \binom{n}{j}\binom{n-j}{k-j}$$

(b)

$$\binom{n}{k}\binom{n-k}{j} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{(n-k)!}{j!(n-k-j)!} =$$

$$= \frac{n!}{j!(n-j)!}\frac{(n-j)!}{k!(n-j-k)!} = \binom{n}{j}\binom{n-j}{k}$$

(c) Der Binomische Lehrsatz

$$(a+b)^n = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}a^{n-j}b^j.$$

liefert mit $a = 1$ und $b = -1$

$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j} = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(1)^{n-j}(-1)^j = (1-1)^n = 0.$$

Aufgabe H 3. *Vollständige Induktion, Pascalsches Dreieck*

Zeigen Sie mit Hilfe des Prinzips der vollständigen Induktion über n, dass die folgende Summenformel für alle $m, n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{m+k}{m} = \binom{m+n+1}{m+1}$$

Stellen Sie das Ergebnis für $m = 3$, $n = 1$ im Pascalschen Dreieck dar.
Hinweis: Nutzen Sie die Eigenschaften der Binomialkoeffizienten aus.

Lösungshinweise hierzu:

IA $n = 0$: $\sum\limits_{k=0}^{0} \binom{m+k}{m} = \binom{m+0}{m} = 1 = \binom{m+1}{m+1}$

IH Es gelte $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{m+k}{m} = \binom{m+n+1}{m+1}$.

IS $n \to (n+1)$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} \binom{m+k}{m} &= \binom{m+n+1}{m} + \sum_{k=0}^{n} \binom{m+k}{m} \\ &= \binom{m+n+1}{m} + \binom{m+n+1}{m+1} = \binom{m+(n+1)+1}{m+1}\end{aligned}$$

Darstellung im Pascalschen Dreieck:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
&&&&&1&&&&& \\
&&&&1&&1&&&& \\
&&&1&&2&&1&&& \\
&&1&&3&&3&&1&&0 \\
&&&&&&&&&\searrow\ \swarrow& \\
&1&&4&&6&&4&&1& \\
&&&&&&&&\searrow\ \swarrow&& \\
1&&5&&10&&10&&\boxed{5}&&1
\end{array}$$

Die blau eingekreisten Zahlen entsprechen der Summe, die Zahl im grünen Quadrat dem Binomialkoeffizienten auf der rechten Seite. Die Graue Null und die Pfeile verdeutlichen die Rekursion der Binomialkoeffizienten.

Hausübungen Teil 2, empfohlener Bearbeitungszeitraum: 2.-7. November

Aufgabe H 4. *Mengen*

(a) Skizzieren Sie die folgenden Mengen

$$M_1 := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, |x| + |y| = 1\right\}, \quad M_2 := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, |x| + |y| < 1\right\}.$$

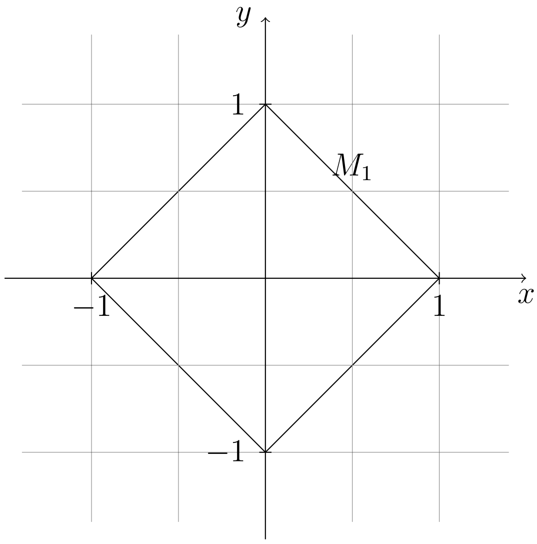
(b) Skizzieren Sie nun die Mengen

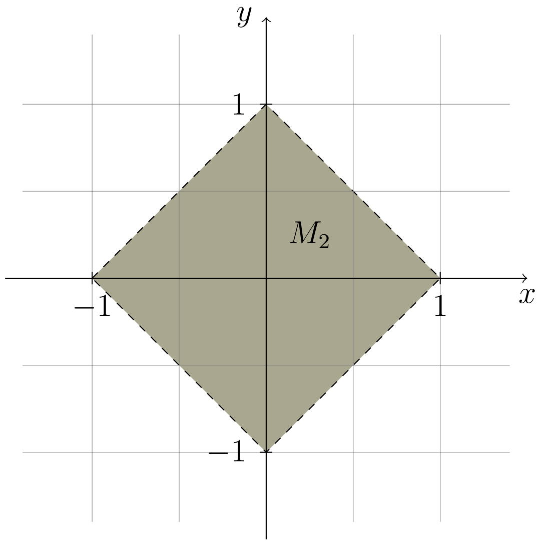
$$M_3 := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, (x-2)^2 + (y-1)^2 \leqq 1 \vee (x-2)^2 + (y+1)^2 \leqq 1\right\},$$
$$M_4 := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, |y| > 1\right\}.$$

und die Schnittmenge von M_3 und M_4.

Lösungshinweise hierzu:

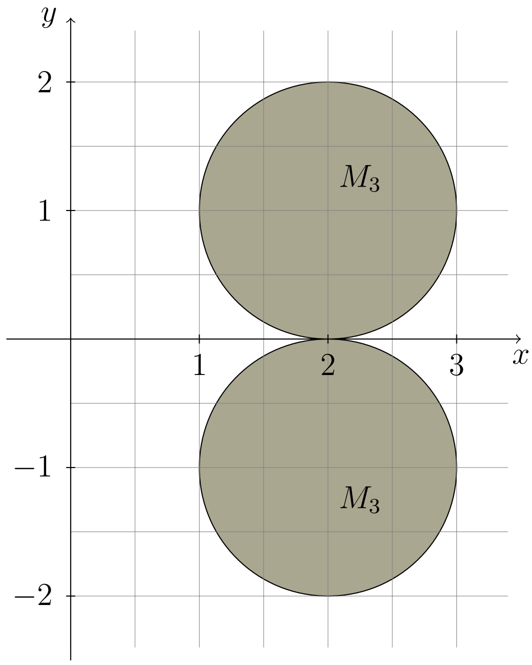
(a) Bei der Menge M_1 handelt es sich um den Rand einer Raute (nur die Grenzen).

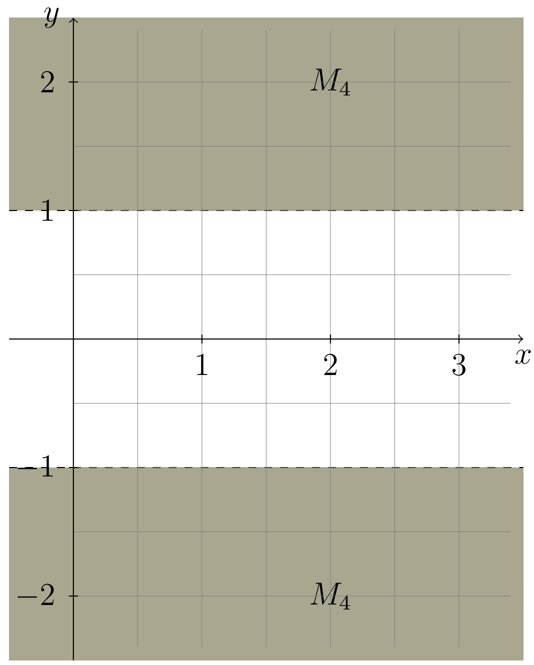




Die Menge M_2 ist eine Raute (nur das Innere, ohne Rand).

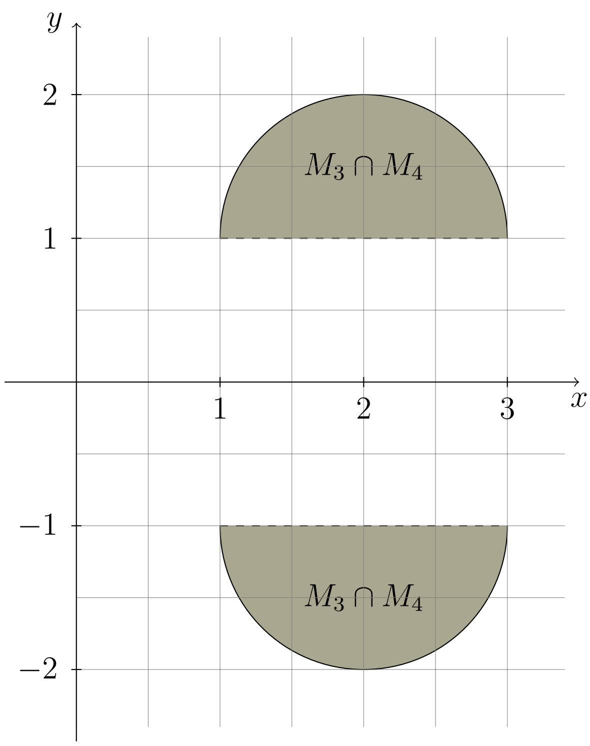
(b) Die Menge M_3 besteht aus zwei Kreisscheiben mit Radius 1 und den Mittelpunkten $(2,1)$ und $(2,-1)$, wobei der Rand Bestandteil der Menge ist.





Die Menge M_4 besteht aus zwei Halbebenen, wobei der Rand $y = \pm 1$ nicht zu der Menge gehört.

Also ist die Schnittmenge von M_3 und M_4:



Aufgabe H 5. *Ungleichungen, Vollständige Induktion*
Beweisen Sie mit vollständiger Induktion:

$$5^n \geqq n^5, \quad n \in \mathbb{N}, n \geqq 5$$

Geben Sie insbesondere an, an welcher Stelle Ihres Beweises die Bedingung $n \geqq 5$ benötigt wird, d.h. warum als Induktionsanfang nicht $n = 1$ verwendet werden kann.
(Zusatz für besonders engagierte Studenten: $k^n \geqq n^k, \quad n \in \mathbb{N}, n \geqq k > 2$)

Lösungshinweise hierzu:

IA $n = 5: \quad 5^5 \geqq 5^5$
Da auf beiden Seiten der gleiche Ausdruck steht, ist die Ungleichung erfüllt.

IH Es gelte $5^n \geqq n^5, \quad n \in \mathbb{N}, n \geqq 5$.

IS $n \to (n+1)$:

$$\begin{aligned} 5^{n+1} &= 5 \cdot 5^n \geqq 5n^5 = n^5 + n^5 + n^5 + n^5 + n^5 \\ &\geqq n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n + 1 = (n+1)^5 \end{aligned}$$

Hier wurde benutzt, dass für $n \geqq 5$ die Ungleichungen $n^2 \geqq 10$, $n^3 \geqq 10$ und $n^5 \geqq 5n+1$ erfüllt sind. Die Abschätzung für den zweiten Summanden $(n^5 \geqq 5n^4)$ gilt erst ab $n \geqq 5$, daher kann kein kleinerer Induktionsanfang gewählt werden.

Für die Zusatzaufgabe: **IA** $n = k: \quad k^k \geqq k^k$

IH Es gelte $k^n \geqq n^k, \quad n \in \mathbb{N}, n \geqq k$.

IS $n \to (n+1)$: Es wird wie oben $k \cdot n^k$ in k Summanden aufgeteilt und verwendet, dass für $n \geqq k$ stets $n^\ell \geqq \binom{k}{\ell}$ gilt. Man benötigt dann noch, dass $n^k \geqq kn + 1$ ist, und dies gilt ab $k = 3$.

Aufgabe H 6. *komplexe Zahlen*
Berechnen Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $x + y\,\mathrm{i}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$:

(a) $(2 - 3\,\mathrm{i})(3 + 2\,\mathrm{i}) + \dfrac{(1+\mathrm{i})^2}{(1-\mathrm{i})^2}$

(b) $(1 + \sqrt{3}\,\mathrm{i})^3 + (1 - \sqrt{3}\,\mathrm{i})^3$

(c) $(1 + \mathrm{i})^{10}$

(d) $\mathrm{Im}(2 - 4\,\mathrm{i}) + \mathrm{Re}(|5 + 2\,\mathrm{i}|)$

Lösungshinweise hierzu:

(a)

$$(2 - 3\mathrm{i})(3 + 2\mathrm{i}) = 6 + 4\mathrm{i} - 9\mathrm{i} + 6 = 12 - 5\mathrm{i}\,.$$

Weiter ergibt sich

$$\frac{(1+\mathrm{i})^2}{(1-\mathrm{i})^2} = \frac{(1+\mathrm{i})^2\overline{(1-\mathrm{i})^2}}{(1-\mathrm{i})^2\overline{(1-\mathrm{i})^2}} = \frac{(1+\mathrm{i})^2\overline{(1-\mathrm{i})^2}}{((1-\mathrm{i})\overline{(1-\mathrm{i})})^2}$$
$$= \frac{(1+\mathrm{i})^4}{(1^2-\mathrm{i}^2)^2} = \frac{(2\mathrm{i})^2}{4} = -1\,.$$

Insgesamt ist also

$$(2-3\mathrm{i})(3+2\mathrm{i}) + \frac{(1+\mathrm{i})^2}{(1-\mathrm{i})^2} = 12-5\mathrm{i}-1 = 11-5\mathrm{i}\,.$$

(b)

$$\begin{aligned}(1+\sqrt{3}\mathrm{i})^3 + (1-\sqrt{3}\mathrm{i})^3 &= (1+\sqrt{3}\mathrm{i})^2\cdot(1+\sqrt{3}\mathrm{i}) + (1-\sqrt{3}\mathrm{i})^2\cdot(1-\sqrt{3}\mathrm{i})\\ &= (1+2\sqrt{3}\mathrm{i}-3)(1+\sqrt{3}\mathrm{i}) + (1-2\sqrt{3}\mathrm{i}-3)(1-\sqrt{3}\mathrm{i})\\ &= (-2+2\sqrt{3}\mathrm{i})(1+\sqrt{3}\mathrm{i}) + (-2-2\sqrt{3}\mathrm{i})(1-\sqrt{3}\mathrm{i})\\ &= (-2-2\sqrt{3}\mathrm{i}+2\sqrt{3}\mathrm{i}-6) + (-2+2\sqrt{3}\mathrm{i}-2\sqrt{3}\mathrm{i}-6)\\ &= -8-8 = -16\end{aligned}$$

(c) Es wurde $(1+\mathrm{i})^2 = 2\mathrm{i}$ und $(1+\mathrm{i})^4 = -4$ bereits berechnet. Es gilt

$$(1+\mathrm{i})^{10} = (1+\mathrm{i})^2\cdot\big((1+\mathrm{i})^4\big)^2 = 2\mathrm{i}\cdot 16 = 32\mathrm{i}\,.$$

(d)

$$\mathrm{Im}(2-4\mathrm{i}) + \mathrm{Re}(|5+2\mathrm{i}|) = -4 + \mathrm{Re}(\sqrt{5^2+2^2}) = -4+\sqrt{29}$$

Aufgabe H 7. *komplexe Gleichungen*

Geben Sie alle komplexen Lösungen $z_k \in \mathbb{C}$ der folgenden Gleichungen an:

(a) $z^2+2z+2=0$

(b) $(z-\mathrm{i})^3 = -\mathrm{i}$

(c) $z\bar{z}-5z = -10\mathrm{i}$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Lösungsformel für quadratische Gleichungen (Mitternachtsformel):

$$z_{1,2} = \frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot 1\cdot 2}}{2\cdot 1} = -1\pm\mathrm{i}$$

(b)

$$(z-\mathrm{i})^3 = -\mathrm{i} = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow (z-\mathrm{i}) = \cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2\ell\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2\ell\pi}{3}\right)\,.$$

Also sind die drei Lösungen:

$$
\begin{aligned}
z_1 &= \mathrm{i} + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \mathrm{i} + 0 + \mathrm{i} = 2\mathrm{i} \\
z_2 &= \mathrm{i} + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}\right) \\
&= \mathrm{i} + \cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \frac{\mathrm{i}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \\
z_3 &= \mathrm{i} + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{4\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{4\pi}{3}\right) \\
&= \mathrm{i} + \cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \frac{\mathrm{i}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}
$$

(c)

$$z\overline{z} - 5z = -10\mathrm{i}$$

Mit $z = x + \mathrm{i}y,\ \overline{z} = x - \mathrm{i}y,\ z\overline{z} = x^2 + y^2$ erhält man

$$x^2 + y^2 - 5(x + \mathrm{i}y) = -10\mathrm{i}$$

und somit $x^2 + y^2 - 5x = 0$ und $-5y = -10$. Die zweite Gleichung ergibt $y = 2$, eingesetzt in die erste Gleichung: $x^2 - 5x + 4 = 0$. Mit Hilfe der Lösungsformel für quadratische Gleichungen (Mitternachtsformel) erhält man $x_1 = 1$ und $x_2 = 4$.
Die beiden Lösungen der Gleichung sind somit $z_1 = 4 + 2\mathrm{i}$ und $z_2 = 1 + 2\mathrm{i}$.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 8. *Komplexer Einheitskreis*

Der Einheitskreis um den Ursprung in der komplexen Ebene wird mit $\mathbb{S}$ bezeichnet, d.h. $\mathbb{S} = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z| = 1 \right\}$. Seien $z, w, v \in \mathbb{S}$. Skizzieren Sie $\mathbb{S}$ und beweisen Sie:

(a) $z^{-1} = \bar{z}$ und $z^{-1} \in \mathbb{S}$,

(b) $z \cdot w \in \mathbb{S}$,

(c) $\frac{z}{w} \in \mathbb{S}$,

(d) $\frac{z^5}{w^8} \cdot v^6 \in \mathbb{S}$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Setze $z = a + b\mathrm{i}$ und $w = c + d\mathrm{i}$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Es folgt:

$$a^2 + b^2 = 1 = c^2 + d^2.$$

Weiter gilt:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a + b\mathrm{i}} = \frac{a - b\mathrm{i}}{(a + b\mathrm{i})(a - b\mathrm{i})} = \frac{a - b\mathrm{i}}{a^2 + b^2} = a - b\mathrm{i} = \bar{z}.$$

Daraus folgt:

$$|z^{-1}| = |\bar{z}| = 1,$$

dies impliziert die Behauptung.

(b) $z \cdot w = ac - bd + bc\mathrm{i} + ad\mathrm{i}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |z \cdot w|^2 &= (ac - bd)^2 + (bc + ad)^2 = a^2c^2 + b^2d^2 - 2abcd + b^2c^2 + a^2d^2 + 2abcd \\ &= (a^2 + b^2)c^2 + (a^2 + b^2)d^2 = c^2 + d^2 = 1. \end{aligned}$$

Somit folgt $z \cdot w \in \mathbb{S}$.

(c) Teilaufgaben **(a)** und **(b)** implizieren **(c)**.

(d) Teilaufgaben **(a)**, **(b)** und **(c)** implizieren **(d)**.

Aufgabe H 9. *Ungleichungen*

Bestimmen Sie folgende Teilmengen von $\mathbb{R}$:

(a) $\left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x + 3 > x^2(x + 3) \right\}$,

(b) $\left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, |x^2 + 3x - 4| + 1 < |x + 4| + |x - 1| \right\}$,

(c) $\left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \frac{|x - 1|}{|x - 2|} \leqq 1 \right\}$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) *1. Fall:* $x < -3$.
Man kann in diesem Fall auf beiden Seiten durch den Faktor $x+3$ teilen. Da dieser Faktor negativ ist, dreht sich dabei das Ungleichheitszeichen um:

$$\begin{aligned} & x+3 > x^2(x+3) \\ \Leftrightarrow\quad & 1 < x^2 \\ \Leftrightarrow\quad & 1 < |x| \end{aligned}$$

Dies gilt für alle $x < -3$.

2. Fall: $x = -3$.

$$x+3 > x^2(x+3) \quad \Rightarrow \quad 0 > 0$$

Dies ist ein Widerspruch.

3. Fall: $x > -3$

$$\begin{aligned} & x+3 > x^2(x+3) \\ \Leftrightarrow\quad & 1 > x^2 \\ \Leftrightarrow\quad & 1 > |x| \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge ist daher gegeben durch

$$\{x \in \mathbb{R} :\ x < -3 \ \vee\ -1 < x < 1\}.$$

(b) Die Nullstellen von x^2+3x-4 sind -4 und 1, wobei x^2+3x-4 für $-4 < x < 1$ negativ ist, sonst positiv (oder gleich Null an den Nullstellen).

1. Fall: $x < -4$.

$$\begin{aligned} & x^2+3x-4+1 < -x-4-x+1 \\ & \Leftrightarrow\quad x^2+5x < 0 \\ & \quad\Leftrightarrow\quad -5 < x < 0 \ (\wedge \quad x < -4 \ \text{ nach Voraussetzung}) \end{aligned}$$

2. Fall: $x = -4$.

$$1 < 5 \quad \checkmark$$

3. Fall: $-4 < x < 1$.

$$\begin{aligned} & -x^2-3x+4+1 < x+4-x+1 \\ & \Leftrightarrow\quad -x^2-3x < 0 \\ & \quad\Leftrightarrow\quad x < -3 \ \vee\ x > 0 \ (\wedge \quad -4 < x < 1 \ \text{ nach Voraussetzung}) \end{aligned}$$

4. Fall: $x = 1$.

$$1 < 5 \quad \checkmark$$

5. Fall: $x > 1$.

$$\begin{aligned} & x^2 + 3x - 4 + 1 < x + 4 + x - 1 \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 + x - 6 < 0 \\ & \Leftrightarrow \quad -3 < x < 2 \ (\wedge \quad x > 1 \ \text{ nach Voraussetzung}) \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge ist daher gegeben durch

$$\{x \in \mathbb{R} : \ -5 < x < -3 \ \vee \ 0 < x < 2\}.$$

(c) Für $x = 2$ ist der Ausdruck auf der linken Seite der Ungleichung nicht definiert. Ansonsten gilt folgende Äquivalenz:

$$\frac{|x-1|}{|x-2|} \leqq 1 \quad \Leftrightarrow \quad |x-1| \leqq |x-2|.$$

1. Fall: $x < 1$.

$$1 - x \leqq 2 - x$$

Dies ist erfüllt für alle $x < 1$ (sogar für alle $x \in \mathbb{R}$).

2. Fall: $x = 1$.

$$0 \leqq 1 \quad \checkmark$$

3. Fall: $1 < x < 2$.

$$x - 1 \leqq 2 - x \quad \Leftrightarrow \quad 2x \leqq 3 \quad \Leftrightarrow \quad x \leqq \tfrac{3}{2} \quad (\wedge \quad 1 < x < 2)$$

4. Fall: $x = 2$.
Siehe oben.

5. Fall: $x > 2$.

$$x - 1 \leqq x - 2$$

Dies ist für kein $x \in \mathbb{R}$ erfüllt.

Die Lösungsmenge ist daher gegeben durch

$$\{x \in \mathbb{R} : \ x \leqq \tfrac{3}{2}\}.$$

Aufgabe H 10. *Injektivität, Surjektivität und Bijektivität*

Überprüfen Sie, ob die folgenden Abbildungen injektiv, surjektiv oder bijektiv sind und begründen Sie Ihre Antwort:

(a) $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}\colon z \mapsto z^3$,

(b) $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}\colon z \mapsto |z|$,

(c) $h\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}\colon z \mapsto \mathrm{i} \cdot z$.

Lösungshinweise hierzu: zu (a) Die Abbildung f ist nicht injektiv. Denn seien z_1 die dritte Wurzel von i und z_2 eine von z_1 verschiedene dritte Wurzel von i. Dann gilt: $f(z_1) = \mathrm{i} = f(z_2)$, aber $z_1 \neq z_2$.
Die Abbildung f ist surjektiv, denn zu beliebigem $z \in \mathbb{C}$ eixistiert eine Zahl $a \in \mathbb{C}$ so, dass $f(a) = a^3 = z$, vgl. Vorlesung, Wurzelziehen bei komplexen Zahlen.
Da f nicht injektiv ist, kann es auch nicht bijektiv sein.
zu (b) Die Abbildung g ist nicht injektiv, denn $g(1) = 1 = g(i)$.
Die Abbildung g ist nicht surjektiv, denn für alle $c \in \mathbb{C}$ gilt $|c| \in \mathbb{R}$; die Zahl $i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ liegt also nicht im Bildbereich von g.
Da g weder injektiv noch surjektiv ist, kann es auch nicht bijektiv sein.
zu (c) Die Abbildung h ist injektiv, denn für $a, b \in \mathbb{C}$ gilt:

$$h(a) \neq h(b) \Leftrightarrow ai \neq bi \Leftrightarrow a \neq b\,.$$

Die Abbildung h ist surjektiv, denn für $z \in \mathbb{C}$ gilt $h(-iz) = i \cdot (-iz) = z$.
Damit ist h aber auch bijektiv.

Aufgabe H 11. *Skalarprodukt*
Sei V der Raum aller Polynome auf $[0,1]$ mit Grad maximal 2, d.h.

$$V = \left\{ p\colon [0,1] \to \mathbb{R}\colon x \mapsto ax^2 + bx + c \;\middle|\; a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Dieser Raum kann mit dem Skalarprodukt

$$\langle p \,|\, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)\,\mathrm{d}\,x$$

für $p, q \in V$ versehen werden. Gegeben seien nun folgende Polynome:

$$p_1(x) := x^2 + x, \quad p_2(x) := x - \frac{7}{10}, \quad p_3(x) := x^2 + x + 1.$$

(a) Bestimmen Sie die Skalarprodukte $\langle p_1 \,|\, p_2 \rangle$, $\langle p_1 \,|\, p_3 \rangle$ und $\langle p_2 \,|\, p_3 \rangle$.

(b) Geben Sie ein Polynom der Form $ax^2 + bx$ aus V für $a \neq 0$, $b \neq 0$ an, dessen Norm gleich 1 ist.

Lösungshinweise hierzu: Zu (a):

$$\begin{aligned}
\langle p_1 \,|\, p_2 \rangle &= \int_0^1 p_1(x)p_2(x)dx = \int_0^1 (x^2 + x)(x - \frac{7}{10})dx = [\frac{x^4}{4} + \frac{1}{10}x^3 - \frac{7}{20}x^2]_0^1 = 0, \\
\langle p_1 \,|\, p_3 \rangle &= \int_0^1 p_1(x)p_3(x)dx = \int_0^1 (x^2 + x)(x^2 + x + 1)dx = \frac{28}{15}, \\
\langle p_2 \,|\, p_3 \rangle &= \int_0^1 p_2(x)p_3(x)dx = \int_0^1 (x - \frac{7}{10})(x^2 + x + 1)dx = -\frac{1}{5}.
\end{aligned}$$

Zu (b):

$$\left\langle ax^2 + bx \,\middle|\, ax^2 + bx \right\rangle = \int_0^1 (ax^2 + bx) \cdot (ax^2 + bx) dx = \int_0^1 dx = \frac{a^2}{5} + \frac{ab}{2} + \frac{b^2}{3} = 1^2$$

Die durch das Skalarprodukt induzierte Norm ist gegeben durch $\sqrt{\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle} = |\cdot|$.
z.B. $a = 1, b = -\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{237}{80}}$, d.h $p(x) = x^2 + \left(\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{237}{80}}\right) x$.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 12. *Lineare Unabhängigkeit, Basis, Erzeugendensystem*

Gegeben seien die Vektoren $v_1 = (3,0,3,6)$, $v_2 = (2,-1,1,2)$, $v_3 = (-1,1,0,0)$, $v_4 = (0,1,2,\pi)$ und $v_5 = (2,1,4,4+\pi) \in \mathbb{R}^4$.
Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind und begründen Sie Ihre Antwort (gegebenenfalls mit einer Rechnung).

(a) Die Vektoren v_1 und v_2 sind linear unabhängig.

(b) Die Vektoren v_1 und v_2 bilden eine Basis von $\mathrm{L}(v_1, v_2, v_3)$

(c) Die Vektoren v_1, v_2, v_4, v_5 bilden eine Basis von $\mathbb{R}^4$.

(d) Die Vektoren v_2, v_3, v_4, v_5 sind linear unabhängig.

(e) Die Vektoren v_1, v_2, v_4 bilden ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^3$.

(f) Der Vektorraum $\mathrm{L}(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ hat Dimension 3.

Lösungshinweise hierzu:

(a) wahr, in der Bedingung $a_1v_1 + a_2v_2 = 0$ folgt aus der zweiten Koordinatengleichung, dass $a_2 = 0$ sein muss, und dann z.B. aus der ersten Koordinatengleichung $a_1 = 0$.

(b) wahr, da $v_3 = \frac{1}{3}v_1 - v_2$ ist, kann jede Linearkombination aus $\mathrm{L}(v_1, v_2, v_3)$ auch mit v_1 und v_2 dargestellt werden. Nach **(a)** sind v_1 und v_2 linear unabhängig, bilden also eine Basis.

(c) falsch, es ist $v_5 - v_4 - \frac{2}{3}v_1 = 0$ und somit sind die Vektoren nicht linear unabhängig.

(d) falsch, da $v_1 = 3(v_2 + v_3)$ gilt mit **(c)** auch $v_5 - v_4 - 2(v_2 + v_3) = 0$.

(e) falsch, die drei Vektoren sind zwar linear unabhängig, allerdings erzeugen sie einen dreidimensionalen Untervektorraum des $\mathbb{R}^4$ und nicht den $\mathbb{R}^3$.

(f) richtig, nach **(b)** und **(c)** sind $v1$ und $v2$ als Linearkombination v_3, v_4, v_5 darstellbar und somit ist $\mathrm{L}(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5) = \mathrm{L}(v_3, v_4, v_5)$. Aus der Bedingung $a_3v_3 + a_4v_4 + a_5v_5 = 0$ folgt aus der dritten Koordinatengleichung $a_4 = -2a_5$ und dann aus der vierten $a_4 = a_5 = 0$. Die restlichen Gleichungen forden dann $a_3 = 0$. Damit sind die drei Vektoren linear unabhängig und der von ihnen aufgespannte Raum hat Dimension 3.

Aufgabe H 13. *Ebene, Hessesche Normalform*

Gegeben sind die Punkte $A = (5,1,0)$, $B = (1,5,2)$ und $C = (-1,1,6)$

(a) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC gleichschenklig ist. Zeigen Sie außerdem sowohl mit Hilfe des Skalarprodukts als auch mit Hilfe des Vektorprodukts, dass das Dreieck rechtwinklig ist.

(b) Der Punkt D bilde mit A, B und C ein Quadrat mit dem Mittelpunkt M. Bestimmen Sie D und M.

(c) Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung und eine Koordinatengleichung der Ebene E, die A, B und C enthält. Prüfen Sie bei beiden Darstellungen, ob die Punkte D und M auf der Ebene liegen.

(d) Geben Sie die Ebene E in Hessescher Normalform an. Welchen Abstand hat die Ebene zum Ursprung?

Lösungshinweise hierzu:

(a) Für das Dreieck ABC gilt:

$$\begin{aligned} \left|\vec{AB}\right| &= \left|\begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{36} = 6 \\ \left|\vec{AC}\right| &= \left|\begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{72} \\ \left|\vec{BC}\right| &= \left|\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{36} = 6 \end{aligned}$$

Wegen $\left|\vec{AB}\right| = \left|\vec{BC}\right|$ ist das Dreieck gleichschenklig.

Wegen

$$\vec{AB} \cdot \vec{BC} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} = 8 - 16 + 8 = 0$$

ist das Dreieck rechtwinklig.

Wegen

$$\left|\vec{AB} \times \vec{BC}\right| = \left|\begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 24 \\ 12 \\ 24 \end{pmatrix}\right| = 12\sqrt{4+1+4} = 36 = \left|\vec{AB}\right| \cdot \left|\vec{BC}\right|$$

ist das Dreieck rechtwinklig.

(b) Der Mittelpunkt M des Quadrates ist der Mittelpunkt der Hypotenuse des Dreiecks ABC, also $M = (2, 1, 3)$.

Für den Eckpunkt D erhält man:

$$\vec{OD} = \vec{OA} + \vec{BC} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Also $D = (3, -3, 4)$.

(c) Für die Parametergleichung der Ebene E durch die Punkte A, B und C erhält man:

$$E : \vec{x} = \vec{OA} + s \cdot \vec{AB} + t \cdot \vec{AC} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \quad ; \quad s, t \in \mathbb{R} .$$

Elimination der Parameter s und t führt auf die Koordinatengleichung für E:

$$\begin{aligned} x_1 &= 5 - 4s - 6t \\ x_2 &= 1 + 4s \\ x_3 &= 2s + 6t , \end{aligned}$$

d.h. $E : 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 11$.

Der Punkt M ergibt sich für $s = 0, t = 1/2$ und da $2 \cdot 2 + 1 + 2 \cdot 3 = 11$ gilt, erfüllt er auch die Koordinatengleichung.

Der Punkt D ergibt sich für $s = -1, t = 1$ und da $2 \cdot 3 - 3 + 2 \cdot 4 = 11$ gilt, erfüllt er auch die Koordinatengleichung.

(d) Für die Hessesche Normalform muss der Vektor $(2, 1, 2)$ aus den Koeffizienten der Koordinatendarstellung normiert werden: $E : \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 = \frac{11}{3}$.

Da die rechte Seite positiv ist, ist dies die gesuchte Form. Der Abstand der Ebene zum Ursprung ist somit $\frac{11}{3}$.

Aufgabe H 14. *Bernstein-Polynome*

Wir betrachten den Vektorraum $\mathrm{Pol}_4 \mathbb{R} := \left\{ \sum_{j=0}^{4} \alpha_j X^j \,\middle|\, \alpha_j \in \mathbb{R} \right\}$ der reellen Polynome vom Grad höchstens 4.

Zeigen Sie, dass die durch

$$b_k(X) := \binom{4}{k} (1 - X)^{4-k} X^k$$

definierten *Bernstein-Polynome* b_0, b_1, b_2, b_3, b_4 eine Basis des Vektorraumes $\mathrm{Pol}_4 \mathbb{R}$ bilden.

Geben Sie für die Polynome p, q, r mit $p(X) = 1$, $q(X) = X^2$ und $r(X) = X^4$ die Koordinatentupel ${}_Bp$, ${}_Bq$ und ${}_Br$ bezüglich der Basis B: b_0, b_1, b_2, b_3, b_4 an.

Lösungshinweise hierzu: Die Bernsteinpolynome sind

$$\begin{array}{rcccccccccc} b_0(X) & = & 1 & - & 4X & + & 6X^2 & - & 4X^3 & + & X^4 \\ b_1(X) & = & & & 4X & - & 12X^2 & + & 12X^3 & - & 4X^4 \\ b_2(X) & = & & & & & 6X^2 & - & 12X^3 & + & 6X^4 \\ b_3(X) & = & & & & & & & 4X^3 & - & 4X^4 \\ b_4(X) & = & & & & & & & & & X^4 \end{array}$$

- Lineare Unabhängigkeit:

  Bei einer Linearkombination $a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_4 b_4 = 0$, folgt nun aus der ersten Spalte (Koeffizientenvergleich für X^0), dass $a_0 = 0$ gelten muss. Sukzessive ergeben sich dann aus den weiteren Spalten die Bedingungen $a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = 0$ und $a_4 = 0$, die Vektoren (Polynome) sind also linear unabhängig.

- Erzeugendensystem:

  Für jedes Polynom vom Grad höchstens 4 können die Koeffizienten einer Linearkombination anhand der Spalten nacheinander bestimmt werden. Jedes solche Polynom ist also als Linearkombination aus den Bernstein-Polynomen darstellbar, die Bernstein-Polynome sind also ein Erzeugendensystem.

Die Bernstein-Polynome sind also ein linear unabhängiges Erzeugendensystem für den Raum $\mathrm{Pol}_4 \mathbb{R}$, bilden also eine Basis.
Die Koordinatentupel für die gegebenen Polynome können wie oben beschrieben anhand des Koeffizientenvergleichs über die Spalten der Tabelle bestimmt werden und sind:
${}_Bp = (1, 1, 1, 1, 1)\,, \quad {}_Bq = (0, 0, 1/6, 1/2, 1)\,, \quad {}_Br = (0, 0, 0, 0, 1)\,.$

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 15. *Vektoren, Skalarprodukt, Vektorprodukt*

(a) Beweisen Sie für drei Vektoren $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ den folgenden Entwicklungssatz durch elementare Rechnung:

$$a \times (b \times c) = \langle a \,|\, c \rangle \, b - \langle a \,|\, b \rangle \, c.$$

(b) Seien $a \in \mathbb{R}^3$ und $c \in \mathbb{R}^3$ linear unabhängige Vektoren. Für welche Vektoren $b \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$a \times (b \times c) = (a \times b) \times c?$$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Die linke Seite ergibt

$$\begin{aligned} a \times (b \times c) &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \left(\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_2c_3 - b_3c_2 \\ b_3c_1 - b_1c_3 \\ b_1c_2 - b_2c_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_2(b_1c_2 - b_2c_1) - a_3(b_3c_1 - b_1c_3) \\ a_3(b_2c_3 - b_3c_2) - a_1(b_1c_2 - b_2c_1) \\ a_1(b_3c_1 - b_1c_3) - a_2(b_2c_3 - b_3c_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_1c_2 - a_2b_2c_1 - a_3b_3c_1 + a_3b_1c_3 \\ a_3b_2c_3 - a_3b_3c_2 - a_1b_1c_2 + a_1b_2c_1 \\ a_1b_3c_1 - a_1b_1c_3 - a_2b_2c_3 + a_2b_3c_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und die rechte Seite

$$\begin{aligned} \langle a \,|\, c \rangle \, b - \langle a \,|\, b \rangle \, c &= \begin{pmatrix} b_1(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) - c_1(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) \\ b_2(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) - c_2(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) \\ b_3(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) - c_3(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} b_1a_2c_2 + b_1a_3c_3 - c_1a_2b_2 - c_1a_3b_3 \\ b_2a_1c_1 + b_2a_3c_3 - c_2a_1b_1 - c_2a_3b_3 \\ b_3a_1c_1 + b_3a_2c_2 - c_3a_1b_1 - c_3a_2b_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Durch Umsortieren erkennt man die Gleichheit.

(b) Mit **(a)** ist

$$\begin{aligned} a \times (b \times c) - (a \times b) \times c &= \langle a \,|\, c \rangle \, b - \langle a \,|\, b \rangle \, c + c \times (a \times b) \\ &= \langle a \,|\, c \rangle \, b - \langle a \,|\, b \rangle \, c + \langle c \,|\, b \rangle \, a - \langle c \,|\, a \rangle \, b \\ &= - \langle a \,|\, b \rangle \, c + \langle c \,|\, b \rangle \, a = 0. \end{aligned}$$

Da a und c linear unabhängig sind, müssen die Skalarprodukte verschwinden, $\langle a \,|\, b \rangle = 0 = \langle c \,|\, b \rangle$, d.h., $b \perp a$ und $b \perp c$ bzw. b parallel zu $a \times c$.

Aufgabe H 16. *Matrizenmultiplikationen*

Gegeben seien die Matrizen

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3\sqrt{5}}{10} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3\sqrt{5}}{10} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{5}}{10} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{5}}{10} & \frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{3}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $Q^{\mathsf{T}}Q$, $Q^{\mathsf{T}}A$, $Q^{\mathsf{T}}A\,S$ und $SQ^{\mathsf{T}}A\,S\,Q^{\mathsf{T}}A - S\,S^{\mathsf{T}}A^{\mathsf{T}}Q\,Q^{\mathsf{T}}A$.

Hinweis: Für beliebige Matrizen M und N, für die das Produkt MN definiert ist, gilt: $(MN)^{\mathsf{T}} = N^{\mathsf{T}}M^{\mathsf{T}}$.

Lösungshinweise hierzu:

- $Q^{\mathsf{T}}Q = E_3$
- $$Q^{\mathsf{T}}A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \sqrt{5} & \frac{3\sqrt{5}}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{6}}{2} \end{pmatrix}$$
- $Q^{\mathsf{T}}AS = E_3$
- $$SQ^{\mathsf{T}}ASQ^{\mathsf{T}}A - SS^{\mathsf{T}}A^{\mathsf{T}}QQ^{\mathsf{T}}A = S\left(Q^{\mathsf{T}}AS - S^{\mathsf{T}}A^{\mathsf{T}}Q\right)Q^{\mathsf{T}}A = S\,(E_3 - E_3)\,Q^{\mathsf{T}}A = 0_{3\times 3}$$

  oder

  $$SQ^{\mathsf{T}}ASQ^{\mathsf{T}}A - SS^{\mathsf{T}}A^{\mathsf{T}}QQ^{\mathsf{T}}A = SQ^{\mathsf{T}}A - SQ^{\mathsf{T}}A = E_3 - E_3 = 0_{3\times 3}$$

Aufgabe H 17. *Lineares Gleichungssystem*

Jeden Montag um halb sieben liefert Bauer Klaus Kartoffeln, Zwiebeln und Tomaten an die 3 Gemüsehändler in der Nordbahnhofstraße. Diese Woche hat er hat 630 kg Kartoffeln, 220 kg Zwiebeln und 340 kg Tomaten dabei. Beim ersten Händler verkauft er 200 kg Kartoffeln, 20 kg Zwiebeln und 120 kg Tomaten und erhält dafür 264 Euro. Der zweite Händler nimmt 150 kg Kartoffeln, 50 kg Zwiebeln und 50 kg Tomaten ab. Dem dritten Händler kann er die restlichen Kartoffeln und Zwiebeln verkaufen, allerdings kann dieser nur 140 kg Tomaten nehmen. Der dritte Händler zahlt 352 Euro. Da Klaus die restlichen Tomaten auch noch loswerden möchte, fährt er nochmal zum zweiten Händler zurück, der ihm tatsächlich die restlichen Tomaten abnimmt, so dass Klaus insgesamt 806 Euro eingenommen hat.

Wieviel kostet bei Bauer Klaus also jeweils 1 kg Kartoffeln, Zwiebeln oder Tomaten? (Die Preise sind natürlich für alle Händler gleich.)

Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem auf. Geben Sie an, welche Größen durch Ihre Variablen beschrieben werden und berechnen Sie die Preise.

Lösungshinweise hierzu: Wir bezeichnen die Kilopreise für Kartoffeln, Zwiebeln oder Tomaten mit x_1, x_2 bzw. x_3.
Aus den Gesamtsummen der Waren und des dafür erhaltenen Geldes ergibt sich folgendes: Der dritte Händler nimmt 630 kg -200 kg -150 kg $= 280$ kg Kartoffeln und 220 kg -20 kg -50 kg $= 150$ kg Zwiebeln. Der zweite Händler nimmt insgesamt 340 kg -120 kg -140 kg $= 80$ kg Tomaten und zahlt $806 - 264 - 352 = 190$ Euro.
Man erhält das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcrcrcl} 200x_1 & + & 20x_2 & + & 120x_3 & = & 264 \\ 150x_1 & + & 50x_2 & + & 80x_3 & = & 190 \\ 280x_1 & + & 150x_2 & + & 140x_3 & = & 352\,. \end{array}$$

Zunächst multiplizieren wir die erste Gleichung mit 15, die zweite mit 6 und die dritte mit 2 und erhalten

$$\begin{array}{rcrcrcl} 3000x_1 & + & 300x_2 & + & 1800x_3 & = & 3960 \\ 900x_1 & + & 300x_2 & + & 480x_3 & = & 1140 \\ 560x_1 & + & 300x_2 & + & 280x_3 & = & 704\,. \end{array}$$

Subtraktion der zweiten und dritten Gleichung von der ersten ergibt

$$\begin{array}{rcrcl} 2100x_1 & + & 1320x_3 & = & 2820 \\ 2440x_1 & + & 1520x_3 & = & 3256\,. \end{array}$$

Multiplikation der ersten Gleichung mit 38 und der zweiten mit 33 ergibt

$$\begin{array}{rcrcl} 79800x_1 & + & 50160x_3 & = & 107160 \\ 80520x_1 & + & 50160x_3 & = & 107448\,. \end{array}$$

Subrtaktion ergibt $720x_1 = 288$ oder $x_1 = 2/5$. und damit $x_3 = (10716 - 7980 \cdot 2/5)/5016 = 3/2$. Also ist $x_2 = (704 - 280 \cdot 3/2 - 560 \cdot 2/5)/300 = 1/5$.
Ein Kilogramm Kartoffeln kostet also 0,40 Euro, ein Kilogramm Zwiebeln 0,20 Euro und ein Kilogramm Tomaten 1,5 Euro.
Probe:

$$\begin{array}{rcrcrcl} 200 \cdot 2/5 & + & 20 \cdot 1/5 & + & 120 \cdot 3/2 & = & 264 \\ 150 \cdot 2/5 & + & 50 \cdot 1/5 & + & 80 \cdot 3/2 & = & 190 \\ 280 \cdot 2/5 & + & 150 \cdot 1/5 & + & 140 \cdot 3/2 & = & 352\,. \end{array}$$

und zusätzlich

$$630 \cdot 2/5 + 220 \cdot 1/5 + 340 \cdot 3/2 = 252 + 44 + 510 = 806\,.$$

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 18. *Lineare Gleichungssysteme*

Geben Sie für die folgenden Gleichungssysteme über dem jeweils angegebenen Körper K die Koeffizientenmatrix und die rechte Seite an. Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathcal{L}$ mit Hilfe des Gauß-Algorithmus. Machen Sie eine Probe.

(a) $$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & - & 6x_2 & + & 2x_3 & = & -4 \\ x_1 & - & 2x_3 & + & 4x_2 & = & 2 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & - & 5x_3 & = & 6 \end{array}\,, \qquad K = \mathbb{R}$$

(b) $$\begin{array}{rcrcrcr} 2z_1 & + & 4z_2 & + & 2z_3 & = & 2 \\ 2z_1 & + & 5z_2 & + & 4z_3 & = & 3 \\ z_1 & + & 2z_2 & + & z_3 & = & 1 \\ 2z_1 & + & 6z_2 & + & 6z_3 & = & 4 \end{array}\,, \qquad K = \mathbb{C}$$

(c) $$\begin{array}{rcrcr} (1+\mathrm{i})z_1 & + & 2z_2 & = & 4 \\ (1-\mathrm{i})z_2 & - & 2z_1 & = & -1 \end{array}\,, \qquad K = \mathbb{C}$$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Koeffizientenmatrix A und rechte Seite b:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 2 \\ 1 & 4 & -2 \\ 2 & 5 & -5 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Gauß-Algorithmus:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 3 & -6 & 2 & -4 \\ 1 & 4 & -2 & 2 \\ 2 & 5 & -5 & 6 \end{array}\right] \to \begin{array}{r} Z_2: \\ Z_1 - 3Z_2: \\ Z_3 - 2Z_2: \end{array} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & -18 & 8 & -10 \\ 0 & -3 & -1 & 2 \end{array}\right] \to$$

$$\begin{array}{r} Z_1 - 4Z_3/(-3): \\ Z_3/(-3): \\ Z_2 - 6Z_3: \end{array} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -10/3 & 14/3 \\ 0 & 1 & 1/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & 14 & -22 \end{array}\right] \to \begin{array}{r} Z_1 + 10Z_3/42: \\ Z_2 - Z_3/42: \\ Z_3/14: \end{array} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & -4/7 \\ 0 & 1 & 0 & -1/7 \\ 0 & 0 & 1 & -11/7 \end{array}\right]$$

Damit ist die Lösunsmenge $\mathcal{L} = \left\{(-4/7, -1/7, -11/7)^{\intercal}\right\}$.

Probe: z.B. Einsetzen in zweite Gleichung:

$-4/7 - 2 \cdot (-11/7) + 4 \cdot (-1/7) = (-4 + 22 - 4)/7 = 14/7 = 2$.

(b) Koeffizientenmatrix A und rechte Seite b:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 6 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Gauß-Algorithmus:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 6 & 4 \end{array}\right] \to \begin{array}{r} Z_1/2: \\ Z_2 - Z_1: \\ Z_3 - Z_1/2: \\ Z_4 - Z_1: \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \end{array}\right] \to \begin{array}{r} Z_1 - 2Z_2: \\ Z_2: \\ Z_3: \\ Z_4 - 2Z_2: \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Damit ist die Lösunsmenge

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{C} \right\}$$

Probe: $(-1,1,0)^\intercal$ in Gleichungssystem:
$-2+4=2\,,\ -2+5=3\,,\ -1+2=1\,,\ -2+6=4$
Vektor:
$6-8+2=0\,,\ 6-10+4=0\,,\ 3-4+1=0\,,\ 6-12+6=0\,.$

(c) Das LGS ist $Ax=b$ mit der Koeffizientenmatrix A und der rechte Seite b:

$$A = \begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} & 2 \\ -2 & 1-\mathrm{i} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Gauß-Algorithmus:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1+\mathrm{i} & 2 & 4 \\ -2 & 1-\mathrm{i} & -1 \end{array}\right] \to$$

$$\begin{array}{r} Z_2/(-2): \\ Z_1 - (1+\mathrm{i})Z_2: \end{array} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & (\mathrm{i}-1)/2 & 1/2 \\ 0 & 3 & (7-\mathrm{i})/2 \end{array}\right] \to \begin{array}{r} Z_1 - (\mathrm{i}-1)Z_2/6: \\ Z_2/3: \end{array} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1-2\mathrm{i}/3 \\ 0 & 1 & (7-\mathrm{i})/6 \end{array}\right]$$

Damit erhalten wir die Lösungsmenge

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 1-2\mathrm{i}/3 \\ (7-\mathrm{i})/6 \end{pmatrix} \right\}.$$

Probe:
$(1+\mathrm{i})(1-2\mathrm{i}/3) + 2(7-\mathrm{i})/6 = 1 + 2/3 + 7/3 + \mathrm{i} - 2\mathrm{i}/3 - \mathrm{i}/3 = 4$
$-2(1-2\mathrm{i}/3) + (1-\mathrm{i})(7-\mathrm{i})/6 = -2 + 7/6 - 1/6 + 4\mathrm{i}/3 - 7\mathrm{i}/6 - \mathrm{i}/6 = -1$

Aufgabe H 19. *Gauß-Algorithmus*

(a) Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax=b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 10 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & -4 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} -3 \\ 21 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Bestimmen sie alle reellen Lösungen des linearen Gleichungssystems mit Hilfe des Gauß-Algorithmus.

(b) Gibt es $\alpha \in \mathbb{R}$, für welche das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1+\alpha & \alpha+2 & 2\alpha+3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

(i) genau eine Lösung **(ii)** keine Lösung **(iii)** mehrere Lösungen

besitzt? Bestimmen sie jeweils alle reellen Lösungen mit Hilfe des Gauß-Algorithmus.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Gauß-Algorithmus:

$$\left[\begin{array}{rrrrrr||r} -2 & -4 & 1 & -1 & 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 2 & 10 & 2 & 1 & 21 \\ 1 & 2 & -2 & -4 & -2 & 2 & -3 \end{array}\right] \to \begin{array}{r} Z_3: \\ Z_2 - 2Z_3: \\ Z_1 + 2Z_3: \end{array} \left[\begin{array}{rrrrrr||r} 1 & 2 & -2 & -4 & -2 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 6 & 18 & 6 & -3 & 27 \\ 0 & 0 & -3 & -9 & -3 & 6 & -9 \end{array}\right]$$

$$\to \begin{array}{r} x_2 \leftrightarrow x_3: \\ Z_1 - 2Z_3/3: \\ Z_3/(-3): \\ Z_2 + 2Z_3: \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc||c} x_1 & x_3 & x_2 & x_4 & x_5 & x_6 & b \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccr||c} 1 & 0 & 2 & 2 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 9 \end{array}\right] \end{array}$$

$$\to \begin{array}{r} x_2 \leftrightarrow x_6 \\ Z_1 + 2Z_3/9: \\ Z_2 + 2Z_3/9: \\ Z_3/9: \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc||c} x_1 & x_3 & x_6 & x_4 & x_5 & x_2 & b \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc||c} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

Also ist die Lösung (mit vertauschten Unbestimmten)

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_6 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; r, s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

und Umkehrung der Vertauschungen ergibt

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} \in \mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; r, s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

(b)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1+\alpha & \alpha+2 & 2\alpha+3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & \alpha \end{array}\right] \to \begin{array}{r} Z_3: \\ Z_2: \\ Z_1-(1+\alpha)Z_3: \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & \alpha \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\alpha & 1 & -(1+\alpha)\alpha \end{array}\right] \to$$

$$\begin{array}{r} Z_1-2Z_2: \\ Z_2: \\ Z_3+\alpha Z_2: \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\alpha & -(1+\alpha)\alpha \end{array}\right] \to \begin{array}{r} Z_1: \\ Z_2-Z_3/(1+\alpha): \\ Z_3/(1+\alpha): \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & -\alpha \end{array}\right]$$

Die letzte Umformung ist nur für $\alpha \neq -1$ nötig und möglich ist.

Somit gibt es für $\alpha \neq -1$ die eindeutige Lösung $\alpha(1,1,-1)^\intercal$ und für $\alpha = -1$ die Lösungsmenge $\mathcal{L} = \{(-1,0,0)^\intercal + t(0,-1,1)^\intercal \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Es gibt kein α für das keine Lösung existiert.

Aufgabe H 20. *Drehung*

Die Drehung in der Ebene $\mathbb{R}^2$ ist durch eine lineare Abbildung $d\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben.

(a) Geben Sie die Matrixdarstellung einer Drehung im Uhrzeigersinn um den Winkel φ in der Standardbasis an.

(b) Verwenden Sie die Darstellung aus (a), um das Bild der Geraden

$$x = t\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

bei einer Drehung um $\pi/6$ im Uhrzeigersinn zu ermitteln.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Bei einer Drehung um φ im Uhrzeigersinn wird der Vektor e_1 auf $(\cos(\varphi), -\sin(\varphi))^\intercal$ abgebildet. Das Bild von e_2 ist $(\sin(\varphi), \cos(\varphi))^\intercal$.

Damit ist die Matrixdarstellung

$$d\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}\cos(\varphi) & \sin(\varphi)\\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

(b) Da die Abbildung linear ist, genügt es den Richtungsvektor abzubilden:

$$d\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{3} & 1\\ -1 & \sqrt{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+\sqrt{3}/2\\ \sqrt{3}-1/2\end{pmatrix}.$$

Die Bildgerade ist also

$$\tilde{x} = t\begin{pmatrix}1+\sqrt{3}/2\\ \sqrt{3}-1/2\end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 21. *Matrixdarstellungen*

Gegeben sind die lineare Abbildung

$$\alpha\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+z \\ y-2z \\ x-y \\ y \end{pmatrix},$$

die Vektoren

$$\begin{aligned} v_1 &= (1,1,0)^\intercal \in \mathbb{R}^3,\ v_2 = (0,1,1)^\intercal \in \mathbb{R}^3, \\ w_1 &= (1,1,0,0)^\intercal \in \mathbb{R}^4,\ w_2 = (0,2,1,0)^\intercal \in \mathbb{R}^4, w_3 = (0,0,0,1)^\intercal \in \mathbb{R}^4, \end{aligned}$$

und die Vektorräume $V = \mathrm{L}(v_1, v_2)$, $W = \mathrm{L}(w_1, w_2, w_3)$.

(a) Geben Sie die Matrixdarstellung von α bzgl. der Standardbasen an.

(b) Zeigen Sie: $B : v_1, v_2$ ist eine Basis von V und $C : w_1, w_2, w_3$ eine Basis von W .

(c) Zeigen Sie, dass das Bild des Unterraums V in W liegt, d.h. $\alpha(V) \subseteqq W$.

(d) Geben Sie die Matrixdarstellung der Einschränkung $\alpha' : V \to W : v \mapsto \alpha(v)$ bezüglich der Basen B und C an.

Lösungshinweise hierzu:

(a)

$${}_{E_4}\alpha_{E_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Da die Mengen definitionsgemäß Erzeugendensyteme bilden, genügt es die lineare Unabhängigkeit zu zeigen.

Bei einer Linearkombination $a_1v_1 + a_2v_2 = 0$ folgt aus der ersten Komponente $a_1 = 0$ und aus der dritten $a_2 = 0$. Die beiden Vektoren sind also linear unabhängig.

Bei einer Linearkombination $b_1w_1 + b_2w_2 + b_3w_3 = 0$ folgt aus der ersten Komponente $b_1 = 0$, aus der dritten $b_2 = 0$ und aus der vierten $b_3 = 0$, auch diese Vektoren sind linear unabhängig.

(c) Es ist

$$\alpha(v_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = w_1 + w_3 \text{ und } \alpha(v_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = w_1 - w_2 + w_3$$

und damit ist das Bild jeder Linaerkombination aus v_1, v_2 als Linearkombination aus w_1, w_2, w_3 darstellbar liegt also in W.

(d) In der k-ten Spalte der Matrix ${}_C\alpha'_B$ stehen die Koordinaten der Bilder (bezüglich der Basis von W) des k-ten Basisvektors (des Urbilds V); diese wurden in **(c)** bestimmt:

$$ {}_C\alpha'_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} $$

Hinweis: Die Matrix bezieht sich auf die Koordinatendarstellungen der Vektoren. Aufgrund der Dimensionen der Untervektorräume handelt es sich um eine 3×2 Matrix. Die Urbild- und Bildvektoren der Abbildung selbst sind immer noch Elemente des $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^4$.

Aufgabe H 22. *Rang und Kern*

Gegeben sei die von $t \in \mathbb{R}$ abhängige Matrix

$$ A_t = \begin{pmatrix} 1 & \sin^2(t) & t^2 - 2 \\ -e^{-t} & e^{-t}\cos^2(t) & te^{-t} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} , $$

die die lineare Abbildung $\alpha_t \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \colon x \mapsto A_t\, x$ beschreibt.
Bestimmen Sie den Rang von A_t in Abhängigkeit von $t \in \mathbb{R}$.
Bestimmen Sie das Bild und den Kern von α_t in Abhängigkeit von t.

Lösungshinweise hierzu:
Bringt man die Matrix auf Dreiecksform

$$ \begin{pmatrix} 1 & \sin^2(t) & t^2 - 2 \\ -e^{-t} & e^{-t}\cos^2(t) & te^{-t} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{array}{r} Z_1 : \\ Z_3 : \\ e^t Z_2 + Z_1 - Z_3 : \end{array} \begin{pmatrix} 1 & \sin^2(t) & t^2 - 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t^2 + t - 2 \end{pmatrix} $$

erkennt man dass die Matrix für $t^2 + t - 2 \neq 0$ vollen Rang 3 hat, und sonst Rang 2, also

$$ \operatorname{Rg} A_t = \begin{cases} 2 & t \in \{-2, 1\} \\ 3 & \text{sonst} \end{cases} $$

Hat die Matrix vollen Rang, so ist der Kern nur der Nullvektor, und das Bild der gesamte $\mathbb{R}^3$.
Für $t = 1$ ist

$$ A_1 = \begin{pmatrix} 1 & \sin^2(1) & -1 \\ -1/e & e^{-1}\cos^2(1) & 1/e \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} . $$

Die erste und letzte Spalte sind parallel und somit ist in diesem Fall

$$ \operatorname{Kern}(\alpha_1) = \left\{ s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; s \in \mathbb{R} \right\} , \ \operatorname{Bild}(\alpha_1) = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} e \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} e\sin^2(1) \\ \cos^2(1) \\ e \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\} . $$

Für $t = -2$ ist

$$A_{-2} = \begin{pmatrix} 1 & \sin^2(-2) & 2 \\ -e^2 & e^2\cos^2(-2) & -2e^2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Die erste und letzte Spalte sind wieder parallel und

$$\operatorname{Kern}(\alpha_{-2}) = \left\{ s \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \;\middle|\; s \in \mathbb{R} \right\}, \operatorname{Bild}(\alpha_{-2}) = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -e^2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \sin^2(-2) \\ e^2\cos^2(-2) \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

Aufgabe H 23. *Inverse*

Gegeben ist die invertierbare Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Inverse A^{-1} und lösen Sie damit die linearen Gleichungssysteme $Ax = b_j$ für die Vektoren $b_1 = (6, 2, 6)^\intercal$, $b_2 = (6, 1, -12)^\intercal$, $b_3 = (2, 3, 4)^\intercal$.

Lösungshinweise hierzu: Mit Hilfe des Gauß-Algorithmus berechnet sich

$$A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 9 & 6 & -9 \\ -3 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Lösungen der linearen Gleichungssysteme sind dann

$$x_1 = A^{-1}b_1 = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 9 & 6 & -9 \\ -3 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4/3 \end{pmatrix}$$

$$x_2 = A^{-1}b_2 = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 9 & 6 & -9 \\ -3 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 \\ -9 \\ -4/3 \end{pmatrix}$$

$$x_3 = A^{-1}b_3 = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 9 & 6 & -9 \\ -3 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 24. *Entwicklung einer Determinante*

Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 & -4 \\ 1 & 0 & 3 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Begründen Sie, warum A invertierbar ist, und berechnen Sie auch $\det(2A^{-1})$.

Lösungshinweise hierzu: Entwicklung nach der ersten Zeile ergibt

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 & -4 \\ 1 & 0 & 3 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -4 \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} -4 \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 3 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Determinanten der beiden 4×4 Matrizen werden jeweils durch Entwicklung nach der dritte Zeile bestimmt

$$\det A = -4(-2) \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} -4 \cdot 4 \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = -8 \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

und mit der Regel von Sarrus ergibt sich

$$\det A = -8(-4 + 0 - 3 + 9 - 0 - 0) = -16\,.$$

Da die Determinante $\neq 0$ ist, ist die Matrix A invertierbar und $\det(A^{-1}) = 1/\det(A) = -1/16$. Die 5×5-Matrix A hat eine Inverse mit der gleichen Größe. Bei der Multiplikation der Matrix mit 2 ergibt sich daher ein Faktor 2^5 für die Determinante, es ist also $\det(2A^{-1}) = -32/16 = -2$.

Aufgabe H 25. *Rechenregeln für Determinanten*

Gegeben ist die Abbildung

$$f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \colon x \mapsto \det \begin{pmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \\ 1 & 1 & x & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Ist die Abbilding f linear?

(b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt $f(x) = 0$?

Lösungshinweise hierzu: Subtraktion der ersten Zeile von den drei anderen ergibt

$$\det \begin{pmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \\ 1 & 1 & x & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1-x & x-1 & 0 & 0 \\ 1-x & 0 & 0 & x-1 \\ 1-x & 0 & x-1 & 0 \end{pmatrix}$$

und Addition der Spalten 2 bis 4 auf die erste dann

$$\det \begin{pmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1-x & x-1 & 0 & 0 \\ 1-x & 0 & 0 & x-1 \\ 1-x & 0 & x-1 & 0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x+3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x-1 \\ 0 & 0 & x-1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Schließlich liefert das Vertauschen der letzten Beiden Zeilen

$$\det \begin{pmatrix} x+3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x-1 \\ 0 & 0 & x-1 & 0 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} x+3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x-1 \end{pmatrix} = -(x+3)(x-1)^3$$

(a) Die Abbildung ist nicht linear, da $f(2) = -(2+3)(2-1)^3 = -5 \neq 0 = 2f(1)$

(b) Die Nullstellen von f sind $x_1 = 1$ und $x_2 = -3$.

Aufgabe H 26. *Schmidtsches Orthonormierungsverfahren*

In $\mathbb{R}^4$ sind die Vektoren $b_1 = (1,1,0,1)^\intercal$, $b_2 = (1,-2,0,0)^\intercal$ und $b_3 = (1,0,-1,2)^\intercal$ gegeben.

Konstruieren Sie (mit Hilfe des Schmidtschen Orthonormierungsverfahrens) eine Orthonormalbasis $F\colon f_1, f_2, f_3$ von $U = \mathrm{L}(b_1, b_2, b_3)$.

Lösungshinweise hierzu: Normieren des ersten Vektors:

$$f_1 = \frac{1}{|b_1|} b_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bestimmung eines orthogonalen Vektors f_2^*:

$$f_2^* = b_2 - \langle b_2 \mid f_1 \rangle \, f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{-1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Normierung:

$$f_2 = \frac{1}{|f_2^*|}\, f_2^* = \frac{1}{\sqrt{42}} \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bestimmung des dritten orthogonalen Vektors:

$$f_3^* = b_3 - \langle b_3 \,|\, f_1 \rangle\; f_1 - \langle b_3 \,|\, f_2 \rangle\; f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{3}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{6}{42} \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -7 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Normierung:

$$f_3 = \frac{1}{|f_3^*|}\, f_3^* = \frac{1}{\sqrt{105}} \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -7 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Aufgabe H 27. *Orthonormalbasis für Polynome*

Wir betrachten den Vektorraum $\mathrm{Pol}_3\,\mathbb{R} := \left\{ \sum_{j=0}^{3} \alpha_j X^j \;\middle|\; \alpha_j \in \mathbb{R} \right\}$ der reellen Polynome vom Grad höchstens 3 und das Skalarprodukt

$$\langle p \,|\, q \rangle := \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} p(x) q(x)\, \mathrm{d}\,x\,.$$

Bestimmen Sie aus der Basis $B : 1, X, X^2, X^3$ eine Orthonormalbasis F für den Vektorraum und geben Sie die Koordinaten ${}_F r$ des Polynoms $r(X) = 3X^2 + X + 1$ an.

Lösungshinweise hierzu: Normieren des ersten Polynoms:

$$\langle 1 \,|\, 1 \rangle = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} 1 \,\mathrm{d}\,x = 1 \Rightarrow f_1(X) = 1\,.$$

Bestimmung des linearen orthogonalen Polynoms f_2^*:

$$\langle X \,|\, 1 \rangle = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} x \,\mathrm{d}\,x = 0 \Rightarrow f_2^*(X) = X\,.$$

Normierung:

$$\langle X \,|\, X \rangle = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} x^2 \,\mathrm{d}\,x = 1/3 \Rightarrow f_2(X) = \sqrt{3} X\,.$$

Bestimmung des quadratischen orthogonalen Polynoms f_3^*:

$$\left\langle X^2 \,\middle|\, 1 \right\rangle = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^2 \,\mathrm{d}\,x = 1/3\,, \left\langle X^2 \,\middle|\, \sqrt{3}X \right\rangle = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \sqrt{3}x^3 \,\mathrm{d}\,x = 0 \Rightarrow f_3^*(X) = X^2 - \frac{1}{3}\,.$$

Normierung:

$$\left\langle X^2 - 1/3 \,\middle|\, X^2 - 1/3 \right\rangle = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (x^2 - 1/3)^2 \,\mathrm{d}\,x = 4/45 \Rightarrow f_3(X) = \frac{3\sqrt{5}}{2}(X^2 - 1/3)\,.$$

Bestimmung des kubischen orthogonalen Polynoms f_4^*:

$$\left\langle X^3 \,\middle|\, 1 \right\rangle = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^2 \,\mathrm{d}\,x = 0\,, \left\langle X^3 \,\middle|\, \sqrt{3}X \right\rangle = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \sqrt{3}x^4 \,\mathrm{d}\,x = \frac{\sqrt{3}}{5}\,, \left\langle X^3 \,\middle|\, f_3(X) \right\rangle = 0$$

$$\Rightarrow \quad f_4^*(X) = X^3 - \frac{3}{5}X\,.$$

Normierung:

$$\left\langle X(X^2 - 3/5) \,\middle|\, X(X^2 - 3/5) \right\rangle >= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^2(x^2-3/5)^2 \,\mathrm{d}\,x = 4/175 \Rightarrow f_4(X) = \frac{5\sqrt{7}}{2}\,X(X^2-3/5))\,.$$

Da in r kein kubischer Term auftritt, muss die vierte Koordinate 0 sein. Um den Summanden $3X^2$ zu erzeugen muss dann die dritte Koordinate als $2/\sqrt{5}$ gewählt werden und da

$$r(X) - 2/\sqrt{5}f_3(X) = 3X^2 + X + 1 - 3(X^2 - 1/3) = X + 2$$

ist sind die noch zu bestimmenden Koordinaten 2 und $1/\sqrt{3}$, also ist

$${}_F r = (2, 1/\sqrt{3}, 2/\sqrt{5}, 0)\,.$$

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 28. *Affine Abbildung*

Gegeben ist eine affine Abbildung

$$\alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon x \mapsto Ax + t\,,$$

mit $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und $t \in \mathbb{R}^2$.

Die Abbildung bildet die Gerade $g : y = -x + 4$ punktweise auf sich selbst ab (Fixpunktgerade). Des weiteren ist $\alpha((1,2)^\intercal) = (3,4)^\intercal$.

(a) Bestimmen Sie den linearen Anteil von α. Handelt es sich bei α um eine (eigentliche) Isometrie?

(b) Bestimmen Sie den Translationsanteil von α.

(c) Bestimmen Sie die Umkehrabbildung α^{-1}.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Die Abbildung ist durch drei Punkte, die nicht auf einer Gerade liegen, und deren Bilder bestimmt.

Zusätzlich zu dem gegebenen Punkt $P = (1,2)$ kann man auf der Fixpunktgeraden z.B. $Q_1 = (1,3)^\intercal$ und $Q_2 = (2,2)^\intercal$ wählen. Damit ist

$$\alpha(Q_1) - \alpha(P) = AQ_1 + t - AP - t = A(Q_1 - P) = A\begin{pmatrix}1-1\\3-2\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

und die Differenz auf der linken Seite führt auf $(-2,-1)^\intercal$. Entsprechend erhält man bei Verwendung von Q_2 statt Q_1

$$\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix} = \alpha(Q_2) - \alpha(P) = A\begin{pmatrix}2-1\\2-2\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\,.$$

Also ist der lineare Teil der Affinität

$$A = \begin{pmatrix}-1 & -2\\-2 & -1\end{pmatrix}$$

Die Determinante ist $(-1)(-1) - (-2)(-2) = -3$ und somit handelt es sich nicht um eine Isometrie.

(b) Für einen Fixpunkt z.B. Q_1 gilt

$$Q_1 = AQ_1 + t, \quad \text{also} \quad t = Q_1 - AQ_1 = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-1 & -2\\-2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\8\end{pmatrix}\,.$$

$*$ **Probe**

Für den Punkt P erhält man

$$\alpha(P) = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} .$$

Bildet man einen Punkt $Q = (x, 4-x)^\intercal$ der Geraden ab, erhält man

$$\alpha(Q) = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 4-x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-8 \\ -4-x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 4-x \end{pmatrix} ,$$

also ist die Gerade tatsächlich eine Fixpunktgerade.

(c) Der lineare Anteil der Umkehrabbildung ist

$$A^{-1} = \frac{-1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

und mit der selben Fixpunktgerade ist

$$Q_1 = A^{-1}Q_1 + t', \quad \text{also} \quad t' = Q_1 - A^{-1}Q_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \end{pmatrix} .$$

Also

$$\alpha^{-1} : v \mapsto \frac{-1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} v + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \end{pmatrix} .$$

Aufgabe H 29. *Spiegelung*

Gegeben ist im $\mathbb{R}^3$ die Ebene, die durch die Gleichung

$$x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 19$$

beschrieben wird.

(a) Bestimmen Sie eine Matrix A und einen Vektor t so, dass die Spiegelung an der Ebene durch die affine Abbildung $\alpha\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon x \mapsto Ax + t$ beschrieben wird.

(b) Machen Sie die Probe, indem Sie $\alpha \circ \alpha$ berechnen.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Um die Spiegelung an der Ebene zu beschreiben, bilden wir zu jedem Punkt $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3) \in \mathbb{R}^3$ den Spiegelpunkt $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$. Der Vektor $n = (1, -3, 3)^\intercal$ steht orthogonal auf der Ebene (Satz 2.9.5), folglich ist die folgende Gerade orthogonal zur Ebene und geht durch den Punkt $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)$.

$$h = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix},\ \lambda \in \mathbb{R} \right\} .$$

Um den Schnittpunkt der Geraden h mit der Ebene zu erhalten setzen wir die Punkte von h in die Ebenengleichung ein:

$$\tilde{x}_1 + \lambda - 3\tilde{x}_2 + 9\lambda + 3\tilde{x}_3 + 9\lambda = 19,$$

daher liegt der Schnittpunkt mit der Ebene bei

$$\lambda_0 = \frac{19 - \tilde{x}_1 + 3\tilde{x}_2 - 3\tilde{x}_3}{19}.$$

Der Spiegelpunkt $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$ liegt also bei

$$2\lambda_0 = \frac{38 - 2\tilde{x}_1 + 6\tilde{x}_2 - 6\tilde{x}_3}{19},$$

und ist durch die folgenden Koordinaten gegeben:

$$\begin{aligned}
\hat{x}_1 &= 2 + \frac{1}{19}\left(17\tilde{x}_1 + 6\tilde{x}_2 - 6\tilde{x}_3\right), \\
\hat{x}_2 &= -6 + \frac{1}{19}\left(6\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 + 18\tilde{x}_3\right), \\
\hat{x}_3 &= 6 + \frac{1}{19}\left(-6\tilde{x}_1 + 18\tilde{x}_2 + \tilde{x}_3\right).
\end{aligned}$$

Also erhalten wir

$$\begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{19}\begin{pmatrix} 17 & 6 & -6 \\ 6 & 1 & 18 \\ -6 & 18 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Matrix A und Vektor t sind durch

$$A = \frac{1}{19}\begin{pmatrix} 17 & 6 & -6 \\ 6 & 1 & 18 \\ -6 & 18 & 1 \end{pmatrix}, \qquad t = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

gegeben.

(b) Der lineare Anteil von α^2 ist

$$\begin{aligned}
A^2 &= \frac{1}{19}\begin{pmatrix} 17 & 6 & -6 \\ 6 & 1 & 18 \\ -6 & 18 & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{19}\begin{pmatrix} 17 & 6 & -6 \\ 6 & 1 & 18 \\ -6 & 18 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{361}\begin{pmatrix} 289+36+36 & 0 & 0 \\ 0 & 36+1+324 & 0 \\ 0 & 0 & 36+324+1 \end{pmatrix} = E_3
\end{aligned}$$

und der Translationsanteil

$$At+t = \frac{1}{19}\begin{pmatrix} 17 & 6 & -6 \\ 6 & 1 & 18 \\ -6 & 18 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{19}\begin{pmatrix} -38 \\ 114 \\ -114 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die doppelte Spiegelung entspricht also tatsächlich der Identität.

Aufgabe H 30. *Koordinatentransformation*

Gegeben sind das Standard-Koordinatensystem $\mathbb{E}$ und das affine Koordinatensystem

$$\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$$

im $\mathbb{R}^3$ sowie die lineare Abbildung $\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : v \mapsto Av$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

(a) Geben Sie die Koordinatentransformationen ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$ und ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$ an.

(b) Geben Sie die Beschreibung der Abbildung α bzgl. des Koordinatensystems $\mathbb{F}$ an.

Lösungshinweise hierzu: Man erhält mit der Formel ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}(v) = Fv + P$ aus der Vorlesung direkt

$${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}} : v \mapsto \begin{pmatrix} -2 & 6 & 2 \\ 2 & -6 & -3 \\ -3 & 8 & 3 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

und mit der Formel ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}(v) = F^{-1}(v - P)$ für die Umkehrabbildung

$${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}} : v \mapsto \begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 \\ 3/2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \left(v - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 \\ 3/2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} -9 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Nach Satz 4.7.12 wird die Abbildung α bzgl. des Koordinatensystems $\mathbb{F}$ durch

$$v \mapsto F^{-1}AFv + F^{-1}(AP - P + t) = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 11 \\ 0 & 8 & 13/2 \\ 3 & -12 & -6 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 12 \\ 5/2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

mit $t = 0$ beschrieben.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 31. *Eigenwerte und Eigenvektoren*

Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenräume der folgenden Matrizen.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ \mathrm{i} & -3+\mathrm{i} & 1-\mathrm{i} \\ 1 & 0 & 2+2\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Geben Sie auch jeweils die algebraische und geometrische Vielfachheit der Eigenwerte an.

Lösungshinweise hierzu: Zu A:

$$\chi_A(\lambda) = (1-\lambda)((1-\lambda)(-2-\lambda)+3) = (1-\lambda)(\lambda^2+\lambda-1)$$

Nullstellen bzw. Eigenwerte: $\lambda_1 = 1, \lambda_{2,3} = \dfrac{-1 \pm \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$

Alle Eigenwerte haben algebraische Vielfachheit 1. Somit sind auch alle geometrische Vielfachheiten 1.

Eigenraum zu $\lambda_1 = 1 : V(1) = \mathbb{C}(1,0,0)^\mathsf{T}$ ist aus der ersten Spalte von A ablesbar.

Eigenraum zu $\lambda_2 = \dfrac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$:

$$(A-\lambda_2 E)v = \begin{pmatrix} 3/2-\sqrt{3}\mathrm{i}/2 & -2 & 1 \\ 0 & 3/2-\sqrt{3}\mathrm{i}/2 & 3 \\ 0 & -1 & -3/2-\sqrt{3}\mathrm{i}/2 \end{pmatrix} v \overset{!}{=} 0 \Rightarrow V(\lambda_2) = \mathbb{C}\begin{pmatrix} -8-2\sqrt{3}\mathrm{i} \\ -6 \\ 3-\sqrt{3}\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

Da die Matrix nur reelle Einträge hat ergibt sich der Eigenraum zu $\lambda_3 = \overline{\lambda_2}$ durch komplexe Konjugation:

$$V(\lambda_3) = \mathbb{C}\begin{pmatrix} -8+2\sqrt{3}\mathrm{i} \\ -6 \\ 3+\sqrt{3}\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

Zu B:

Die Eigenwerte können von der Diagonalen abgelesen werden:

$\lambda_1 = 2\,, \quad \lambda_2 = \mathrm{i}-3\,, \quad \lambda_3 = 2+2\mathrm{i}$

Alle Eigenwerte haben algebraische Vielfachheit 1. Somit sind auch alle geometrische Vielfachheiten 1.

$V(\lambda_2) = \mathrm{L}\left((0,1,0)^\mathsf{T}\right)$ ist aus der zweiten Spalte von B ablesbar.

Eigenraum zu $\lambda_1 = 2$:

$$(B-2E)v = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \mathrm{i} & \mathrm{i}-5 & 1-\mathrm{i} \\ 1 & 0 & 2\mathrm{i} \end{pmatrix} v \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad V(2) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 26\mathrm{i} \\ \mathrm{i}-8 \\ -13 \end{pmatrix}\right)$$

Eigenraum zu $\lambda_3 = 2+2\mathrm{i}$:

$$(B-2E)v = \begin{pmatrix} -2\mathrm{i} & 0 & 0 \\ \mathrm{i} & -\mathrm{i}-5 & 1-\mathrm{i} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} v \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad V(\lambda_3) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1-\mathrm{i} \\ 5+\mathrm{i} \end{pmatrix}\right)$$

Zu C:
Entwicklung von $\det(C-\lambda E)$ nach der ersten Spalte ergibt

$$\begin{aligned}
&\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & -2 & 2 & -2 \\ 0 & -\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & -1 \\ 2 & -2 & 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} \\
= \;& (2-\lambda)\det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ -2 & 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} - 2\det\begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ -\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \end{pmatrix} \\
= \;& (2-\lambda)(\lambda(1-\lambda)(1+\lambda) + 2 - 2(1-\lambda) - \lambda) - 2(2 + 2\lambda(1-\lambda) - 2\lambda - (1-\lambda)) \\
= \;& (2-\lambda)(2\lambda - \lambda^3) - 2(2\lambda - 2\lambda^2) = \lambda^4 - 2\lambda^3 + 2\lambda^2
\end{aligned}$$

Somit sind die Eigenwerte: $\lambda_1 = 0, \lambda_{2,3} = 1 \pm \mathrm{i}$ mit den algebraischen Vielfachheiten $e_0 = 2, e_{1+\mathrm{i}} = e_{1-\mathrm{i}} = 1$.
Der Eigenraum zum Eigenwert Null entspricht dem Lösungsraum des zugehörigen homogenen Linearen Gleichungssystems und ist

$$V(0) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Die geometrischen Vielfachheiten sind also $d_0 = 2, d_{1+\mathrm{i}} = d_{1-\mathrm{i}} = 1$.
Eigenraum zu $\lambda_2 = 1+\mathrm{i}$:

$$(C-\lambda_2 E)v = \begin{pmatrix} 1-\mathrm{i} & -2 & 2 & -2 \\ 0 & -1-\mathrm{i} & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -\mathrm{i} & -1 \\ 2 & -2 & 1 & -2-\mathrm{i} \end{pmatrix} v \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow V(\lambda_2) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} \\ \mathrm{i} \\ \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

und zu $\lambda_3 = 1-\mathrm{i}$:

$$V(\lambda_3) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1-\mathrm{i} \\ -\mathrm{i} \\ -\mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

zu D:
Die Matrix entsteht zwar durch Zeilentausch aus der Matrix C, dies kann aber zur Bestimmung der Eigenwerte und Eigenvektoren nicht ausgenutzt werden.
Eigenwerte: Wegen dem 2×2 Nullblock unten links, ist

$$\det(D-\lambda E) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -2 & 2 & -2 \\ 2 & -2-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda^2-4+4)(\lambda^2-1+1) = \lambda^4 \, .$$

Es gibt also nur den Eigenwert 0 mit algebraischer Vielfachheit 4.
Das homogene lineare Gleichungssystem hat den Lösungsraum

$$V(0) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Die geometrische Vielfachheit ist somit $d_0 = 2$.

Aufgabe H 32. *Parameterabhängige Eigenwerte und Eigenvektoren*
Gegeben sei die von den Parametern $a, b \in \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$ abhängige Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -a & ab & a+b \\ 0 & b & ab \\ 0 & ab & b \end{pmatrix} .$$

(a) Für welche Paare (a, b) ist 0 ein Eigenwert von A?

(b) Bestimmen Sie a so, dass A die Eigenwerte 0 und 1 hat. Für welche b gibt es einen weiteren Eigenwert?

(c) Gibt es a und b so, dass A einen nicht-reellen Eigenwert hat?

(d) Bestimmen Sie die Eigenräume der Matrix A in Abhängigkeit von a und b .

Lösungshinweise hierzu:

(a) Das charakteristische Polynom ist

$$\chi_A(\lambda) = (-a-\lambda)((b-\lambda)^2 - a^2b^2)$$

und hat die Nullstellen $\lambda_1 = -a, \lambda_{2,3} = b(1 \pm a)$. Da $a = 0$ und $b = 0$ nicht erlaubt sind, muss für einen Eigenwert 0 der Parameter $a = \pm 1$ gewählt werden.

(b) Wählt man $a = -1$ ist $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 0$. $\lambda_3 = 2b$ ist dann ein weiterer Eigenwert, wenn $b \neq 1/2$ ist.

Für $a = 1$ ist $\lambda_3 = 0$. Um den Eigenwert 1 zu erhalten muss $b = 1/2$ gewählt werden – hier können die Eigenwerte 0 und 1 also nicht erzielt werden indem nur a festgelegt wird.

(c) Nein, für relle a, b sind auch alle Eigenwerte reell.

(d) Die Eigenräume sind

$$V(\lambda_1) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right), \quad V(\lambda_2) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad V(\lambda_3) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

sofern drei unterschiedliche Eigenwerte entstehen.
Für $b = -a/(1+a)$ ist $\lambda_1 = \lambda_2$ und somit

$$V(\lambda_1) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

und für $b = -a/(1-a)$ ist $\lambda_1 = \lambda_3$ und somit

$$V(\lambda_1) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Aufgabe H 33. *Charakteristisches Polynom*

Gegeben ist eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ für ein $n \in \mathbb{N}$, die die paarweise unterschiedlichen Eigenwerte $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ mit jeweils zugehörigen Eigenvektoren $v_1, v_2, \ldots, v_n \in \mathbb{C}^n$ hat.

(a) Geben Sie das charakteristische Polynom $\chi_A(\lambda)$ an.

(b) Sind v_k und v_ℓ für $k \neq \ell$ linear unabhängig?

(c) Ist jeder Eigenvektor von A auch Eigenvektor von A^2? Ist jeder Eigenvektor von A^2 auch Eigenvektor von A?

(d) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix A^2 sowie das zugehörige charakteristische Polynom $\chi_{A^2}(\lambda)$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Das charakteristische Polynom $\chi_A(\lambda)$ zu einer $n \times n$-Matrix hat Grad n und muss jeden Eigenwert als Nullstelle haben also ist

$$\chi_A(\lambda) = \prod_{k=1}^{n} (a_k - \lambda) = (a_1 - \lambda)(a_2 - \lambda) \ \cdots \ (a_n - \lambda)$$

(b) Sind zwei Vektoren v_k, v_ℓ linear abhängig, so existiert ein Faktor $\lambda \neq 0$ mit $v_k = \lambda v_\ell$. Daraus folgt

$$Av_k = A\lambda v_\ell \qquad \Rightarrow \qquad a_k v_k = a_\ell \lambda v_\ell = a_\ell v_k \,.$$

Da v_k ein Eigenvektor ist und somit nicht der Nullvektor sein kann, muss also $a_k = a_\ell$ gelten. Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung, dass die Eigenwerte paarweise verschieden sind und daher müssen die Eigenvektoren linear unabhängig sein.

(c) Die definierende Gleichung für einen Eigenvektor v_k zum Eigenwert a_k ist $Av_k = a_k v_k$. Daher ist

$$A(Av_k) = Aa_k v_k = a_k A v_k = a_k^2 v_k \,.$$

Der Eigenvektor v_k ist also auch ein Eigenvektor von A^2 zum Eigenwert a_k^2 .

Die Umkehrung gilt nicht, da durch das Quadrieren Eigenwerte zusammenfallen und dadurch größere Eigenräume entstehen können. Z.B. ist für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$A^2 = E_2$ und somit ist jeder Vektor $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ Eigenvektor von A^2. Dies gilt aber nicht für A.

(d) Nach **(c)** liefert jeder Eigenvektor v_k einen Eigenwert a_k^2 von A^2. Fallen Eigenwerte durch quadrieren zusammen, folgt aus der linearen Unabhängigkeit der Eigenvektoren (siehe **(b)**), dass die geometrische Vielfachheit des entsprechenden Eigenraums 2 ist. Damit muss die algebraische Vielfachheit auch 2 sein, da diese mindestens der geometrischen Vielfachheit entsprechen muss. Das charakteristische Polynom von A^2 ist also

$$\chi_{A^2}(\lambda) = \prod_{k=1}^{n} (a_k^2 - \lambda) \,.$$

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 34. *symmetrische Matrizen*

Gegeben sind die symmetrischen Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix S so, dass $S^\intercal AS$ eine Diagonalmatrix ist.

(b) Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix T so, dass $T^\intercal BT$ eine Diagonalmatrix ist.

(c) Sei $n \geqq 1$. Zeigen Sie, dass T auch B^n diagonalisiert, d.h. dass auch $T^\intercal B^n T$ eine Diagonalmatrix ist. Geben Sie die Eigenwerte von B^n an.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Charakteristisches Polynom:

$$\det(A - \lambda E) = \lambda^2(1-\lambda) + \lambda + \lambda = -\lambda(\lambda+1)(\lambda-2)$$

Also sind die Eigenwerte $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 2$.

Zugehörige Eigenräume:

$$V(0) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right), \quad V(-1) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad V(2) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Da die Matrix reell und symmetrisch ist stehen die EV senkrecht aufeinander, durch Normierung ergibt sich also die gesuchte Transformationsmatrix S:

$$S = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & -\sqrt{2} & 2 \\ -\sqrt{3} & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}, \qquad D = S^\intercal AS = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) Das charakteristisches Polynom

$$\det(B - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 3-\lambda & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

kann durch Entwicklung bestimmt werden. Alternativ ergibt die Multiplikation der dritten Zeile und der dritten Spalte mit (-1):

$$\det(B - \lambda E) = (-1)^2 \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

und Subtraktion der ersten Zeile von den anderen drei liefert

$$\det(B-\lambda E)=\det\begin{pmatrix}3-\lambda & 1 & 1 & 1\\ \lambda-2 & 2-\lambda & 0 & 0\\ \lambda-2 & 0 & 2-\lambda & 0\\ \lambda-2 & 0 & 0 & 2-\lambda\end{pmatrix}$$

und Addition der Spalten 2 bis 4 auf die erste dann

$$\det(B-\lambda E)=\det\begin{pmatrix}6-\lambda & 1 & 1 & 1\\ 0 & 2-\lambda & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda\end{pmatrix}=(6-\lambda)(2-\lambda)^3$$

Somit sind die Eigenwerte $\lambda_1=6$ und $\lambda_2=2$.
Ein Eigenvektor zu λ_1 ist Lösung des LGS

$$\begin{pmatrix}-3 & 1 & -1 & 1\\ 1 & -3 & -1 & 1\\ -1 & -1 & -3 & -1\\ 1 & 1 & -1 & -3\end{pmatrix}v=0$$

also z.B. $v_1=(1,1,-1,1)^\intercal$.
Der Eigenraum zu λ_2 ist der Lösungsraum des homogenen LGS

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & 1\\ -1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1 & 1\end{pmatrix}v=0\,.$$

Durch einen Gauß-Schritt werden die Zeilen 2-4 zu Nullzeilen und somit wird der Lösungsraum von den Vektoren $v_2=(-1,1,0,0)^\intercal$, $v_3=(1,0,1,0)^\intercal$, $v_4=(-1,0,0,1)^\intercal$ aufgespannt.
Das Schmidtsche Orthonormierungsverfahren liefert

$$\tilde v_2=\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \tilde v_3=\frac{1}{\sqrt6}\begin{pmatrix}1\\1\\2\\0\end{pmatrix},\quad \tilde v_4=\frac{1}{\sqrt{12}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\3\end{pmatrix}$$

und somit ist

$$T=\begin{pmatrix}1/2 & -1/\sqrt2 & 1/\sqrt6 & -1/\sqrt{12}\\ 1/2 & 1/\sqrt2 & 1/\sqrt6 & -1/\sqrt{12}\\ -1/2 & 0 & 2/\sqrt6 & 1/\sqrt{12}\\ 1/2 & 0 & 0 & 3/\sqrt{12}\end{pmatrix},\qquad D=T^\intercal BT=\begin{pmatrix}6&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}.$$

(c) Es ist
$$T^{\mathsf{T}} B^n T = T^{\mathsf{T}} B T T^{\mathsf{T}} B T \cdots T^{\mathsf{T}} B T = D^n$$
und die Diagonalgestalt bleibt beim Potenzieren erhalten. Die Eigenwerte von B^n sind die n-ten Potenzen der Eigenwerte von B also $\lambda_1 = 2^n$ und $\lambda_2 = 6^n$.

Aufgabe H 35. *Eigenwerte und Eigenvektoren*
Die symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ hat die Eigenwerte
$$\lambda_1 = 1\,, \quad \lambda_2 = -1\,, \quad \lambda_3 = 2\,, \quad \lambda_4 = -2$$
und die zugehörigen Eigenvektoren
$$v_1 = (1,1,1,1)^{\mathsf{T}}\,, \quad v_2 = (-1,1,1,-1)^{\mathsf{T}}\,, \quad v_3 = (-1,0,0,1)^{\mathsf{T}}\,, \quad v_4 = (0,1,-1,0)^{\mathsf{T}}\,.$$

(a) Geben Sie eine orthogonale Matrix T an, die A diagonalisiert.

(b) Bestimmen Sie die Matrix A.

(c) Berechnen Sie die Inverse von A, ohne den Gauß-Algorithmus anzuwenden. Berechnen Sie A^5.

(d) Bestimmen Sie die Lösung x des Gleichungssystems $Ax = (-1,3,1,1)^{\mathsf{T}}$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Die Spalten der Matrix entsprechen der normierten Eigenvektoren, also ist
$$T = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/2 & 1/2 & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 1/2 & -1/2 & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Es ist
$$D = T^{\mathsf{T}} A T \Rightarrow A = T D T^{\mathsf{T}} \text{ mit } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$
also
$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(c) Für die Inverse gilt
$$A^{-1} = (TDT^{\mathsf{T}})^{-1} = (T^{\mathsf{T}})^{-1} D^{-1} T^{-1} = T D^{-1} T^{\mathsf{T}}$$

also

$$A^{-1} = T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} T^{\mathsf{T}} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es ist $A^5 = TD^5T^{\mathsf{T}}$

$$A^5 = T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 32 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -32 \end{pmatrix} T^{\mathsf{T}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 32 & 1 & 1 & -32 \\ 1 & -32 & 32 & 1 \\ 1 & 32 & -32 & 1 \\ -32 & 1 & 1 & 32 \end{pmatrix}.$$

(d) Mit der Inversen aus **(c)** ist

$$x = A^{-1} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Aufgabe H 36. *Zeilensummen*

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $A = (a_{jk}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix, die die Bedingung

$$\exists s \in \mathbb{R} \colon \forall j \in \{1, \dots, n\} \colon \sum_{k=1}^{n} a_{jk} = s$$

erfüllt, d.h. alle Zeilen der Matrix A haben die gleiche Summe.

(a) Bestimmen Sie einen Eigenwert und einen dazugehörigen Eigenvektor von A.

(b) Geben Sie für $n = 3$ eine Matrix A an, deren Einträge natürliche Zahlen sind, bei denen keine Zahl doppelt auftritt und die einen Eigenwert 33 hat.

Hinweis: Für **(b)** kann ein „Magisches Quadrat“ als Ausgangspunkt hilfreich sein.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Da alle Zeilen auf den gleichen Wert summieren ist der Vektor $v = (1, \dots, 1)^{\mathsf{T}}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert s, da durch die Multiplikation Av ein Vektor mit den Zeilensummen also sv entsteht.

(b) Das magische Quadrat der Ordnung 3 hat als Zeilensumme 15. Addiert man zu jedem Eintrag 6 wird die Summe um $3 \cdot 6 = 18$ also auf 33 erhöht.

Eine Matrix die die Bedingung erfuellt ist also durch

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 8 \\ 9 & 5 & 1 \\ 2 & 7 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 6 & 6 \\ 6 & 6 & 6 \\ 6 & 6 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 9 & 14 \\ 15 & 11 & 7 \\ 8 & 13 & 12 \end{pmatrix}$$

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 37. *quadratische Formen und Definitheit*

Gegeben seien $a, b \in \mathbb{R}$ und die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & 2b \\ 0 & a \end{pmatrix} .$$

(a) Schreiben Sie $q_{a,b}(x)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x^\mathsf{T} A x$ als Polynom.

(b) Geben Sie die Matrixdarstellung der quadratischen Form $q_{a,b}$ an.

(c) Zeigen Sie, dass die quadratische Form $q_{1,2}$ indefinit ist.

(d) Für welche Werte a, b ist $q_{a,b}$ positiv definit, für welche a, b ist sie negativ definit und für welche a, b ist sie indefinit?

Lösungshinweise hierzu:

(a) Mit $x = (x_1, x_2)^\mathsf{T}$ erhält man:

$$q_{a,b}(x) = x^\mathsf{T} A x = a x_1^2 + a x_2^2 + 2b x_1 x_2$$

(b) Da $S_{a,b} = S_{a,b}^\mathsf{T}$ gelten soll, ist

$$q_{a,b}(x) = x^\mathsf{T} S_{a,b} x = x^\mathsf{T} \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} x$$

(c) $S_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Die Determinante der Matrix lässt sich leicht ablesen. Es gilt $\det(S_{1,2}) = -3$. Da die Determinante das Produkt der Eigenwerte ist muss also einer positiv und einer negativ sein. Somit ist $S_{1,2}$ indefinit.

(d) Hierfür betrachten wir das charakteristische Polynom von $S_{a,b}$:

$$\chi(S_{a,b}) = (a - \lambda)^2 - b^2 = \lambda^2 - 2a\lambda + a^2 - b^2$$

und die Nullstellen sind

$$\lambda_\pm = a \pm b$$

Die Matrix ist positiv (negativ) definit genau dann wenn beide Eigenwerte positiv (negativ) sind. Sie ist indefinit genau dann wenn einer positiv und einer negativ ist. Also haben wir

(i) $S_{a,b}$ ist positiv definit genau dann wenn $a > 0$ und $b \in (-a, a)$ ist.

(ii) $S_{a,b}$ ist negativ definit genau dann wenn $a < 0$ und $b \in (a, -a)$ ist.

(iii) $S_{a,b}$ ist indefinit genau dann wenn $|b| > |a|$ ist.

Eine andere Möglichkeit dies einzusehen ist indem man die Spur (Summe der Eigenwerte) und die Determinante (Produkt der Eigenwerte) betrachtet.

Aufgabe H 38. *Ebene Schnitte einer Quadrik*

Gegeben ist die Quadrik

$$Q \;=\; \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid\ x^2+y^2+z^2+6xy-2yz=0\}$$

(a) Bestimmen Sie die euklidische Normalform der Quadrik und geben Sie an, welche Gestalt sie hat.

(b) Skizzieren Sie die ebenen Schnitte der Quadrik mit den Koordinatenebenen $x=0, y=0$ und $z=0$, sowie mit den Ebenen $x=1, y=1$ und $z=1$.

(c) Skizzieren Sie die Quadrik Q. Heben Sie die Schnitte aus **(b)** hervor.

Lösungshinweise hierzu:

(a) In Matrixdarstellung gilt:

$$Q=\{v=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid\ v^{\mathsf{T}}Av=0\}$$

mit

$$A=\begin{pmatrix}1&3&0\\3&1&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}.$$

Für das charakteristische Polynom gilt:

$$\begin{aligned}\chi(A)&=\det\begin{pmatrix}1-\lambda&3&0\\3&1-\lambda&-1\\0&-1&1-\lambda\end{pmatrix}\\&=(1-\lambda)\det\begin{pmatrix}1-\lambda&-1\\-1&1-\lambda\end{pmatrix}-3\det\begin{pmatrix}3&0\\-1&1-\lambda\end{pmatrix}\\&=(1-\lambda)(\lambda^2-2\lambda-9)\end{aligned}$$

Die Nullstellen sind also $\lambda_1=1-\sqrt{10},\ \lambda_2=1,\ \lambda_3=1+\sqrt{10}$ und damit ist die euklidische Normalform gegeben durch

$$Q=\{(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})\in\mathbb{R}^3 \mid\ (1-\sqrt{10})\tilde{x}^2+\tilde{y}^2+(1+\sqrt{10})\tilde{z}^2=0\}.$$

Die Quadrik hat also die Gestalt eines Doppelkegels.

(b) Jetzt gehen wir die einzelnen Schnitte durch. Die zugehörigen Bilder sind unten angehängt.

(i) Schnitt mit $x=0$: Für $x=0$ reduziert sich die Gleichung zu $y^2+z^2-2yz=0$. Quadratische Ergänzung liefert $(y-z)^2=0$. Es handelt sich also um die (Doppel-)Gerade $z=y$.

(ii) Schnitt mit $y = 0$: Hier haben wir $x^2 + z^2 = 0$. Dies ist nur für $x = z = 0$ erfüllt.

(iii) Schnitt mit $z = 0$: Die resultierende Gleichung $x^2 + y^2 + 6xy = 0$ ist äquivalent zu $y = (-3 \pm \sqrt{8})x$ und beschreibt damit ein Paar von Ursprungsgeraden.

(iv) Schnitt mit $x = 1$: Wenn wir $x = 1$ setzten, erhalten wir

$$1 + y^2 + z^2 + 6y - 2yz = 0$$
$$\Leftrightarrow \qquad z = y \pm \sqrt{-6y - 1}.$$

also eine Parabel.

(v) Schnitt mit $y = 1$: Hier erhalten wir

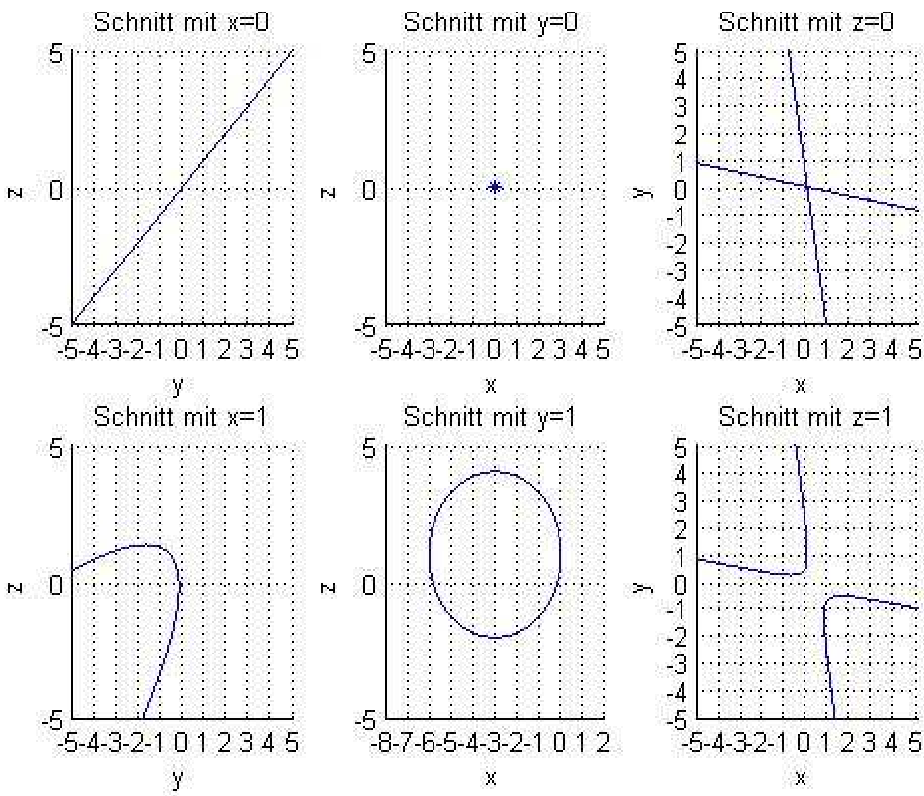
$$x^2 + 1 + z^2 + 6x - 2z = 0$$
$$\Leftrightarrow \qquad (x + 3)^2 + (z - 1)^2 = 9.$$

Die Lösung ist also ein verschobener Kreis mit Radius 3.

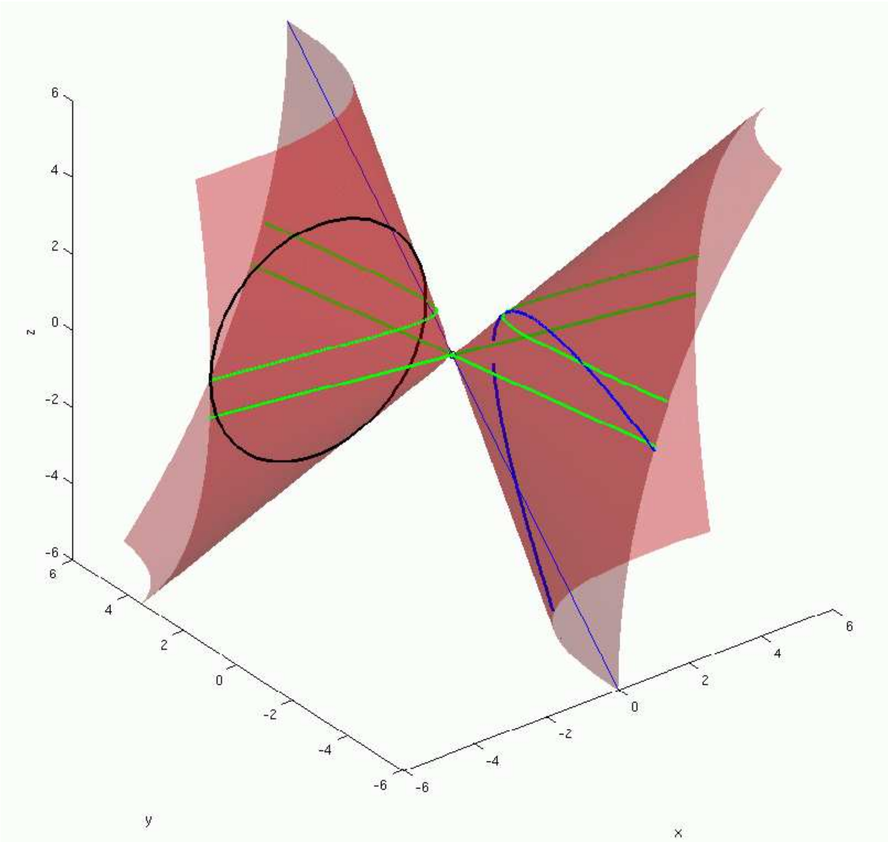
(vi) Schnitt mit $z = 1$ führt zu:

$$x^2 + y^2 + 1 + 6xy - 2y = 0$$
$$\Leftrightarrow \qquad y = \pm\sqrt{8x^2 - 6x} - 3x + 1.$$

In diesem Fall handelt es sich also um eine Hyperbel.



(c) Ein Bild der gesamten Quadrik:



Aufgabe H 39. *Euklidische Normalform*

Gegeben ist die Quadrik

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid 2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4) = 1\}$$

(a) Geben Sie die Matrixdarstellung der Quadrik an.

(b) Ist der quadratische Anteil der Quadrik positiv definit?

(c) Geben Sie den Typ der Quadrik an.

(d) Bringen Sie die Quadrik auf euklidische Normalform und geben Sie eine Basis an, bezüglich der die Quadrik euklidische Normalform besitzt.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Die gegebene Quadrik besitzt nur quadratische und konstante Terme. Damit A wieder symmetrisch ist schreiben wir:

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x^\intercal Ax - 1 = 0\}$$

wobei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) Die Eigenwerte der Matrix A sind $\lambda_1 = 5,\ \lambda_{2,3,4} = 1$ also alle positiv und damit ist die Matrix positiv definit.

(c) Hierzu betrachten wir die erweiterte Matrix A_{erw}

$$A_{erw} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix A hat vollen Rang und damit hat auch A_{erw} vollen Rang. Also gilt: $r_{erw} = r + 1$ und es handelt also sich um eine Mittelpunktsquadrik.

(d) Dazu müssen wir A zuerst diagonalisieren. Der erste Eigenvektor liegt im Kern der Matrix

$$(A - 5E_4) = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

und da alle Zeilensummen übereinstimmen muss $f_1^* = (1,1,1,1)^\mathsf{T}$ ein Eigenvektor sein. Die anderen drei Eigenvektoren liegen im Kern der Matrix

$$(A - 1E_4) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

hier ist eine Möglichkeit die Eigenvektoren zu erraten, drei orthogonale Eigenvektoren sind zum Beispiel: $f_2^* = (-1,1,0,0)^\mathsf{T}$, $f_3^* = (0,0,-1,1)^\mathsf{T}$, $f_4^* = (-1,-1,1,1)^\mathsf{T}$. Oder man benutzt z.B. das Gauß-Verfahren. Dies liefert die Spannvektoren $v_2^* = (-1,1,0,0)^\mathsf{T}$, $v_3^* = (-1,0,1,0)^\mathsf{T}$ und $v_4^* = (-1,0,0,1)^\mathsf{T}$. Da A symmetrisch ist stehen diese automatisch senkrecht auf f_1^*. Durch Normierung ergibt sich:

$$f_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ f_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ f_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ f_4 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Also gilt für die Transformationsmatrix F:

$$F = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 0 & -1 \\ 1 & \sqrt{2} & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -\sqrt{2} & 1 \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Probe:

$$
\begin{aligned}
F^\intercal A F &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 0 & -1 \\ 1 & \sqrt{2} & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -\sqrt{2} & 1 \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 5 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Also hat die Quadrik Q bezüglich der Basis $\mathbb{F} = (O; f_1, f_2, f_3, f_4)$ euklidische Normalform:

$$
\begin{aligned}
0 &= y^\intercal (F^\intercal A F) y - 1 \\
&= -5y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 - y_4^2 + 1.
\end{aligned}
$$

J. Hörner
B. Kabil
B. Krinn

Dr. M. Künzer
Prof. Dr. M. Stroppel

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 40. *Parameterabhängige Quadrik*
Bestimmen Sie für die Quadrik

$$Q_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1x_2 + \alpha x_3^2 + 2(\alpha+1)x_3 = 0\}$$

in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$ die Matrixform und den Typ.
Bestimmen Sie außerdem die euklidische Normalform und Gestalt von Q_1 und geben Sie das kartesische Koordinatensystem an, in dem die Quadrik euklidische Normalform besitzt.

Lösungshinweise hierzu:

$$Q_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x^\intercal A_\alpha x + 2a_\alpha^\intercal x = 0\}$$

wobei

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad a_\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha+1 \end{pmatrix}$$

Wir müssen drei Fälle unterscheiden:

(a) $\alpha = 0:\quad rg(A_\alpha) = 2 \quad rg(A_{erw}) = 4 \quad \Rightarrow$ parabolische Quadrik

(b) $\alpha = -1:\quad rg(A_\alpha) = 3 \quad rg(A_{erw}) = 3 \quad \Rightarrow$ kegelige Quadrik

(c) sonst : $rg(A_\alpha) = 3 \quad rg(A_{erw}) = 4 \quad \Rightarrow$ Mittelpunktsquadrik

Jetzt wenden wir uns der euklidischen Normalform von Q_1 zu. Zuerst müssen wir die Matrix des quadratischen Teils diagonalisieren.

$$\chi(A_1) = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (\lambda^2 - 1)(1 - \lambda)$$

Also sind die Nullstellen $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1,\ \lambda_3 = 1$. Die zwei Eigenvektoren zum Eigenwert 1 liegen im Kern der Abbildung

$$(A_1 - E_3) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Da die erste und zweite Zeile umgekehrtes Vorzeichen haben, ist $f_1^* = (1,1,0)$ ein möglicher Eigenvektor. Außerdem sieht man an der Nullspalte, dass $f_3^* = (0,0,1)$ ein weiterer möglicher Eigenvektor ist der auf dem ersten senkrecht steht. Der Eigenvektoren zum Eigenwert -1 liegt im Kern der Abbildung

$$(A_1 - E_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Jetzt stimmen die ersten beiden Zeilen überein, also liegt $f_2^* = (1, -1, 0)$ im Kern dieser Abbildung. Normierung der Eigenvektoren führt zu den folgenden Ergebnissen:

$$f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ f_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ f_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Unsere Transformationsmatrix hat also die Form:

$$F = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Und die transformierte Matrix hat also die Form:

$$\tilde{A}_1 = F^\intercal A_1 F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Für den linearen Anteil ergibt sich:

$$\tilde{a_1} = F^\intercal a_1 = (0, 0, 2)^\intercal$$

Jetzt verschieben wir den Ursprung:

$$\begin{aligned} 0 &= y^\intercal \tilde{A}_1 y + 2\tilde{a_1}^\intercal y \\ &= y_1^2 - y_2^2 + y_3^2 + 4y_3 \\ &= y_1^2 - y_2^2 + (y_3 + 2)^2 - 4 \end{aligned}$$

Bezüglich des neuen Koordinatensystems $\mathbb{G} = \{\vec{P}, f_1, f_2, f_3\}$ mit $\vec{P} = (0, 0, -2)$ hat also die Quadrik euklidische Normalform:

$$0 = -\frac{1}{4} z_1^2 + \frac{1}{4} z_2^2 - \frac{1}{4} z_3^2 + 1$$

und es handelt sich um ein einschaliges Hyperboloid.

Aufgabe H 41. *Monotonie und Beschränktheit*

Untersuchen Sie die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jeweils auf Monotonie und Beschränktheit. Geben Sie, falls möglich, eine obere und eine untere Schranke an.

(a) $a_n = \dfrac{3n}{2n+4}$

(b) $a_n = 3 + \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$

(c) $a_n = (-1)^n (2n+1)$

(d) $a_n = 8 \cos\left(\dfrac{-\pi n}{3}\right)$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Für die Monotonie betrachten wir immer die Differenz zweier Folgenglieder. Es gilt:

$$\begin{aligned} a_{n+1} - an &= \frac{3n+3}{2n+6} - \frac{3n}{2n+4} \\ &= \frac{12}{(2n+6)(2n+4)} > 0 \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Also ist die Folge streng monoton wachsend und damit ist eine mögliche untere Schranke $a_1 = \frac{1}{2}$. Eine Möglichkeit eine obere Schranke zu finden ist sich die Definition anzuschauen. Es muss ein $S \in \mathbb{R}$ geben, so dass $S - \frac{3n}{2n+4} > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, d.h.

$$\frac{2Sn + 4S - 3n}{2n+4} > 0 \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

Dies ist zum Beispiel für $S = 2$ erfüllt.

(b) Für die Differenz der Folgenglieder gilt hier:

$$a_{n+1} - a_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1} - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n}$$

Dieser Ausdruck ist größer oder kleiner als Null je nachdem ob n gerade ist oder nicht. Die Folge ist also nicht monoton. Da

$$\left|\left(-\frac{1}{3}\right)^{n}\right| < 1 \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

gilt, sind $s = 2$ und $S = 4$ mögliche obere und untere Schranken.

(c) Da $(-1)^n$ das Vorzeichen wechselt ist diese Folge wieder nicht monoton. Außerdem existiert in diesem Fall weder eine obere noch eine untere Schranke, da (2n+1) beliebig groß wird.

(d) Die Folge ist periodisch und nicht konstant also nicht monoton (Es genügt die ersten 4 Glieder anzuschauen: $a_1 = 4,\ a_2 = -4,\ a_3 = -8,\ a_4 = -4$). Da $|\cos(x)| < 1$ ist, ist sie aber beschränkt. Mögliche Schranken sind $s = -8$ und $S = 8$.

Aufgabe H 42. *Rekursive Folge*

Eine reelle Folge $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist für $q \in \mathbb{R}$ rekursiv definiert durch

$$a_0 := 1 \quad \text{und} \quad a_{n+1} := qa_n + 1 \quad \text{für } n \in \mathbb{N}_0.$$

(a) Geben Sie a_n in nicht-rekursiver Form an, d.h. bestimmen Sie a_n so, dass Sie zur Beschreibung nicht auf vorhergehende Folgenglieder zurückgreifen müssen.

(b) Untersuchen Sie die Folge jeweils für $q \in \{-1/2, 0, 1, 2\}$ auf Monotonie und Beschränktheit, geben Sie dabei jeweils obere beziehungsweise untere Schranken an, falls solche existieren.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir schreiben zuerst die ersten Glieder auf:

$$a_0 = 1,\ a_1 = q + 1,\ a_2 = q^2 + q + 1,\ a_3 = q^3 + q^2 + q + 1.$$

Dies legt die Vermutung nahe, dass

$$a_n = 1 + q + \ldots + q^n = \sum_{k=0}^{n} q^k \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

Formal kann man die Richtigkeit unserer Vermutung mit vollständiger Induktion beweisen:

$$\mathbf{IA}\ a_0 = \sum_{k=0}^{0} q^k = q^0 = 1$$

Also ist der Induktionsanfang gemacht. Für den Induktionsschritt nehmen wir an, dass ein $n \in \mathbb{N}_0$ existiert so dass

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} q^k$$

und zeigen, dass dies dann auch für $n + 1$ gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{IS}\ a_{n+1}^{rekursiv} = q a_n + 1 &\overset{Ann.}{=} q \sum_{k=0}^{n} q^k + 1 \\ &= \sum_{k=0}^{n} q^{k+1} + 1 \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} q^k + 1 \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} q^k = a_{n+1}^{explizit} \end{aligned}$$

Also stimmen die beiden Darstellungen für alle $n \in \mathbb{N}_0$ überein.

(b) Jetzt benutzen wir die explizite Darstellung. Für $q = 0$ gilt $a_n = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ also ist die Folge monoton und beschränkt mit den Schranken $s = 1$ und $S = 1$.
Für $q = \frac{1}{2}$ ist

$$a_{n+1} - a_n = \sum_{k=0}^{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^k - \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} > 0$$

also ist die Folge streng monoton wachsend. Eine mögliche untere Schranke ist also $s = a_0 = 1$ und da die Folge konvergiert (Vgl. Skript Bsp. 1.8.4), ist eine mögliche obere Schranke der Grenzwert:

$$S = \frac{1}{1 - 1/2} = 2$$

Für $q = -\frac{1}{2}$ ist die Folge nicht monoton, da

$$a_{n+1} - a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

das Vorzeichen wechselt. Dass sie wiederum nach oben und unten beschränkt ist sieht man mit Bsp. 1.8.4 aus dem Skript. Es gilt die Formel

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \left(-\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

Da

$$b_n := \left|\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right| \qquad , n \in \mathbb{N}_0$$

eine streng monotone fallende Nullfolge ist gilt $a_n \leqq \frac{2}{3}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = 1 =: S$ und $a_n \geqq \frac{2}{3}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3} =: s$

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 43. *Umgebungen*

Mit $U_\varepsilon(a) \subseteqq \mathbb{R}$ wird die ε-Umgebung um den Punkt a bezeichnet.

(a) Bestimmen Sie alle $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, für die $U_\varepsilon(3/2) \subseteqq (1,2)$ ist.

(b) Sei $x \in (1,2)$. Bestimmen Sie ein (von x abhängiges) $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, für das $U_\varepsilon(x) \subseteqq (1,2)$ ist.

(c) Seien $a, b \in \mathbb{R}^+$ mit $a < b$ und $x \in (a,b)$. Bestimmen Sie ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, für das $U_\varepsilon(x) \subseteqq (a,b)$ ist.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wegen $U_\varepsilon(3/2) = (3/2 - \varepsilon, 3/2 + \varepsilon)$ müssen die Bedingungen

$$3/2 - \varepsilon \geqq 1 \text{ und } 3/2 + \varepsilon \leqq 2 \qquad \Leftrightarrow \qquad \varepsilon \leqq 1/2 \quad \wedge \quad \varepsilon \leqq 1/2$$

erfüllt sein: $\varepsilon \in (0, 1/2)$.

(b) Wie oben gilt

$$U_\varepsilon(x) \subseteqq (1,2) \qquad \Leftrightarrow \qquad x-\varepsilon \geqq 1 \wedge x+\varepsilon \leqq 2 \qquad \Leftrightarrow \qquad \varepsilon \leqq x-1 \wedge \varepsilon \leqq 2-x\,,$$

und somit

$$\varepsilon \in \big(0, \min(x-1, 2-x)\big)\,.$$

(c) Aus

$$U_\varepsilon(x) \subseteqq (a,b) \qquad \Leftrightarrow \quad x - \varepsilon \geqq a \;\wedge\; x + \varepsilon \leqq b \qquad \Leftrightarrow \quad \varepsilon \leqq x - a \;\wedge\; \varepsilon \leqq b - x\,,$$

folgt

$$\varepsilon \in \big(0, \min(x-a, b-x)\big)\,.$$

Aufgabe H 44. *Konvergenz*

Untersuchen Sie die Folgen $\big(a_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz. Bestimmen Sie für konvergente Folgen den Grenzwert und geben Sie bei divergenten Folgen an, ob diese bestimmt divergieren.

(a) $a_n = \frac{7n^7}{n^7+n^6+n^5+n^4+n^3+n^2+n}$

(b) $a_n = \left(\frac{7n^7}{n^7+n^6+n^5+n^4+n^3+n^2+n}\right)^4$

(c) $a_n = \sqrt{n(n+1)}$

(d) $a_n = \sqrt{n(n+1)} - n$

(e) $a_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{2n}$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Erweitern mit n^{-7} ergibt

$$\frac{7n^7}{n^7+n^6+n^5+n^4+n^3+n^2+n} = \frac{7}{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^5}+\frac{1}{n^6}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{7}{1} = 7\,.$$

(b) Mit dem Ergebnis aus **(a)** ergibt sich durch mehrfaches Anwenden der Grenzwertsätze

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{7n^7}{n^7+n^6+n^5+n^4+n^3+n^2+n}\right)^4 \\ =\ &\left(\lim_{n\to+\infty}\frac{7n^7}{n^7+n^6+n^5+n^4+n^3+n^2+n}\right)^4 = 7^4 \end{aligned}$$

(c) Durch Umformung erhält man

$$\sqrt{n(n+1)} = \sqrt{n^2(1+1/n)} = n\sqrt{(1+1/n)} > n$$

einen Vergleich mit der divergenten Minorante $(n)_{n\in\mathbb{N}}$. Die Folge ist somit bestimmt divergent gegen $+\infty$.

(d) Eine Erweiterung und die Binomische Formel führen zu einem Quotienten, dessen Grenzwert einfach zu bestimmen ist.

$$\begin{aligned} \sqrt{n(n+1)}-n &= \frac{(\sqrt{n(n+1)}-n)(\sqrt{n(n+1)}+n)}{\sqrt{n(n+1)}+n} = \frac{n(n+1)-n^2}{\sqrt{n(n+1)}+n} \\ &= \frac{n}{\sqrt{n(n+1)}+n}\,\frac{1/n}{1/n} = \frac{1}{\sqrt{1+1/n}+1} \xrightarrow{n\to+\infty} \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(e) Mit der Substitution $n = 2m$ folgt

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{2n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n}{2}}\right)^{4\frac{n}{2}} = \left(\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right)^4 = e^4\,.$$

Aufgabe H 45. *Verallgemeinerte Fibonacci-Folge*

Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei definiert durch

$$f_1 := 1\,,\quad f_2 := 1\,,\quad f_3 := 2\,,\quad f_{n+1} := 6f_n - 11f_{n-1} + 6f_{n-2}\,.$$

Außerdem ist

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & 6 \end{pmatrix}$$

(a) Zeigen Sie, dass für alle $n \geqq 1$ die Gleichung

$$A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_{n+2} \\ f_{n+3} \end{pmatrix}$$

gilt.

(b) Bestimmen Sie eine Matrix T so, dass $T^{-1}AT$ Diagonalform besitzt.

(c) Verwenden Sie die Diagonalform und die Gleichung aus **(a)** um die explizite (nicht rekursive) Darstellung der Folgenglieder anzugeben.

Lösungshinweise hierzu: Die ersten Folgenglieder lauten

$$f_1 = 1, \quad f_2 = 1, \quad f_3 = 2, \quad f_4 = 6 \cdot 2 - 11 \cdot 1 + 6 \cdot 1 = 7\,.$$

(a) **IA** $n = 1$:

$$A^1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{1+1} \\ f_{1+2} \\ f_{1+3} \end{pmatrix}$$

Die Behauptung ist somit für $n = 1$ gezeigt.

IS $n \to n+1$:

$$\begin{aligned} A^{n+1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} &= A\,A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \overset{\text{IH}}{=} A \begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_{n+2} \\ f_{n+3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_{n+2} \\ f_{n+3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} f_{n+2} \\ f_{n+3} \\ 6f_{n+1} - 11f_{n+2} + 6f_{n+3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{n+2} \\ f_{n+3} \\ f_{n+4} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Somit ist die Behauptung per Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$ gezeigt.

(b) Das charakteristische Polynom der Matrix A lautet

$$\det(A - \lambda E) = (6 - \lambda)\lambda^2 + 6 - 11\lambda = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6$$

mit den Nullstellen $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ und $\lambda_3 = 3$.
Dazugehörige Eigenvektoren sind

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix A lässt sich somit zerlegen in $A = TDT^{-1}$ mit

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -5/2 & 1/2 \\ -3 & 4 & -1 \\ 1 & -3/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

(c) Mit $A^n = (TDT^{-1})^n = TD\underbrace{T^{-1}T}_{=E}D\underbrace{T^{-1}T}_{=E}\ldots TDT^{-1} = TD^nT^{-1}$ folgt

$$\begin{aligned} A^n \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} &= TD^nT^{-1}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&\\&2^n&\\&&3^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-5/2&1/2\\-3&4&-1\\1&-3/2&1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}3/2-2^n+3^n/2\\ \cdots \\ \cdots\end{pmatrix} \overset{\textbf{(b)}}{=} \begin{pmatrix}f_{n+1}\\f_{n+2}\\f_{n+3}\end{pmatrix} \end{aligned}$$

und somit

$$f_{n+1} = \frac{3}{2} - 2^n + \frac{3^n}{2}\,.$$

Eine Probe ergibt

$$f_{1+1} = \frac{3}{2} - 2^1 + \frac{3^1}{2} = 1, \quad f_{2+1} = \frac{3}{2} - 2^2 + \frac{3^2}{2} = 2, \quad f_{3+1} = \frac{3}{2} - 2^3 + \frac{3^3}{2} = 7\,.$$