O. Alaya, S. Demirel
M. Fetzer, B. Krinn
M. Wied

1. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 1

Wintersemester 2012/2013

Dr. M. Künzer
Prof. Dr. M. Stroppel

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 1. *Funktionsgraphen*

(a) Skizzieren Sie die Graphen der folgenden Funktionen.

- $f_1 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \colon x \mapsto \cos(x)$
- $f_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \colon x \mapsto \cos(x+1) - 2$
- $f_3 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \colon x \mapsto \cos(2x) + \sin(x)$

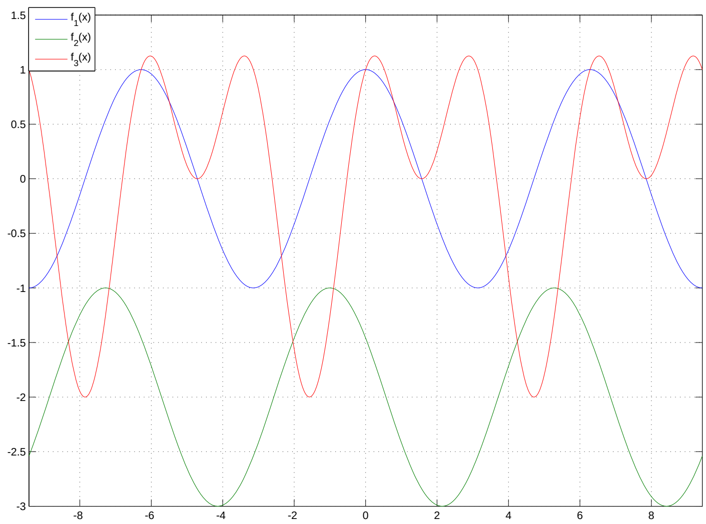
(b) Skizzieren Sie die Graphen der folgenden Funktionen. Geben Sie den Definitions– und Wertebereich dieser Funktionen an. Skizzieren Sie die Graphen der Umkehrfunktionen. Geben Sie den Definitions– und Wertebereich der Umkehrfunktionen an.

- $f \colon \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R} \colon x \mapsto \tan(x)$
- $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \colon x \mapsto x^3 + 3x^2 + 3x + 2$
- $h \colon [0, \infty) \to \mathbb{R} \colon x \mapsto \cosh(x) := \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$

Bestimmen Sie eine Abbildungsvorschrift für die Umkehrfunktion von g.

Lösungshinweise hierzu:

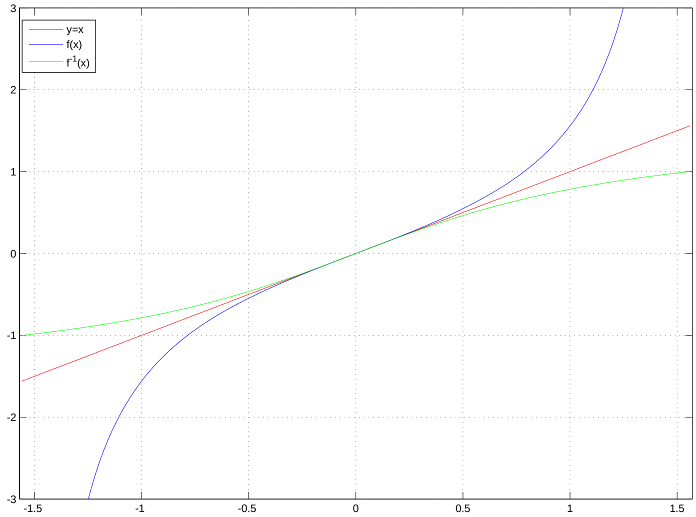
(a) Das Diagramm unten zeigt die Graphen zum ersten Aufgabenteil.

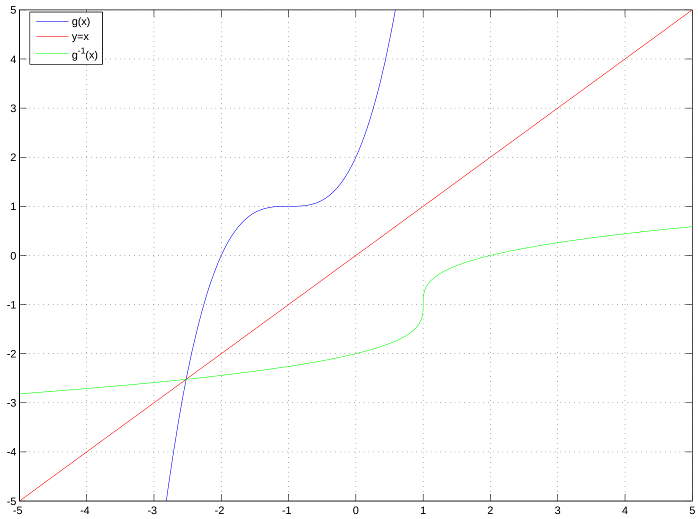


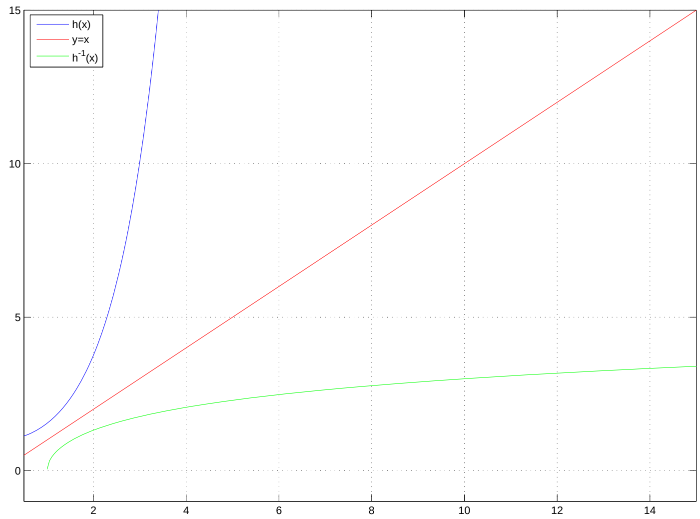
(b)
- Die Umkehrfunktion von $f(x) = \tan(x)$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert. Sie hat den Wertebereich $\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.
- Die Umkehrfunktion von $g(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert. Sie hat den Wertebereich auf ganz $\mathbb{R}$.
  Um die Umkehrfunktion zu berechnen, muss $y = g(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 2 =$

$(x+1)^3+1$ nach x aufgelöst werden. Dies ist gleichbedeutend mit dem Auflösen von $y=(x+1)^3+1$ nach x.
Die Umkehrabbildung ist damit $g^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon y \mapsto \sqrt[3]{y-1}-1$.

- Die Umkehrfunktion von $\cosh(x)$ ist auf $[1,\infty)$ definiert. Sie hat den Wertebereich $[1,\infty)$.







Aufgabe H 2. *Induktion*

Zeigen Sie mit vollständiger Induktion:

(a) Für jede natürliche Zahl n gilt: $\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1$

(b) Für alle natürlichen Zahlen $k > 1$ und alle positiven reellen Zahlen $x_1, \ldots, x_k$ gilt:

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_k) > 1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_k\,.$$

Lösungshinweise hierzu:

(a) IA Für $n = 1$ gilt $\sum_{k=1}^{1} k \cdot k! = 1 = 2! - 1$.

IH Es gelte $\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1$.

IS Wir berechnen mit Hilfe der Induktionshypothese

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k \cdot k! &= \sum_{k=1}^{n} k \cdot k! + (n+1)\cdot(n+1)! \\ &= (n+1)! - 1 + (n+1)\cdot(n+1)! \\ &= (n+1)!(1+(n+1)) - 1 = (n+2)! - 1. \end{aligned}$$

(b) IA Sei $k = 2$. Es gilt $(1+x_1)(1+x_2) = 1 + x_1 + x_2 + x_1x_2 > 1 + x_1 + x_2$, da x_1x_2 als Produkt zweier positiver Zahlen positiv ist.

IH Es gelte nun für eine natürliche Zahl k, dass $(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_k) > 1+x_1+x_2+\cdots+x_k$ ist.

IS Wir berechnen

$$\begin{aligned} & (1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_k)(1+x_{k+1}) \\ > \; & (1+x_1+x_2+\cdots+x_k)(1+x_{k+1}) \\ = \; & 1+x_1+x_2+\cdots+x_k+x_{k+1}+x_1x_{k+1}+\cdots+x_kx_{k+1} \\ > \; & 1+x_1+x_2+\cdots+x_k+x_{k+1}, \end{aligned}$$

da alle Produkte x_ix_{k+1} als Produkt zweier positiver Zahlen positiv sind.

Aufgabe H 3. *Induktion*

(a) Zeigen Sie: Für jede natürliche Zahl n ist $\frac{n}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n^3}{6}$ eine ganze Zahl.

(b) Die Fibonacci-Zahlen sind rekursiv definiert durch

$$f_1 := 1,\ f_2 := 1 \quad \text{und} \quad f_{n+1} := f_n + f_{n-1} \quad \text{für} \quad n \geqq 2.$$

Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass für $n \geqq 2$ gilt:

$$f_{n+1}f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^n.$$

Lösungshinweise hierzu:

(a) **IA** Für $n=1$ gilt, dass $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$ eine natürliche Zahl ist.

IH Es sei $\frac{n}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n^3}{6}$ eine ganze Zahl.

IS Wir berechnen

$$\begin{aligned} \frac{n+1}{3}+\frac{(n+1)^2}{2}+\frac{(n+1)^3}{6} &= \frac{n+1}{3}+\frac{n^2+2n+1}{2}+\frac{n^3+3n^2+3n+1}{6} \\ &= \underbrace{\frac{n}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n^3}{6}}_{\in\mathbb{Z} \text{ nach IH}} +1+\underbrace{\frac{2n}{2}}_{\in\mathbb{Z}}+\frac{3n^2+3n}{6}. \end{aligned}$$

Der Ausdruck $\frac{3n^2+3n}{6}$ lässt sich vereinfachen zu $\frac{n(n+1)}{2}$, was für alle natürlichen Zahlen n eine ganze Zahl ergibt, denn falls n gerade ist, so ist n durch 2 teilbar; ist n hingegen ungerade, so ist $n+1$ gerade und somit durch 2 teilbar.

(b) **IA** Sei $n=2$: Es gilt $f_3 = 1+1 = 2$ und damit $f_3f_1 - f_2^2 = 2-1 = (-1)^2$.

IH Für n sei $f_{n+1}f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^n$.

IS Wir benutzen im Folgenden die Rekursionsvorschrift der Fibonacci-Zahlen.

$$f_{n+2}f_n - f_{n+1}^2 = (f_{n+1}+f_n)f_n - f_{n+1}(f_n+f_{n-1}) = f_n^2 - f_{n+1}f_{n-1} = -(-1)^n = (-1)^{n+1}$$

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 4. *Komplexe Zahlen*

Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen der folgenden Gleichungen.

(a) $\frac{1}{2}z^2 + (1+\mathrm{i})z + (1+\mathrm{i}) = 0$

(b) $z^3 + 4z^2 + z - 26 = 0$

(c) $z^5 + z^3 - 30z = 0$

(d) $\frac{1}{z^2} = \mathrm{i}$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir lösen die quadratische Gleichung mit der Mitternachtsformel

$$\begin{aligned} z_{1,2} &= \frac{-(1+\mathrm{i}) \pm \sqrt{(1+\mathrm{i})^2 - 4\cdot\frac{1}{2}\cdot(1+\mathrm{i})}}{2\cdot\frac{1}{2}} = -1-\mathrm{i} \pm \sqrt{1+2\mathrm{i}-1-2-2\imath} \\ &= -1-\mathrm{i} \pm \sqrt{2\mathrm{i}^2} = -1-\mathrm{i} \pm \mathrm{i}\sqrt{2} \end{aligned}$$

Die Gleichung hat die Lösungen $z_1 = -1 + (-\sqrt{2}-1)\mathrm{i}$ und $z_2 = -1 + (\sqrt{2}-1)\mathrm{i}$.

(b) Raten ergibt die Lösung $z_1 = 2$. Polynomdivision liefert

$$\frac{z^3 + 4z^2 + z - 26}{z - 2} = z^2 + 6z + 13.$$

Wir wenden wieder die Mitternachtsformel an und erhalten $z_2 = -3 + 2\mathrm{i}$ und $z_3 = -3 - 2\mathrm{i}$.
Somit hat die Gleichung die Lösungen $z_1 = 2$, $z_2 = -3 + 2\mathrm{i}$ und $z_3 = -3 - 2\mathrm{i}$.

(c) Ausklammern ergibt die Gleichung $z(z^4 + z^2 - 30) = 0$, welche die Lösung $z_1 = 0$ hat. Die Substition $z^2 = x$ ergibt die quadratische Gleichung $x^2 + x - 30 = 0$. Mit der Mitternachtsformel ergeben sich die Lösungen $x_1 = 5$ und $x_2 = -6$. Durch die Resubstituieren ergibt sich $z_2 = \sqrt{5}$, $z_3 = -\sqrt{5}$ und $z_4 = \sqrt{6}\,\mathrm{i}$, $z_5 = -\sqrt{6}\,\mathrm{i}$. Die Gleichung hat also die Lösungsmenge $\mathcal{L} = \{0, \sqrt{5}, -\sqrt{5}, \sqrt{6}\,\mathrm{i}, -\sqrt{6}\,\mathrm{i}\}$.

(d) Es gilt $\frac{1}{z^2} = \mathrm{i} \Leftrightarrow z^2 = -\mathrm{i}$. Wir betrachten $-\mathrm{i} = (a + b\mathrm{i})^2 = a^2 - b^2 + 2ab\mathrm{i}$ und erhalten $a^2 = b^2$ bzw. $a = \pm b$ und $-\frac{1}{2} = ab$.
Somit sind die Lösungen $\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$ und $-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$.

Aufgabe H 5. *Abbildungen*

Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität.

(a) $f_1 \colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \colon x \mapsto x^2 + 1$

(b) $f_2 \colon \mathbb{C} \to \mathbb{R} \colon z \mapsto z + \overline{z}$

(c) $f_3 \colon \mathbb{C} \smallsetminus \{1\} \to \mathbb{C} \colon z \mapsto \frac{z}{2z-2}$

Lösungshinweise hierzu:

(a)
- Surjektivität: Der Wert $\frac{1}{2}$ liegt nicht im Bild von f_1, somit ist f_1 nicht surjektiv. Hierzu:

$$x^2 + 1 \overset{!}{=} \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 = -\frac{1}{2},$$

dies ist jedoch nicht möglich da x eine reelle Zahl ist.

- Injektivität: Seien $a, b \in \mathbb{R}^+$, wobei $f_1(a) = f_1(b)$ gelte, so folgt

$$a^2 + 1 = b^2 + 1 \Leftrightarrow a^2 = b^2 \overset{a,b \in \mathbb{R}^+}{\Leftrightarrow} a = b.$$

  Somit ist f_1 injektiv.
- Bijektivität: Da f_1 nicht surjektiv ist, ist f_1 nicht bijektiv.

(b) Sei $z = a + b\mathrm{i}$, somit gilt $f_2(a + b\mathrm{i}) = a + b\mathrm{i} + a - b\mathrm{i} = 2a$.

- Injektivität: Die beiden Zahlen $2 + \mathrm{i}$ und $2 - \mathrm{i}$ sind verschieden, aber es gilt

$$f_2(2 + \mathrm{i}) = 4 = f_2(2 - \mathrm{i}).$$

  Somit ist f_2 nicht injektiv.
- Surjektivität: Sei $y \in \mathbb{R}$ ein beliebig gewählter Wert. Nun gilt beispielsweise $f_2\left(\frac{a}{2}\right) = y$. Damit ist das Bild von f_2 die gesamte Menge $\mathbb{R}$ und f_2 ist surjektiv.
- Bijektivität: Da f_2 nicht injektiv ist, ist f_1 nicht bijektiv.

(c)

- Injektivität: Seien $z, \tilde{z} \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ und es gelte $f_3(z) = f_3(\tilde{z})$, so folgt

$$\begin{aligned} \frac{z}{2z-2} &= \frac{\tilde{z}}{2\tilde{z}-2} \\ \Leftrightarrow z(2\tilde{z}-2) &= \tilde{z}(2z-2) \\ \Leftrightarrow 2z\tilde{z} - 2z &= 2\tilde{z}z - 2\tilde{z} \\ \Leftrightarrow z &= \tilde{z}. \end{aligned}$$

  Somit ist f_3 injektiv.
- Surjektivität: Sei $\tilde{z} = f_3(z) \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} \tilde{z} &= \frac{z}{2z-2} \\ \Leftrightarrow \tilde{z}(2z-2) - z &= 0 \\ \Leftrightarrow (2\tilde{z}-1)z - 2\tilde{z} &= 0 \end{aligned}$$

  Für $\tilde{z} = \frac{1}{2}$ hat diese Gleichung keine Lösung. Es existiert also keine Zahl z im Definitionsbereich mit $f_3(z) = \frac{1}{2}$, d.h. f_3 ist nicht surjektiv.
- Bijektivität: Da f_3 nicht surjektiv ist, ist f_3 nicht bijektiv.

Aufgabe H 6. *Ungleichungen*

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden reellen Ungleichungen und skizzieren Sie diese.

(a) $|2x - 4| > \frac{1}{2}x + 1$

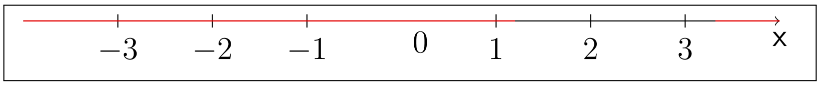
(b) $x + y \leqq 1$

(c) $|x| + |y| \leqq 1$

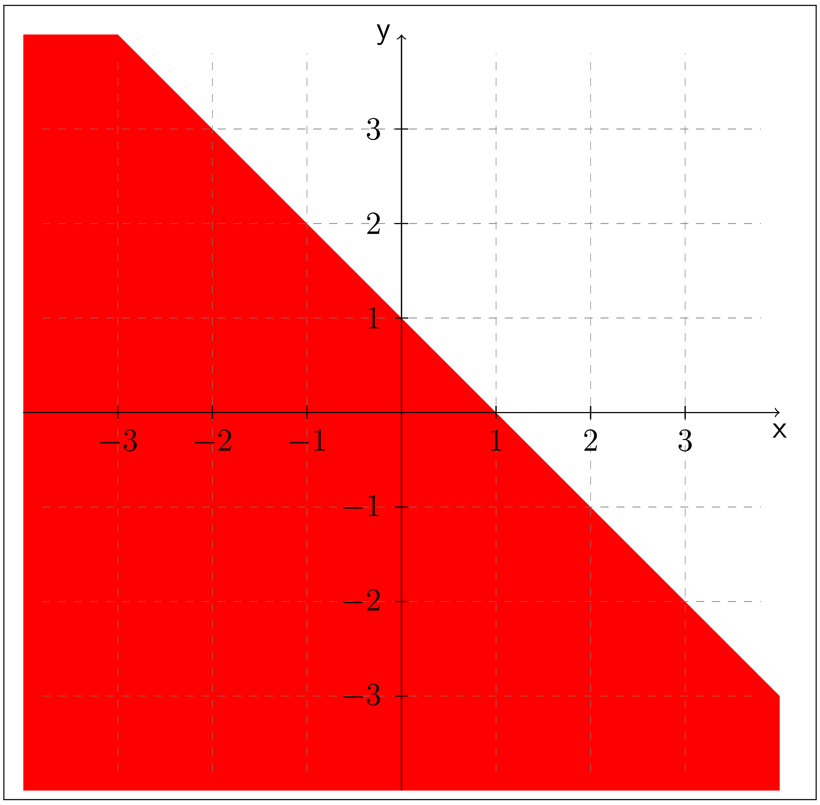
(d) $|x + y| + |x - y| \leqq 2$

Lösungshinweise hierzu:

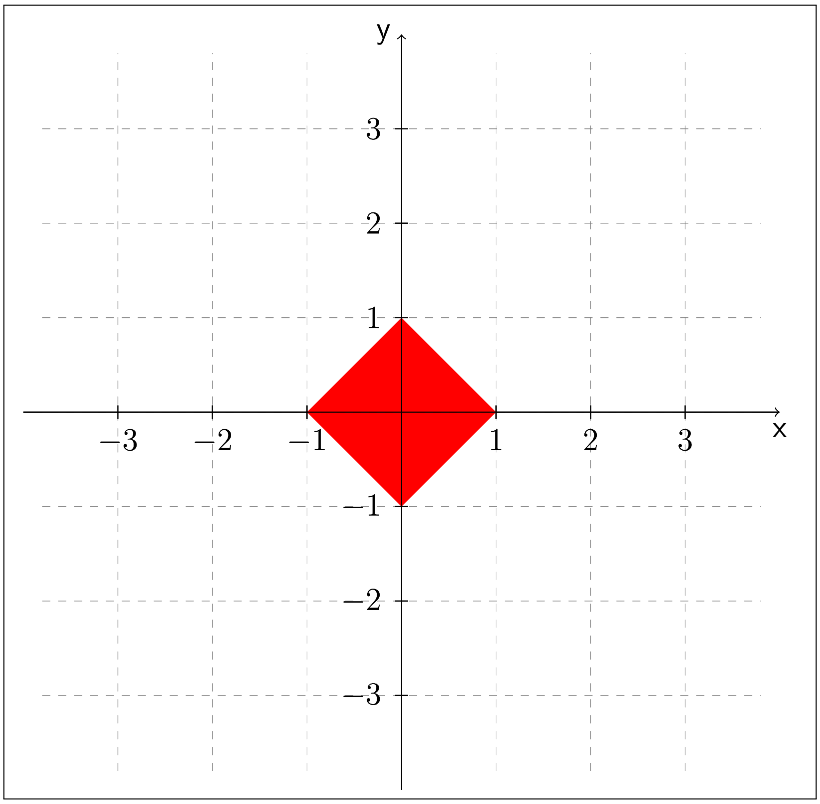
(a) Fall $2x - 4 \geqq 0$, d.h. $x \geqq 2$:
$2x - 4 > \frac{1}{2}x + 1 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x > 5 \Leftrightarrow x > \frac{10}{3}$
Fall $2x - 4 < 0$, d.h. $x < 2$:
$-2x + 4 > \frac{1}{2}x + 1 \Leftrightarrow 3 > \frac{5}{2}x \Leftrightarrow x < \frac{6}{5}$
Somit ist die Lösungsmenge $\mathcal{L} = \left(-\infty, \frac{6}{5}\right) \cup \left(\frac{10}{3}, +\infty\right)$.



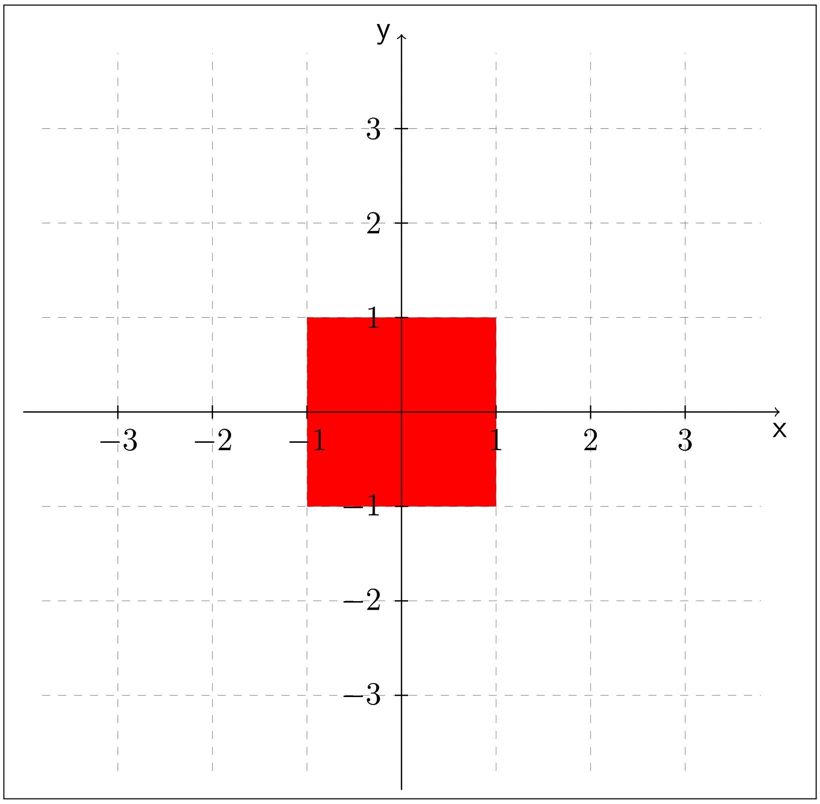
(b) $x + y \leqq 1 \Leftrightarrow y \leqq -x + 1$
Die Lösungsmenge $\mathcal{L} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid y \leqq -x + 1\}$ ist die Fläche unterhalb der Geraden $y = -x+1$.



(c) Fall $x, y \geqq 0$:
$x + y \leqq 1 \Leftrightarrow y \leqq -x + 1$
Fall $x \geqq 0$ und $y < 0$:
$x - y \leqq 1 \Leftrightarrow y \geqq x - 1$
Fall $x, y < 0$:
$-x - y \leqq 1 \Leftrightarrow y \geqq -x + 1$
Fall $x < 0$ und $y \geqq 0$:
$-x + y \leqq 1 \Leftrightarrow y \leqq x + 1$
Somit ist die Lösungsmenge die Menge, die von diesen Geraden umrandet wird.



(d) Fall $x + y \geqq 0$ und $x \geqq y$:
$x + y + x - y \leqq 2 \Leftrightarrow x \leqq 1$
Fall $x + y \geqq 0$ und $x < y$:
$x + y - x + y \leqq 2 \Leftrightarrow y \leqq 1$
Fall $x + y < 0$ und $x \geqq y$:
$-x - y + x - y \leqq 2 \Leftrightarrow y \geqq -1$
Fall $x + y < 0$ und $x < y$:
$-x - y - x + y \leqq 2 \Leftrightarrow x \geqq -1$
Somit wird die Lösungsmenge von diesen Geraden umrandet.



Aufgabe H 7. *Komplexe Zahlenebene*

Gegeben seien die Abbildungen

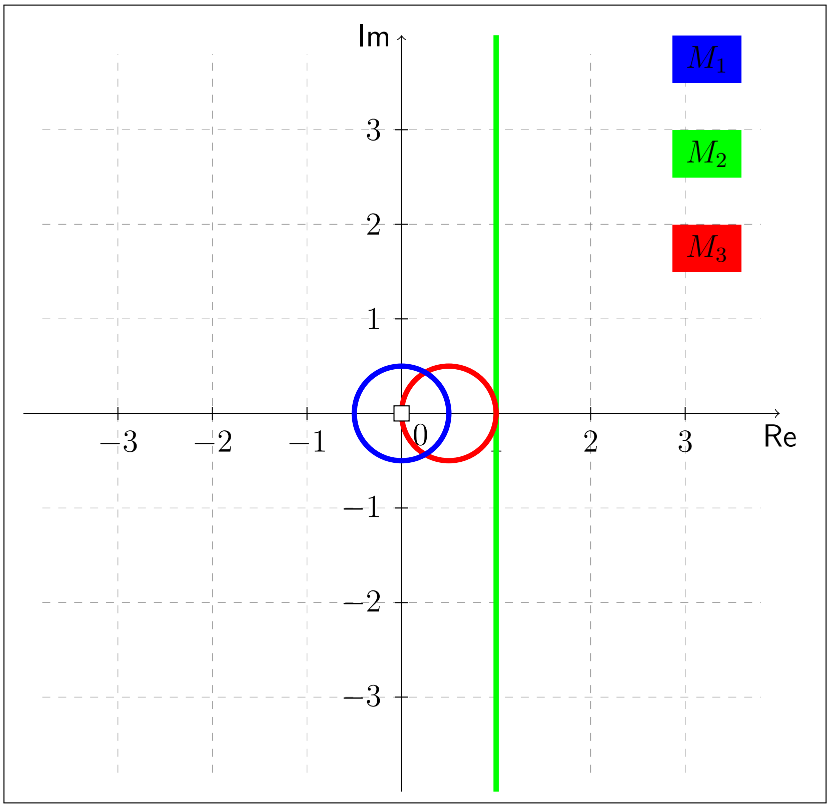
$$f_1 \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C} \colon z \mapsto (3+4\mathrm{i})z \quad \text{und} \quad f_2 \colon \mathbb{C} \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{C} \smallsetminus \{0\} \colon z \mapsto z^{-1}$$

sowie die Mengen

$$\begin{aligned} M_1 &= \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z| = \frac{1}{2} \right\}, \\ M_2 &= \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \operatorname{Re}(z) = 1 \right\} \quad \text{und} \\ M_3 &= \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2} \right\} \smallsetminus \{0\}. \end{aligned}$$

Skizzieren Sie die Mengen M_1, M_2 und M_3 sowie $f_1(M_1)$, $f_1(M_2)$, $f_1(M_3)$ und $f_2(M_1)$, $f_2(M_2)$, $f_2(M_3)$.

Lösungshinweise hierzu: Im folgenden Bild sind die Mengen M_1, M_2 und M_3 skizziert.



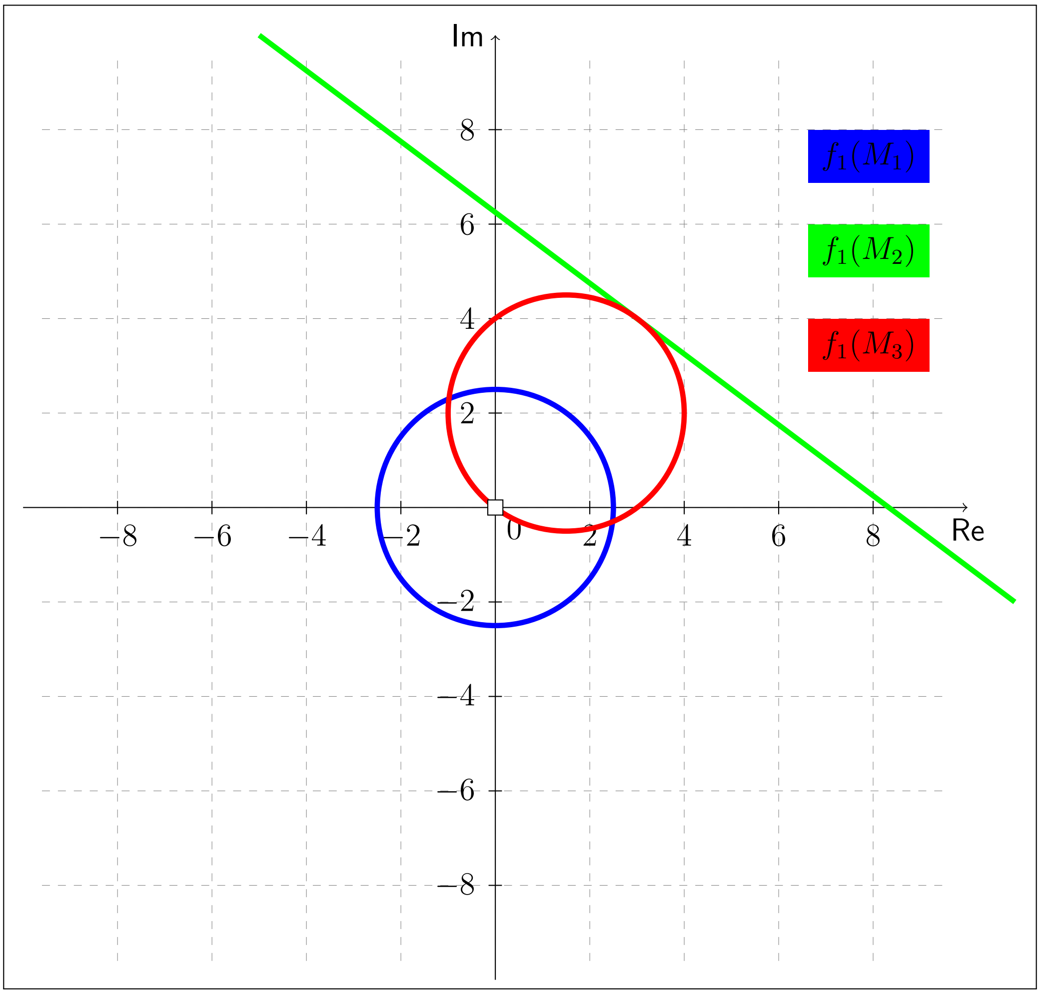
Die Funktion f_1 beschreibt eine Drehstreckung bestehend aus einer Streckung um den Faktor $\sqrt{3^2+4^2}=5$ und einer Drehung um den Winkel $\arg(3+4\mathrm{i})=\arctan\left(\frac{4}{3}\right)\approx 0.295\,\pi\approx 53.13°$. Wir berechnen explizit das Bild von M_3:

$$
\begin{aligned}
f_1\left((M_3\right) &= f_1\left(\left\{x+y\mathrm{i}\in\mathbb{C}\;\middle|\;\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}\right\}\smallsetminus\{0\}\right)\\
&= f_1\left(\left\{x+y\mathrm{i}\in\mathbb{C}\;\middle|\;x=\pm\sqrt{\frac{1}{4}-y^2}+\frac{1}{2}\wedge y\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\right\}\smallsetminus\{0\}\right)\\
&= f_1\left(\left\{\pm\sqrt{\frac{1}{4}-y^2}+\frac{1}{2}+y\mathrm{i}\in\mathbb{C}\;\middle|\;y\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\right\}\smallsetminus\{0\}\right)\\
&= \left\{(3+4\mathrm{i})\left(\pm\sqrt{\frac{1}{4}-y^2}+\frac{1}{2}+y\mathrm{i}\right)\in\mathbb{C}\;\middle|\;y\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\right\}\smallsetminus\{0\}\\
&= \left\{\frac{3}{2}+2\mathrm{i}\pm 3\sqrt{\frac{1}{4}-y^2}-4y\pm 4\sqrt{\frac{1}{4}-y^2}\,\mathrm{i}+3y\mathrm{i}\in\mathbb{C}\;\middle|\;y\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\right\}\smallsetminus\{0\}
\end{aligned}
$$

Dies beschreibt einen Kreis um den Mittelpunkt $\frac{3}{2}+2\mathrm{i}$ denn für jedes Element u aus dieser Menge gilt

$$
\begin{aligned}
\left|u-\frac{3}{2}-2\mathrm{i}\right|^2 &= \left(\pm3\sqrt{\frac{1}{4}-y^2}-4y\right)^2+\left(\pm4\sqrt{\frac{1}{4}-y^2}+3y\right)^2\\
&= 9\left(\frac{1}{4}-y^2\right)\mp 24y\sqrt{\frac{1}{4}-y^2}+16y^2+16\left(\frac{1}{4}-y^2\right)\pm 24y\sqrt{\frac{1}{4}-y^2}+9y^2\\
&= \frac{9}{4}-9y^2+16y^2+4-16y^2+9y^2\\
&= \frac{25}{4}.
\end{aligned}
$$

Dies ergibt also die folgende Skizze.



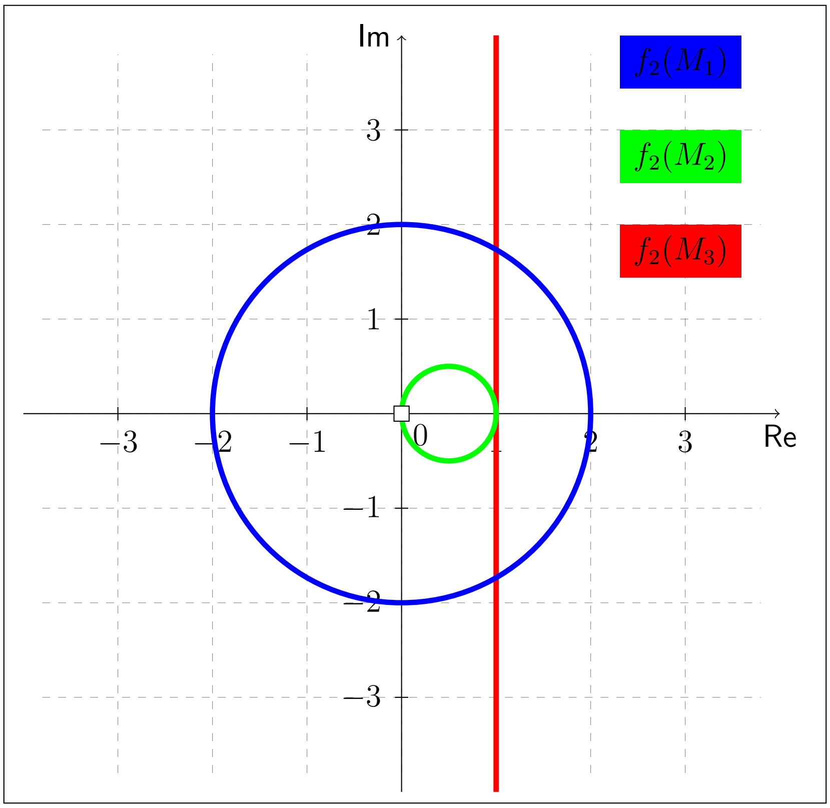
Es gilt $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} \stackrel{z=x+y\mathrm{i}}{=} \frac{x-y\mathrm{i}}{x^2+y^2}$. Für $f_2(M_1)$ ist klar, dass der Betrag von $z \in f_2(M_1)$ den Wert 2 haben muss, des Weiteren ist klar, dass das Bild wieder ein Kreis ist.

$$\begin{aligned}
f_2(M_2) &= f_2\left(\left\{1+b\mathrm{i}\in\mathbb{C} \,\middle|\, b\in\mathbb{R}\right\}\right)\\
&= \left\{\frac{1-b\mathrm{i}}{1+b^2}\in\mathbb{C} \,\middle|\, b\in\mathbb{R}\right\}\\
&= \left\{\frac{1}{1+b^2}-\frac{b\mathrm{i}}{1+b^2}\in\mathbb{C} \,\middle|\, b\in\mathbb{R}\right\}
\end{aligned}$$

Dies ist eine komplexe Zahl mit Realteil $\frac{1}{1+b^2}$ und Imaginärteil $\frac{-b}{1+b^2}$.
Wir schreiben den Imaginärteil in Abhängigkeit vom Realteil:

$$\begin{aligned}
&= \left\{x-\left(\pm x\sqrt{\frac{1}{x}-1}\right)\mathrm{i}\in\mathbb{C} \,\middle|\, x\in(0,1]\right\} \quad \text{durch die Substitution} \quad \frac{1}{1+b^2}=x\\
&= \left\{x\mp\sqrt{x-x^2}\,\mathrm{i}\in\mathbb{C} \,\middle|\, x\in(0,1]\right\}\\
&= \left\{x+y\mathrm{i}\in\mathbb{C} \,\middle|\, x\in(0,1]\wedge y=\mp\sqrt{x-x^2}\right\}\\
&= \left\{x+y\mathrm{i}\in\mathbb{C} \,\middle|\, x\in(0,1]\wedge y^2=x-x^2\right\}\\
&= \left\{x+y\mathrm{i}\in\mathbb{C} \,\middle|\, x\in(0,1]\wedge y^2+\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}=0\right\}\\
&= \left\{z\in\mathbb{C} \,\middle|\, \left|z-\frac{1}{2}\right|^2=\frac{1}{4}\wedge z\neq 0\right\}\\
&= \left\{z\in\mathbb{C} \,\middle|\, \left|z-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}\right\}\smallsetminus\{0\}\\
&= M_3
\end{aligned}$$

Da für jede Zahl $z\in\mathbb{C}\smallsetminus\{0\}$ die Beziehung $f_2(f_2(z))=z$ gilt, ist $f_2(M_3)=f_2(f_2(M_2))=M_2$.



O. Alaya, S. Demirel
M. Fetzer, B. Krinn
M. Wied

3. Gruppenübung zur Vorlesung
Höhere Mathematik 1
Wintersemester 2012/2013

Dr. M. Künzer
Prof. Dr. M. Stroppel

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 8. *Potenzen komplexer Zahlen*

Sei $\alpha := 1 + \mathrm{i}$. Bestimmen Sie folgende Teilmengen von $\mathbb{Z}$.

(a) $\left\{k \in \mathbb{Z} \,\middle|\, \operatorname{Re}(\alpha^k) = 0\right\}$

(b) $\left\{k \in \mathbb{Z} \,\middle|\, \operatorname{Im}(\alpha^k) = 0\right\}$

(c) $\left\{k \in \mathbb{Z} \,\middle|\, \operatorname{Re}(\alpha^k) = 1\right\}$

Lösungshinweise hierzu: Zunächst ist $\alpha := 1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}(\cos(\pi/4) + \mathrm{i}\sin(\pi/4))$. Also ist $\alpha^k = 2^{k/2}(\cos(k\pi/4) + \mathrm{i}\sin(k\pi/4))$ für $k \in \mathbb{Z}$.

(a) Es wird

$$\begin{array}{rcl} \left\{k \in \mathbb{Z} \,\middle|\, \operatorname{Re}(\alpha^k) = 0\right\} & = & \left\{k \in \mathbb{Z} \,\middle|\, 2^{k/2}\cos(k\pi/4) = 0\right\} \\ & = & \left\{k \in \mathbb{Z} \,\middle|\, \cos(k\pi/4) = 0\right\} \\ & = & \left\{2 + 4\ell \,\middle|\, \ell \in \mathbb{Z}\right\} \\ & (= & \{\ldots, -10, -6, -2, 2, 6, 10, \ldots\}\ ) . \end{array}$$

(b) Es wird

$$\begin{array}{rcl} \left\{k \in \mathbb{Z} \,\middle|\, \operatorname{Im}(\alpha^k) = 0\right\} & = & \left\{k \in \mathbb{Z} \,\middle|\, 2^{k/2}\sin(k\pi/4) = 0\right\} \\ & = & \left\{k \in \mathbb{Z} \,\middle|\, \sin(k\pi/4) = 0\right\} \\ & = & \left\{4\ell \,\middle|\, \ell \in \mathbb{Z}\right\} \\ & (= & \{\ldots, -8, -4, 0, 4, 8, \ldots\}\ ) . \end{array}$$

(c) Es wird

$$\left\{k \in \mathbb{Z} \,\middle|\, \operatorname{Re}(\alpha^k) = 0\right\} = \left\{k \in \mathbb{Z} \,\middle|\, 2^{k/2}\cos(k\pi/4) = 1\right\} .$$

Für $k \in \mathbb{Z}$ ist nun $\cos(k\pi/4) \in \{-1, -2^{-1/2}, 0, +2^{-1/2}, +1\}$, und somit $2^{k/2}\cos(k\pi/4) \in \{-2^{k/2}, -2^{(k-1)/2}, 0, +2^{(k-1)/2}, +2^{k/2}\}$.

Es trifft $2^{k/2} = 1$ genau für $k = 0$ zu. Es trifft $2^{(k-1)/2} = 1$ genau für $k = 1$ zu.

Somit erhalten wir

$$\left\{k \in \mathbb{Z} \,\middle|\, \operatorname{Re}(\alpha^k) = 0\right\} = \{0, 1\} .$$

Aufgabe H 9. *Mengen in* $\mathbb{C}$

Skizzieren Sie die folgenden Mengen in der komplexen Zahlenebene.

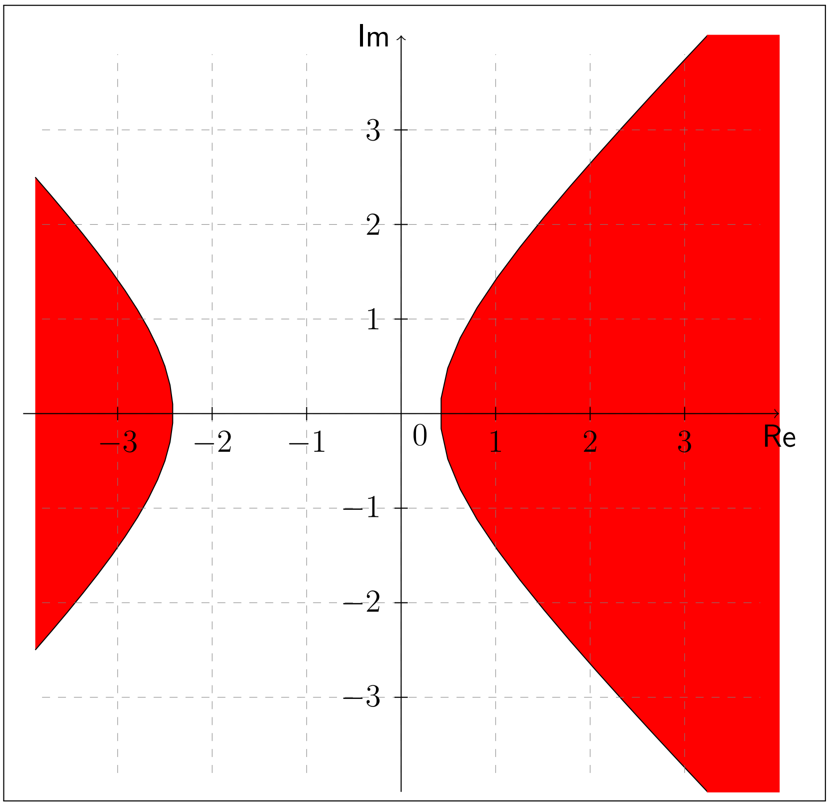
(a) $\left\{z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \operatorname{Re}(z^2 + 2z) > 1\right\}$

(b) $\left\{z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z - 1| < |z + 1 + 2\mathrm{i}|\right\}$

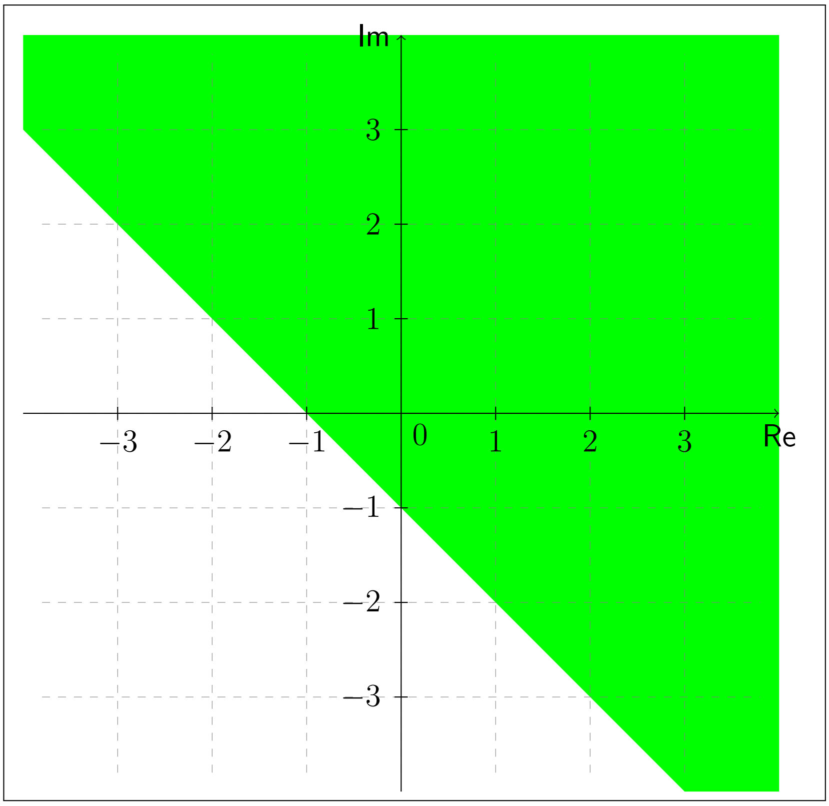
(c) $\left\{z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z| + z + \overline{z} - 2\operatorname{Im}(z) \leqq 4\right\}$

Lösungshinweise hierzu:

(a) $1 < \operatorname{Re}(z^2+2z) = a^2+2a-b^2 = (a+1)^2-b^2-1 \Leftrightarrow (a+1)^2-b^2 > 2$



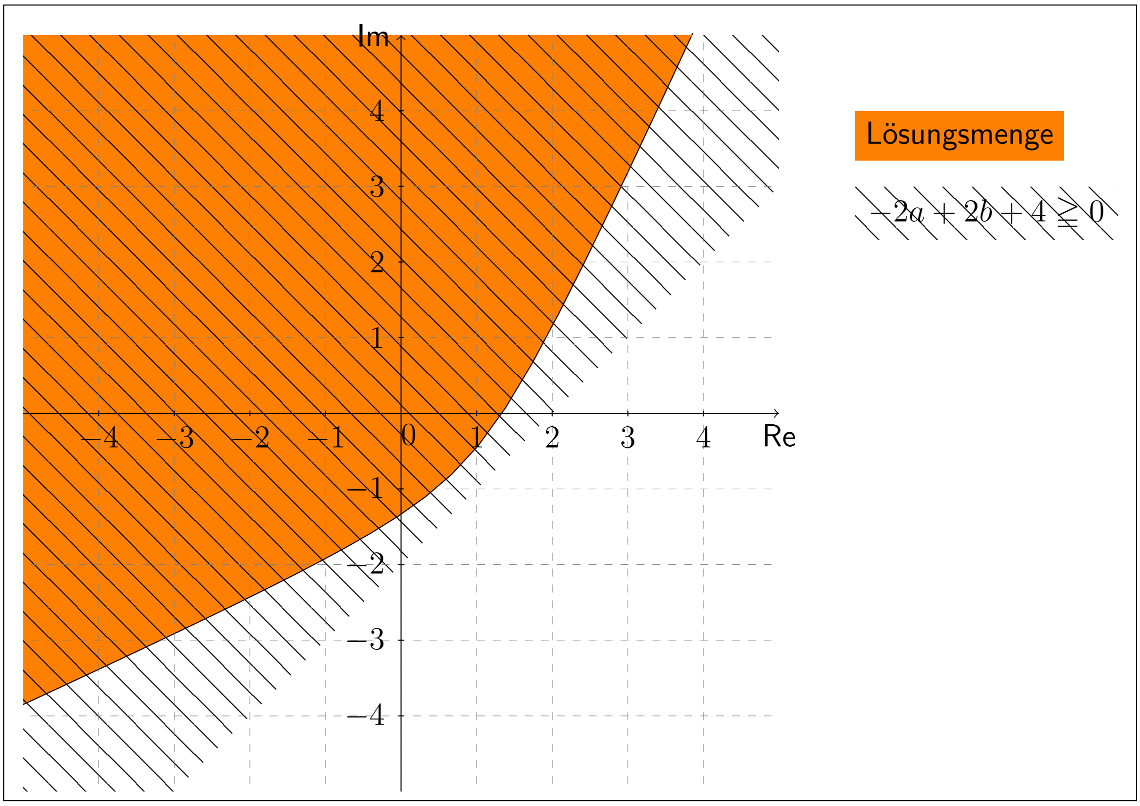
(b) $|z-1| < |z+1+2\mathrm{i}| \overset{z=a+b\mathrm{i}}{\Leftrightarrow} (a-1)^2+b^2 < (a+1)^2+(b+2)^2 \Leftrightarrow b > -a-1$



(c) $z = a + b\mathrm{i} \Rightarrow \sqrt{a^2+b^2} + 2a - 2b \leqq 4 \Leftrightarrow \sqrt{a^2+b^2} \leqq -2a + 2b + 4$. Wir unterscheiden die beiden Fälle $-2a + 2b + 4 < 0$ und $-2a + 2b + 4 \geqq 0$.

- $-2a + 2b + 4 < 0$
  In diesem Fall hat die Ungleichung $\sqrt{a^2+b^2} \leqq -2a + 2b + 4$ keine Lösung, da $\sqrt{a^2+b^2}$ nicht negativ werden kann.
- $-2a + 2b + 4 \geqq 0$
  In diesem Fall erhalten wir

$$\begin{aligned}
\sqrt{a^2+b^2} &\leqq -2a + 2b + 4 \\
\Leftrightarrow a^2 + b^2 &\leqq (4 - 2a + 2b)^2 = 16 - 16a + 16b - 8ab + 4a^2 + 4b^2 \\
\Leftrightarrow 0 &\leqq 3a^2 + 3b^2 - 8ab - 16a + 16b + 16 \\
& \text{Wir lösen mit der Mitternachtsformel nach } b \text{ auf und erhalten} \\
b &= -\frac{8}{3} + \frac{4}{3}a \pm \frac{1}{3}\sqrt{7a^2 - 16a + 16}.
\end{aligned}$$



Aufgabe H 10. *Mengenoperationen*

(a) Skizzieren Sie die folgenden Mengen in der komplexen Zahlenebene.

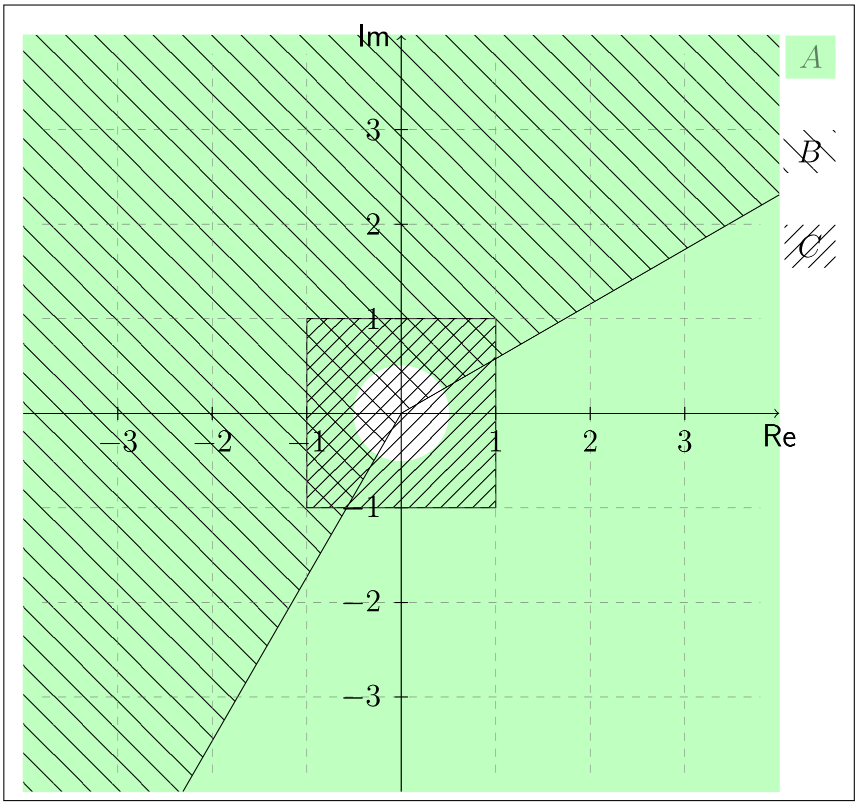
- $A = \left\{z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z| \geqq \frac{1}{2}\right\}$
- $B = \{z \in \mathbb{C} \mid \frac{\pi}{6} \leqq \arg(z) \leqq \frac{4\pi}{3}\}$
- $C = \{z \in \mathbb{C} \mid \max\{|\operatorname{Re}(z)|, |\operatorname{Im}(z)|\} \leqq 1\}$

(b) Skizzieren Sie die Mengen

- $(B \cap A) \cup (A \cup B)$
- $\complement_{\mathbb{C}}(\complement_{\mathbb{C}}(A \cup B) \cap C) \cup (B \cap A)$
- $(\complement_{\mathbb{C}}(A) \cap \complement_{\mathbb{C}}(B) \cap \complement_{\mathbb{C}}(\complement_{\mathbb{C}}(A) \cap \complement_{\mathbb{C}}(B))) \cup \complement_{\mathbb{C}}(A)$

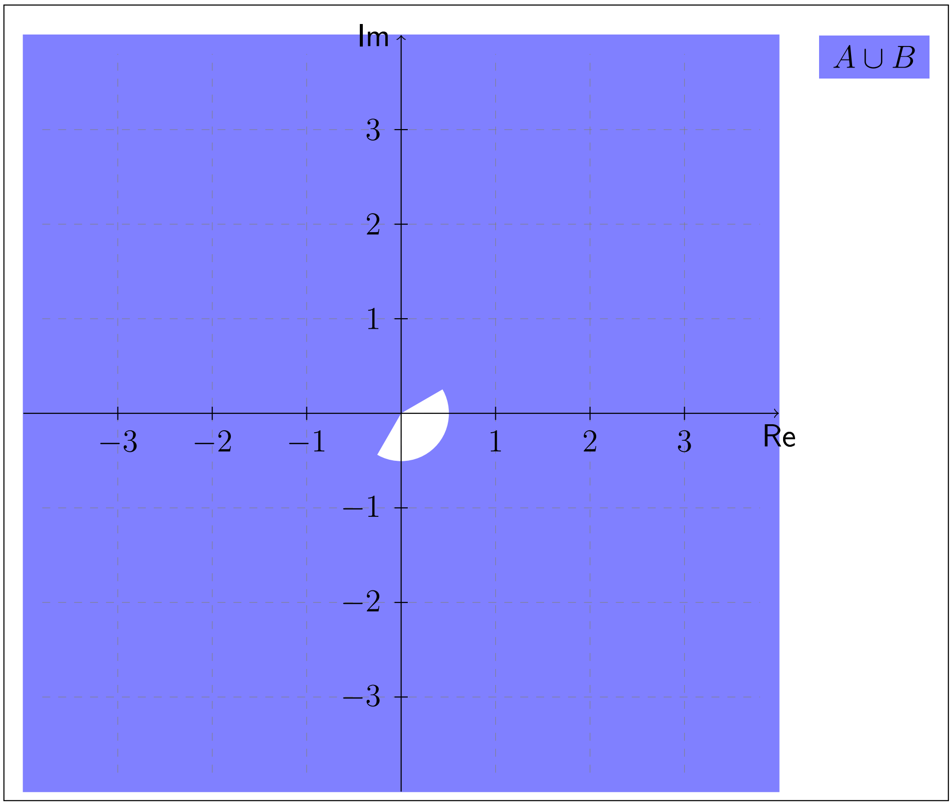
Hinweis: Vereinfachen Sie zunächst die Ausdrücke. Die Regeln von De Morgan können hilfreich sein.

Lösungshinweise hierzu:

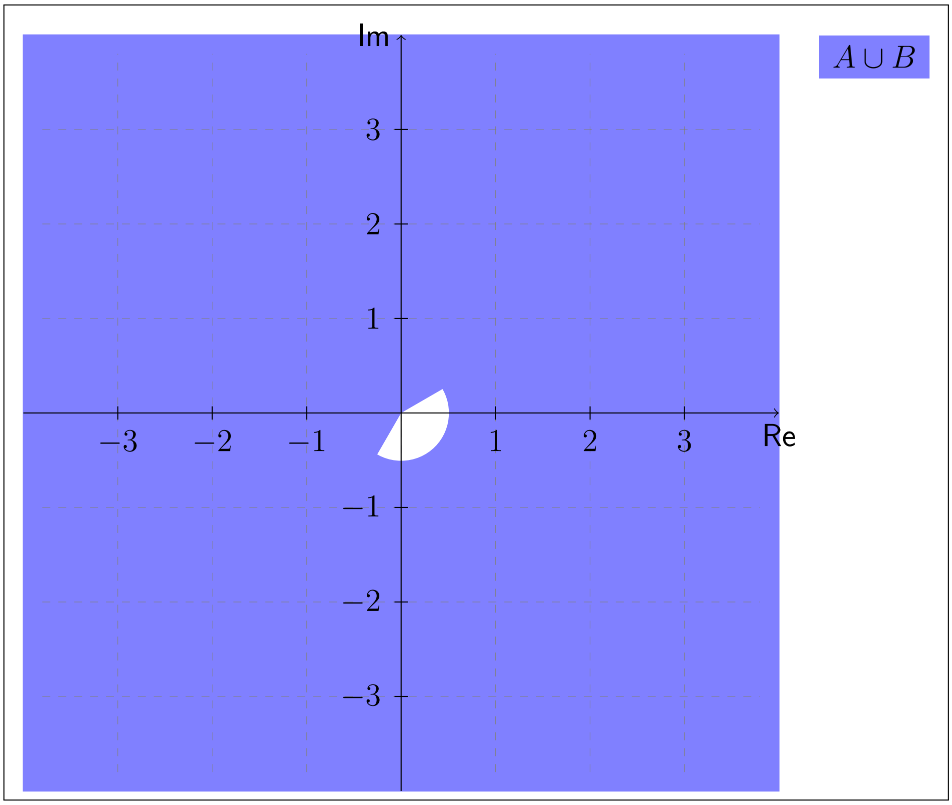


(a)

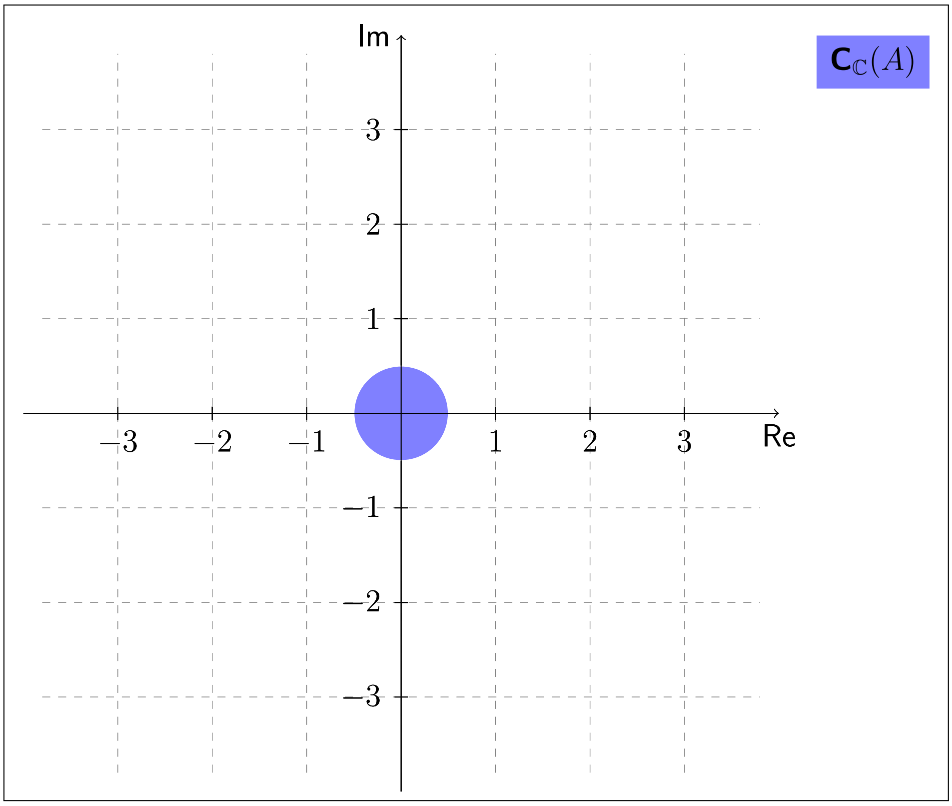
(b) • Da $A \cap B$ eine Teilmengen von $A \cup B$ ist, gilt $(B \cap A) \cup (A \cup B) = A \cup B$



- $$\begin{aligned} \mathbf{C}_{\mathbb{C}}(\mathbf{C}_{\mathbb{C}}(A \cup B) \cap C) \cup (B \cap A) &= (A \cup B) \cup \mathbf{C}_{\mathbb{C}}(C) \cup (B \cap A) \\ &= (A \cup B) \cup \mathbf{C}_{\mathbb{C}}(C) \\ &= (A \cup B)\,, \quad \text{da} \quad \mathbf{C}_{\mathbb{C}}(C) \subsetneqq (A \cup B) \end{aligned}$$



- $$\begin{aligned} & (\mathbf{C}_{\mathbb{C}}(A) \cap \mathbf{C}_{\mathbb{C}}(B) \cap \mathbf{C}_{\mathbb{C}}(\mathbf{C}_{\mathbb{C}}(A) \cap \mathbf{C}_{\mathbb{C}}(B))) \cup \mathbf{C}_{\mathbb{C}}(A) \\ = \; & (\mathbf{C}_{\mathbb{C}}(A) \cap \mathbf{C}_{\mathbb{C}}(B) \cap (A \cup B)) \cup \mathbf{C}_{\mathbb{C}}(A) \\ = \; & \mathbf{C}_{\mathbb{C}}(A \cup B) \cap (A \cup B) \cup \mathbf{C}_{\mathbb{C}}(A) \\ = \; & \mathbf{C}_{\mathbb{C}}(A) \end{aligned}$$



Aufgabe H 11. *Bild- und Urbildmengen*

Seien $f : X \to Y$ eine Abbildung und $A, B \subseteq X$ und $U, V \subseteq Y$. Mit $f^{-1}(U)$ bezeichnen wir die Menge $\{x \in X \mid f(x) \in U\}$. Entscheiden Sie, ob die folgenden Rechenregeln korrekt oder falsch sind.

(a) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$

(b) $f(A \cap B) \supseteq f(A) \cap f(B)$

(c) $f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)$

(d) $f^{-1}(f(A)) = A$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Die Aussage ist korrekt.
Beweis: Sei $y \in f(A \cap B)$ beliebig. $\Rightarrow \exists x \in A \cap B : \; f(x) = y$
$\Rightarrow (x \in A \wedge x \in B) \wedge f(x) = y \Rightarrow (x \in A \wedge f(x) = y) \wedge (x \in B \wedge f(x) = y)$
$\Rightarrow y \in f(A) \wedge y \in f(B) \Rightarrow y \in f(A) \cap f(B) \Rightarrow f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$

(b) Die Aussage ist i.A. falsch.
Sei nämlich $X = \mathbb{R}$, $A = [0, 2]$, $B = [-1, 0]$ und $f(x) = x^2$.Dann gilt:
$f(A \cap B) = f(\{0\}) = \{0\}$
und $f(A) \cap f(B) = [0, 4] \cap [0, 1] = [0, 1] \nsubseteq \{0\}$.

(c) Die Aussage ist korrekt.
Beweis: $x \in f^{-1}(U \cap V) \Leftrightarrow (x \in X) \wedge (f(x) \in U \cap V)$
$\Leftrightarrow (x \in X \wedge f(x) \in U) \wedge (x \in X \wedge f(x) \in V) \Leftrightarrow (x \in f^{-1}(U)) \wedge (x \in f^{-1}(V))$
$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V),$ also $f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)$

(d) Die Aussage ist i.A. falsch.
Sei nämlich $X = \mathbb{R}$, $A = [-1, 0]$ und $f(x) = x^2$.Dann gilt:
$f^{-1}(f(A)) = f^{-1}([0,\, 1]) = [-1,\, 1] \neq A.$

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 12. *komplexe Wurzeln*

(a) Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen der folgenden Gleichungen.
(i) $z^6 = -64$ **(ii)** $z^4 = -625$ **(iii)** $z^3 = -2 + 2\,\mathrm{i}$

(b) Bestimmen Sie für die Funktionen
$f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}\colon z \mapsto z^5 + 32\,,\qquad g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}\colon z \mapsto z^5 - 4z^3 + 5z$ und
$h\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}\colon z \mapsto z^2$
die Mengen $f^{-1}(\{16 - 16\sqrt{3}\,\mathrm{i}\})$ sowie $g^{-1}(\{0\})$ und $h^{-1}(\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) = -1\})$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) **(i)** Es gilt $-64 = 64(\cos(\pi) + \mathrm{i}\sin(\pi))$. Hieraus sind die sechsten Wurzeln

$$\begin{aligned} z_k &= \sqrt[6]{64}\left(\cos\left(\frac{\pi + 2\pi k}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi + 2\pi k}{6}\right)\right) \\ &= 2\left(\cos\left(\frac{\pi + 2\pi k}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi + 2\pi k}{6}\right)\right) \end{aligned}$$

für $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, also

$$\begin{aligned} z_0 &= 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) \\ z_1 &= 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) \\ z_2 &= 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) \\ z_3 &= 2\left(\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right) \\ z_4 &= 2\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right) \\ z_5 &= 2\left(\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right)\right). \end{aligned}$$

(ii) Es gilt $-625 = 625(\cos(\pi) + \mathrm{i}\sin(\pi))$. Hieraus sind die vierten Wurzeln

$$\begin{aligned} z_0 &= 5\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \\ z_1 &= 5\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) \\ z_2 &= 5\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right) \\ z_3 &= 5\left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right). \end{aligned}$$

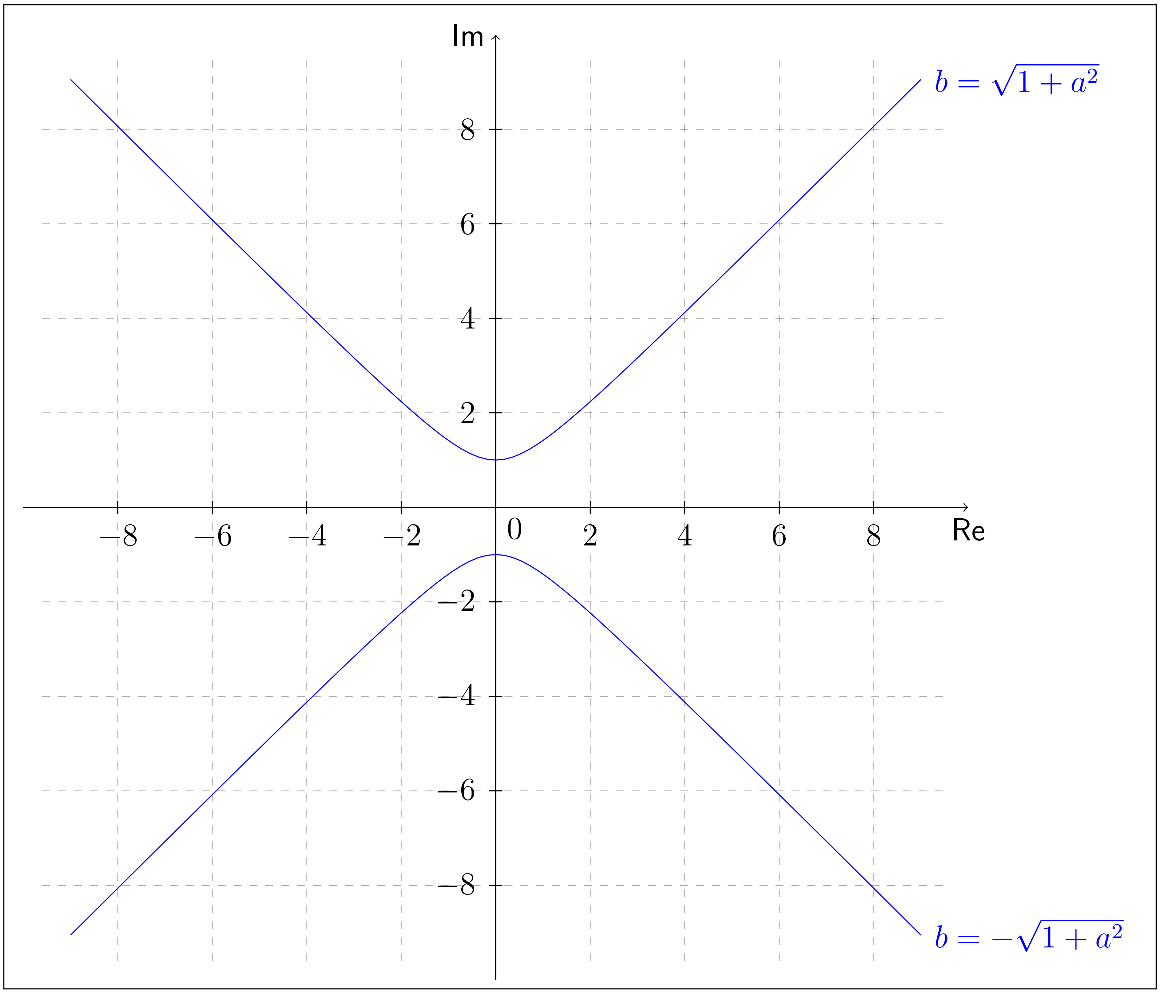
(iii) Es gilt $-2+2\,\mathrm{i} = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$. Hieraus sind die dritten Wurzeln

$$\begin{aligned} z_0 &= \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \\ z_1 &= \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)\right) \\ z_2 &= \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{19\pi}{12}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{19\pi}{12}\right)\right). \end{aligned}$$

(b) Das Urbild von $\{16-16\sqrt{3}\,\mathrm{i}\}$ von f ist gegeben durch $16-16\sqrt{3}\mathrm{i} = z^5+32 \Leftrightarrow z^5 = -16-16\sqrt{3}\mathrm{i}$. Die Polarkoordinatendarstellung von $-16-16\sqrt{3}\mathrm{i}$ ist $32\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)$. Die fünften Wurzeln hieraus sind

$$\begin{aligned} z_0 &= 2\left(\cos\left(\frac{4\pi}{15}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{4\pi}{15}\right)\right) \\ z_1 &= 2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) \\ z_2 &= 2\left(\cos\left(\frac{16\pi}{15}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{16\pi}{15}\right)\right) \\ z_3 &= 2\left(\cos\left(\frac{22\pi}{15}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{22\pi}{15}\right)\right) \\ z_4 &= 2\left(\cos\left(\frac{28\pi}{15}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{28\pi}{15}\right)\right). \end{aligned}$$

Das Urbild von $\{0\}$ von g ist gegeben durch $0 = z^5-4z^3+5z = z(z^4-4z^2+5)$. Eine Lösung dieser Gleichung ist $z=0$. Für die anderen Lösungen substituieren wir $z^2 = x$ und erhalten die quadratische Gleichung $0 = x^2-4x+5$. Wir setzen mit der Mitternachtsformel an, dies ergibt $x_1 = 2+\mathrm{i}$ und $x_2 = 2-\mathrm{i}$. Die Zahl $2+\mathrm{i}$ hat den Betrag $\sqrt{5}$ und das Argument $\arctan\left(\frac{1}{2}\right) \approx 26,57° \approx 0,15\pi$, die Zahl $2-\mathrm{i}$ hat den Betrag $\sqrt{5}$ und das Argument $2\pi - \arctan\left(\frac{1}{2}\right) \approx 333,43° \approx 1,85\pi$. Die Resubstitution ergibt für x_1 die Lösungen $z_1 = \sqrt[4]{5}\left(\cos\left(\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{1}{2}\right)\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{1}{2}\right)\right)\right)$
und $z_2 = \sqrt[4]{5}\left(\cos\left(\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{1}{2}\right)+\pi\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{1}{2}\right)+\pi\right)\right)$,
für x_2 ergibt die Resubstitution
$z_3 = \sqrt[4]{5}\left(\cos\left(\pi-\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{1}{2}\right)\right)+\mathrm{i}\sin\left(\pi-\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{1}{2}\right)\right)\right)$ und
$z_4 = \sqrt[4]{5}\left(\cos\left(2\pi-\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{1}{2}\right)\right)+\mathrm{i}\sin\left(2\pi-\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{1}{2}\right)\right)\right)$.
Wir betrachten nun die Abbildung h, sie ist gegeben durch $a+b\mathrm{i} \mapsto a^2-b^2+2ab\mathrm{i}$. Das Urbild von $\{z\in\mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) = -1\}$ muss also die Bedingung $a^2-b^2 = -1$ erfüllen. Dies ist eine Hyperbel mit den Ästen $b = \sqrt{1+a^2}$ und $b = -\sqrt{1+a^2}$.



Aufgabe H 13. *Vektorräume*

Es seien die folgenden Vektoren aus $\mathbb{R}^3$ gegeben:

$$v_1 = (1, 1, 1),\ v_2 = (0, 2, 2),\ v_3 = (-3, -1, -1),\ v_4 = (5, 4, 1).$$

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind:

(a) Die Menge $\mathrm{L}\,(v_1, v_2)$ ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$.

(b) Die Vektoren v_1, v_2 und v_3 sind linear unabhängig.

(c) Die Vektoren v_1, v_2 und v_4 sind linear unabhängig.

(d) Es gilt: $\mathrm{L}\,(v_1, v_2, v_3, v_4) = \mathbb{R}^3$.

(e) Die Vektoren v_1, v_2 und v_3 sind ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^3$.

(f) Die Vektoren v_2, v_3 und v_4 bilden eine Basis von $\mathbb{R}^3$.

(g) Es gilt: $\mathrm{L}\,(v_1, v_2, v_3) = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, -y + z = 0\right\}$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir müssen zeigen: $u, w \in \mathrm{L}(v_1, v_2) \Rightarrow u + w \in \mathrm{L}(v_1, v_2)$ und $u \in \mathrm{L}(v_1, v_2) \Rightarrow \lambda u \in \mathrm{L}(v_1, v_2)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Jeder Vektor $u \in \mathrm{L}(v_1, v_2)$ lässt sich als Linearkombination schreiben, d.h.:

$$u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \quad w = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2.$$

Offensichtlich ist

$$u + w = (\lambda_1 + \mu_1)v_1 + (\lambda_2 + \mu_2)v_2 = \lambda v_1 + \mu v_2,$$

mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. D.h. die Summe der Vektoren lässt sich wieder als Linearkombination von v_1 und v_1 schreiben und liegt damit wieder in $\mathrm{L}(v_1, v_2)$. Jetzt zeigen wir noch, dass auch skalare Vielfache in $\mathrm{L}(v_1, v_2)$ liegen. Dazu nehmen wir wieder einen Vektor $u \in \mathrm{L}(v_1, v_2)$ und stellen diesen als Linearkombination dar

$$u = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2.$$

Dann gilt für beliebiges $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\lambda u = \lambda\mu_1 v_1 + \lambda\mu_2 v_2 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$$

und damit lassen sich also auch Vielfache von Vekoren in $\mathrm{L}(v_1, v_2)$ als Linearkombination von v_1 und v_1 schreiben (insb. gilt $0 \in \mathrm{L}(v_1, v_2)$). Daher ist $\mathrm{L}(v_1, v_2)$ ein Unterraum von $\mathbb{R}^3$ und die Aussage wahr.

(b) Dazu müssen wir zeigen, dass das Lineare Gleichungssystem

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$$

lediglich die triviale Lösung hat. D.h. wir müssen das LGS

$$\begin{aligned} \lambda_1 + 0\lambda_2 - 3\lambda_3 &= 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 - 1\lambda_3 &= 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 - 1\lambda_3 &= 0 \end{aligned}$$

lösen. Offensichtlich sind Gleichung 2 und 3 identisch und damit haben wir maximal zwei linear unabhängige Gleichungen für drei Unbekannte. Somit ist das LGS unterbestimmt, es existieren unendlich viele Lösungen und die Nulllösung ist damit nicht die einzige. Also sind die drei Vektoren linear abhängig und damit ist die Aussage falsch. Eine andere Möglichkeit das zu sehen ist indem man bemerkt, dass $-3v_1 + v_2 = v_3$ ist.

(c) Genau wie oben müssen wir wieder ein homogenes LGS lösen:

$$\begin{aligned} \lambda_1 + 0\lambda_2 + 5\lambda_4 &= 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 4\lambda_4 &= 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 1\lambda_4 &= 0. \end{aligned}$$

Die Substraktion der letzten 2 Gleichungen voneinander ergibt $\lambda_4 = 0$. Setzt man $\lambda_4 = 0$ in der ersten Gleichung ein, ergibt sich dann

$$\lambda_1 = -5\lambda_4 = 0.$$

Setzt man $\lambda_4 = 0$ und $\lambda_1 = 0$ in der zweiten oder dritten Gleichung, sieht man sofort, dass $\lambda_2 = 0$ ist. Die Vektoren v_1, v_2 und v_4 sind also linear unabhängig.

(d) Da v_1, v_2 und v_4 linear unabhängig sind bilden diese Vektoren eine Basis und damit insbesondere ein Erzeugendensystem. Diese Eigenschaft geht durch Hinzunahme weiterer Vektoren nicht verloren. Die Aussage ist also wahr.

(e) Da v_1, v_2 und v_3 linear abhängig sind können sie keinen dreidimensionalen Raum aufspannen. Die Aussage ist also falsch.

(f) Wir müssen nur zeigen, dass die Vektoren linear unabhängig sind, weil 3 linear unabhängigen Vektoren aus $\mathbb{R}^3$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ bilden. Genau wie oben müssen wir wieder ein homogenes LGS lösen:

$$\begin{aligned} 0\lambda_2 - 3\lambda_3 + 5\lambda_4 &= 0 \\ 2\lambda_2 - \lambda_3 + 4\lambda_4 &= 0 \\ 2\lambda_2 - \lambda_3 + 1\lambda_4 &= 0. \end{aligned}$$

Die Substraktion der letzten zwei Gleichungen voneinander ergibt $\lambda_4 = 0$. Setzt man $\lambda_4 = 0$ in der ersten Gleichung ein, ergibt sich dann $\lambda_3 = 0$. Setzt man $\lambda_4 = 0$ und $\lambda_3 = 0$ in der zweiten oder dritten Gleichung ein, sieht man sofort, dass $\lambda_2 = 0$ ist. Die Vektoren v_2, v_3 und v_4 sind also linear unabhängig und bilden damit eine Basis vom Raum $\mathbb{R}^3$.

(g) Sei $(x, y, z) \in \mathrm{L}(v_1, v_2, v_3) \Leftrightarrow \exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ (nicht eindeutig), so dass

$$\begin{aligned} x &= \lambda_1 - 3\lambda_3 \\ y = z &= \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 \end{aligned}$$

gilt. Dies ist gleichbedeutend mit $x \in \mathbb{R}$ beliebig und $y = z$. Das ist äquivalent zu $(x, y, z) \in \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, -y + z = 0\right\}$. Es gilt also:

$$\mathrm{L}(v_1, v_2, v_3) = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, -y + z = 0\right\}.$$

Aufgabe H 14. *Ebenen*

(a) Liegen die beiden folgenden Geraden in einer Ebene?

$$g = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad h = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(b) Gegeben seien die Punkte: $A = (2, 3, 2)$, $B = (3, 0, -2)$, $C = (1, 4, -3)$ und $D = (-2, 9, -9)$. Ist das Viereck $ABCD$ eben?

Lösungshinweise hierzu:

(a) Die Geraden sind nicht parallel, da ihre Richtungsvektoren nicht linear abhängig sind. Die Geraden liegen in einer Ebene, wenn sie sich schneiden. Wir berechnen die Schnittmenge, indem wir gleichsetzen.

$$\begin{aligned} (5,1,-1) + \lambda(4,3,-2) &= (1,5,-3) + \mu(2,0,-1) \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} &= \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die zweite Zeile ergibt $\lambda = \frac{4}{3}$. Wir setzen dies in die erste Zeile ein und erhalten $\mu = \frac{14}{3}$. Dies überprüfen wir, indem wir $\lambda = \frac{4}{3}$ auch noch in die dritte Zeile einsetzen und erhalten $\mu = \frac{2}{3}$. Dies ist ein Widerspruch. Die Geraden schneiden sich nicht und liegen somit nicht in einer Ebene.

(b) Wir betrachten die Ebene, die die Punkte A, B und C enthält. Diese ist gegeben durch

$$E : x = (2,3,2) + \lambda(1,-3,-4) + \mu(-1,1,-5)$$

wobei $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Wir fragen uns, ob λ und μ existieren, dass

$$(2,3,2) + \lambda(1,-3,-4) + \mu(-1,1,-5) = (-2,9,-9)$$

gilt. Wir formen dieses Gleichungssystem um und erhalten drei Gleichungen

$$\begin{aligned} \lambda \quad -\mu \quad &= -4 \\ -3\lambda \quad +\mu \quad &= 6 \\ -4\lambda \quad -5\mu \quad &= -11. \end{aligned}$$

Wir lösen die erste Zeile nach λ auf und setzen dies in die zweite Zeile ein.
Wir erhalten $6 = -3(\mu - 4) + \mu = -2\mu + 12$, also $\mu = 3$ und somit $\lambda = -1$ (vgl. erste Zeile). Wir führen mit diesen Werten eine Probe in der dritten Zeile durch, es ergibt sich $-4(-1) - 5 \cdot 3 = 4 - 15 = -11$. Die Probe hält. Der Punkt D liegt in der Ebene, d.h. das Viereck ist eben.

Aufgabe H 15. *Funktionenräume*

Gegeben seien die folgenden Funktionen aus dem Vektorraum $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ (siehe **2.6.3**):

$f_1 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \colon x \mapsto 1$ $\qquad$ $f_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \colon x \mapsto \cos(x)$

$f_3 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \colon x \mapsto \cos(2x)$ $\qquad$ $f_4 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \colon x \mapsto \sin(2x)$

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

(a) Die Funktionen f_1, f_2, f_3 und f_4 sind linear unabhängig.

(b) Die Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \cos(x)(1+\sin(x))$ erfüllt $g \in \mathrm{L}(f_1, f_2, f_3, f_4)$.

(c) Die Funktion $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \sin(x)$ erfüllt $h \in \mathrm{L}(f_1, f_2, f_3, f_4)$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir betrachten eine Linearkombination der Funktionen. Es soll für alle $x \in \mathbb{R}$ gelten, dass

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{!}{=} \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) + \lambda_3 f_3(x) + \lambda_4 f_4(x) \\ &= \lambda_1 + \lambda_2 \cos(x) + \lambda_3 \cos(2x) + \lambda_4 \sin(2x). \end{aligned}$$

Wir setzen nun verschiedene Werte für x ein, um die Koeffizienten λ_i zu bestimmen. Sei $x = \frac{\pi}{2}$, dann gilt

$$0 = \lambda_1 + 0 - \lambda_3 + 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_3.$$

Sei nun $x = 0$, dann gilt

$$0 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_1 \Rightarrow \lambda_2 = -2\lambda_1.$$

Sei nun $x = \pi$, dann gilt

$$0 = \lambda_1 + 2\lambda_1 + \lambda_1 \Rightarrow \lambda_1 = 0.$$

Und somit $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Zuletzt sei $x = \frac{\pi}{4}$, dann gilt

$$0 = \lambda_4.$$

Es sind also die Koeffizienten $\lambda_i = 0$ und somit sind die Funktionen linear unabhängig.

(b) Die Funktion g ist gegeben durch

$$\begin{aligned} g(x) &= \cos(x)(1+\sin(x)) \\ &= \cos(x) + \cos(x)\sin(x) \\ &\stackrel{\sin(2x)=2\sin(x)\cos(x)}{=} \cos(x) + \frac{1}{2}\sin(2x) \\ &= 1 \cdot f_2(x) + \frac{1}{2} \cdot f_4(x). \end{aligned}$$

Die Funktion g ist als Linearkombination der Funktionen f_2 und f_4 darstellbar.

(c) Falls h als Linearkombination darstellbar ist, dann muss

$$\sin(x) = \lambda_1 + \lambda_2 \cos(x) + \lambda_3 \cos(2x) + \lambda_4 \sin(2x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gelten. Sei nun $x = 0$, so gilt

$$0 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3,$$

und für $x = \pi$ gilt

$$0 = \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3.$$

Somit muss $\lambda_2 = 0$ und $\lambda_1 = -\lambda_3$ sein. Sei nun $x = \frac{\pi}{2}$, so gilt

$$1 = 2\lambda_1 \Rightarrow \frac{1}{2} = \lambda_1$$

und sei nun $x = \frac{3}{2}\pi$, so gilt

$$-1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Dies ist ein Widersrpruch, d.h. h ist nicht als Linearkombination darstellbar.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 16. *Darstellungen von Ebenen*

Es seien der Punkt $P = (1, 0, 1)$ und die Gerade $g = (1, 0, -1) + \mathbb{R}\,(0, 1, 1)$ gegeben.

(a) Bestimmen Sie die Hesse-Normalform der Ebene durch P und g.

(b) Bestimmen Sie die Hesse-Normalform der Ebene durch P senkrecht zu g.

(c) Bestimmen Sie die senkrechte Projektion von P auf die Gerade g.

(d) Bestimmen Sie die Hesse-Normalform der Ebene durch g mit maximalem Abstand zu P.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Die gesuchte Ebene hat den Stützvektor $(1, 0, -1)$ und die beiden Richtungsvektoren $(0, 1, 1)$ und $(0, 0, 2)$. Das Kreuzprodukt dieser ist $(2, 0, 0)$ und somit ist die normierte Normale an die Ebene $(1, 0, 0)$.
Die Hesse-Normalform sieht dann so $1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = d$ aus. Es soll P auf der Ebene sein. Wir setzen P in die HNF ein und erhalten $d = 1$. Somit ist die Ebene gegeben durch $x_1 = 1$.

(b) Die gesuchte Ebene hat einen Normalenvektor, der linear abhängig zu dem Richtungsvektor von g ist. Wir normieren diesen und erhalten $\frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1)$. Die HNF hat dann die Form $\frac{1}{\sqrt{2}}x_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}x_3 = d$. Wir setzen den Punkt P ein und erhalten $\frac{1}{\sqrt{2}} = d$. Somit ist die HNF gegeben durch $\frac{1}{\sqrt{2}}x_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}x_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

(c) Es ist der Punkt $Q \in g$ gesucht, dass $\langle PQ, (0, 1, 1)\rangle = 0$ gilt.
Wir schreiben $Q = (1, 0, -1) + \lambda\,(0, 1, 1)$ und $PQ = Q - P = (0, 0, -2) + \lambda\,(0, 1, 1)$ für $\lambda \in \mathbb{R}$ und erhalten die Gleichung $0 = \lambda - 2 + \lambda = 2(\lambda - 1)$. Die Lösung ist $\lambda = 1$. Somit ist $Q = (1, 1, 0)$.

(d) Die gesuchte Ebene hat den Normalvektor PQ und g liegt in dieser Ebene. Es liegt also insbesondere der Punkt $(1, 0, -1)$ in der Ebene. Wir normieren PQ und erhalten $\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Somit ergibt sich die HNF durch $\frac{1}{\sqrt{2}}x_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}x_2 = d$. Wir setzen $(1, 0, -1)$ ein und erhalten $d = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Also lautet die HNF $\frac{1}{\sqrt{2}}x_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}x_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Aufgabe H 17. *Koordinaten*

(a) Gegeben seien die beiden Basen $F : (0, \mathrm{i}), (1, 0)$ und $G : (\mathrm{i}, \mathrm{i}), (1, -1)$ von $\mathbb{C}^2$ als Vektorraum über $\mathbb{C}$ sowie die Vektoren $a, b, c \in \mathbb{C}^2$ mit

$${}_G a = (2, 1), \qquad {}_G b = (3, 3\mathrm{i}) \quad \text{und} \quad {}_G c = (-1 + \mathrm{i}, 0).$$

Geben Sie die Koordinaten der Vektoren bezüglich der Standardbasis und bezüglich der Basis F an.

(b) Gegeben seien die folgenden Funktionen aus dem reellen Vektorraum $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$:
$f_1 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \colon x \mapsto 1$ $\qquad f_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \colon x \mapsto \cos(x)$
$f_3 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \colon x \mapsto \cos(2x)$ $\qquad f_4 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \colon x \mapsto \sin(2x)$
Geben Sie die Koordinaten der Funktionen

$$g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \colon x \mapsto \cos(x)(1+\sin(x)) \quad \text{und} \quad h \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \colon x \mapsto (2\cos(x)+\sin(x))^2$$

bezüglich der Basis $F : f_1, f_2, f_3, f_4$ von $\mathrm{L}\,(f_1, f_2, f_3, f_4)$ an.

Lösungshinweise hierzu:

(a) **(i)** Wir berechnen

$$\begin{aligned}
{}_G a &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\
a &= 2 \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ \mathrm{i} \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2\mathrm{i} \\ 2\mathrm{i} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1+2\mathrm{i} \\ -1+2\mathrm{i} \end{pmatrix} \\
&= (1+2\mathrm{i}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1+2\mathrm{i}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

und erhalten ${}_E a = \begin{pmatrix} 1+2\mathrm{i} \\ -1+2\mathrm{i} \end{pmatrix}$. Wir lösen nun das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1+2\mathrm{i} \\ -1+2\mathrm{i} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und durch Ablesen erhalten wir $\lambda = 2 + \mathrm{i}$ und $\mu = 1 + 2\mathrm{i}$, also ist

$${}_F a = \begin{pmatrix} 2+\mathrm{i} \\ 1+2\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

(ii) Wir berechnen

$$\begin{aligned}
{}_G b &= \begin{pmatrix} 3 \\ 3\mathrm{i} \end{pmatrix} \\
b &= 3 \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ \mathrm{i} \end{pmatrix} + 3\mathrm{i} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 6\mathrm{i} \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= 6\mathrm{i} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

und erhalten ${}_E b = \begin{pmatrix} 6\mathrm{i} \\ 0 \end{pmatrix}$. Wir lösen nun das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 6\mathrm{i} \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und durch Ablesen erhalten wir $\lambda = 0$ und $\mu = 6\mathrm{i}$, also ist

$${}_F b = \begin{pmatrix} 0 \\ 6\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

(iii) Wir berechnen

$$\begin{aligned} {}_G c &= \begin{pmatrix} -1+\mathrm{i} \\ 0 \end{pmatrix} \\ c &= (-1+\mathrm{i}) \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ \mathrm{i} \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1-\mathrm{i} \\ -1-\mathrm{i} \end{pmatrix} \\ &= (-1-\mathrm{i}) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1-\mathrm{i}) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und erhalten ${}_E c = \begin{pmatrix} -1-\mathrm{i} \\ -1-\mathrm{i} \end{pmatrix}$. Wir lösen nun das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} -1-\mathrm{i} \\ -1-\mathrm{i} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und durch Ablesen erhalten wir $\lambda = -1+\mathrm{i}$ und $\mu = -1-\mathrm{i}$, also ist

$${}_F c = \begin{pmatrix} -1+\mathrm{i} \\ -1-\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

(b) **(i)** Wir haben in der Aufgabe H15 bereits gesehen, dass

$$\begin{aligned} g(x) &= \cos(x)(1+\sin(x)) \\ &= \cos(x) + \cos(x)\sin(x) \\ &\overset{\sin(2x)=2\sin(x)\cos(x)}{=} \cos(x) + \frac{1}{2}\sin(2x) \\ &= 1 \cdot f_2(x) + \frac{1}{2} \cdot f_4(x), \end{aligned}$$

gilt und haben gefolgert, dass die Funktion g als Linearkombination der Funktionen f_2 und f_4 darstellbar ist. Nun schreiben wir noch die Koordinaten auf und erhalten

$${}_F g = \left(0,\ 1,\ 0,\ \frac{1}{2}\right).$$

(ii) Für die Funktion h gilt

$$
\begin{aligned}
h(x) &= (2\cos(x)+\sin(x))^2 \\
&= 4(\cos(x))^2 + 4\sin(x)\cos(x) + (\sin(x))^2 \\
&\overset{\sin(2x)=2\sin(x)\cos(x)}{=} 4(\cos(x))^2 + 2\sin(2x) + (\sin(x))^2 \\
&\overset{(\sin(x))^2+(\cos(x))^2=1}{=} 3(\cos(x))^2 + 2\sin(2x) + 1 \\
&\overset{(\cos(x))^2=\frac{1}{2}(\cos(2x)+1)}{=} \frac{3}{2}\cos(2x) + 2\sin(2x) + \frac{5}{2} \\
&= \frac{5}{2}\cdot f_1(x) + \frac{3}{2}\cdot f_3(x) + 2\cdot f_4(x).
\end{aligned}
$$

Nun schreiben wir noch die Koordinaten auf und erhalten

$$
{}_F h = \left(\frac{5}{2},\ 0,\ \frac{3}{2},\ 2\right).
$$

Aufgabe H 18. *Lineare Gleichungssysteme*
Entscheiden Sie ob die Mengen

$$
\begin{array}{ll}
M_1 := (1,0,1,0) + \mathbb{R}\,(2,0,0,0) & M_2 := \mathbb{R}\,(2,1,6,7) \\
M_3 := \{x \in \mathbb{R}^4 \,|\, x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0\} & M_4 := \mathbb{R}\,(1,2,6,8)
\end{array}
$$

in der Lösungsmenge des Gleichungsystems

$$
\begin{aligned}
4x_1 + 5x_2 - x_3 - x_4 &= 0 \\
2x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0
\end{aligned}
$$

liegen und bestimmen Sie eine Basis der Lösungsmenge.

Lösungshinweise hierzu:

- $x := (1,0,1,0) \in M_1$ liegt nicht in der Lösungsmenge, weil die erste Gleichung nicht erfüllt ist. Es gilt nämlich:
$$4 + 0 - 1 - 0 = 3 \neq 0.$$
M_1 liegt also nicht in der Lösungsmenge des angegebenen Gleichungssystems.
- Die Menge M_2 liegt in der Lösungsmenge des Gleichungssystems.
Beweis: Jeder Vektor $x \in M_2$ lässt sich als $x = \lambda\,(2,1,6,7)$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ schreiben. Wir setzen diese Darstellung in das Gleichungssystem ein und überprüfen, ob x eine Lösung ist.
$$
\begin{aligned}
4x_1 + 5x_2 - x_3 - x_4 &= 4\cdot 2\lambda + 5\lambda - 6\lambda - 7\lambda = 0, \\
2x_1 + 2x_2 - x_3 &= 2\cdot 2\lambda + 2\lambda - 6\lambda = 0.
\end{aligned}
$$
Das gilt für alle $\lambda \in \mathbb{R}$, also für alle $x \in M_2$. Wir haben also gezeigt, dass alle Elemente der Menge M_2 in der Lösungsmenge des Gleichungssystems liegen.

- Die Menge M_3 liegt nicht in der Lösungsmenge des Gleichungsystems. Als Begründung reicht es aus, einen Punkt zu finden, der zu M_3 gehört, aber nicht in der Lösungsmenge des Gleichungssystems liegt. Zum Beispiel gilt $x := (0, -2, 1, 0) \in M_3$, denn $-2 + 2 \cdot 1 = 0$, jedoch erfüllt x die zweite Gleichung nicht. Es gilt nämlich $2 \cdot 0 + 2 \cdot (-2) - 1 = -5 \neq 0$.
- Die Menge M_4 liegt in der Lösungsmenge des Gleichungsystems.
  Beweis: Sei $x \in M_4$. Dann existiert ein $\lambda \in \mathbb{R}$ so, dass $x = \lambda\,(1, 2, 6, 8)$ gilt. Wir setzen diese Darstellung im Gleichungssystem ein und überprüfen, ob x eine Lösung ist. Es gilt für alle $x \in M_4$, also für alle $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} 4x_1 + 5x_2 - x_3 - x_4 &= 4 \cdot \lambda + 5 \cdot 2\lambda - 6\lambda - 8\lambda = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 &= 2 \cdot 1\lambda + 2 \cdot 2\lambda - 6\lambda = 0. \end{aligned}$$

  Wir haben also gezeigt, dass alle Elemente der Menge M_4 in der Lösungsmenge des Gleichungssystems liegen.
- Das Gleichungssystem hat 2 Gleichungen und 4 Unbekannten. Es gibt also maximal $4 - 2 = 2$ linear unabhängige Vektoren, die die Lösungsmenge erzeugen.
  Da $v_1 = (2, 1, 6, 7)$ und $v_2 = (1, 2, 6, 8)$ in der Lösungsmenge liegen und linear unabhäng sind, bilden sie eine Basis der Lösungsmenge.

Aufgabe H 19. *Kreuzprodukt*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Rechenregeln für beliebige Vektoren $a, b, c, d \in \mathbb{R}^3$ korrekt oder falsch sind.

(a) $a \times (b \times c) - \langle a \,|\, c \rangle\, b + \langle a \,|\, b \rangle\, c = 0$

(b) $\langle a \times b \,|\, c \rangle = \langle a \,|\, b \times c \rangle - \langle a \,|\, c \times c \rangle$

(c) $a \times (b \times c) - b \times (c \times a) = 0$

(d) $\langle a \times b \,|\, c \times d \rangle = \langle a \,|\, c \rangle \langle b \,|\, d \rangle - \langle b \,|\, c \rangle \langle a \,|\, d \rangle + \langle a \,|\, a \times d \rangle$

Lösungshinweise hierzu: Wir stellen a, b, c, d als $a = (a_1, a_2, a_3)$, $b = (b_1, b_2, b_3)$, $c = (c_1, c_2, c_3)$, $d = (d_1, d_2, d_3)$ dar.

(a) Die Aussage ist korrekt.
Beweis:

$$\begin{aligned} a \times (b \times c) &= (a_1, a_2, a_3) \times (b_2c_3 - b_3c_2, b_3c_1 - b_1c_3, b_1c_2 - b_2c_1) \\ &= (a_2(b_1c_2 - b_2c_1) - a_3(b_3c_1 - b_1c_3),\ a_3(b_2c_3 - b_3c_2) - a_1(b_1c_2 - b_2c_1), \\ &\quad\ a_1(b_3c_1 - b_1c_3) - a_2(b_2c_3 - b_3c_2)) \\ &\quad\ \text{nach } b_i, c_i \text{ sortieren :} \\ &= (b_1(a_2c_2 + a_3c_3) - c_1(a_2b_2 + a_3b_3), b_2(a_1c_1 + a_3c_3) - c_2(a_1b_1 + a_3b_3)\ , \\ &\quad\ b_3(a_1c_1 + a_2c_2) - c_3(a_1b_1 + a_2b_2)) \end{aligned}$$

Wir addieren $(0,0,0) = (b_1(a_1c_1) - c_1(a_1b_1), b_2(a_2c_2) - c_2(a_2b_2), b_3(a_3c_3) - c_3(a_3b_3))$ zur Gleichung und bekommen:

$$\begin{aligned} a \times (b \times c) &= (b_1 \langle a \,|\, c \rangle - c_1 \langle a \,|\, b \rangle , b_2 \langle a \,|\, c \rangle - c_2 \langle a \,|\, b \rangle , b_3 \langle a \,|\, c \rangle - c_3 \langle a \,|\, b \rangle) \\ &= \langle a \,|\, c \rangle\, b - \langle a \,|\, b \rangle\, c. \end{aligned}$$

Es gilt also $a \times (b \times c) - \langle a \,|\, c \rangle\, b + \langle a \,|\, b \rangle\, c = 0.$

(b) Die Aussage ist korrekt.
Beweis: Da $\langle a \,|\, c \times c \rangle = \langle a \,|\, 0 \rangle = 0$ ist, bleibt nur noch zu zeigen:

$$\langle a \times b \,|\, c \rangle = \langle a \,|\, b \times c \rangle .$$

$$\begin{aligned} \langle a \,|\, b \times c \rangle &= \langle a \,|\, (b_2c_3 - b_3c_2, b_3c_1 - b_1c_3, b_1c_2 - b_2c_1) \rangle \\ &= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1) \\ &\quad \text{nach } c_i \text{ sortieren} \\ &= c_1(a_2b_3 - a_3b_2) + c_2(a_3b_1 - a_1b_3) + c_3(a_1b_2 - a_2b_1) \\ &= \langle a \times b \,|\, c \rangle . \end{aligned}$$

(c) Die Aussage ist falsch. Ein Gegenbeispiel wäre $a = (1,0,0)$, $b = (1,1,0)$, $c = (0,0,1)$. Es gilt:
$a \times (b \times c) - b \times (c \times a) = (1,0,0) \times (1,-1,0) - (1,1,0) \times (0,1,0)$
$= (0,0,-1) - (0,0,1) \neq 0.$

(d) Die Aussage ist korrekt.
Beweis: Da $\langle a \,|\, a \times d \rangle = 0$ ist, bleibt zu zeigen, dass :

$$\langle a \times b \,|\, c \times d \rangle = \langle a \,|\, c \rangle \langle b \,|\, d \rangle - \langle b \,|\, c \rangle \langle a \,|\, d \rangle$$

In der zweiten Teilaufgabe haben wir gezeigt, dass für $x, y, z \in \mathbb{R}^3$:

$$\langle x \times y \,|\, z \rangle = \langle x \,|\, y \times z \rangle$$

gilt. Mit $x = a, y = b, z = (c \times d)$ fogt

$$\langle a \times b \,|\, c \times d \rangle = \langle a \,|\, b \times (c \times d) \rangle .$$

In der ersten Teilaufgabe haben wir gezeigt, dass für $x, y, z \in \mathbb{R}^3$:

$$x \times (y \times z) - \langle x \,|\, z \rangle\, y + \langle x \,|\, y \rangle\, z$$

gilt. Mit $x = b, y = c, z = d$ fogt

$$b \times (c \times d) = \langle b \,|\, d \rangle\, c - \langle b \,|\, c \rangle\, d.$$

Zusammengefasst gilt also:

$$\begin{aligned} \langle a \times b \,|\, c \times d \rangle &= \langle a \,|\, b \times (c \times d) \rangle \\ &= \langle a \,|\, \langle b \,|\, d \rangle\, c - \langle b \,|\, c \rangle\, d \rangle \\ &= \langle a \,|\, c \rangle \langle b \,|\, d \rangle - \langle b \,|\, c \rangle \langle a \,|\, d \rangle \end{aligned}$$

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 20. *Matrizenmultiplikation*

Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 5-\mathrm{i} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 3\mathrm{i} & \mathrm{i} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Welche der Produkte $AC, CA, CA^\mathsf{T}, BA, CAB, AC^\mathsf{T}A^\mathsf{T}, (CB)^\mathsf{T}$ sind definiert? Berechnen Sie diese Produkte.

Lösungshinweise hierzu: Es gilt $A \in \mathbb{C}^{1\times 4}, B \in \mathbb{C}^{4\times 2}, C \in \mathbb{C}^{4\times 4}$. Aus diesem Grund sind die Produkte CA, BA, CAB nicht definiert. Die Zeilen- bzw. Spaltenzahl ist nicht kompatibel. Unten sind für die definierten Produkte die Ergebnisse angegeben:

$$AC = \begin{pmatrix} 9-2\,\mathrm{i} & -2 & -1 & -12+2\,\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

$$CA^\mathsf{T} = \begin{pmatrix} 9-2\,\mathrm{i} \\ -5+\mathrm{i} \\ -11+2\,\mathrm{i} \\ -12+2\,\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

$$AC^\mathsf{T}A^\mathsf{T} = -67+24\,\mathrm{i}$$

$$CB = \begin{pmatrix} 2+6\mathrm{i} & 4+2\mathrm{i} \\ 2-3\mathrm{i} & -\mathrm{i} \\ 1-6\mathrm{i} & 4-2\mathrm{i} \\ 2-6\mathrm{i} & -2\mathrm{i} \end{pmatrix},$$

damit ist

$$(CB)^\mathsf{T} = \begin{pmatrix} 2+6\mathrm{i} & 4+2\mathrm{i} \\ 2-3\mathrm{i} & -\mathrm{i} \\ 1-6\mathrm{i} & 4-2\mathrm{i} \\ 2-6\mathrm{i} & -2\mathrm{i} \end{pmatrix}^\mathsf{T} = \begin{pmatrix} 2+6\mathrm{i} & 2-3\mathrm{i} & 1-6\mathrm{i} & 2-6\mathrm{i} \\ 4+2\mathrm{i} & -\mathrm{i} & 4-2\mathrm{i} & -2\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe H 21. *Rechenregeln*

Seien $X, Y \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Entscheiden Sie, ob die folgenden Regeln zutreffend sind.

(a) $XY - YX = 0 \Rightarrow XY = E_2$, **(b)** $X^2 = E_2 \Rightarrow X = \pm E_2$,
(c) $XX^\mathsf{T} = 0 \Rightarrow X = 0$, **(d)** $XY = 0 \iff YX = 0$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Die Aussage ist falsch. Ein Gegenbeispiel ist z.B. $Y = X \neq E_2$ beliebig gewählt.

(b) Die Aussage ist falsch. Ein Gegenbeispiel ist z.B. $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(c) Die Aussage ist korrekt. Mit den Bezeichnungen $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$ erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 = XX^\intercal &= \begin{pmatrix} x_{11}^2 + x_{12}^2 & x_{11}x_{21} + x_{12}x_{22} \\ x_{11}x_{21} + x_{12}x_{22} & x_{22}^2 + x_{21}^2 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow\ & x_{11}^2 + x_{12}^2 = 0 \text{ und } x_{22}^2 + x_{21}^2 = 0 \\ \Rightarrow\ & x_{11} = x_{12} = x_{21} = x_{22} = 0 \\ \Rightarrow\ & X = 0\,. \end{aligned}$$

(d) Die Aussage ist falsch. Ein Gegenbeispiel ist $X = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Es gilt für diese Auswahl $XY = 0$ und $YX \neq 0$.

Aufgabe H 22. *Skalarprodukt*

(a) Es seien $x, y \in \mathbb{R}^n$, also $x = (x_1, ..., x_n)$ und $y = (y_1, ..., y_n)$ mit $x_j, y_j \in \mathbb{R}$. Entscheiden Sie, für welche $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n)$ mit $\lambda_j \in \mathbb{R}$

$$\langle x \,|\, y \rangle_\lambda = \lambda_1 x_1 y_1 + ... + \lambda_n x_n y_n$$

ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ im Sinne von $\mathbf{2.6.2}$ definiert.

(b) Sei $B := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Definiert

$$\langle (x_1, x_2) \,|\, (y_1, y_2) \rangle_B := (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

für (x_1, x_2), $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ im Sinne von $\mathbf{2.6.2}$?

Lösungshinweise hierzu:

(a) Die Symmetrie und die Bilinearität sind für beliebige Werte der λ_j gegeben.
Denn: Symmetrie: Es ist

$$\begin{aligned} \langle x \,|\, y \rangle_\lambda &= \lambda_1 x_1 y_1 + ... + \lambda_n x_n y_n \\ &= \lambda_1 y_1 x_1 + ... + \lambda_n y_n x_n \quad \text{da } \mathbb{R} \text{ Körper} \\ &= \langle y \,|\, x \rangle_\lambda \end{aligned}$$

Bilinearität: Zeige Linearität im ersten Argument. Mit der Symmetrie folgt dann Linearität im Zweiten. Es folgt die Bilinearität. Seien $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ und sei $\alpha \in \mathbb{R}$, so gilt

$$\begin{aligned}\langle \alpha(x+y) \,|\, z\rangle_\lambda &= \langle \alpha x + \alpha y \,|\, z\rangle \\ &= \lambda_1(\alpha x_1 + \alpha y_1)z_1 + ... + \alpha_n(\alpha x_n + \alpha y_n)z_n \\ &= \alpha\lambda_1 x_1 z_1 + \alpha\lambda_1 y_1 z_1 + ... + \alpha\lambda_n x_n z_n + \alpha\lambda_n y_n z_n \\ &= \alpha \langle x \,|\, z\rangle_\lambda + \alpha \langle y \,|\, z\rangle_\lambda .\end{aligned}$$

Somit ist die Linearität im ersten Argument gezeigt.
Es gab hier keine Einschränkungen an λ.
Zur Positiv-Definitheit: Damit $\langle x \,|\, y\rangle_\lambda = \lambda_1 x_1 y_1 + ... + \lambda_n x_n y_n$ ein Skalarprodukt ist, muss das Produkt positiv-definit sein, d.h. es muss

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\}\colon \ \langle x \,|\, x\rangle_\lambda > 0 \qquad \text{und} \qquad x = 0 \Leftrightarrow \langle x \,|\, x\rangle_\lambda = 0$$

gelten. Es ist $\langle x \,|\, x\rangle_\lambda = \lambda_1 x_1^2 + ... + \lambda_n x_n^2$. Sei nun $x = e_i$ mit $i \in \{1, ..., n\}$, so gilt $\langle e_i \,|\, e_i\rangle_\lambda = \lambda_i$. Es muss also für die Definitheit gelten, dass $\lambda_i > 0$ ist.
Insgesamt folgern wir also, dass $\lambda \in (\mathbb{R}^+)^n$ gilt.

(b) Es gilt

$$(x_1, x_2)\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2.$$

Zur Symmetrie:

$$\begin{aligned}\langle (x_1, x_2) \,|\, (y_1, y_2)\rangle_B &= (x_1, x_2)\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ &= 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2 \\ &= 2y_1x_1 + y_2x_1 + y_1x_2 + 2y_2x_2 \\ &= (y_1, y_2)\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= \langle (y_1, y_2) \,|\, (x_1, x_2)\rangle_B\end{aligned}$$

Somit ist die Symmetrie gezeigt.
Zur Bilinearität:

$$\begin{aligned}&\langle \alpha((x_1, x_2) + (z_1, z_2)) \,|\, (y_1, y_2)\rangle_B \\ =\ & \alpha((x_1, x_2) + (z_1, z_2))\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ =\ & \alpha(x_1, x_2)\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \alpha(z_1, z_2)\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ =\ & \alpha \langle (x_1, x_2) \,|\, (y_1, y_2)\rangle_B + \alpha \langle (z_1, z_2) \,|\, (y_1, y_2)\rangle_B\end{aligned}$$

Dies folgt mit dem Distributivgesetz für Matrixrechnung. Somit ist die Linearität im ersten Argument gezeigt. Im zweite Argument folgt sie wegen der Symmetrie. Somit

ist die Bilinearität gezeigt.
Zur Positiv-Definitheit:

$$\begin{aligned}(x_1, x_2)\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= 2x_1x_1 + x_1x_2 + x_2x_1 + 2x_2x_2 \\ &= (x_1+x_2)^2 + x_1^2 + x_2^2\end{aligned}$$

Dies ist stets größer oder gleich Null und nur gleich Null, falls $(x_1, x_2) = (0, 0)$ gilt. Es handelt sich also um ein Skalarprodukt.

Aufgabe H 23. *Matrix-Exponentialfunktion*

In der Präsenzübung wurde die Matrix-Exponentialfunktion definiert. Gegeben seien die reellen Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & b_1 & b_2 \\ 0 & 0 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie $\exp(A+B)$.

(b) Berechnen Sie $\exp(A)\exp(B)$.

(c) Finden Sie zwei verschiedene Matrizen $A \neq 0$ und $B \neq 0$ in der oben angegebenen Form so, dass $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$ gilt.

(d) Finden Sie A, B in der oben angegebenen Form so, dass $\exp(A+B) \neq \exp(A)\exp(B)$ gilt.

Lösungshinweise hierzu: Es ist $\exp(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ die Defintion aus der Präsenzübung. Wir berechnen zuerst $\exp(A)$ und $\exp(B)$. Es gilt

$$A^0 = E_3, \quad A^1 = A, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_1a_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A^l = 0 \text{ für } l \geqq 3$$

und somit gilt

$$\exp(A) = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_2 + \frac{a_1a_3}{2} \\ 0 & 1 & a_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und ebenso ist

$$\exp(B) = \begin{pmatrix} 1 & b_1 & b_2 + \frac{b_1b_3}{2} \\ 0 & 1 & b_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Somit gilt

$$\begin{aligned}\exp(A+B) &= \begin{pmatrix} 1 & a_1+b_1 & a_2+b_2+\frac{(a_1+b_1)(a_3+b_3)}{2} \\ 0 & 1 & a_3+b_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & a_1+b_1 & a_2+b_2+\frac{a_1a_3+a_1b_3+a_3b_1+b_1b_3}{2} \\ 0 & 1 & a_3+b_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

(b) Weiter gilt

$$\exp(A)\exp(B) = \begin{pmatrix} 1 & a_1+b_1 & a_2+b_2+a_1b_3+\frac{a_1a_3+b_1b_3}{2} \\ 0 & 1 & a_3+b_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Wir betrachten

$$\exp(A+B) - \exp(A)\exp(B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{a_3b_1-a_1b_3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es muss für die gesuchten Matrizen $a_3b_1 = a_1b_3$ gelten. Z.B.:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(d) Siehe **(c)**. Es muss $a_3b_1 \neq a_1b_3$ gelten. Z.B.:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 24. *Polynome*

Es sei der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad kleiner vier gegeben durch

$$\mathrm{Pol}_3\,\mathbb{R} = \left\{ p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;\middle|\; p(X) = \sum_{j=0}^{3} a_j X^j,\ a_j \in \mathbb{R} \right\}.$$

(a) Prüfen Sie nach, dass $B:\ 1,\ 1+X,\ 1+X+X^2,\ 1+X+X^2+X^3$ eine Basis von $\mathrm{Pol}_3\,\mathbb{R}$ ist.

(b) Es sei $d\colon \mathrm{Pol}_3\,\mathbb{R} \to \mathrm{Pol}_3\,\mathbb{R}$ die Abbildung, die einem Polynom seine Ableitung zuordnet. Geben Sie die Matrix ${}_B d_B$ an.

(c) Bestimmen Sie den Kern der Abbildung $D\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4\colon v \mapsto {}_B d_B\, v$. Bestimmen Sie die Dimension des Bildes von D.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Nach **3.8.14** ist $\mathrm{Pol}_3\,\mathbb{R}$ ein Vektorraum der Dimension 4, eine Basis hat also genau 4 Elemente.
Wir prüfen nach, ob die vier gegeben Polynome linear unabhängig sind.

$$\begin{aligned} \forall X \in \mathbb{R}\colon\quad 0 &\overset{!}{=} \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot (1+X) + \lambda_3 \cdot (1+X+X^2) + \lambda_4 \cdot (1+X+X^2+X^3) \\ &= \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4 + (\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4)X + (\lambda_3+\lambda_4)X^2 + \lambda_4 X^3 \end{aligned}$$

Mit Koeffizientenvergleich erhalten wir $\lambda_4 = 0$, denn es steht $0 \cdot X^3$ auf der linken Seite. Somit folgt $\lambda_3 = 0$, also $\lambda_2 = 0$ und schließlich $\lambda_1 = 0$. Es gibt nur die triviale Kombination der Null, es sind also die Polynome linear unabhängig. Es handelt sich also um eine Basis.

(b) Wir stellen ein Polynom $p \in \mathrm{Pol}_3\,\mathbb{R}$, wie folgt, dar:

$$\begin{aligned} p(X) &= a \cdot 1 + b \cdot (1+X) + c \cdot (1+X+X^2) + d \cdot (1+X+X^2+X^3) \\ &= a+b+c+d + (b+c+d)X + (c+d)X^2 + dX^3. \end{aligned}$$

An dieser Stelle halten wir auch die Koordinatendarstellung bzgl. der Basis B fest;

$${}_B p = (a, b, c, d).$$

Wir leiten p ab und erhalten

$$\begin{aligned} p'(X) &= b+c+d+2(c+d)X+3dX^2 \\ &= b+c+d+2cX+2dX+3dX^2 \\ &= b+c-2d+2cX-dX+3d+2dX+dX+3dX^2 \\ &= b+c-2d+2cX-dX+3d(1+X+X^2) \\ &= b-c-2d+d-d+c+c+2cX-dX+3d(1+X+X^2) \\ &= b-c-d+(2c-d)(1+X)+3d(1+X+X^2) \end{aligned}$$

An dieser Stelle halten wir wieder die Koordinatendarstellung bzgl. der Basis B fest;

$$_Bp' = (b-c-d, 2c-d, 3d, 0).$$

Wir wissen nun

$$_Bp = (a,b,c,d) \mapsto {_Bd_B} \cdot {_Bp}^\mathsf{T} = ({_Bp'})^\mathsf{T} = (b-c-d, 2c-d, 3d, 0)^\mathsf{T}.$$

Somit ergibt sich

$$_Bd_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Es ist $\operatorname{Kern} D = \{v \in \mathbb{R}^4 \mid D(v) = {_Bd_B}\, v = 0\}$. Wir lösen also das homogene Gleichungssystem

$$\left[\begin{array}{cccc||c} 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Durch Umformen erhalten wir

$$\left[\begin{array}{cccc||c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

somit ist der Kern gegeben durch

$$\operatorname{Kern} D = \left\{ v \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; v = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Interpretation: Die Ableitung von Konstanten ist immer identisch 0.
Mit der Dimensionsformel für lineare Abbildungen folgt, dass die Dimension des Bildes 3 ist. Denn: $\dim \text{Urbildraum} = \dim \operatorname{Kern} + \dim \operatorname{Bild}$, also hier $4 = 1 + x$, es folgt $x = 3$.
Interpretation: Durch Ableiten kann es kein Polynom mit Grad drei mehr geben, es kann die Dimension also nicht vier sein. Es gibt aber beliebige Polynome vom Grad echt kleiner drei, also ist die Dimension 3.

Aufgabe H 25. *Lineare Gleichungssysteme*

(a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems über $\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} x_1 + (1+\mathrm{i})x_2 &= 1 - \mathrm{i} \\ \mathrm{i}x_1 + 2x_2 &= 1 \end{aligned}$$

(b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems.

$$\begin{aligned} -\frac{3}{2}x_1 - 2x_2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 - 2x_5 + 3x_6 &= -1 \\ -x_1 - \frac{4}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_4 + \frac{2}{3}x_5 + 2x_6 &= \frac{13}{3} \\ -\frac{3}{4}x_1 - x_2 + \frac{1}{4}x_3 - \frac{1}{4}x_4 - \frac{2}{3}x_5 + \frac{7}{12}x_6 &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Ist die Lösungsmenge ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^6$?

Lösungshinweise hierzu:

(a) Multipliziert man die erste Zeile mit $-\mathrm{i}$ und addiert dies zur zweiten Zeile erhält man das LGS:

$$\begin{aligned} x_1 + (1+\mathrm{i})x_2 &= 1 - \mathrm{i} \\ (2 - \mathrm{i}(1+\mathrm{i}))x_2 &= 1 - \mathrm{i}(1-\mathrm{i}) \end{aligned}$$

Und damit

$$x_2 = \frac{-\mathrm{i}}{3-\mathrm{i}} = \frac{1}{10} - \frac{3}{10}\mathrm{i}$$

und

$$x_1 = \frac{3}{5} - \frac{4}{5}\mathrm{i}.$$

(b) Wir müssen das folgende Gleichungssystem lösen

$$\left[\begin{array}{cccccc||c} -\frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -2 & 3 & -1 \\ -1 & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 2 & \frac{13}{3} \\ -\frac{3}{4} & -1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{2}{3} & \frac{7}{12} & -\frac{1}{2} \end{array}\right].$$

Die Multiplikation der ersten Zeile mit (-2), der zweiten mit 3 und der dritten mit 12 ergibt das System

$$\left[\begin{array}{cccccc||c} 3 & 4 & -1 & 1 & 4 & -6 & 2 \\ -3 & -4 & 1 & 2 & 2 & 6 & 13 \\ -9 & -12 & 3 & -3 & -8 & 7 & -6 \end{array}\right].$$

Addieren wir die erste Zeile zur zweiten und das dreifache der ersten zur dritten erhalten wir das System

$$\left[\begin{array}{cccccc||c} 3 & 4 & -1 & 1 & 4 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 6 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -11 & 0 \end{array}\right].$$

Addieren wir $-\frac{1}{3}$ der zweiten Zeile und $-\frac{1}{2}$ der dritten Zeile zu der ersten Zeile, bekommen wir das Gleichungssystem

$$\left[\begin{array}{cccccc||c} 3 & 4 & -1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 6 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -11 & 0 \end{array}\right].$$

Mit der Auswahl $x_5 = 11\lambda_3$ können die zweite und dritte Zeile als:

$$\begin{aligned} x_6 &= 4\lambda_3 \\ x_4 &= 5 - 22\lambda_3 \end{aligned}$$

dargestellt werden. Mit der Auswahl $x_1 = \lambda_1$ und $x_2 = \lambda_2$ kann die erste Zeile als

$$x_3 = 3 + 3\lambda_1 + 4\lambda_2 - 2\lambda_3$$

dargestellt werden.
Die Lösungsmenge ist also

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ -22 \\ 11 \\ 4 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

Da der Vektor 0 kein Element der Lösungsmenge ist, kann sie kein Untervektorraum sein.

Aufgabe H 26. *Lineare Abbildung*
Es sei $g = \mathbb{R}(1,3,0)^\intercal$ eine Gerade in $\mathbb{R}^3$ und $\delta\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die Drehung an dieser Geraden, die $(1,3,1)^\intercal$ auf $\left(\frac{-3}{\sqrt{10}} + 1, \frac{1}{\sqrt{10}} + 3, 0\right)^\intercal$ abbildet.

- **(a)** Bestimmen Sie den Drehwinkel der Abbildung δ und das Bild von $(-3,1,0)^\intercal$ unter der Abbildung δ.
- **(b)** Wählen Sie eine Orthonormalbasis B, die einen Richtungsvektor von g und den Vektor $(0,0,1)^\intercal$ enthält, und bestimmen Sie die Matrixbeschreibung ${}_B\delta_B$ bezüglich dieser Basis.
- **(c)** Bestimmen Sie die Koordinatenvektoren bezüglich B der Standardbasisvektoren.
- **(d)** Bestimmen Sie die Bilder der Vektoren der Standardbasis unter δ.
- **(e)** Bestimmen Sie die Matrixbeschreibung ${}_E\delta_E$ bezüglich der Standardbasis E.

Lösungshinweise hierzu:

- **(a)** Der Drehwinkel lässt sich in der Ebene, die orthogonal zu g liegt und durch den Punkt $(1,3,1)^\intercal$ geht, ablesen. Diese Ebene hat die Gleichung $x_1 + 3x_2 = 10$. Sie schneidet die Gerade g im Punkt $Q = (1,3,0)^\intercal$. Die Verbindungsvektoren von Q zu den Punkten $(1,3,1)^\intercal$ und $\left(\frac{-3}{\sqrt{10}} + 1, \frac{1}{\sqrt{10}} + 3, 0\right)^\intercal$ sind $(0,0,1)$ und $\left(\frac{-3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}, 0\right)$. Der Winkel zwischen diesen beiden Verbindungsvektoren ist der Drehwinkel und beträgt $\frac{\pi}{2}$.

  Das Bild $R = (r_1, r_2, r_3)$ des Punktes $(-3,1,0)^\intercal$ ist ein Punkt, der

(i) in der Ebene, die orthogonal zu g ist und durch den Punkt $(-3,1,0)^\intercal$ geht, liegt,

(ii) in dieser Ebene einen Abstand vom Schnittpunkt mit g hat, der mit dem Abstand von $(-3,1,0)^\intercal$ zu diesem Schnittpunkt übereinstimmt,

(iii) in dieser Ebene mit $(-3,1,0)^\intercal$ am Schnittpunkt mit g einen Winkel von $\frac{\pi}{2}$ einschließt.

Das ergibt die folgenden Bedingungen:

(i) $r_1 + 3r_2 = 0$ (die Ebene hat die Gleichung $x_1 + 3x_3 = 0$)

(ii) $\sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2} = \sqrt{10}$ (der Schnittpunkt ist $(0,0,0)^\intercal$, der Abstand zu $(-3,1,0)^\intercal$ beträgt $\sqrt{10}$)

(iii) $-3r_1 + r_2 = 0$

Diese drei Gleichungen haben die Lösungen $(0,0,1)^\intercal$ und $(0,0,-1)^\intercal$. Der Punkt $(0,0,1)^\intercal$ ist das Ergebnis bei der Drehung um $\frac{\pi}{2}$ in die falsche Richtung. Die Lösung ist also $R = (0,0,-1)^\intercal$.

(b) Wir wählen

$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad b_3 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nach Satz **3.8.6** gilt

$$\begin{aligned} {}_B\delta_B &= \begin{pmatrix} {}_B\delta(b_1) & {}_B\delta(b_2) & {}_B\delta(b_3) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} {}_Bb_1 & {}_Bb_3 & {}_B{-b_2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(c) Wir lösen die Gleichungssysteme

$$\begin{aligned} e_1 &= \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \alpha_3 b_3 \\ e_2 &= \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \beta_3 b_3 \\ e_3 &= \gamma_1 b_1 + \gamma_2 b_2 + \gamma_3 b_3 \end{aligned}$$

und erhalten

$$\begin{aligned} {}_Be_1 &= \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} \\ 0 \\ -\frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} \\ {}_Be_2 &= \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} \\ {}_Be_3 &= \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(d)

$$
\begin{aligned}
{}_B\delta\left(e_1\right) &= {}_B\delta_{BB} e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} \\ 0 \\ -\frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} \\ 0 \end{pmatrix} \\
{}_B\delta\left(e_2\right) &= {}_B\delta_{BB} e_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{-1}{\sqrt{10}} \\ 0 \end{pmatrix} \\
{}_B\delta\left(e_3\right) &= {}_B\delta_{BB} e_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Also gilt

$$
\begin{aligned}
\delta\left(e_1\right) &= \frac{1}{\sqrt{10}} b_1 + \frac{3}{\sqrt{10}} b_2 + 0\, b_3 = \frac{1}{\sqrt{10}} \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{3}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} \\ \frac{3}{10} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} \\
\delta\left(e_2\right) &= \frac{3}{\sqrt{10}} \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{10} \\ \frac{9}{10} \\ \frac{-1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} \\
\delta\left(e_3\right) &= \begin{pmatrix} \frac{-3}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

(e) Nach dem Vorherigen gilt

$$
{}_E\delta_E = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & \frac{3}{10} & \frac{-3}{\sqrt{10}} \\ \frac{3}{10} & \frac{9}{10} & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{-1}{\sqrt{10}} & 0 \end{pmatrix}
$$

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 27. *Lösbarkeit von LGS*

Berechnen Sie die Determinante der Matrix A und bestimmen Sie in Abhängigkeit von $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ alle Lösungen des linearen Gleichungssystems $Ax = b$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & -2 & -3 \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} \beta \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Lösungshinweise hierzu: Wir betrachten gleich die erweiterte Matrix und bringen diese auf eine "hübsche" Dreiecksgestalt. Hierbei merken wir uns, wie viele Zeilenvertauschungen vorgenommen und mit welchen Faktoren wir eine Zeile multipliziert haben. Wir formen

$$\left[\begin{array}{cccc||c} \alpha & 2 & 3 & -1 & \beta \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & -3 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right]$$

um zu

$$\left[\begin{array}{cccc||c} 1 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & -\beta - 3\alpha + 5 \end{array}\right].$$

Wir haben dreimal Zeilen vertauscht und einmal eine Zeile mit dem Faktor -1 multipliziert. Somit ist die Determinante α.

Falls die Determinante nicht Null ist, also falls $\alpha \neq 0$ gilt, so ist das System für beliebige $\beta \in \mathbb{R}$ lösbar. Die Lösung ist geben durch

$$x_1 = -\frac{5-\beta}{\alpha}, \quad x_2 = 4 - \frac{5-\beta}{\alpha}, \quad x_3 = -2 + \frac{5-\beta}{\alpha}, \quad x_4 = \frac{5-\beta}{\alpha} - 3.$$

Sei nun $\alpha = 0$, so ist das System nur lösbar, falls $-\beta + 5 = 0$ gilt, also falls $\beta = 5$ gilt. In diesem Fall ist die Lösungsmenge gegeben durch

$$\mathcal{L} = \left\{ (-3-t, 1-t, 1+t, t)^\intercal \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Aufgabe H 28. *Invertieren*

(a) Für welche Werte von a, b, c, d, e, f und g hat die Matrix

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & g \end{pmatrix}$$

eine Inverse? Berechnen Sie in diesem Fall die Inverse.

(b) Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Die gegebene Matrix B hat eine Inverse, falls ihre Determinante nicht verschwindet. Die Determinante berechnen wir zum Beispiel durch Entwicklung nach der dritten Zeile. Dies führt auf $\det(B) = g(ae - bd)$. Die Matrix hat also eine Inverse für $g \neq 0$ und für alle $a, b, d, e \in \mathbb{R}$, sodass $ae - bd \neq 0$. Für diese Werte bestimmen wir die Inverse Matrix von B über die Lösung eines linearen Gleichungssystems. Wir wollen das Gleichungsystem $BX = E_3$ lösen. Wir verwenden dafür das Gauß-Verfahren und schreiben das erweiterte System auf:

$$\left[\begin{array}{ccc||ccc} a & b & c & 1 & 0 & 0 \\ d & e & f & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & g & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Durch teilen der letzten Zeile durch $g \neq$ erhalten wir

$$\left[\begin{array}{ccc||ccc} a & b & c & 1 & 0 & 0 \\ d & e & f & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{g} \end{array}\right]$$

Die Subtraktion von f-mal der dritten Zeile von der zweiten Zeile und von c-mal der dritten Zeile von der ersten liefert

$$\left[\begin{array}{ccc||ccc} a & b & 0 & 1 & 0 & -\frac{c}{g} \\ d & e & 0 & 0 & 1 & -\frac{f}{g} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{g} \end{array}\right]$$

Die Multiplikation der ersten Zeile mit e und Substraktion vom $b-$fachen der zweiten Zeile davon und die Multiplikation der zweiten Zeile mit a und Substraktion vom $d-$fachen der ersten Zeile davon liefert

$$\left[\begin{array}{ccc||ccc} ae - bd & 0 & 0 & e & -b & \frac{bf}{g} - \frac{ce}{g} \\ 0 & ae - bd & 0 & -d & a & \frac{cd}{g} - \frac{af}{g} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{g} \end{array}\right]$$

Die Devision der ersten und zweiten Zeile durch $(ae - bd) \neq 0$ liefert

$$\left[\begin{array}{ccc||ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{e}{ae-bd} & -\frac{b}{ae-bd} & \frac{ce-bf}{(bd-ae)g} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{d}{ae-bd} & \frac{a}{ae-bd} & \frac{cd-af}{(ae-bd)g} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{g} \end{array}\right]$$

Damit ergibt sich

$$B^{-1} = \frac{1}{g(ae-bd)} \begin{pmatrix} eg & -bg & bf-ce \\ -dg & ag & cd-af \\ 0 & 0 & ae-bd \end{pmatrix}.$$

(b) Zur Bestimmung der Lösungen der Matrixgleichung setzen wir im Folgenden

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}.$$

Aus der zu lösenden Gleichung erhalten wir damit die folgenden Gleichungen

$$\begin{aligned} a+2c &= 1 \\ b+2d &= 1 \\ 2a+3c+4e &= 6 \\ 2b+3d+4f &= 3. \end{aligned}$$

Daraus erhalten wir

$$X = \begin{pmatrix} 1-2c & 1-2d \\ c & d \\ 1+\frac{c}{4} & \frac{1+d}{4} \end{pmatrix}.$$

Einsetzen von X in die gegeben Gleichung zeigt, dass die Gleichung für alle $c, d \in \mathbb{R}$ erfüllt ist.

Aufgabe H 29. *Inverse*

Für welche Werte des reellen Parameters a ist die Matrix

$$A_a = \begin{pmatrix} a & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

invertierbar? Bestimmen Sie die Inverse von A_a, falls sie existiert.

Lösungshinweise hierzu: Die Matrix A_a ist für diejenigen Werte von a invertierbar, für welche $\det(A_a) \neq 0$ gilt. Wir bestimmen die Determinante von A_a zum Beispiel durch Entwicklung nach der vierten Zeile. Dies führt auf

$$\det(A_a) = 2 \det \begin{pmatrix} a & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 6(a-4),$$

damit ist die Matrix A_a invertierbar für alle $a \neq 4$. Wir bestimmen die Inverse von A_a für $a \neq 4$ durch

$$A_a^{-1} = (\det A_a)^{-1} \operatorname{adj}(A_a),$$

wobei adj(A_a) die Adjunkte von A_a bezeichnet. Wir erhalten

$$A_a^{-1} = \frac{1}{6(a-4)} \begin{pmatrix} 6 & 0 & -12 & 0 \\ -2 & 2(a-4) & 4 & a-4 \\ -12 & 0 & 6a & 12-3a \\ 0 & 0 & 0 & 3a-12 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe H 30. *Geometrische Interpretation*
Es sei P die Pyramide, die von den Vektoren

$$v_1 = (1,1,1)^\intercal$$
$$v_2 = (-1,0,4)^\intercal$$
$$v_3 = (2,6,0)^\intercal$$

aufgespannt wird. Berechnen Sie das Volumen von P. Welche Hesse-Normalform hat die Ebene, die parallel zur von v_1 und v_2 aufgespannten Ebene ist und die Pyramide so teilt, dass das Volumen des Pyramidenstumpfs ein Drittel des Volumens von P ist?

Lösungshinweise hierzu: Es bezeichne Vol(P) das Volumen der Pyramide P. Dann gilt

$$\mathrm{Vol}(P) = \frac{1}{6}\left|\det(v_1,v_2,v_3)\right| = \frac{11}{3}.$$

Weiter gilt

$$v_1 \times v_2 = (4,-5,1)^\intercal.$$

Daher hat jede Ebene, die parallel zu der von v_1 und v_2 aufgespannten Ebene ist, eine Gleichung der Gestalt

$$E : 4x_1 - 5x_2 + x_3 = d,$$

für einen Paramter $d \in \mathbb{R}$.
Diese Ebene teilt die Pyramide in einen Pyramidenstumpf und eine (kleinere) Pyramide P'. Das Volumen von P' soll $\frac{2}{3}$ des Volumens von P betragen und berechnet sich als

$$\mathrm{Vol}(P') = \frac{1}{6}\left|\det(\lambda\cdot v_1, \lambda\cdot v_2, \lambda\cdot v_3)\right|$$

Für einen Wert $\lambda \in \mathbb{R}$, der das Verhältnis der Seitenlängen der beiden Pyramiden beschreibt. Das ergibt die Gleichung

$$\mathrm{Vol}(P') = \frac{1}{6}\left|\det(\lambda\cdot v_1, \lambda\cdot v_2, \lambda\cdot v_3)\right| = \frac{2}{3}\mathrm{Vol}(P) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{6}\left|\det(v_1,v_2,v_3)\right|\right),$$

woraus sich $\lambda^3 = \frac{2}{3}$ und damit $\lambda = \sqrt[3]{\frac{2}{3}}$ ergibt. Der Punkt $Q = \left(1 - \sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right) v_3$ liegt damit in der Grundfläche von P'. Die Hesse-Normalform der Ebene lautet also

$$-\frac{4}{\sqrt{42}}x_1 + \frac{5}{\sqrt{42}}x_2 - \frac{1}{\sqrt{42}}x_3 = \left(1 - \sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right)\frac{22}{\sqrt{42}}.$$

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 31. *Schmidtsches Orthonormalisierungsverfahren*

Bestimmen Sie mit dem Schmidtschen Verfahren eine Orthonormalbasis der folgenden Untervektorräume:

(a) $\mathrm{L}\left((1,0,0,0,0)^{\mathsf{T}},(1,0,1,0,0)^{\mathsf{T}},(1,1,1,0,2)^{\mathsf{T}},(2,1,0,2,3)^{\mathsf{T}}\right) \subsetneq \mathbb{R}^5$

(b) $\mathrm{L}\left((1,1,-1,0,1)^{\mathsf{T}},(1,1,0,1,0)^{\mathsf{T}},(0,1,1,-1,-1)^{\mathsf{T}},(0,0,1,0,3)^{\mathsf{T}}\right) \subsetneq \mathbb{R}^5$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir bezeichnen die Vektoren

$$b_1 := (1,0,0,0,0)^{\mathsf{T}}, b_2 := (1,0,1,0,0)^{\mathsf{T}}, b_3 := (1,1,1,0,2)^{\mathsf{T}}, b_4 := (2,1,0,2,3)^{\mathsf{T}}.$$

Wir wählen $f_1 = b_1$. Weiter erhalten wir via Verfahren

$$\begin{aligned}
f_2^* &= b_2 - \langle b_2 | f_1 \rangle f_1 \\
&= (1,0,1,0,0)^{\mathsf{T}} - (1,0,0,0,0)^{\mathsf{T}} = (0,0,1,0,0)^{\mathsf{T}} \\
f_2 &= \frac{f_2^*}{|f_2^*|} = (0,0,1,0,0)^{\mathsf{T}} \\
f_3^* &= b_3 - \langle b_3 | f_1 \rangle f_1 - \langle b_3 | f_2 \rangle f_2 \\
&= (1,1,1,0,2)^{\mathsf{T}} - (1,0,0,0,0)^{\mathsf{T}} - (0,0,1,0,0)^{\mathsf{T}} \\
&= (0,1,0,0,2)^{\mathsf{T}} \\
f_3 &= \frac{1}{\sqrt{5}}(0,1,0,0,2)^{\mathsf{T}} \\
f_4^* &= b_4 - \langle b_4 | f_1 \rangle f_1 - \langle b_4 | f_2 \rangle f_2 - \langle b_4 | f_3 \rangle f_3 \\
&= (2,1,0,2,3)^{\mathsf{T}} - 2(1,0,0,0,0)^{\mathsf{T}} - 0 - \frac{7}{5}(0,1,0,0,2)^{\mathsf{T}} \\
&= \left(0,-\frac{2}{5},0,2,\frac{1}{5}\right)^{\mathsf{T}} \\
f_4 &= \frac{1}{\sqrt{105}}(0,-2,0,10,1)^{\mathsf{T}}.
\end{aligned}$$

Es bilden f_1, f_2, f_3, f_4 eine Orthonormalbasis des gegebenen Unterraumes.

(b) Wir bezeichnen die Vektoren

$$b_1 := (1,1,-1,0,1)^{\mathsf{T}}, b_2 := (1,1,0,1,0)^{\mathsf{T}}, b_3 := (0,1,1,-1,-1)^{\mathsf{T}}, b_4 := (0,0,1,0,3)^{\mathsf{T}}.$$

Wir wählen $f_1 = \frac{b_1}{|b_1|} = \frac{1}{2}(1,1,-1,0,1)^\intercal$. Weiter erhalten wir via Verfahren

$$
\begin{aligned}
f_2^* &= b_2 - \langle b_2|f_1\rangle f_1 \\
&= \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,-\frac{1}{2}\right)^\intercal \\
f_2 &= \frac{f_2^*}{|f_2^*|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,-\frac{1}{2}\right)^\intercal \\
f_3^* &= b_3 - \langle b_3|f_1\rangle f_1 - \langle b_3|f_2\rangle f_2 \\
&= \left(\frac{1}{8},\frac{9}{8},\frac{5}{8},-\frac{10}{8},-\frac{5}{8}\right)^\intercal \\
f_3 &= \frac{1}{2\sqrt{58}}(1,9,5,-10,-5)^\intercal \\
f_4^* &= b_4 - \langle b_4|f_1\rangle f_1 - \langle b_4|f_2\rangle f_2 - \langle b_4|f_3\rangle f_3 \\
&= \left(-\frac{6}{29},\frac{2}{29},\frac{57}{29},\frac{2}{29},\frac{59}{29}\right)^\intercal \\
f_4 &= \frac{1}{3\sqrt{754}}\,(-6,4,57,2,59)^\intercal\,.
\end{aligned}
$$

Es bilden f_1, f_2, f_3, f_4 eine Orthonormalbasis des gegebenen Unterraumes.

Aufgabe H 32. *Eigentlich und uneigentlich orthogonale Matrizen*

Gegeben seien die Matrizen

$$
B_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, B_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix},
$$

sowie die Abbildungen

$$
\beta_1 \colon w \mapsto B_1 w, \quad \beta_2 \colon w \mapsto B_2 w.
$$

(a) Welche der obigen Abbildungen sind Isometrien? Welche von diesen sind eigentlich und welche uneigentlich?

(b) Eigentlich orthogonale Matrizen beschreiben Drehungen. Bestimmen Sie für alle eigentlich orthogonalen Matrizen aus der Menge $\{B_1, B_2\}$ den Drehwinkel und gegebenenfalls die Drehachse.

(c) Jede uneigentlich orthogonale Matrix beschreibt eine Komposition aus einer Drehung und einer Spiegelung. Geben Sie für alle uneigentlich orthogonalen Matrizen aus der Menge $\{B_1, B_2\}$ eine solche Drehung sowie Spiegelung an. Bestimmen Sie zu diesen den Drehwinkel und gegebenenfalls die Drehachse, sowie die Spiegelungsebene.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Beide obigen Abbildungen sind Isometrien, weil alle Matrizen orthogonal sind, d.h. es gilt $B_1^\mathsf{T} B_1 = B_1 B_1^\mathsf{T} = E_3$ und entsprechendes für die andere Matrix. Um zu entscheiden, welche Abbildungen eigentlich und welche uneigentlich sind, müssen die Determinanten der Matrizen berechnet werden. Es ergibt sich

$$\det(B_1) = 1,$$
$$\det(B_2) = -1.$$

Also ist β_1 eine eigentliche und β_2 eine uneigentliche Isometrie.

(b) Für die 3×3-Matrix B_1 können wir die Formel aus 4.6.20. verwenden:

$$2\cos\varphi = \mathrm{Sp}\,(B_1) - 1 = \frac{5}{3} - 1 = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \varphi = \arccos\frac{1}{3}(\approx 1,231).$$

Die Drehachse ist die Menge aller Fixpunkte von β_1, d.h. alle Vektoren w für die $\beta_1(w) = w$ gilt. Dazu lösen wir das homogene lineare Gleichungssystem

$$(B_1 - E_3)w = 0$$

und erhalten für die Drehachse:

$$D = \left\{ w \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; w = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

(c) Es sei vorab gesagt, dass es verschiedene Möglichkeiten gibt, die durch B_2 beschriebene Drehspiegelung in eine Drehung und eine Spiegelung zu zerlegen. Nach Bemerkung 4.6.17 können wir die Spiegelebene frei wählen.
Eine einfache Wahl ergibt sich aus folgender Gleichheit:

$$B_2 = B_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Wir wissen bereits, dass B_1 eine Drehung beschreibt. Die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

beschreibt eine Spiegelung an der x-y-Ebene. Aus

$$B_2 = B_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

folgt, dass die von B_2 beschriebene Drehspiegelung eine Komposition aus der Spiegelung an der x-y-Ebene und der durch B_1 beschriebenen Drehung mit Drehwinkel $\varphi = \arccos\frac{1}{3}$ und Drehachse D ist.

Aufgabe H 33. *Inverse Blockmatrizen*

(a) Seien $M, N \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar. Das Produkt MN ist dann auch invertierbar. Zeigen Sie, dass die Inverse durch $(MN)^{-1} = N^{-1}M^{-1}$ gegeben ist.

(b) Es seien nun $A, B, C, D \in \mathbb{R}^{n\times n}$, wobei A, D sowie $(A - BD^{-1}C)$ invertierbar vorausgesetzt werden. Rechnen Sie nach, dass

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_n & BD^{-1} \\ 0 & E_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A - BD^{-1}C & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ D^{-1}C & E_n \end{pmatrix}.$$

(c) Benutzen Sie nun die Ergebnisse aus den Teilaufgaben (a)-(b), um

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1}$$

zu berechnen. Was ergibt sich im Fall $n = 1$?

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es gilt:

$$(MN)(N^{-1}M^{-1}) = E_n = (N^{-1}M^{-1})(MN).$$

Dies war zu zeigen.

(b) Es gilt:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} E_n & BD^{-1} \\ 0 & E_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A - BD^{-1}C & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ D^{-1}C & E_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} E_n & BD^{-1} \\ 0 & E_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A - BD^{-1}C & 0 \\ DD^{-1}C & D \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} A - BD^{-1}C + BD^{-1}C & BD^{-1}D \\ C & D \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(c) Es folgt aus $(\mathbf{a})$ und $(\mathbf{b})$, dass

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ D^{-1}C & E_n \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A - BD^{-1}C & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} E_n & BD^{-1} \\ 0 & E_n \end{pmatrix}^{-1}.$$

Für den Moment führen wir die Abkürzung $X := A - BD^{-1}C$ ein. Durch nachrechnen erhält man, dass

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} E_n & 0 \\ D^{-1}C & E_n \end{pmatrix}^{-1} &= \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ -D^{-1}C & E_n \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}^{-1} &= \begin{pmatrix} X^{-1} & 0 \\ 0 & D^{-1} \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} E_n & BD^{-1} \\ 0 & E_n \end{pmatrix}^{-1} &= \begin{pmatrix} E_n & -BD^{-1} \\ 0 & E_n \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Der Rest ist Matrizenmultiplikation:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} &= \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ D^{-1}C & E_n \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} E_n & BD^{-1} \\ 0 & E_n \end{pmatrix}^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ -D^{-1}C & E_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^{-1} & 0 \\ 0 & D^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_n & -BD^{-1} \\ 0 & E_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} X^{-1} & 0 \\ -D^{-1}CX^{-1} & D^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_n & -BD^{-1} \\ 0 & E_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} X^{-1} & -X^{-1}BD^{-1} \\ -D^{-1}CX^{-1} & D^{-1}CX^{-1}BD^{-1} + D^{-1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (A - BD^{-1}C)^{-1} & -(A - BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1} \\ -D^{-1}C(A - BD^{-1}C)^{-1} & D^{-1}\left(C(A - BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1} + E_n\right) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Für $n = 1$ kann man dieses Ergebnis noch vereinfachen: Die Einträge sind nun reelle Zahlen, die hier der Übersichtlichkeit halber mit Kleinbuchstaben bezeichnet werden. Es ergibt sich

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{a - \frac{bc}{d}} & -\frac{b}{d\left(a - \frac{bc}{d}\right)} \\ -\frac{c}{d\left(a - \frac{bc}{d}\right)} & \frac{1}{d}\left(\frac{bc}{d\left(a - \frac{bc}{d}\right)} + 1\right) \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & \frac{bc + ad - bc}{d} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\det\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 34. *Eigenwerte, Eigenräume*

(a) Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie alle Eigenwerte der Matrizen A, A^2 und A^{100} sowie die Eigenräume von A.

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenräume der Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 27 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Das charakteristische Polynom von A ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda E_3) &= (2-\lambda)(1-\lambda)(6-\lambda) + 4 + 6 + 2(1-\lambda) - 2(6-\lambda) + 6(2-\lambda) \\ &= -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 26\lambda + 24. \end{aligned}$$

Wir setzen dies gleich Null um die Eigenwerte zu erhalten.
Die Gleichung $0 = -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 26\lambda + 24$ hat die Lösungen $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$ und $\lambda_3 = 4$.
Der Eigenraum zu λ_1 ist die Lösungsmenge des Gleichungssystems $(A - \lambda_1 E_3)x = 0$.
In diesem Fall lösen wir

$$(A - 2\mathrm{e}_3)x = 0 \quad \text{d.h.} \quad \left[\begin{array}{ccc||c} 0 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 4 & 0 \end{array}\right].$$

Die Lösungsmenge ist gegeben durch $\left\{(-t, t, t)^\intercal \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; t \in \mathbb{R}\right\}$.
Für λ_2 erhalten wir den Eigenraum $\left\{(0, t, t)^\intercal \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; t \in \mathbb{R}\right\}$.
Für λ_3 erhalten wir den Eigenraum $\left\{(-t, t, 2t)^\intercal \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; t \in \mathbb{R}\right\}$.
Nun betrachten wir die Potenzen. Hierzu sei λ ein Eigenwert von A und v sei ein dazu gehörige Eigenvektor, so gilt $Av = \lambda v$ nach Definition. Wir multiplizieren diese Gleichung von links mit A und erhalten

$$A^2 v = AAv = A\lambda v = \lambda Av = \lambda^2 v.$$

Somit ist λ^2 ein Eigenwert von A^2 und v liegt im dazu gehörigem Eigenraum. Da in diesem Beispiel die Matrix drei verschiedene Eigenwerte hat und auch die Potenzen dieser unterschiedlich sind, so ist der Eigenraum jeweils ein-dimensional. D.h. der Eigenraum ist gegeben durch $\mathrm{L}(v)$.
Zusammengefasst heißt das: A^2 hat die Eigenwerte $\lambda_1^2 = 4, \lambda_2^2 = 9$ und $\lambda_3 = 16$ und die Eigenräume sind die gelichen, wie die von A.
Multiplizieren wir abermals von links mit A und wiederholen das bis wir die Potenz 100 erreicht haben, so erhalten wir, dass die Eigenwerte $\lambda_1^{100}, \lambda_2^{100}$ und λ_3^{100} sind, wobei die Eigenräume gleich bleiben.

(b) Wir berechnen die Eigenwerte mit Hilfe des charakteristischen Polynoms.

$$\begin{aligned} 0 &\overset{!}{=} \det(B - \lambda E_4) \\ &\overset{\text{Entwicklunsverfahren}}{=} -\lambda \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 3 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} - 27 \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 3 \end{pmatrix} \\ &= \lambda^4 - 81 \end{aligned}$$

Somit ergeben sich die Eigenwerte

$$\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = -3,\ \lambda_3 = 3\mathrm{i},\ \lambda_4 = -3\mathrm{i}.$$

Die zu λ_i zugehörigen Eigenräume sind dann gegeben durch:

$$V(\lambda_i) = \mathrm{Kern}(B - \lambda_i).$$

Zu $\lambda_1 = 3$:

$$\left[\begin{array}{cccc||c} -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 0 \\ 27 & 0 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc||c} -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow V(3) = \mathrm{L}\left((1,3,9,9)^{\mathsf{T}}\right).$$

Genauso ergeben sich die anderen Eigenräume:

$$\begin{aligned} \Rightarrow V(-3) &= \mathrm{L}\left((-1,3,-9,9)^{\mathsf{T}}\right) \\ \Rightarrow V(3\mathrm{i}) &= \mathrm{L}\left((\mathrm{i},-3,-9\mathrm{i},9)^{\mathsf{T}}\right) \\ \Rightarrow V(-3\mathrm{i}) &= \mathrm{L}\left((-\mathrm{i},-3,9\mathrm{i},9)^{\mathsf{T}}\right). \end{aligned}$$

Aufgabe H 35. *Eigenwerte, Eigenräume*
Finden Sie eine 3×3-Matrix, die die Eigenwerte $1, 2$ und 3 und zu diesen die Eigenräume

$$V(1) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right), \quad V(2) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right), \quad V(3) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

hat.

Lösungshinweise hierzu: Da $v_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 1 ist, wissen wir von der gesuchten Matrix A, dass $Av_1 = v_1$ gilt.
Da $v_2 = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 2 ist, wissen wir von der gesuchten Matrix A, dass $Av_2 = 2v_2$ gilt.
Da $v_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 3 ist, wissen wir von der gesuchten Matrix A, dass $Av_3 = 3v_3$ gilt.
Wir haben also 3 lineare Gleichungsysteme mit jeweils 3 Gleichungen um die $9 = 3 \times 3$ Elemente der Matrix A zu bestimmen. Bilden wir aus den Vektoren v_1, v_2, v_3 die Matrix $T = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\2 & -1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ und aus den Eigenwerten die Matrix $D = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 3\end{pmatrix}$, so können wir die 3 linearen Gleichungsysteme simultan lösen, in dem wir $AT = TD$ lösen. Man kann leicht nachprüfen, dass T invertierbar ist ($\det(T) = -3$). Wir können also A bestimmen, in dem wir die letzte Gleichung von Rechts mit T^{-1} multiplizieren.
Berechnung der Inversen ergibt

$$T^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\2 & -1 & 0\\0 & 0 & 3\end{pmatrix}.$$

Damit gilt

$$A = TDT^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}5 & -1 & 0\\-2 & 4 & 0\\0 & 0 & 9\end{pmatrix}.$$

Aufgabe H 36. *Affine Abbildung, Koordinatentransformation*

Gegeben sind im Standardkoordinatensystem $\mathbb{E} = \left(\binom{0}{0}; \binom{1}{0}, \binom{0}{1}\right)$ die Punkte $P = (2,1)^\intercal$, $Q = (4,2)^\intercal$ und $R = (3,3)^\intercal$. Das Koordinatensystem $\mathbb{F} = (P; v, w)$ wird durch den Punkt P und die beiden Vektoren $v = \overrightarrow{PQ}$ und $w = \overrightarrow{PR}$ gebildet.

- **(a)** M sei der Mittelpunkt der Strecke $\overline{QR}$. Geben Sie die Koordinaten des Punktes M bezüglich beider Koordinatensysteme an.
- **(b)** Die affine Abbildung α vertauscht die Punkte P,Q und R zyklisch, d.h. $\alpha(P) = Q$, $\alpha(Q) = R$ und $\alpha(R) = P$. Geben Sie die Darstellung ${}_{\mathbb{F}}\alpha_{\mathbb{F}}$ von α bezüglich des Koordinatensystems $\mathbb{F}$ an.
- **(c)** Geben Sie die Koordinatentransformationen ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$, ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$ und ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{F}}$ an. Berechnen Sie ${}_{\mathbb{E}}\alpha_{\mathbb{E}}$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) In den Standardkoordinaten gilt:

$$_{\mathbb{E}}M = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}\right) = \frac{1}{2}\left((4,2)^\intercal + (3,3)^\intercal\right) = \left(\frac{7}{2}, \frac{5}{2}\right)^\intercal .$$

Im System $\mathbb{F}$ sind die Punkte durch folgende Koordinaten gegeben:

$$_{\mathbb{F}}P = (0,0)^\intercal, \quad _{\mathbb{F}}Q = (1,0)^\intercal, \quad _{\mathbb{F}}R = (0,1)^\intercal.$$

Somit gilt

$$_{\mathbb{F}}M = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PR}\right) = \frac{1}{2}\left((1,0)^\intercal + (0,1)^\intercal\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^\intercal .$$

(b) Die Abbildung α lässt sich beschreiben als

$$_{\mathbb{F}}\alpha_{\mathbb{F}}(_{\mathbb{F}}x) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} {}_{\mathbb{F}}x + \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$$

mit $a, b, c, d, s, t \in \mathbb{R}$. Wir setzen nun die Bedingungen von oben an.

$$\begin{aligned}
_{\mathbb{F}}Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= {}_{\mathbb{F}}\alpha_{\mathbb{F}}(_{\mathbb{F}}P) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \\
_{\mathbb{F}}R = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= {}_{\mathbb{F}}\alpha_{\mathbb{F}}(_{\mathbb{F}}Q) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \\
_{\mathbb{F}}P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= {}_{\mathbb{F}}\alpha_{\mathbb{F}}(_{\mathbb{F}}R) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Es ergibt sich

$$_{\mathbb{F}}\alpha_{\mathbb{F}}(_{\mathbb{F}}x) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} {}_{\mathbb{F}}x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Wir berechnen zuerst die Transformation von $\mathbb{F}$ nach $\mathbb{E}$. Diese ist nach Skript gegeben durch

$$_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}} \colon x \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Transformation von $\mathbb{E}$ nach $\mathbb{F}$ ist das Inverse obiger Transformation. Hierzu benötigen wir die Inverse der Matrix in der Beschreibung. Sie ist gegeben durch (vgl. Aufgabe H33)

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Es ergibt sich (via $y = Ax + b \Leftrightarrow A^{-1}y - A^{-1}b = x$)

$$_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}} \colon x \mapsto \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} x - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Transformation von $\mathbb{F}$ nach $\mathbb{F}$ ist schlicht die Identität.
Es gilt als Hintereinanderausführung von Abbildungen:

$$_{\mathbb{E}}\alpha_{\mathbb{E}} = {_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}} {_{\mathbb{F}}\alpha_{\mathbb{F}}} {_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}}.$$

Somit erhalten wir

$$_{\mathbb{E}}\alpha_{\mathbb{E}} \colon x \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 37. *Definitheit*

Entscheiden Sie, ob die quadratischen Formen, die durch die folgenden Matrizen beschrieben werden, positiv definit, negativ definit oder indefinit sind.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 \\ -2 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Lösungshinweise hierzu:

- Die Matrix A hat die Determinate -5. Dies ist das Produkt der Eigenwerte, d.h. das mind. ein Eigenwert negativ sein muss. Es sei v ein Eigenvektor zu diesem Eigenwert, den wir mit λ bezeichnen. Es gilt

  $$v^\mathsf{T} A v = v^\mathsf{T} \lambda v = \lambda ||v||^2 < 0.$$

  Auf der anderen Seite gilt aber auch

  $$e_1^\mathsf{T} A e_1 = 2 > 0.$$

  Die Form kann sowohl negative als auch positive Werte annehmen. Sie ist also indefinit.

- Die Matrix B hat ebenfalls eine negative Determinate. Wir stellen das charakteristische Polynom auf:

  $$\det(B - \lambda E_3) = -\lambda^3 - 8\lambda^2 - 14\lambda - 4$$

  Wir raten die Nullstelle -2 und erhalten nach Polynomdivision die quadratische Gleichung

  $$-\lambda^2 - 6\lambda - 2.$$

  Via Mitternachtsformel erhalten wir

  $$-\frac{6+\sqrt{32}}{2} \qquad \text{und} \qquad -\frac{6-\sqrt{32}}{2}.$$

  Es ist $\sqrt{32} < 6$ und somit sind beide Werte negativ.
  Die Form ist also negativ definit.

Aufgabe H 38. *Eigenwerte von Blockmatrizen*

Die Menge der Eigenwerte einer quadratischen Matrix M bezeichnen wir mit $\lambda(M)$.

(a) Zeigen Sie, dass für eine beliebige Blockdreiecksmatrix $L = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline C & D \end{array}\right)$ mit $A \in \mathbb{R}^{k\times k}$ und $D \in \mathbb{R}^{(n-k)\times(n-k)}$ die Gleichung $\lambda(L) = \lambda(A) \cup \lambda(D)$ gilt.

(b) Sei jetzt $\lambda(A) \cap \lambda(D) = \emptyset$. Weiterhin sei v ein Eigenvektor von D und w ein Eigenvektor von A. Finden Sie Vektoren x und y so, dass $\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} w \\ y \end{pmatrix}$ Eigenvektoren von L sind, und bestimmen Sie die zugehörigen Eigenwerte.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Die Matrix L hat Blockgestalt und somit auch $L - \lambda E_n$. Das charakteristische Polynom von L ist gegeben durch

$$\det(L - \lambda E_n) = \det(A - \lambda E_k)\det(D - \lambda E_{n-k}).$$

Diese Gleichheit impliziert $\lambda(L) = \lambda(A) \cup \lambda(D)$.

(b) Es gilt nach Voraussetzung

$$Dv = \lambda v \quad \text{und} \quad Aw = \mu w.$$

Wie berechnen

$$L\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ax \\ Cx + Dv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ax \\ Cx + \lambda v \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \alpha \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}.$$

Wähle $\alpha = \lambda$ und $x = 0$ und erhalte

$$L\begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ Dv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda v \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}.$$

Nun betrachten wir

$$L\begin{pmatrix} w \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Aw \\ Cw + Dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu w \\ Cw + Dy \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \beta \begin{pmatrix} w \\ y \end{pmatrix}.$$

Es muss $\beta = \mu$ und $Cw + Dy = \mu y$ gelten. Wir formen um und erhalten

$$-Cw \stackrel{!}{=} (D - \mu E)y.$$

Es gilt nach Voraussetzung $\mu \notin \lambda(D)$, d.h. $(D - \mu E)$ ist invertierbar und somit erhalten wir

$$y = -(D - \mu E)^{-1}Cw.$$

Aufgabe H 39. *Eigenvektoren*

Für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ definieren wir $M(A) := \begin{pmatrix} \mathbf{0} & A \\ E_n & \mathbf{0} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$.

(a) Zeigen Sie: Ist v ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda \neq 0$, dann existieren Zahlen $\mu^+ \neq \mu^-$ so, dass die Vektoren $w^+ = \begin{pmatrix} \mu^+ v \\ v \end{pmatrix}$ und $w^- = \begin{pmatrix} \mu^- v \\ v \end{pmatrix}$ Eigenvektoren von $M(A)$ sind. Bestimmen Sie die zugehörigen Eigenwerte.

(b) Bestimmen Sie, falls möglich, eine Matrix $T \in \mathbb{R}^{6\times 6}$ so, dass $T^{-1}M(A)T$ eine Diagonalmatrix ist.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Der Beweis geht in analoger Weise für w^+ und w^-, deshalb schreiben wir in den Gleichungen $w^\pm$. Wir müssen lediglich die Eigenwertgleichung nachrechnen, d.h. zeigen, dass Mw^+ ein Vielfaches von w^+ ist und analog für w^-. Wir betrachten $Mw^\pm$ und erhalten:

$$\begin{aligned} Mw^\pm &= \begin{pmatrix} \mathbf{0} & A \\ E_n & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu^\pm v \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Av \\ \mu^\pm E_n v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda v \\ \mu^\pm v \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (\mu^\pm)^2 v \\ \mu^\pm v \end{pmatrix} = \mu^\pm \begin{pmatrix} \mu^\pm v \\ v \end{pmatrix} = \mu^\pm w^\pm \end{aligned}$$

D.h sowohl w^+ als auch w^- erfüllt eine Eigenwertgleichung. Also ist w^+ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\mu^+ := +\sqrt{\lambda}$ und w^- ein Eigenvektor zum Eigenwert $\mu^- := -\sqrt{\lambda}$.

(b) Nach Teilaufgabe (a) genügt es die Matrix A gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

auf Eigenwerte und -vektoren zu untersuchen. Diese werden dann verwendet um die Eigenwerte und -vektoren von M gemäß der Vorschrift aus Teilaugfgabe (a) zu bestimmen. Wir berechnen die Determinate von $A - \lambda E_3$ indem wir nach der ersten Spalte entwickeln und erhalten

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda E_3) &= (1-\lambda)\Big((1-\lambda)(4-\lambda) - 3 \cdot 0\Big) \\ &= (1-\lambda)(1-\lambda)(4-\lambda) \end{aligned}$$

Wir untersuchen die Matrix A weiter auf Eigenvektoren zu den Eigenwerten $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$ und $\lambda_3 = 4$. Offensichtlich ist $(1,0,0)^\intercal$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 1. Den zweiten Eigenvektor zum Eigenwert 1 sieht man ebenfalls schnell:

$$\lambda_2 = 1 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow V(1) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

Für den dritten Eigenwert bekommt man

$$\lambda_3 = 4 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -3 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow V(4) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

Damit hat M die Eigenwerte $\mu_{1,2} = 1$, $\mu_{3,4} = -1$, $\mu_5 = 2$, $\mu_4 = -2$. Die dazugehörenden Eigenvektoren sind:

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad w_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$w_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad w_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad w_6 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

D.h mit $T := [w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6]$ gilt $T^{-1}AT = \operatorname{diag}(1, 1, -1, -1, 2, -2)$.

Aufgabe H 40. *Diagonalisieren*

Bestimmen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie für jeden Eigenwert seine geometrische und algebraische Vielfachheit an. Entscheiden Sie, ob die Matrizen orthogonal diagonalisierbar sind und bestimmen Sie gegebenfalls orthogonale Matrizen T und R so, dass $T^\mathsf{T}AT$ bzw. $R^\mathsf{T}BR$ eine Diagonalmatrix ist.

Lösungshinweise hierzu:

- Zur Matrix A: Es ist A symmetrisch und somit reell orthogonal diagonalisierbar.
  Die Matrix hat den Rang 1, also die Determinate 0. Somit ist mind. ein Eigenwert 0.
  Zu diesem Eigenwert berechnen wir den Eigenraum

  $$V(0) = \ker(A - 0E_4) = \ker(A) = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, x = (a, b, c, -a - b - c)^\mathsf{T},\ a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

  Der Eigenraum ist drei-dimensional. Also hat der Eigenwert 0 mind. die algebraische Vielfachheit 3. Auf der anderen Seite wissen wir, dass A diagonalisierbar ist und deshalb hat dieser Eigenwert höchstens die algebraische Vielfachheit 3. Es muss also noch einen weiteren Eigenwert mit einfacher Vielfachheit geben. Dessen Eigenraum steht senkrecht auf dem Eigenraum der 0, da A orthogonal diagonalisierbar ist. Weiter muss dieser ein-dimensional sein. Der Auspann des Vektor $v = (1, 1, 1, 1)^\mathsf{T}$ ist senkrecht auf $V(0)$. Wir berechnen nun den zugehörigen Eigenwert.

  $$Av = (4, 4, 4, 4)^\mathsf{T} = 4v$$

Es ist 4 der fehlende Eigenwert. Eine mögliche Tansformationmatrix ist gegeben durch

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

- Zur Matrix B: Die Matrix hat Dreiecksgestalt, die Eigenwerte stehen auf der Diagonalen. Der Eigenwert 1 hat also die algebraische Vielfachheit 3. Der zugehörige Eigenraum ist gegeben durch

$$V(1) = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x = (a,b,0)^\mathsf{T},\ a,b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Dieser ist nur zwei-dimensional. Es stimmen die algebraische und die geometrische Vielfachheit nicht überein. Somit ist B nicht diagonalisierbar, insbesondere nicht orthogonal diagonalisierbar (es kann keine Transformationsmatrix geben).

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 41. *Hauptachsentransformation*

Bestimmen Sie für die folgende Quadrik die erweiterte Matrix und damit den Typ. Berechnen Sie eine euklidische Normalform und ein Koordinatensystem, bezüglich dem die Quadrik Normalform hat. Skizzieren Sie die Quadrik.

$$\mathcal{Q} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; -\frac{3}{8}x_1^2 + \frac{1}{9}x_2^2 - \frac{3}{8}x_3^2 + \frac{5}{4}x_1x_3 + \sqrt{2}x_1 + \frac{2}{9}x_2 - \sqrt{2}x_3 + \frac{1}{9} = 0 \right\}$$

Lösungshinweise hierzu: Um den Typ der Quadrik zu bestimmen, betrachtet man

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{3}{8} & 0 & \frac{5}{8} \\ 0 & \frac{1}{9} & 0 \\ \frac{5}{8} & 0 & -\frac{3}{8} \end{pmatrix}, \qquad a = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{9} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \qquad c = \frac{1}{9},$$

$$A_{\text{erw}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{9} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{3}{8} & 0 & \frac{5}{8} \\ \frac{1}{9} & 0 & \frac{1}{9} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{5}{8} & 0 & -\frac{3}{8} \end{pmatrix}$$

Um den Rang von A_{erw} zu bestimmen, subtrahieren wir die dritte Zeile von der ersten (das ändert den Rang nicht) und erhalten

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{3}{8} & 0 & \frac{5}{8} \\ \frac{1}{9} & 0 & \frac{1}{9} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{5}{8} & 0 & -\frac{3}{8} \end{pmatrix}$$

Der Rang der erweiterten Matrix A_{erw} ist 4 und somit um 1 größer als der von A. Daraus folgt, dass A eine Mittelpunktsquadrik ist. Zur Bestimmung der Normalform:

$$x^{\mathsf{T}} \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{3}{8} & 0 & \frac{5}{8} \\ 0 & \frac{1}{9} & 0 \\ \frac{5}{8} & 0 & -\frac{3}{8} \end{pmatrix}}_{A} x + 2 \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{9} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}}_{a} x + \underbrace{\frac{1}{9}}_{c} = 0$$

Man erhält für A die Eigenwerte $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = \frac{1}{9}$ und $\lambda_3 = \frac{1}{4}$ und die zugehörigen Eigenvektoren:

$$v_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Die Ausgangsgleichung $x^\intercal A x + 2a^\intercal x + c = 0$ wird nach der Transformation $x = Ty$ mit

$$T = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

zu

$$-y_1^2 + \frac{1}{9}y_2^2 + \frac{1}{4}y_3^2 + 2y_1 + \frac{2}{9}y_2 + \frac{1}{9} = 0.$$

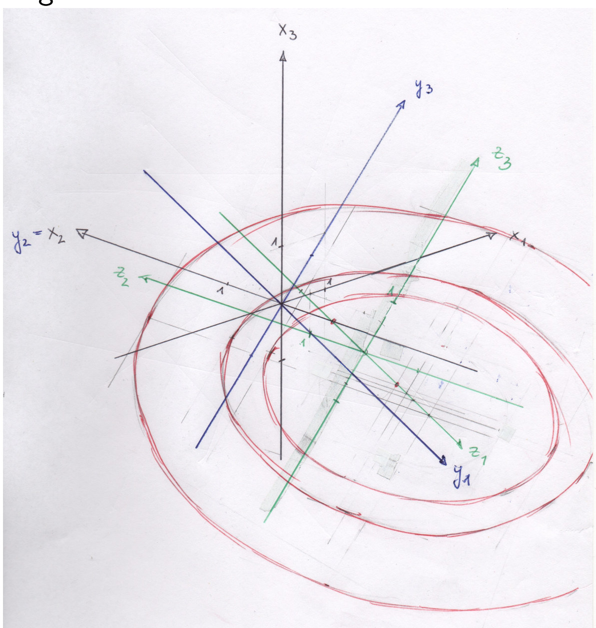
Die quadratische Ergänzung ergibt (mit $z_1 = y_1 - 1$, $z_2 = y_2 + 1$ und $z_3 = y_3$):

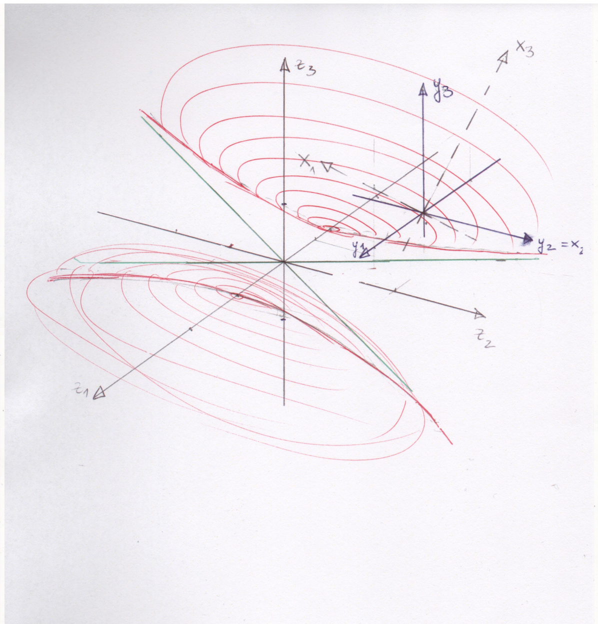
$$-z_1^2 + \frac{1}{9}z_2^2 + \frac{1}{4}z_3^2 + 1 = 0\,.$$

Die Quadrik hat demnach euklidische Normalform im Koordinatensystem

$$\mathbb{G} = (P; v_1, v_2, v_3);$$

wobei der neue Ursprung P die Koordinaten ${}_{\mathbb{F}}P = (1, -1, 0)^\intercal$ bezüglich des Systems $\mathbb{F} := (O; v_1, v_2, v_3)$ hat, seine Standardkoordinaten sind ${}_{\mathbb{E}}P = T\,{}_{\mathbb{F}}P = (\frac{\sqrt{2}}{2}, -1, -\frac{\sqrt{2}}{2})^\intercal$.
Bei der Quadrik handelt es sich um ein zweischaliges Hyperboloid. Die linke Skizze zeigt die drei benutzten Koordinatensysteme und einige der Ellipsen, die sich als Schnitte der Quadrik mit zur z_1-Achse orthogonalen Ebenen ergeben, die rechte Skizze versucht neben den Koordinatensystemen auch einen besseren räumlichen Eindruck der Quadrik zu geben. Die Projektionen (Blickwinkel) sind reichlich unkonventionell gewählt, um mehr Information zeigen und leichter zeichnen zu können.





Aufgabe H 42. *Hauptachsentransformation*

Bestimmen Sie für die folgende Quadrik die erweiterte Matrix und damit den Typ. Berechnen Sie eine euklidische Normalform und ein Koordinatensystem, bezüglich dem die Quadrik Normalform hat. Skizzieren Sie die Quadrik.

$$\mathcal{Q} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 + 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 2 = 0 \right\}$$

Lösungshinweise hierzu: Aus der Matrixbeschreibung $x^\mathsf{T} Ax + 2a^\mathsf{T} x + c = 0$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad a = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad c = 2$$

ergibt sich

$$A_{\text{erw}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Offensichtlich ist $\mathrm{Rg}(A) = 1$ und $\mathrm{Rg}(A_{\text{erw}})$. Also liegt eine parabolische Quadrik vor.
Die Eigenwerte von A sind

$$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = 0.$$

Zugehörige Eigenvektoren sind

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Als Transformationsmatrix erhält man

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$$

Neuer Lineartteil: $\tilde{a} = T^\mathsf{T} a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{3\sqrt{2}}{2} + 1 \end{pmatrix}^\mathsf{T}$
Die Ausgangsgleichung $x^\mathsf{T} Ax + 2a^\mathsf{T} x + c = 0$ wird nach der Transformation zu

$$3y_1^2 + 2\left((\tfrac{3\sqrt{2}}{2} + 1) y_3 + 1 \right) = 0.$$

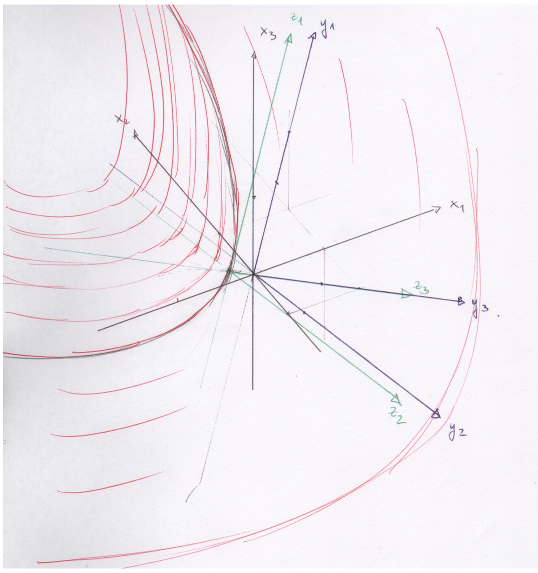
Mit $z_1 = y_1$, $z_2 = y_2$ und $z_3 = (y_3 + \frac{2}{3\sqrt{2}+2})$ erhalten wir die Gleichung

$$\frac{6}{3\sqrt{2}+2} z_1^2 + 2z_3 = 0.$$

Diese Gleichung beschreibt (entgegen einer weit verbreiteten Fehlinterpretation) *keine Parabel*, weil die Variable z_2 völlig frei gewählt werden kann. Es liegt ein parabolischer *Zylinder* vor. (Dass es die Variable z_2 überhaupt gibt, muss man aus dem Kontext erschließen, die Gleichung allein reicht dafür nicht.)

Die Quadrik hat euklidische Normalform im Koordinatensystem $\mathbb{G} = (P; v_1, v_2, v_3)$, der neue Ursprung P hat bezüglich des Systems $\mathbb{F} := (O; v_1, v_2, v_3)$ die Koordinaten ${}_{\mathbb{F}}P = (0, 0, -\frac{2}{3\sqrt{2}+2})^\intercal$, die Standardkoordinaten sind ${}_{\mathbb{E}}P = T_{\mathbb{F}}P = \frac{1}{3+\sqrt{2}}(-1, 1, 0)^\intercal$.

In der Skizze rechts sind die drei benutzten Koordinatensysteme angedeutet, dazu einige der Parabeln, die sich durch Schnitt der Quadrik mit Ebenen orthogonal zur z_2-Achse ergeben.



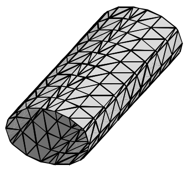
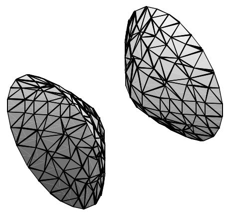
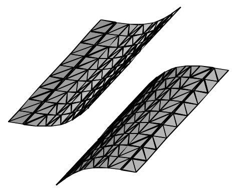
Aufgabe H 43. *Quadriken im Raum*

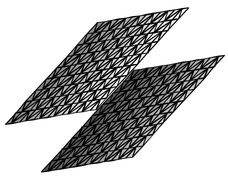
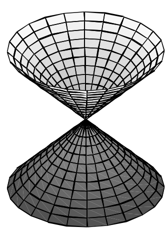
Welche Gestalt haben die abgebildeten Quadriken? (Lässt sich das zweifelsfrei entscheiden?) Ordnen Sie den Quadriken $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ ein passendes Bild zu.

(a) $\mathcal{A} = \left\{ (x_1, x_2, x_3)^\intercal \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 2x_1^2 + 4x_1 + 4x_2^2 - 8x_2 + 2 = 0 \right\}$

(b) $\mathcal{B} = \left\{ (x_1, x_2, x_3)^\intercal \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 2x_1^2 - x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 4x_2x_3 = -3 \right\}$

(c) $\mathcal{C} = \left\{ (x_1, x_2, x_3)^\intercal \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_1^2 - 2x_1 - 4x_2 + 2x_2^2 - x_3^2 + 2 = -1 \right\}$

Lösungshinweise hierzu: Bei den Bildern in der Aufgabenstellung handelt es sich um einen elliptischen Zylinder, ein zweischaliges Hyperboloid, einen hyperbolischen Zylinder, ein Paar paralleler Ebenen und einen Doppelkegel (jeweils naturgemäß nur Ausschnitte).
Allerdings könnte das erste Bild auch einen Ausschnitt aus einem sehr lang gestreckten Ellipsoid, einem (ein- oder zweischaligen) Hyperboloid, einem Doppelkegel oder einem elliptischen Paraboloid darstellen; beim dritten Bild könnte es sich um einen Ausschnitt aus einem breit gezogenen (ein- oder zweischaligen) Hyperboloid handeln, und das vierte Bild könnte auch von einem Ellipsoid, einem (ein- oder zweischaligen) Hyperboloid, einem elliptischen Paraboloid, von einem Doppelkegel von zwei schneidenden Ebenen oder einem (hyperbolischen, parabolischen oder elliptischen) Zylinder her kommen — wenn man starke Verzerrungen und ungeschickte Ausschnitte kombiniert.

(a) Wir formen die Gleichung, durch die $\mathcal{A}$ gegeben ist, um.

$$\begin{aligned} 0 &= 2x_1^2 + 4x_1 + 4x_2^2 - 8x_2 + 2 \\ &= 2((x_1+1)^2 - 1) + 4((x_2-1)^2 - 1) + 2 \\ &= 2(x_1+1)^2 + 4(x_2-1)^2 - 4 \end{aligned}$$

Es handelt also um einen elliptischen Zylinder, passend zum ersten Bild.

(b) Die Matrix, die $\mathcal{B}$ beschreibt, ist gegeben durch

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Wir diagonalisieren B und erhalten

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Die Normalform von $\mathcal{B}$ ist gegeben durch

$$3y_1^2 + 3y_2^2 - 3y_3^2 + 1 = 0,$$

es handelt sich also um ein zweischaliges Hyperboloid, passend zum zweiten Bild.

(c) Bei $\mathcal{C}$ ist abermals nur quadratisch zu ergänzen und wir erhalten die Normalform

$$y_1^2 + 2y_2^2 - y_3^2 = 0.$$

Hierbei handelt es sich um einen Kegel, passend zum letzten Bild.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 44. *Monotonie und Beschränkheit*

Untersuchen Sie die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jeweils auf Monotonie und Beschränkheit. Finden Sie gegebenenfalls eine obere und untere Schranke.

(a) $a_n = \dfrac{n+2}{2n}$

(b) $a_n = n\cos(\pi n)$

(c) $a_n = 1 + \left(-\dfrac{2}{3}\right)^n$

(d) $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}(a_n+1)^2$; $a_1 = \sqrt{17}$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir berechnen die ersten Folgenglieder

$$a_1 = \frac{3}{2}, \quad a_2 = \frac{4}{4} = 1, \quad a_3 = \frac{5}{6}, \quad a_4 = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}, \quad a_5 = \frac{7}{10}, \quad \dots$$

Auf Grund dieser Ergebnisse vermuten wir, dass die Folge monoton fallend ist. Dies zeigen wir durch

$$\begin{aligned} a_{n+1} \overset{!}{\leqq} a_n \quad &\iff \quad \frac{n+3}{2n+2} \leqq \frac{n+2}{2n} \\ &\iff \quad (n+3)\cdot 2n \leqq (n+2)\cdot(2n+2) \\ &\iff \quad 0 \leqq 4\,. \end{aligned}$$

Damit ist die untersuchte Folge monoton fallend und deshalb auch nach oben beschränkt durch $a_1 = \frac{3}{2}$. Um eine untere Schranke zu finden schätzen wir die Folge ab und erhalten

$$a_n = \frac{n+2}{2n} \geqq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Damit haben wir auch eine untere Schranke gefunden, nämlich $\frac{1}{2}$. Also ist die betrachtete Folge beschränkt.

(b) Bevor wir die Folge auf Monotonie und Beschränktheit untersuchen, vereinfachen wir sie zu

$$a_n = (-1)^n n.$$

Wir berechnen wieder die ersten Folgenglieder und erhalten

$$a_1 = -1, \quad a_2 = 2, \quad a_3 = -3, \quad \dots$$

Schon nach den ersten 3 Folgengliedern ist klar dass die Folge weder monoton fallend noch monoton steigend ist. Bleibt noch zu klären, ob die Folge beschränkt ist. Dazu betrachtet man die Teilfolgen $(a_{2k})\, k \in \mathbb{N} = 2k \to \infty$ und $(a_{2k+1})\, k \in \mathbb{N} = -(2k+1) \to -\infty$ und sehen, dass die Folge nicht beschränkt sein kann.

(c) Wir berechnen die ersten Folgenglieder und erhalten

$$a_1 = \frac{1}{3}, \quad a_2 = \frac{13}{9}, \quad a_3 = \frac{19}{27}, \quad \ldots$$

Aus dieser Betrachtung sehen wir, dass die Folge nicht monoton ist. Auf Grund der ersten Folgenglieder liegen den Verdacht nahe, dass die Folge beschränkt ist durch 2 von oben und durch 0 von unten. Wir bestätigen diesen Verdacht durch die Überlegungen

$$a_n = 1 + \left(-\frac{2}{3}\right)^n \leqq 1 + 1 = 2$$

und

$$a_n = 1 + \left(-\frac{2}{3}\right)^n \geqq 1 - 1 = 0.$$

(d) Die Folge ist streng monoton steigend, denn die Differenz von a_{n+1} und a_n

$$a_{n+1} - a_n = \frac{(a_n + 1)^2}{2} - a_n = \frac{{a_n}^2}{2} + \frac{1}{2} > \frac{1}{2} > 0$$

ist immer strikt positiv.
Die Folge ist also nach unten mit $\sqrt{17}$ beschränkt und nach oben unbeschränkt. Dies sieht man daran, dass zwei Folgenglieder sich immer mindestens um $\frac{1}{2}$ unterscheiden.

Aufgabe H 45. *Fibonacci-Folge*
Gegeben ist die rekursiv definierte Folge $(b_n)_{n\geqq 0}$ mit

$$b_0 = 0, \qquad b_1 = 1, \qquad b_n = 2b_{n-1} + 3b_{n-2} \text{ für } n \geqq 2.$$

(a) Bestimmen Sie eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ so, dass für $n \geqq 2$ gilt

$$\begin{pmatrix} b_n \\ b_{n-1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} b_{n-1} \\ b_{n-2} \end{pmatrix}.$$

(b) Bestimmen Sie eine Matrix $B_n \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ so, dass für $n \geqq 1$ gilt

$$\begin{pmatrix} b_n \\ b_{n-1} \end{pmatrix} = B_n \begin{pmatrix} b_1 \\ b_0 \end{pmatrix}.$$

(c) Berechnen Sie eine explizite (d.h. nicht rekursive) Formel für b_n.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Die Matrixschreibweise der 2 Gleichungen

$$b_n = 2b_{n-1} + 3b_{n-2} \quad \text{und} b_{n-1} = 1b_{n-1} + 0b_{n-2} \text{ für } n \geqq 2$$

lautet

$$\begin{pmatrix} b_n \\ b_{n-1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} b_{n-1} \\ b_{n-2} \end{pmatrix}.$$

(b) Es gilt $B = A^{n-1}$, denn

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} b_n \\ b_{n-1} \end{pmatrix} &= A \begin{pmatrix} b_{n-1} \\ b_{n-2} \end{pmatrix} \\
&= A \cdot A \begin{pmatrix} b_{n-2} \\ b_{n-3} \end{pmatrix} \\
&= \underbrace{A \cdot \ldots \cdot A}_{n-1 \text{ Faktoren}} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Berechnung von A^{n-1}: Man kann die Eigenwerte $\mu_1 = -1,\ \mu_2 = 3$ und zugehörige Eigenvektoren $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ der Matrix A berechnen.
Mit den Definitionen

$$T := \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } D := \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

ergibt sich $T^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ und A lässt sich als

$$A = TDT^{-1}$$

darstellen. Es gilt also auch

$$A^{n-1} = \left(TDT^{-1}\right)^{n-1} = TD^{n-1}T^{-1}.$$

Da aber D eine Digonalmatrix ist, gilt

$$A^{n-1} = TD_nT^{-1},$$

mit $D_n = \begin{pmatrix} (-1)^{n-1} & 0 \\ 0 & 3^{n-1} \end{pmatrix}$. Insgesamt bekommen wir nach der Vereinfachung der Matrixelemente also

$$B = A^{n-1} = \begin{pmatrix} \frac{3^n}{4} - \frac{(-1)^n}{4} & \frac{3\,(-1)^n}{4} + \frac{3^n}{4} \\ \frac{(-1)^n}{4} + \frac{3^n}{12} & \frac{3^n}{12} - \frac{3\,(-1)^n}{4} \end{pmatrix}.$$

(c) Aus Teil (b) und mit $b_0 = 0,\ b_1 = 1$ bekommen wir

$$b_n = \frac{3^n}{4} - \frac{(-1)^n}{4} \text{ für } n \geqq 1.$$

Aufgabe H 46. *Kegelschnitte*
Es sei der Kegel $K = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0\right\}$ im $\mathbb{R}^3$ gegeben. Weiter sei $n_\varphi = (\cos\varphi, 0, \sin\varphi)^\mathsf{T}$ der Normalenvektor an die Ebene E_φ durch den Punkt $(1, 0, 0)^\mathsf{T}$.

Betrachten Sie die Schnitte der Ebene E_φ mit dem Kegel K in Abhängigkeit von φ. Geben Sie die möglichen Gestalten der Schnittquadriken für $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ an.
Hinweis: Vollziehen Sie die Schritte aus der Präsenzaufgabe P47 (b) nach.

Lösungshinweise hierzu:

- Wir wählen das Koordinatensystem

$$\mathbb{F}_\varphi = \left((1,0,0)^\intercal; (-\sin(\varphi), 0, \cos(\varphi))^\intercal, (0,1,0)^\intercal, (\cos(\varphi), 0, \sin(\varphi))^\intercal\right).$$

- Somit ist die Koordinatentransformation gegeben durch

$$_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}_\varphi}(w) = \begin{pmatrix} -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi w_1 + \cos\varphi w_3 + 1 \\ w_2 \\ \cos\varphi w_1 + \sin\varphi w_3 \end{pmatrix}.$$

- Der Kegel wird bezüglich $\mathbb{F}_\varphi$ dargestellt durch

$$\begin{aligned} 0 &= (-w_1\sin\varphi + w_3\cos\varphi + 1)^2 + w_2^2 - (w_1\cos\varphi + w_3\sin\varphi)^2 \\ &= ((\sin\varphi)^2 - (\cos\varphi)^2)w_1^2 + w_2^2 - ((\sin\varphi)^2 - (\cos\varphi)^2)w_3^2 \\ &\quad -4w_1w_3\cos\varphi\sin\varphi - 2w_1\sin\varphi + 2w_3\cos\varphi + 1. \end{aligned}$$

  Die Ebene E_φ ist durch die Gleichung $w_3 = 0$ gegeben.

- Der Schnitt von K und E_φ ist dann

$$\begin{aligned} 0 &= ((\sin\varphi)^2 - (\cos\varphi)^2)w_1^2 + w_2^2 - 2w_1\sin\varphi + 1 \\ &\overset{(\sin\varphi)^2-(\cos\varphi)^2=2(\sin\varphi)^2-1}{=} (2(\sin\varphi)^2 - 1)w_1^2 - 2w_1\sin\varphi + w_2 + 1 \\ &\overset{2(\sin\varphi)^2-1\neq 0}{=} (2(\sin\varphi)^2-1)\left(\left(w_1^2 - \frac{\sin\varphi}{2(\sin\varphi)^2-1}\right)^2 - \frac{(\sin\varphi)^2}{(2(\sin\varphi)^2-1)^2}\right) \\ &\quad +w_2^2 + 1 \\ &= (2(\sin\varphi)^2-1)\left(w_1 - \frac{s}{2(\sin\varphi)^2-1}\right)^2 + w_2^2 + \frac{(\sin\varphi)^2-1}{2(\sin\varphi)^2-1} \\ &= (2(\sin\varphi)^2-1)z_1^2 + z_2^2 + \frac{(\sin\varphi)^2-1}{2(\sin\varphi)^2-1}. \end{aligned}$$

  Es liegt eine Fallunterscheidung nahe. Wir unterscheiden die Fälle $(\sin\varphi)^2 < \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} < (\sin\varphi)^2 < 1$ und $(\sin\varphi)^2 = 1$.

  - Fall $(\sin\varphi)^2 < \frac{1}{2}$: Es folgt $(\sin\varphi)^2 - 1 < 0$ und $2(\sin\varphi)^2 - 1 < 0$ und somit ist $\frac{(\sin\varphi)^2-1}{2(\sin\varphi)^2-1} > 0$. Weiter folgt, dass es sich somit um eine Hyperbel handelt.
  - Fall $\frac{1}{2} < (\sin\varphi)^2 < 1$: Es folgt $(\sin\varphi)^2 - 1 < 0$ und $2(\sin\varphi)^2 - 1 > 0$ und somit ist $\frac{(\sin\varphi)^2-1}{2(\sin\varphi)^2-1} < 0$. Weiter folgt, dass es sich somit um eine Ellipse handelt.

– Fall $(\sin\varphi)^2 = 1$: Es folgt $(\sin\varphi)^2 - 1 = 0$ und $2(\sin\varphi)^2 - 1 = 10$ und somit ist $\frac{(\sin\varphi)^2-1}{2(\sin\varphi)^2-1} = 0$. Weiter folgt, dass es sich somit um einen Punkt handelt.

Wir haben den Fall $2(\sin\varphi)^2 - 1 = 0$ in obiger Rechnung ausgenommen und führen ihn hier gesondert auf. Dieser Fall bedeutet, dass $(\sin\varphi)^2 = \frac{1}{2}$ gilt. Im gegeben Definitionsbereich für φ ist dies gleichbedeutend mit $\sin\varphi = \frac{1}{2}$. Es ergibt sich für den Schnitt:

$$0 = w_2^2 - w_1 + 1.$$

Dies ist eine Parabel.

O. Alaya, S. Demirel
M. Fetzer, B. Krinn
M. Wied

14. Gruppenübung zur Vorlesung
Höhere Mathematik 1

Dr. M. Künzer
Prof. Dr. M. Stroppel

Wintersemester 2012/2013

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 47. *Folgen*

Bestimmen Sie die Häufungspunkte der Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sowie jeweils $\underline{\lim}$ und $\overline{\lim}$. Welche der Folgen sind konvergent?

$$a_n = (-1)^{n+1}\frac{6n^3+13n}{5n^3+7} \qquad b_n = (-1)^n 2^{-2n+1}\frac{n^4-3}{n^4+2n^2+1}$$
$$c_n = \cos\left(\frac{\pi}{n}\sin\left(2^n\right)\right)\frac{-n^3+2}{13n} \qquad d_n = \sin\left(n\frac{\pi}{6}\right)$$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir betrachten zuerst den hinteren Teil des Terms:

$$\tilde{a}_n := \frac{6n^3+13n}{5n^3+7} = \frac{6+\frac{13}{n^2}}{5+\frac{7}{n^3}}.$$

Da Zähler und Nenner den gleichen Grad haben, können wir den Grenzwert einfach ablesen und es gilt $\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{a}_n = 6/5$. Der Faktor $(-1)^{n+1}$ hat für gerades n den Wert -1 und für ungerades n den Wert 1. Das führt dazu, dass die Folge alterniert. Wir erhalten also durch Anwenden von Satz 1.5.3 die Häufungspunkte $6/5$ (als Grenzwert der Teilfolge, die aus den Folgengliedern mit ungeradem Index besteht) und $-6/5$ (als Grenzwert der Teilfolge, die aus den Folgengliedern mit geradem Index besteht). Somit gilt

$$\underline{\lim}\, a_n = -6/5 \text{ und } \overline{\lim}\, a_n = 6/5\,.$$

Da zwei verschiedene Häufungspunkte existieren divergiert die Folge.

(b) Wir gehen analog zum ersten Aufgabenteil vor und zerlegen die Folge in drei Faktoren. Der Bruch ganz am Ende konvergiert mit demselben Argument wie oben gegen 1. $2^{-2n+1} = 1/2^{2n-1}$ konvergiert gegen Null. D.h. das Produkt aus den letzten beiden Faktoren konvergiert gegen Null (wieder Satz 1.5.3). In diesem Fall hat der alternierende Faktor $(-1)^n$ keinen Einfluss und wir erhalten als Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 0.$$

Da die Folge einen Grenzwert (und damit lediglich einen Häufungspunkt) hat, gilt

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, b_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, b_n$$

.

(c) Wir gehen analog zum ersten Aufgabenteil vor und zerlegen die Folge in 2 Faktoren. Aus der Tatsache, dass $|\sin(2^n)| \leqq 1$ ist, folgt, dass $|\frac{\pi}{n}\sin(2^n)| \leqq \frac{\pi}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Es gilt insbesondere, dass $|\frac{\pi}{n}\sin(2^n)| \leqq \frac{\pi}{3}$ für alle $n \in \mathbb{N},\ n \geqq 3$. Das heißt, dass $-\frac{\pi}{3} \leqq \underbrace{\frac{\pi}{n}\sin(2^n)}_{x} \leqq \frac{\pi}{3}$ für alle $n \in \mathbb{N},\ n \geqq 3$.

Weil die Kosinus-Funktion monoton steigend auf dem Intervall $\left[-\frac{\pi}{3},\ 0\right]$ ist, gilt $\cos(x) \geqq \cos(-\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$ für alle $x \in \left[-\frac{\pi}{3},\ 0\right]$.
Auf dem Intervall $\left[0,\ \frac{\pi}{3}\right]$ ist die Kosinus-funktion monoton falled. Daraus folgt, dass $\cos(x) \geqq \cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$ für alle $x \in \left[0,\ \frac{\pi}{3}\right]$.
Zusammengefasst gilt also für den vorderen Teil der Folge:

$$\cos\left(\frac{\pi}{n}\sin(2^n)\right) \geqq \frac{1}{2} \text{ für alle } n \geqq 3.$$

Für den hinteren Teil der Folge gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-n^3+2}{13n} = \lim_{n\to\infty} \frac{-n^2}{13} = -\infty.$$

Somit folgt insgesamt, dass die Folge c_n bestimmt divergent ist (konvergent gegen $-\infty$). Die Folge hat also nur den Häufungspunkt $-\infty$ und es gilt

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, c_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, c_n = -\infty$$

(d) Für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ können wir die ganzzahlige Division mit Rest durchführen und erhalten

$$n = 6k + r,\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\},\ r = 0, \ldots, 5.$$

Die Folge $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kann also in 6 Teilfolgen, die wir mit r von 0 bis 5 durchnummerieren, zerlegt werden:

$$d_n = d_{6k+r} = \sin\left((6k+r)\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(k\pi + r\frac{\pi}{6}\right) = \pm\sin\left(r\frac{\pi}{6}\right), r = 0, \ldots, 5$$

Es gilt außerdem wegen $\sin(\pi - x) = \sin(x)$, dass

$$\sin\left((6-r)\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(r\frac{\pi}{6}\right).$$

Somit reicht es aus, wenn wir die sechs konstanten konstanten Teilfolgen mit den Termen

$$\pm\sin\left(r\frac{\pi}{6}\right), r = 0, \ldots, 2$$

betrachten. Die Häufungspunkte der Folge d_n sind die Grenzwerte der konstanten Teilfogen

$$\sin 0,\ \pm\sin\left(\frac{\pi}{6}\right),\ \pm\sin\left(2\frac{\pi}{6}\right).$$

Die Häfungspunkte der Folge d_n sind also

$$0,\ \pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

und es gilt

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, d_n = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ und } \underline{\lim_{n\to\infty}}\, d_n = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Da die Folge mehrere Häufungspunkte besitzt, ist sie divergent.

Aufgabe H 48. *Grenzwerte*

Untersuchen Sie jeweils die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

(a) $a_n = \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

(b) $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$

(c) $a_n = \dfrac{n}{2^n}$

(d) $a_n = \dfrac{2^n + 3^n}{3^n + 2n + 4}$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Die Multiplikation der Folge mit $\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ liefert

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{n}}}$$

Um diesen Grenzwert zu bestimmen benutzen wir die Grenzwertsätze 1.5.3. Wir zeigen zuerst, dass $\sqrt{1+\frac{1}{n}}$ konvergent ist und nutzen dann, dass wir den Grenzwert von $1+\frac{1}{n}$ kennen. Offensichtlich ist

$$\sqrt{1 + \tfrac{1}{n}} \geqq 1 \quad \text{für alle } n$$

und da die Wurzel monoton ist (vgl. 0.2.5 Monotonie des Quadrierens, Wurzelziehen auf beiden Seiten liefert Monotonie der Wurzel) und $1+\frac{1}{n}$ monoton fallend, gilt dass $\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

eine monotone und beschränkte Folge ist. Nach dem Satz von Bolzano ist sie also konvergent. Jetzt können wir die Grenzwertsätze anwenden, wonach gilt:

$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}\,\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1.$

Da $\sqrt{1+\frac{1}{n}} > 0$ ist, gilt also

$\lim_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}} = 1.$

Insgesamt ist dann

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = \frac{1}{2}.$

$$Es gilt \frac{n!}{n^n} = \frac{1}{n}\frac{2}{n}\cdots\frac{n-1}{n}\frac{n}{n} \leqq \frac{1}{n}$$

und damit $0 \leqq \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n} \leqq \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$ (nach Satz 1.5.6).

(b) Es gilt $0 \leqq \frac{n}{2^n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nun prüfen wir auf Monotonie. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{2^{n+1}} - \frac{n}{2^n} = \frac{n+1-2n}{2^{n+1}} = \frac{-n+1}{2^{n+1}} \leqq 0.$$

Die Folge ist beschränkt und monoton, sie ist also konvergent. Wir schätzen nun 2^n durch n^2 nach unten ab. Wir zeigen via Induktion $2^n \geqq n^2$ für alle $n \geqq 4$. Der Anfang für $n = 4$ ist korrekt. Nun führen wir den Schritt aus:

$$\begin{aligned}
2^{n+1} &= 2\cdot 2^n \\
&\overset{\text{Induktionsannahme}}{\geqq} 2n^2 \\
&= n^2+2n+1+n^2-2n+1-2 \\
&= (n+1)^2+(n-1)^2-2 \\
&\overset{n\geqq 4}{\geqq} (n+1)^2.
\end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich für den Grenzwert:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n} \leqq \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2} = 0.$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n+3^n}{3^n+2n+4} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n+1}{1+\frac{2n}{3^n}+\frac{4}{3^n}} \overset{\frac{2}{3}<1 \text{ und Teil (c)}}{=} 1$$

Aufgabe *Konvergenz*

Untersuchen Sie jeweils die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert. Bestimmen Sie alle Häufungspunkte sowie gegebenenfalls Infimum und Supremum der Folgen.

(a) $a_n = \dfrac{(-1)^n n}{n+1}$

(b) $a_n = \dfrac{4(n+1)^2\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{n+4}$

(c) $a_n = \dfrac{2n+5^n}{5^{n+1}}$

(d) $a_n = \left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^n$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Die durch $a_n = \dfrac{(-1)^n n}{n+1}$ gegebene Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lässt sich in die beiden Teilfolgen $(a_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_{2n-1} = -\frac{n}{n+1}$ und $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_{2n} = \frac{n}{n+1}$ zerlegen. Damit hat die Folge die beiden Häufungspunkte $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n-1} = -1$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = 1$. Somit ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent, da sie 2 Häufungspunkte besitzt. Die Teilfolge $(a_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ besteht nur aus positiven Folgengliedern und ist monoton steigend, da

$$\begin{aligned} \frac{n}{n+1} &< \frac{n+1}{n+2} \\ \Leftrightarrow (n+2)n &< (n+1)(n+1) \\ \Leftrightarrow n^2+2n &< n^2+2n+1 \end{aligned}$$

gilt. Die Teilfolge $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ besteht nur aus negativen Folgengliedern und ist monoton fallend, da

$$\begin{aligned} -\frac{n}{n+1} &> -\frac{n+1}{n+2} \\ \Leftrightarrow (n+2)n &< (n+1)(n+1) \\ \Leftrightarrow n^2+2n &< n^2+2n+1 \end{aligned}$$

gilt. Somit gilt $\sup\,(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}} = 1$ und $\inf\,(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}} = -1$.

(b) Die durch $a_n = \dfrac{4(n+1)^2 \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{n+4}$ gegebene Folge ist für n ungerade die Nullfolge, weil $\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) = 0$ ist.
Die Teilfolge a_{2n+1} ist also konstant gleich 0 und konvergiert somit gegen 0.
Für gerade n gilt dass $\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) = (-1)^{\frac{n}{2}}$. Somit gilt für die Teilfolge

$$(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}} \text{ dass } a_{2n} = \frac{4(2n+1)^2(-1)^n}{2n+4}$$

und somit auch für die Folge a_n, dass

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = \infty \text{ und } \underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = -\infty.$$

Da die Folge die Häufungspunkte 0, $-\infty$ und ∞ besitzt, ist sie divergent und es gilt $\sup\,(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \infty$ und $\inf\,(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = -\infty$.

(c) Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n}{5^n} + 1}{5} \overset{\text{H48. Teil (c)}}{=} \frac{1}{5}\,.$$

Damit ist $\frac{1}{5}$ auch der einzige Häufungspunkt. Die Folge ist monoton fallend, denn es gilt

$$\frac{2n+5^n}{5^{n+1}} > \frac{2(n+1)+5^{n+1}}{5^{n+2}} \Leftrightarrow 10n + 5^{n+1} > 2(n+1) + 5^{n+1} \Leftrightarrow 8n > 1\,.$$

Damit gilt $\sup\,(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = a_1 = \frac{7}{25}$ und $\inf\,(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{5}$.

(d) Zuerst erinnern wir uns an Definition 1.2.9:

$$\mathrm{e} := \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

In unserem Fall gilt

$$a_n = \sqrt{\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n}}.$$

Die Folge $(\tilde{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$\tilde{a}_n = \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n}$$

ist eine Teilfolge von $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$e_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

die alle geradzahligen Glieder von $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ enthält. Da $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen e konvergiert, konvergiert auch jede Teilfolge von e_n (insbesondere die Folge $(\tilde{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$) gegen e.

Da die Folge $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton steigend ist, ist auch $(\tilde{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton steigend. Da $a_n = \sqrt{\tilde{a}_n}$ gilt und die Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \sqrt{x}$ monoton steigend ist, ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton steigend. Da $\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ gilt und die Folge $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach oben durch e beschränkt ist, ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach oben beschränkt. Damit ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und hat einen Grenzwert, den wir mit g bezeichnen. Jetzt wissen wir, dass

$$g^2 = \left(\lim_{n\to\infty}(a_n)\right)\cdot\left(\lim_{n\to\infty}(a_n)\right) = \lim_{n\to\infty}(a_n \cdot a_n) = \mathrm{e}$$

gilt. Da alle Folgenglieder von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ größer als 1 sind (und damit die Möglichkeit $g = -\sqrt{\mathrm{e}}$ nicht in Frage kommt), gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{\mathrm{e}}.$$

Da die Folge monoton und konvergent ist, gilt $\inf\,(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = a_1 = \frac{3}{2}$ und $\sup\,(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sqrt{\mathrm{e}}$.