L. Allerhand
A. Armiti, J. Hörner
A. Kerschl, M. Werth
C. Winkel, C. Zeiler

1. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 1

M. Künzer
M. Stroppel

Wintersemester 2014/15

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 1. *Aussagen*

Zeigen Sie folgende Aussagen.

(a) Die Summe der ersten n ungeraden Zahlen ist eine Quadratzahl.

Lösungshinweise hierzu: Wir betrachten die Summe $\sum_{k=1}^{n} 2k-1$. Wir formen diese Summe um und wenden die aus der Vorlesung bekannte Gaussche Summenformel an.

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = \left(\sum_{k=1}^{n} 2k\right) - n = 2\left(\sum_{k=1}^{n} k\right) - n = 2\frac{n(n+1)}{2} - n = n^2 + n - n = n^2$$

Damit haben wir die Aussage bewiesen.

(b) Die Differenz zweier ungerader Quadratzahlen ist durch 8 teilbar.

Lösungshinweise hierzu: Die Differenz zweier ungerader Quadratzahlen lässt sich darstellen als $(2n+1)^2-(2m+1)^2$ für zwei ganze Zahlen $n, m \in \mathbb{Z}$. Durch Umformung erhalten wir

$$(2n+1)^2 - (2m+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 - 4m^2 - 4m - 1 = 4(n^2 + n - m^2 + m)$$

Damit ist die Teilbarkeit durch 4 bereits gezeigt. Formen wir den zweiten Faktor auf der rechten Seite weiter um, so erhalten wir

$$n^2 + n - m^2 + m = n(n+1) - m(m+1).$$

Da entweder n oder $n+1$ gerade ist, ist $n(n+1)$ durch 2 teilbar. Ebenso ist $m(m+1)$ durch 2 teilbar. Insgesamt ist deshalb die Differenz zweier ungerader Quadratzahlen durch 8 teilbar.

(c) Die Gleichung $x^3+x+1 = 0$ kann in den reellen Zahlen nur negative Lösungen haben.

Lösungshinweise hierzu: Wir beweisen diese Aussage durch Widerspruch. Angenommen $0 \leqq x_1 \in \mathbb{R}$ ist eine Lösung der Gleichung. Es gilt $x_1^3 \geqq 0$, $x_1 \geqq 0$ und $1 > 0$ also ist $x_1^3 + x_1 + 1 > 0$, was ein Widerspruch zu unserer Annahme ist. Also kann die Gleichung in den reellen Zahlen nur negative Lösungen haben.

(d) Die Gleichung $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 = 0$ hat in den reellen Zahlen genau eine Lösung.

Lösungshinweise hierzu: Durch Termumformung erhalten wir

$$x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 = (x-1)^4.$$

Die faktorisierte rechte Seite hat 1 als vierfache Nullstelle und damit hat obige Gleichung nur eine Lösung.

Aufgabe H 2. *Summen*

Beweisen Sie folgende Summenformeln für alle $n \in \mathbb{N}$.

(a) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}(j^2-1) = \frac{1}{6}(2n^3+3n^2-5n)$,

Lösungshinweise hierzu: Wir beweisen diese Aussage mittels Induktion.

IA $n = 1$:

$$\sum_{j=1}^{1}(j^2-1) = 1^2-1 = 0 = \frac{1}{6}(2+3-5)$$

IH Sei nun die Aussage für ein $n \in \mathbb{N}$ bewiesen, d.h. für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte

$$\sum_{j=1}^{n}(j^2-1) = \frac{1}{6}(2n^3+3n^2-5n)$$

IS Wir zeigen, dass dann auch die Aussage für $n+1$ gilt.

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n+1}(j^2-1) &= \left(\sum_{j=1}^{n} j^2-1\right) + ((n+1)^2-1) \\
&\overset{\text{IH}}{=} \frac{1}{6}(2n^3+3n^2-5n) + ((n+1)^2-1) \\
&= \frac{1}{6}(2n^3+3n^2-5n) + \frac{1}{6}(6n^2+12n) \\
&= \frac{1}{6}(2(n+1)^3-6n^2-6n-2\ \ +3(n+1)^2-6n-3\ \ -5(n+1)+5) + \frac{1}{6}(6n^2+12n) \\
&= \frac{1}{6}(2(n+1)^3+3(n+1)^2-5(n+1))
\end{aligned}$$

Damit ist die Aussage für alle $n \in \mathbb{N}$ bewiesen.

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{1}{3}n(1+n)(2+n)$,

Lösungshinweise hierzu: Wir beweisen diese Aussage mittels Induktion.

IA $n = 1$:

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = 1(1+1) = 2 = \frac{1}{3}(1+1)(2+1)$$

IH Sei nun die Aussage für ein $n \in \mathbb{N}$ bewiesen, d.h. für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{1}{3}n(1+n)(2+n).$$

IS Wir zeigen, dass dann auch die Aussage für $n+1$ gilt.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k(k+1) &= \left(\sum_{k=1}^{n} k(k+1)\right) + (n+1)(n+2) \\ &\overset{\text{IH}}{=} \frac{1}{3}n(n+1)(n+2) + (n+1)(n+2) \\ &= \frac{1}{3}n(n+1)(n+2) + \frac{1}{3}(3(n+1)(n+2)) \\ &= \frac{1}{3}(n+3)(n+1)(n+2)\end{aligned}$$

Damit ist die Aussage für alle $n \in \mathbb{N}$ bewiesen.

(c) $\displaystyle\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m(m+1)} = \frac{n}{n+1}$.

Lösungshinweise hierzu: Wir beweisen diese Aussage mittels Induktion.

IA $n = 1$:

$$\sum_{m=1}^{1} \frac{1}{m(m+1)} = \frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$$

IH Sei nun die Aussage für ein $n \in \mathbb{N}$ bewiesen, d.h. für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte

$$\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m(m+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

IS Wir zeigen, dass dann auch die Aussage für $n+1$ gilt.

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{n+1} \frac{1}{m(m+1)} &= \left(\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m(m+1)}\right) + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
&\overset{\text{IH}}{=} \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{n(n+2)}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{(n+1)}{(n+2)}
\end{aligned}$$

Damit ist die Aussage für alle $n \in \mathbb{N}$ bewiesen.

Aufgabe H 3. *Binomialkoeffizienten*

Zeigen Sie folgende Aussagen für alle $n \in \mathbb{N}$.

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k = 3^n$ **(b)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(k\pi)\binom{n}{k} = 0$ **(c)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}$

Lösungshinweise hierzu: Die Beweise ergeben sich aus dem binomischen Lehrsatz:

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k (1)^{n-k} = (2+1)^n = 3^n$,

(b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(k\pi)\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k (1)^{n-k} = (1-1)^n = 0$,

(c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k 1^{n-k} = (x+1)^n = (1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} 1^k$,

Aufgabe H 4. *Rationale Zahlen*

Seien a, b und c ungerade ganze Zahlen. Zeigen Sie, dass für

$$ax^2 + bx + c = 0$$

keine Lösung $x \in \mathbb{Q}$ existiert. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(a) Angenommen es existiert eine Lösung $x \in \mathbb{Q}$. Dann gibt es $r, s \in \mathbb{Z}$ mit $s \neq 0$, $\frac{r}{s}$ vollständig gekürzt und

$$b^2 - 4ac = \frac{r^2}{s^2}.$$

Zeigen Sie, dass in diesem Fall r und s ungerade sind.

(b) Formen Sie die Gleichung aus **(a)** zu folgender Gleichung um

$$b^2 s^2 - r^2 = 4acs^2$$

und leiten Sie einen Widerspruch zur Annahme aus **(a)** her.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Angenommen es existiert eine Lösung $x \in \mathbb{Q}$, wobei $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. Das gilt aber nur wenn $\sqrt{b^2 - 4ac} \in \mathbb{Q}$. Also impliziert die Annahme, dass es $r, s \in \mathbb{Z}$ gibt, mit den Eigenschaften, dass $s \neq 0$, $\frac{r}{s}$ vollständig gekürzt und

$$b^2 - 4ac = \frac{r^2}{s^2}.$$

Die Zahlen r und s können nicht beide gerade sein, weil $\frac{r}{s}$ vollständig gekürzt ist. Wir nehmen an, dass r gerade ist. Das ergibt aber einen Widerspruch, denn

$$\underbrace{r^2}_{\text{gerade}} = \underbrace{s^2 b^2 - 4acs^2}_{\text{ungerade}}.$$

Nehmen wir nun an, dass s gerade ist, so erhalten wir

$$\underbrace{r^2}_{\text{ungerade}} = s^2 b^2 - 4acs^2 = \underbrace{s^2(b^2 + 4ac)}_{\text{ungerade}},$$

also ebenfalls einen Widerspruch. Damit bleibt nur die Möglichkeit, dass r und s ungerade sind.

(b) Wir schreiben die Gleichung aus **(a)** um und erhalten

$$b^2 s^2 - r^2 = 4acs^2.$$

Dann steht auf der linke Seite die Differenz zweier ungerader Quadratzahlen, die durch 8 teilbar ist (siehe **H1 (b)**). Dies impliziert, dass acs^2 eine gerade Zahl sein muss. Das ist ein Widerspruch zum Ergebnis aus **(a)**.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

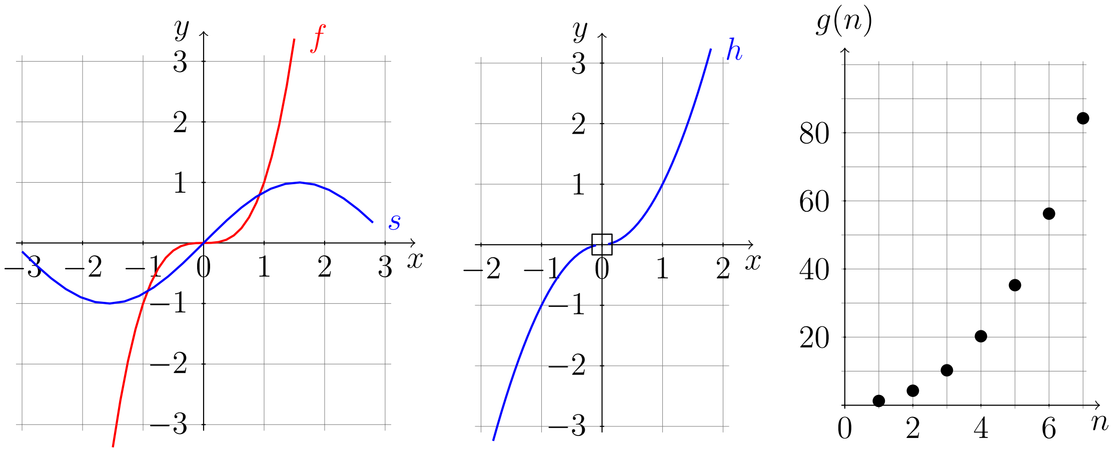
Aufgabe H 5. *Abbildungen*

Skizzieren Sie folgende Funktionen und überprüfen Sie diese auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität:

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon \quad x \mapsto x^3 \qquad\qquad h\colon \mathbb{R} \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{R}\colon \quad x \mapsto \frac{x^3}{|x|}$$

$$g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}\colon \quad n \mapsto \binom{n+2}{3} \qquad\qquad s\colon \mathbb{R} \to [-1,1]\colon \quad x \mapsto \sin(x)$$

Lösungshinweise hierzu:



- f ist injektiv. Für alle $x_1 < x_2$ gilt $x_1^3 < x_2^3$ und damit $f(x_1) < f(x_2)$. Analog folgt aus $x_1 > x_2$, dass $f(x_1) > f(x_2)$ gilt. Da sich alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $x_1 \neq x_2$ bezüglich der Ordnungsrelation sortieren lassen gilt entweder $x_1 < x_2$ oder $x_1 > x_2$ und damit ist $f(x_1) \neq f(x_2)$.
  f ist surjektiv, da für alle $y \in \mathbb{R}$ der Wert
  $$x = \begin{cases} \sqrt[3]{y} & \text{für } y \leqq 0, \\ -\sqrt[3]{-y} & \text{für } y > 0 \end{cases}$$
  existiert und $f(x) = y$ ist.
  f ist bijektiv, da injektiv und surjektiv.
- g ist injektiv. Es gilt
  $$g(n) = \binom{n+2}{3} = \frac{(n+2)!}{3!\,(n-1)!} = \frac{(n-1)!\,n\,(n+1)\,(n+2)}{6\,(n-1)!} = \frac{n\,(n+1)\,(n+2)}{6}$$
  und offensichtlich ist $g(n) < g(m)$ für $n < m$.
  g ist nicht surjektiv, da beispielsweise kein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit $g(n) = 2$.
  g ist nicht bijektiv, da nicht surjektiv.

- h ist injektiv, da wieder $x_1 < x_2 \Rightarrow h(x_1) < h(x_2)$ gilt.
  h ist nicht surjektiv, da $h(x) = 0$ keine Lösungen besitzt.
  h ist nicht bijektiv, da nicht surjektiv.
- s ist nicht injektiv, da $\sin(0) = \sin(\pi)$ ist.
  s ist surjektiv. Bereits die Funktion $\sin : [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]$ erreicht den ganzen Bildbereich $[-1, 1]$ und für alle $y \in [-1, 1]$ ist $x = \arcsin(y)$ eine Lösung von $s(x) = y$.
  s ist nicht bijektiv, da nicht injektiv.

Aufgabe H 6. *Beträge, Ungleichungen*

(a) Skizzieren Sie die folgenden Mengen.

(i) $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 2x + 3y \leqq 6\right\}$ **(ii)** $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, |x - 1| + |y| \leqq 2\right\}$

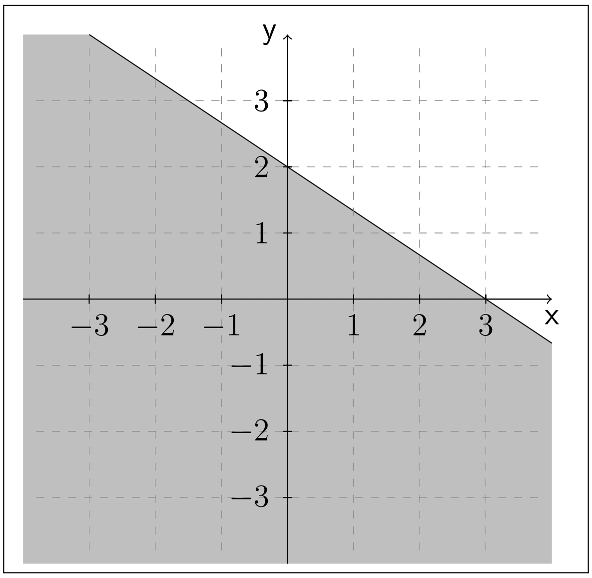
(b) Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der Gleichung $x^2 - 5|x| + 6 = 0$.

(c) Sei $a \in \mathbb{R}$ ein Parameter. Bestimmen Sie $\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, |x^2 - 1| + |x - a| = 0\right\}$.

Lösungshinweise hierzu:

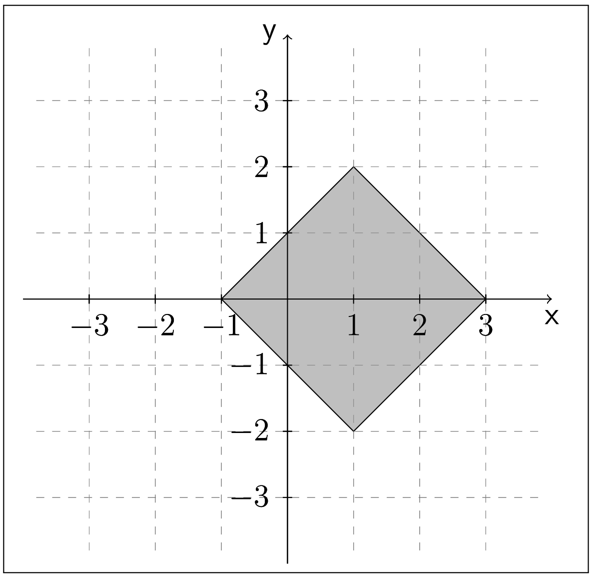
(a) Skizzieren Sie die folgenden Mengen

(i) Durch Umformen erhält man $2x + 3y \leqq 6 \Leftrightarrow y \leqq -\frac{2}{3}x + 2$ und es ergibt sich die Menge $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, y \leqq -\frac{2}{3}x + 2\right\}$ als die Fläche unterhalb (und einschließlich) der Geraden $y = -\frac{2}{3}x + 2$.



(ii) **Fall** $x \geqq 1, y \geqq 0$: $x - 1 + y \leqq 2 \Leftrightarrow y \leqq -x + 3$
Fall $x \geqq 1$ und $y < 0$: $x - 1 - y \leqq 2 \Leftrightarrow y \geqq x - 3$
Fall $x < 1, y < 0$: $-x + 1 - y \leqq 2 \Leftrightarrow y \geqq -x - 1$

Fall $x < 1$ und $y \geqq 0$: $-x + 1 + y \leqq 2 \Leftrightarrow y \leqq x + 1$
Die Menge ergibt sich als das von diesen Geraden umrandete Gebiet.



(b) **Lösung I.**
Fall: $x \geqq 0$.
Wir erhalten die Gleichung

$$x^2 - 5x + 6 = 0,$$

mit den Nullstellen $x_1 = 2$ und $x_2 = 3$.
Fall: $x < 0$.
Wir erhalten

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$

mit den Nullstellen $x_3 = -2$ und $x_4 = -3$.
Lösung II.
Mit der Substitution $z = |x|$ erhalten wir die Gleichung

$$z^2 - 5z + 6 = 0$$

mit den Nullstellen $z = 2$ und $z = 3$. Da $z = |x|$, gilt $x = \pm z$ und somit

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 3, \quad x_3 = -2, \quad x_4 = -3.$$

(c) Da die Betragsfunktion $|y| \geqq 0 \, (\forall y \in \mathbb{R})$ ist, folgt aus $|x^2 - 1| + |x - a| = 0$, dass

$$\left(\left|x^2 - 1\right| = 0\right) \wedge (|x - a| = 0) \, .$$

Also erhalten wir

$$((x + 1)(x - 1) = 0) \wedge (x = a) \, .$$

Deshalb gilt

- ist $a = -1$, so lautet die Lösung $x = -1$,

- ist $a = 1$, so lautet die Lösung $x = 1$,
- ist $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, so existiert keine Lösung.

Aufgabe H 7. *Ungleichungen*

(a) Zeigen Sie für $x, y, z \in \mathbb{R}_0^+$:

$$(x + y + z)^3 \geqq 27x\,y\,z$$

Hinweis: Geometrisches Mittel.

(b) Zeigen Sie folgende Ungleichung für $x \geqq -1/6$.

$$\sqrt{1 + 6x} \leqq (1 + x)^3$$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Die Ungleichung wird umgeformt, bis auf der rechten Seite das geometrische Mittel aus x, y und z steht.

$$(x + y + z)^3 \geqq 27xyz \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{x + y + z}{3}\right)^3 \geqq x\,y\,z \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x + y + z}{3} \geqq \sqrt[3]{x\,y\,z}$$

Auf der linken Seite steht jetzt das arithmetische Mittel. Da das arithmetische Mittel kleiner gleich dem geometrischen Mittel ist, ist die Ungleichung bewiesen.

(b) Wird die Ungleichung quadriert, so erhält man die Bernoullische Ungleichung $1+n\,x \leqq (1 + x)^n$ mit $n = 6$.

Aufgabe H 8. *Mengen*

(a) Skizzieren Sie die Mengen

$$M_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0{,}5\,(x - 2)^2 + 1\} ,$$
$$M_2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - 0{,}5\,(y - 2)^2 = 1\} .$$

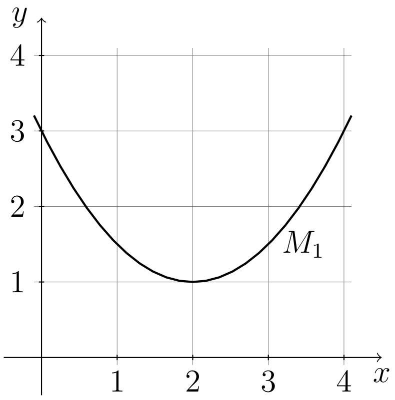
(b) Skizzieren Sie nun die Mengen

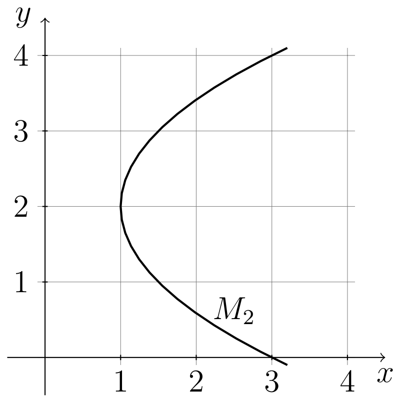
$$M_3 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - 0{,}5\,(y - 2)^2 \geqq 1 \vee y - 0{,}5\,(x - 2)^2 \geqq 1\} ,$$
$$M_4 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - 1)^2 + (y - 1)^2 \leqq 16\}$$

und die Schnittmenge von M_3 und M_4.

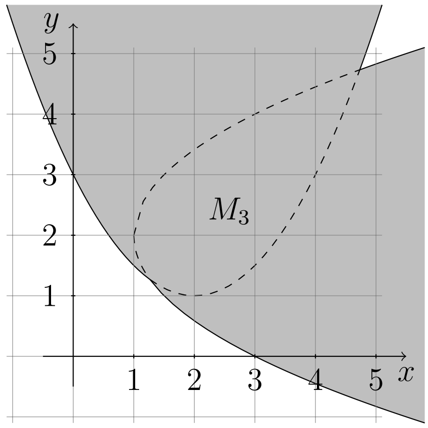
Lösungshinweise hierzu:

(a) Die Menge M_1 ist eine um den Faktor $\frac{1}{2}$ gestauchte Parabel mit dem Scheitelpunkt $(1, 1)$. Die Menge M_2 ist die an der Gerade $y = x$ gespiegelte Parabel M_1.

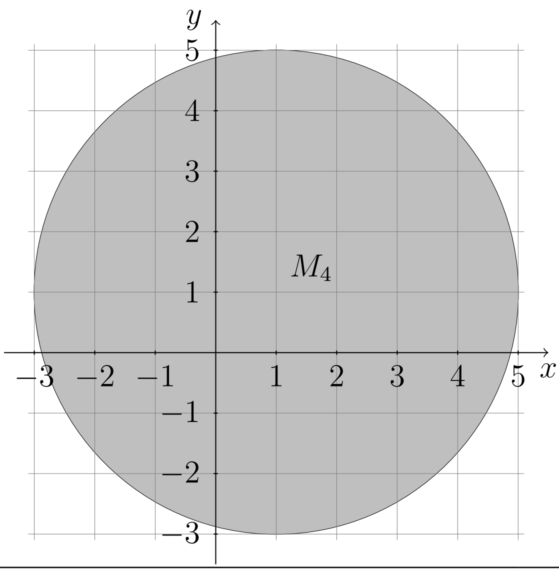


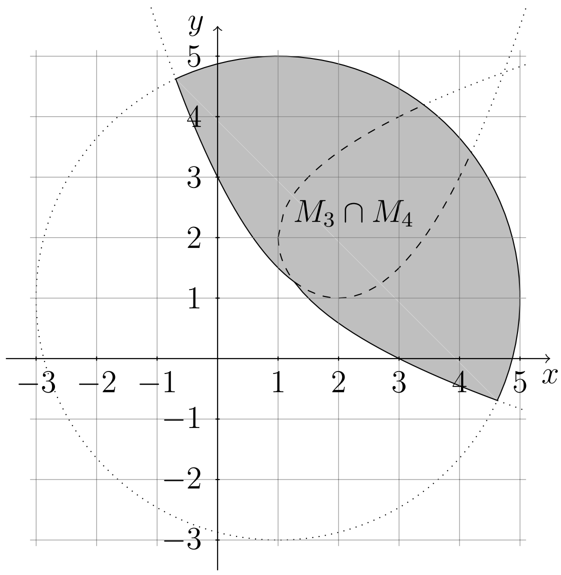


(b) Die Menge M_3 ist die Vereinigung aller Punkte, die zwischen und auf den beiden Parabelästen von M_1 und M_2 liegen.



Die Menge M_4 ist die abgeschlossene Kreisscheibe mit dem Mittelpunkt $(1, 1)$ und Radius 4. Die Schnittmenge von M_3 und M_4 ergibt sich als die Fläche, die zum einen begrenzt wird durch den in M_3 liegenden Kreisbogen (als Teil des Randes von M_4) und zum anderen dem Teil des Randes von M_3, der sich in M_4 befindet.





Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 9. *Faktorisierung*

Faktorisieren Sie folgende Polynome so weit wie möglich.

(a) $z^2 + 4\mathrm{i}z - 4 \in \operatorname{Pol}\mathbb{C}$

Lösungshinweise hierzu: Entweder mit Hilfe der binomischen Formel oder durch Berechnung der Nullstellen mit Hilfe der Mitternachtsformel erhalten wir:

$$z^2 + 4\mathrm{i}z - 4 = (z + 2\mathrm{i})^2$$

(b) $z^5 - \mathrm{i} \in \operatorname{Pol}\mathbb{C}$

Lösungshinweise hierzu: Hierzu ziehen wir die fünften Wurzeln aus $\mathrm{i} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$ und erhalten:

$$\begin{aligned}
z^5 - \mathrm{i} &= \left(z - \left(\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)\right)\right)\left(z - \left(\cos\left(\frac{5\pi}{10}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{5\pi}{10}\right)\right)\right)\\
&\quad\cdot\left(z - \left(\cos\left(\frac{9\pi}{10}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{9\pi}{10}\right)\right)\right)\left(z - \left(\cos\left(\frac{13\pi}{10}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{13\pi}{10}\right)\right)\right)\\
&\quad\cdot\left(z - \left(\cos\left(\frac{17\pi}{10}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{17\pi}{10}\right)\right)\right)\\
&= \left(z - \left(\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)\right)\right)(z - \mathrm{i})\\
&\quad\cdot\left(z - \left(\cos\left(\frac{9\pi}{10}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{9\pi}{10}\right)\right)\right)\left(z - \left(\cos\left(\frac{13\pi}{10}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{13\pi}{10}\right)\right)\right)\\
&\quad\cdot\left(z - \left(\cos\left(\frac{17\pi}{10}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{17\pi}{10}\right)\right)\right)
\end{aligned}$$

(c) $x^4 + 1 \in \operatorname{Pol}\mathbb{R}$

Lösungshinweise hierzu: Da dieses Polynom keine reellen Nullstellen hat, können keine Linearfaktoren abgespalten werden. Dennoch muss es in ein Produkt aus zwei Polynomen von Grad zwei zerfallen. Um diese beiden Polynome zu bestimmen, kann man entweder die komplexen vierten Wurzeln von -1 bestimmen und anschließend die Linearfaktoren, die zu komplex konjugierten Wurzeln gehören zusammenfassen oder man stellt zwei allgemeine Polynome von Grad zwei auf, multipliziert diese zusammen und löst die entstehenden Gleichungen. (Die vierten Wurzeln von -1 sind $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$, $\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)$ und $\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)$.) Auf beiden Wegen erhält man:

$$x^4 + 1 = (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)$$

(d) $x^4 - 2x^3 + x^2 - 4x + 4 \in \operatorname{Pol}\mathbb{R}$

Lösungshinweise hierzu: Hier raten wir die erste Nullstelle, spalten mit Hilfe der Polynomdivision den zugehörigen Linearfaktor ab und wiederholen diesen Vorgang. Dann erhalten wir:

$$x^4 - 2x^3 + x^2 - 4x + 4 = (x-1)(x-2)(x^2+x+2)$$

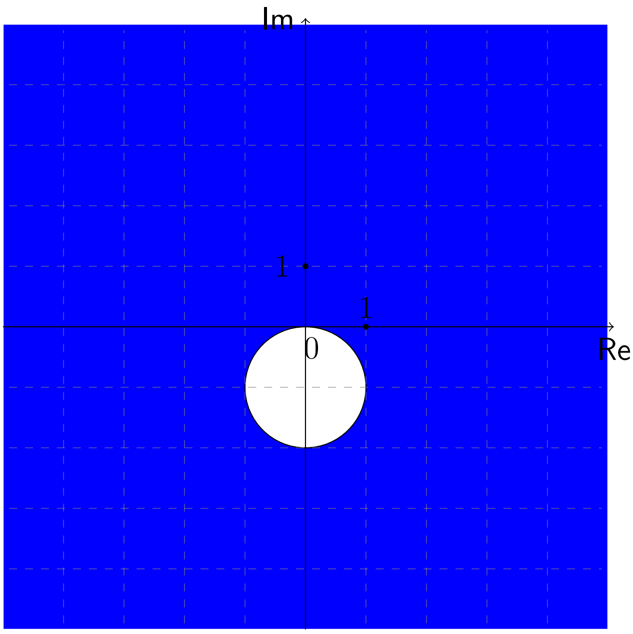
Das Polynom (x^2+x+2) hat keine reellen Nullstellen und daher haben wir an dieser Stelle so weit wie möglich faktorisiert.

Aufgabe H 10. *Komplexe Zahlenebene*

Skizzieren Sie die folgenden Mengen in der komplexen Zahlenebene.

(a) $\left\{z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z+\mathrm{i}| > 1\right\}$

Lösungshinweise hierzu: Die Menge besteht aus allen Punkten in der komplexen Ebene, die von i einen Abstand größer 1 haben:



(b) $\left\{z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |\operatorname{Re}(z)| + 2|\operatorname{Im}(z)| < 3\right\}$

Lösungshinweise hierzu: Zur genaueren Bestimmung deser Menge benötigen wir Fallunterscheidungen.

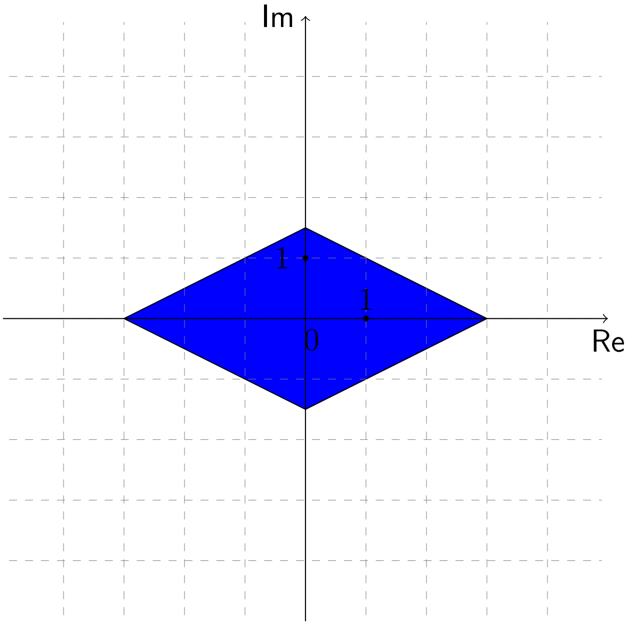
Fall 1: Für $\operatorname{Re}(z) > 0$ und $\operatorname{Im}(z) > 0$ wird die Menge nach oben durch die Gerade $\operatorname{Im}(z) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{Re}(z)$ begrenzt.

Fall 2: Für $\operatorname{Re}(z) < 0$ und $\operatorname{Im}(z) > 0$ wird die Menge nach oben durch die Gerade $\operatorname{Im}(z) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{Re}(z)$ begrenzt.

Fall 3: Für $\operatorname{Re}(z) > 0$ und $\operatorname{Im}(z) < 0$ wird die Menge nach unten durch die Gerade $\operatorname{Im}(z) = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{Re}(z)$ begrenzt.

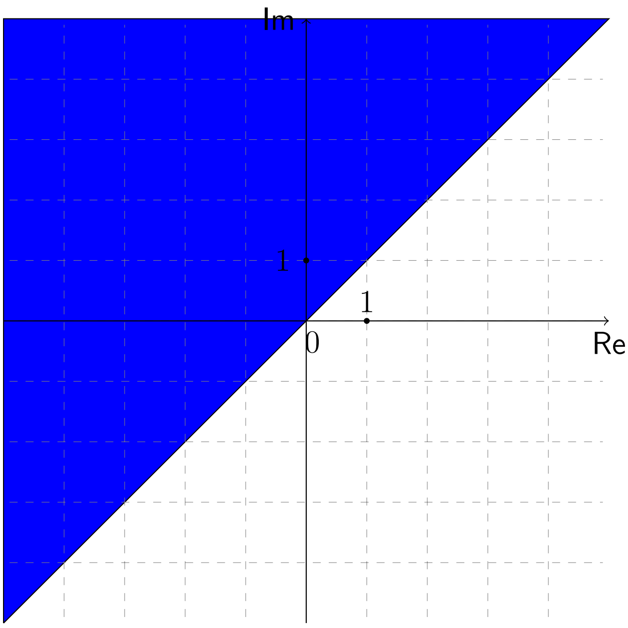
Fall 4: Für $\operatorname{Re}(z) < 0$ und $\operatorname{Im}(z) < 0$ wird die Menge nach unten durch die Gerade

$\mathrm{Im}(z) = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}(z)$ begrenzt.
Wir erhalten:



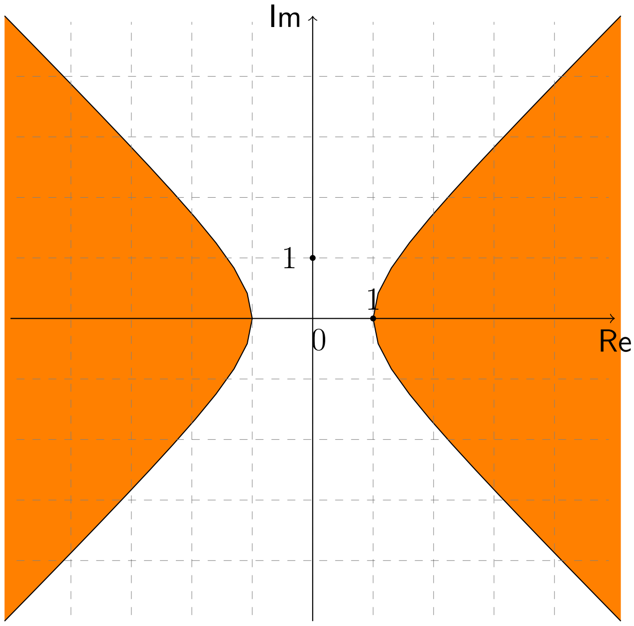
(c) $\left\{z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z - \mathrm{i}| < |z - 1|\right\}$

Lösungshinweise hierzu: Die Menge besteht aus allen Punkten in der komplexen Ebene, die von i einen kleineren Abstand haben als von 1.



(d) $\left\{z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \mathrm{Re}(z^2) > 1\right\}$

Lösungshinweise hierzu: Schreiben wir $z = a + b\mathrm{i}$, so ist $\mathrm{Re}(z^2) = a^2 - b^2$. Aus $a^2 - b^2 > 1$ erhalten wir $a > \sqrt{1 + b^2}$ für positives a und $a < -\sqrt{1 + b^2}$ für negatives a. Insgesamt erhalten wir:



Aufgabe H 11. *Komplexe Zahlenebene*
Gegeben seien die Abbildungen

$$f_1 \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C} \colon z \mapsto (4+3\mathrm{i})z \quad \text{und} \quad f_2 \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C} \colon z \mapsto z^2$$

sowie die Mengen

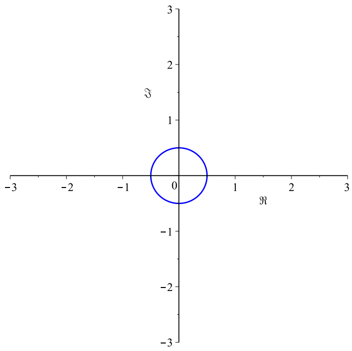
$$\begin{aligned} M_1 &= \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z| = \frac{1}{2} \right\}, \\ M_2 &= \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \mathrm{Re}(z) = 1 \right\} \quad \text{und} \\ M_3 &= \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2} \right\}. \end{aligned}$$

Skizzieren Sie die Mengen M_1, M_2 und M_3 sowie $f_1(M_1)$, $f_1(M_2)$, $f_1(M_3)$ und $f_2(M_1)$, $f_2(M_2)$, $f_2(M_3)$.

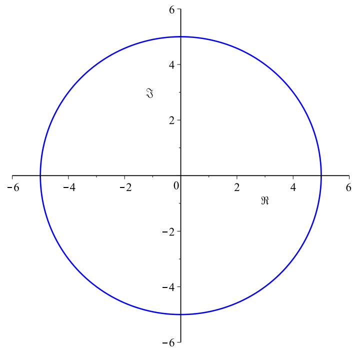
Lösungshinweise hierzu: Die Menge M_1 ist die Menge aller Punkte in der komplexen Ebene, die zur 0 den Abstand $\frac{1}{2}$ haben. Also der Kreis mit Radius $\frac{1}{2}$ um die 0. Alle Punkte dieser Menge können als $\frac{1}{2}(\cos(t) + \sin(t)\mathrm{i})$ mit einem $t \in [0, 2\pi)$ beschrieben werden.
Die Menge M_2 ist die Menge aller Punkte in der komplexen Ebene, deren Realteil gleich 1 ist. Also die Gerade parallel zur Imaginärachse durch 1. Alle Punkte dieser Menge können als $1 + t\mathrm{i}$ mit einem $t \in \mathbb{R}$ beschrieben werden.
Die Menge M_3 ist die Menge aller Punkte in der komplexen Ebene, die zu $\frac{1}{2}$ den Abstand $\frac{1}{2}$ haben. Also der Kreis mit Radius $\frac{1}{2}$ um $\frac{1}{2}$. Alle Punkte dieser Menge können als $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\cos(t) + \sin(t)\mathrm{i})$ mit einem $t \in [0, 2\pi)$ beschrieben werden.
Um die Bilder der Mengen unter der Abbildung f_1 zu bestimmen, machen wir uns zunächst klar, dass die Multiplikation einer komplexen Zahl mit $(4+3\mathrm{i})$ einer Drehstreckung entspricht. (Im Polarkoordinaten: Argumente werden addiert, Beträge multipliziert.) Daher erhalten wir:

Die Menge $f_1(M_1)$ ist der Kreis mit Radius 5 um den Ursprung, da $|(4+3\mathrm{i})| = 5$.
Die Menge $f_1(M_2)$ ist die Gerade durch die Punkte $\frac{25}{4}$ und $\frac{25}{3}\mathrm{i}$. Die Rechnung dazu ist $(1+t\mathrm{i})\cdot(4+3\mathrm{i}) = 4-3t+(4t+3)\mathrm{i}$. Dies beschreibt für $t \in \mathbb{R}$ genau die erwähnte Gerade.
Die Menge $f_1(M_3)$ ist der Kreis mit Radius $\frac{5}{2}$ um $\frac{5}{2}+\frac{3}{2}\mathrm{i}$.
Die Menge $f_2(M_1)$ ist der Kreis mit Radius $\frac{1}{4}$ um den Ursprung, da beim Quadrieren einer komplexen Zahl wie zuvor erwähnt Ihr Betrag quadriert wird.
Die Menge $f_2(M_2)$ ist eine auf der Seite liegende Parabel, da $(1+t\mathrm{i})^2 = 1-t^2+2t\mathrm{i}$ ist.
Die Menge $f_2(M_3)$ ergibt sich als $(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(\cos(t)+\sin(t)\mathrm{i}))^2 = \frac{1}{4}(1+2\cos(t)+\cos(t)^2 - \sin(t)^2) + \frac{1}{2}(1+\cos(t))\sin(t)\mathrm{i}$ mit einem $t \in [0, 2\pi)$. Dieser Beschreibung sieht man die Gestalt der Menge in der komplexen Ebene nicht direkt an, daher sollten so lange Werte für t eingesetzt werden und die Ergebnisse in die Skizze eingezeichnet werden, bis die Gestalt erkannt werden kann.

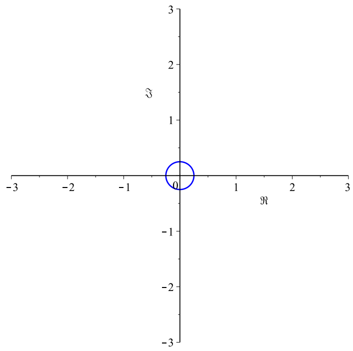
M_1:



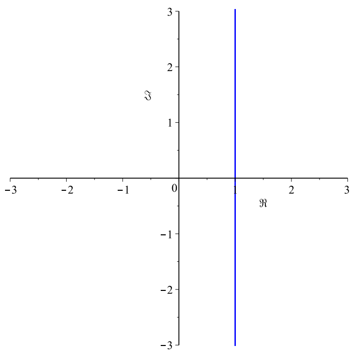
$f_1(M_1)$:



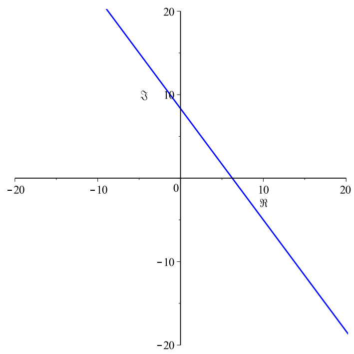
$f_2(M_1)$:



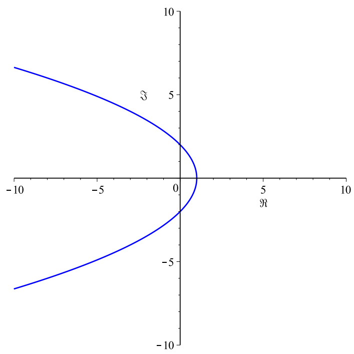
M_2:



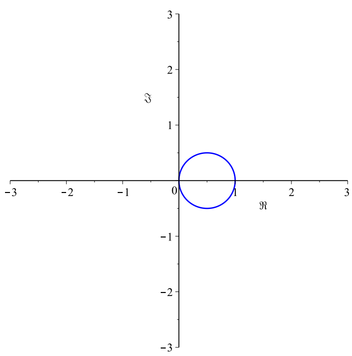
$f_1(M_2)$:



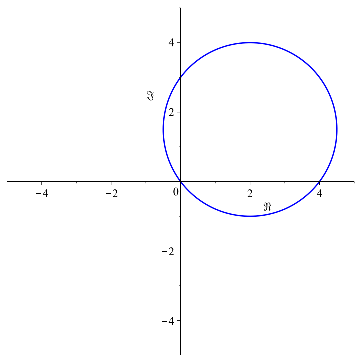
$f_2(M_2)$:



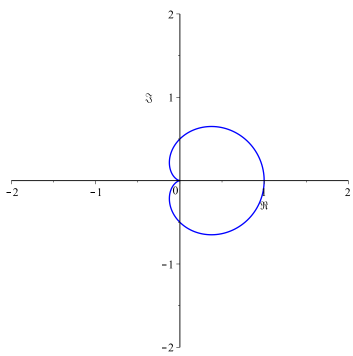
M_3:



$f_1(M_3)$:



$f_2(M_3)$:



Aufgabe H 12. *Komplexe Zahlen*

Bestimmen Sie die folgenden Mengen.

(a) $\left\{n \in \mathbb{Z} \,\middle|\, \mathrm{i}^n \in \mathbb{R}\right\}$

Lösungshinweise hierzu: Für gerade Zahlen $n \in \mathbb{Z}$, d.h. $n = 2k$ für ein $k \in \mathbb{Z}$ gilt $\mathrm{i}^n = \mathrm{i}^{2k} = (-1)^k \in \mathbb{R}$. Für ungerade Zahlen $n \in \mathbb{Z}$, d.h. $n = 2k+1$ für ein $k \in \mathbb{Z}$ gilt $\mathrm{i}^n = \mathrm{i}^{2k+1} = (-1)^k \cdot \mathrm{i} \notin \mathbb{R}$. Insgesamt erhalten wir

$$\left\{n \in \mathbb{Z} \,\middle|\, \mathrm{i}^n \in \mathbb{R}\right\} = 2\mathbb{Z} = \text{ die Menge der geraden ganzen Zahlen.}$$

(b) $\left\{n \in \mathbb{Z} \,\middle|\, \operatorname{Im}((1+\mathrm{i})^n) > 0\right\}$

Lösungshinweise hierzu: Es gilt

$$\operatorname{Im}((1+\mathrm{i})^n) = \operatorname{Im}\left(\left(\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\right)^n\right) = 2^{\frac{n}{2}}\sin(\frac{n\pi}{4}).$$

Also suchen wir alle $n \in \mathbb{Z}$, für die $\sin(\frac{n\pi}{4}) > 0$ ist. Das sind genau jene $n \in \mathbb{Z}$, die beim Teilen durch 8 den Rest 1, 2 oder 3 ergeben. Wir erhalten also:

$$\begin{aligned}&\left\{n \in \mathbb{Z} \,\middle|\, \operatorname{Im}((1+\mathrm{i})^n) > 0\right\} \\ &\qquad = \left\{n \in \mathbb{Z} \,\middle|\, (n = 1+8k) \vee (n = 2+8k) \vee (n = 3+8k), k \in \mathbb{Z}\right\}\end{aligned}$$

(c) $\left\{z \in \mathbb{C} \,\middle|\, z^6 = 1+\mathrm{i}\right\}$

Lösungshinweise hierzu: Wir suchen die Lösungen der Gleichung $z^6 = 1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}\left(\cos(\frac{\pi}{2}) + \mathrm{i}\sin(\frac{\pi}{2})\right)$. Wir berechnen also Betrag und Argument getrennt. Der Betrag der Lösungen ist $\sqrt[6]{\sqrt{2}} = 2^{\frac{1}{12}}$. Für das Argument φ muss gelten, dass $6 \cdot \varphi = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$ ist, für $k \in \{0,1,2,3,4,5\}$ Wir erhalten damit

$$\left\{z \in \mathbb{C} \,\middle|\, z^6 = 1+\mathrm{i}\right\} = \left\{2^{\frac{1}{12}}\left(\cos\left(\frac{\pi + 8\pi k}{24}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi+8\pi k}{24}\right)\right) \,\middle|\, k \in \{0,1,2,3,4,5\}\right\}$$

(d) $\left\{z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \overline{z}^2 = \mathrm{i}z\right\}$

Lösungshinweise hierzu: Sei $z = r(\cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi))$, dann ist $\overline{z} = r(\cos(-\varphi) + \mathrm{i}\sin(-\varphi))$, $\overline{z}^2 = r^2(\cos(-2\varphi) + \mathrm{i}\sin(-2\varphi))$ und $\mathrm{i}z = r(\cos(\varphi + \frac{\pi}{2}) + \mathrm{i}\sin(\varphi + \frac{\pi}{2}))$. Damit erhalten wir

$$r^2(\cos(-2\varphi) + \mathrm{i}\sin(-2\varphi)) = \overline{z}^2 = \mathrm{i}z = r\left(\cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\right).$$

Soll die rechte mit der linken Seite übereinstimmen, so muss gelten $r = r^2$ und (falls $r \neq 0$) $-2\varphi = \varphi + \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ für ein $k \in \mathbb{Z}$. Daraus folgt $r = 0$ oder $r = 1$. Im Fall $r = 1$ vergleichen wir nun die Argumente

$$\begin{aligned} & -2\varphi = \varphi + \frac{\pi}{2} + 2\pi k \\ \Leftrightarrow \qquad & -3\varphi = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \\ \Leftrightarrow \qquad & \varphi = -\frac{\pi + 4k\pi}{6}\end{aligned}$$

Im Intervall $[0; 2\pi)$ liefert das die Lösungen $\varphi_1 = \frac{3\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$, $\varphi_2 = \frac{7\pi}{6}$ und $\varphi_1 = \frac{11\pi}{6}$. Insgesamt erhalten wir

$$\left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \overline{z}^2 = \mathrm{i}z \right\} = \left\{ 0, \mathrm{i}, \cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right), \cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right) \right\}.$$

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 13. *Untervektorraum, Basis, Erzeugendensystem*
Es seien die folgenden Vektoren aus $\mathbb{R}^4$ gegeben.

$$w_1 = (0, -1, 2, 1)\,,\; w_2 = (1, 0, 2, 1)\,,\; w_3 = (1, -1, 4, 2)\,,\; w_4 = (2, 1, 1, 0).$$

(a) Bestimmen Sie eine Basis von $\mathrm{L}\,(w_1, w_2, w_3, w_4)$.

(b) Gibt es ein $v \in \mathbb{R}^4$ so, dass w_1, w_2, w_4, v eine Basis von $\mathbb{R}^4$ ist?

(c) Gibt es ein $v \in \mathbb{R}^4$ so, dass w_1, w_2, w_3, v eine Basis von $\mathbb{R}^4$ ist?

(d) Geben Sie eine Basis von $\mathrm{L}\,(w_1, w_1 + w_2 + w_3, w_2, w_3)$ an.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Der Vektor w_3 ist eine linear Kombination von w_1 und w_2. Über ein lineares Gleichungssystem zeigt man, dass $w_1,\ w_2$ und w_4 linear unabhängig sind. Also bilden $w_1,\ w_2$ und w_4 eine Basis von $L(w_1, w_2, w_3, w_4)$.

(b) Die Vektoren $w_1,\ w_2$ und w_4 sind linear unabhängig, bilden aber noch kein Erzeugendensystem. Für eine Basis werden vier linear unabhängige Vektoren benötigt, also muss v linear unabhängig zu $w_1,\ w_2$ und w_4 sein. Über ein lineares Gleichungssystem zeigt man, dass $w_1,\ w_2,\ w_4$ und beispielsweise $v = (1, 1, 0, 1)$ linear unabhängig sind.

(c) Da bereits w_3 eine linear Kombination aus w_1 und w_2 ist, kann es keine Basis geben, die die Vektoren $w_1,\ w_2,\ w_3$ beinhaltet.

(d) Die Vektoren $w_1 + w_2 + w_3$ und w_3 sind linear abhängig von w_1 und w_2. Also sind die Vektoren w_1 und w_2 bereits eine Basis von $\mathrm{L}\,(w_1, w_1 + w_2 + w_3, w_2, w_3)$.

Aufgabe H 14. *Untervektorräume, Geraden*
Für $t \in \mathbb{R}$ sei $V_t := \left\{ t(1-\lambda) + \mathrm{i}(\lambda+1)(t-1) \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{R} \right\} \subseteqq \mathbb{C}$. Sei $\mathrm{i}V_t := \left\{ \mathrm{i}v \,\middle|\, v \in V_t \right\}$.

(a) Zeichnen Sie V_2 und $\mathrm{i}V_2$.

(b) Berechnen Sie $V_t \cap \mathrm{i}V_t$ für $t \in \mathbb{R}$.

(c) Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist V_t ein Untervektorraum des reellen Vektorraums $\mathbb{C}$?

(d) Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist V_t ein Untervektorraum des komplexen Vektorraums $\mathbb{C}$?

Lösungshinweise hierzu:

(a) Bei den Mengen V_2 und $\mathrm{i}V_2$ handelt es sich um Geraden in der komplexen Ebene. Die Gerade V_2 geht durch die Punkte $2\mathrm{i}$ und 4. Die Gerade $\mathrm{i}V_2$ geht durch die Punkte 2 und $-4\mathrm{i}$.

(b) Der Schnittpunkt erfüllt

$$t(1-\lambda_1)+\mathrm{i}(\lambda_1+1)(t-1)=\mathrm{i}t(1-\lambda_2)-(\lambda_2+1)(t-1)$$

mit $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Vergleicht man Realteil und Imaginärteil, so erhält man das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrcl} -t\,\lambda_1 & +(t-1)\,\lambda_2 & = & 1-2\,t \\ (t-1)\,\lambda_1 & +t\,\lambda_2 & = & 1, \end{array}$$

dessen Lösung

$$\lambda_1 = \frac{2\,t^2-1}{2\,t^2-2\,t+1} \qquad \text{und} \qquad \lambda_2 = -\frac{2\,t^2-4\,t+1}{2\,t^2-2\,t+1}$$

lautet. Damit ergibt sich der Schnittpunkt

$$\frac{4\,\mathrm{i}t^3-2\,t^2-6\,\mathrm{i}t^2+2\,t+2\,\mathrm{i}t}{2\,t^2-2\,t+1}.$$

(c) Überprüft man die Eigenschaft $0 \in V_t$, bleiben nur noch $V_0 = \left\{\mathrm{i}\lambda \in \mathbb{C} \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{R}\right\}$ und $V_1 = \left\{\lambda \in \mathbb{C} \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{R}\right\}$ als Kandidaten übrig.
Seien nun $u, v \in V_0, s \in \mathbb{R}$. Es existieren Faktoren $a, b \in \mathbb{R}$ mit $u = a\mathrm{i}$, $v = b\mathrm{i}$, so dass

$$\begin{aligned} u+v &= (a+b)\mathrm{i} \in V_0, && \text{mit } \lambda = a+b \text{ und} \\ s\,u &= (s\,a)\mathrm{i} \in V_0, && \text{mit } \lambda = s\,a. \end{aligned}$$

Das gleiche Argument geht für V_1.

(d) Im Unterschied zur Teilaufgabe **(c)** dürfen die Faktoren (bisher mit s bezeichnet) jetzt komplex sein.
Wegen der Bedingung $0 \in V_t$ bleiben wieder nur $V_0 = \left\{\mathrm{i}\lambda \in \mathbb{C} \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{R}\right\}$ und $V_1 = \left\{\lambda \in \mathbb{C} \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{R}\right\}$ als Kandidaten übrig.
Bei beiden handelt es sich um keine Untervektorräume. Als Gegenbeispiel wählt man als Faktor $s = \mathrm{i}$. Dann erhält man für $v = \mathrm{i} \in V_0$ den Wert $s\,v = -1 \notin V_0$ und $u = 1 \in V_1$ den Wert $s\,u = \mathrm{i} \notin V_1$.

Aufgabe H 15. *Skalarprodukt*

Sei $V := \left\{p\colon [0,1] \to \mathbb{R}\colon x \mapsto ax^2+bx+c \,\middle|\, a,b,c \in \mathbb{R}\right\}$ der Raum aller Polynome auf $[0,1]$ mit Grad maximal 2. Sei auf V das Skalarprodukt $\langle p \,|\, q \rangle := \int_0^1 p(x)q(x)\,\mathrm{d}x$ für $p, q \in V$ definiert. Seien $p_1, p_2, p_3 \in V$ definiert durch $p_1(x) := x^2+x$, $p_2(x) := x-1$, $p_3(x) := x^2+2x+1$.

(a) Bilden p_1 und p_3 eine Basis für V?

(b) Bestimmen Sie eine Basis von V. Bestimmen Sie eine Basis von $\left\{p \in V \,\middle|\, p(1) = 0\right\}$.

(c) Bestimmen Sie die Skalarprodukte $\langle p_1 \,|\, p_2 \rangle$, $\langle p_1 \,|\, p_1 \rangle$ und $\langle p_2 \,|\, p_2 \rangle$. Entscheiden Sie mittels der Schwarzschen Ungleichung, ob p_1 und p_2 linear abhängig sind.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Die Polynome p_1 und p_3 bilden keine Basis für V. Als Gegenbeispiel gibt es keine Linearkombination um $1 \in V$ zu erzeugen. Wir machen den Ansatz

$$1 = a\,p_1(x) + b\,p_2(x) = a\,x^2 + (a+b)\,x - b.$$

Vergleicht man die konstanten Terme folgt $b = -1$. Aus den Termen erster Ordnung folgt $a = 1$ und damit bleibt immer ein quadratischer Term übrig.

(b) Nach Definition ist $\mathrm{L}\,(x^2, x, 1) = V$. Falls $x^2, x, 1$ linear unabhängig sind bilden sie eine Basis von V. Wir zeigen $a\,x^2 + b\,x + c = 0$ besitzt nur die triviale Lösung. Für $x = 0$ folgt $c = 0$. Einsetzen von $x = 1$ und $x = 1/2$ führt auf das lineare Gleichungssystem $a + b = 0$ und $a/4 + b/2 = 0$. Dessen einzige Lösung lautet $a = 0$ und $b = 0$. Damit ist die lineare Unabhängigkeit gezeigt.

Zur Basis von $\left\{p \in V \;\middle|\; p(1) = 0\right\}$. Wir formen zuerst um:

$$\begin{aligned}
\left\{p \in V \;\middle|\; p(1) = 0\right\} &= \left\{p\colon [0,1] \to \mathbb{R}\colon x \mapsto ax^2 + bx + c \;\middle|\; a + b + c = 0 \text{ und } a, b, c \in \mathbb{R}\right\}\\
&= \left\{p\colon [0,1] \to \mathbb{R}\colon x \mapsto ax^2 + bx - a - b \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R}\right\}\\
&= \left\{p\colon [0,1] \to \mathbb{R}\colon x \mapsto a(x^2 - 1) + b(x - 1) \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R}\right\}\\
&= \mathrm{L}\left((x^2 - 1), (x - 1)\right)
\end{aligned}$$

Die Polynome $x^2 - 1$ und $x - 1$ sind linear unabhängig: Wie zeigen wieder, dass $a(x^2 - 1) + b(x - 1) = 0$ nur die triviale Lösung hat. Für $x = 0$ und $x = 1/2$ ergibt sich das linear Gleichungssystem $-a - b = 0$ und $-3a/4 - b/2 = 0$, dessen einzige Lösung $a = 0$ und $b = 0$ lautet.

(c)

$$\begin{aligned}
\langle p_1 \,|\, p_2 \rangle &= \int_0^1 p_1(x)p_2(x)dx = \int_0^1 (x^2 + x)(x - 1)dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = -\frac{1}{4},\\
\langle p_1 \,|\, p_1 \rangle &= \int_0^1 p_1(x)p_1(x)dx = \int_0^1 (x^2 + x)^2 dx = \frac{31}{30},\\
\langle p_2 \,|\, p_2 \rangle &= \int_0^1 p_2(x)p_2(x)dx = \int_0^1 (x - 1)^2 dx = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Da $\langle p_1 \,|\, p_2 \rangle^2 < \langle p_1 \,|\, p_1 \rangle \langle p_2 \,|\, p_2 \rangle$ gilt (insb. echt kleiner), folgt aus *„2.6.4 Schwarzsche Ungleichung: scharfe Form“* die lineare Unabhängigkeit.

Aufgabe H 16. *Geraden und Ebenen*

Seien $A := (1, -1, 2)$, $B := (1, 0, 2)$, $C := (3, 1, 0)$, $P := (3, 3, 4)$ in $\mathbb{R}^3$ gegeben.

(a) Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung für die Gerade g_1 durch die Punkte A und B.

(b) Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung für die Gerade g_2, die senkrecht auf g_1 steht und durch einen Punkt auf g_1 und den Punkt C verläuft.

(c) Geben Sie eine Parameterdarstellung der Ebene E an, die den Punkt P enthält und parallel zu g_1 und g_2 ist.

(d) Ist das Dreieck mit den Ecken A, B und C stumpfwinklig, d.h. enthält es einen Innenwinkel größer als $\pi/2$?

Lösungshinweise hierzu:

(a) Mittels der Punkte A und B berechnen wir den Vektor $\overrightarrow{AB} = (0, 1, 0)$. Dann lautet die Parameterdarstellung $g_1\colon A + \lambda\,\overrightarrow{AB}$, für $\lambda \in \mathbb{R}$.

(b) Sei D der Schnittpunkt der Geraden g_1 und g_2. Das heißt es gibt ein $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ mit $D = A + \lambda_1\overrightarrow{AB}$ und zwar $D = (1, -1 + \lambda_1, 2)$. Der Parameter λ_1 wird nun so bestimmt, dass $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{DC}$ senkrecht sind. Mittels des Skalarproduktes zeigt man, dass $\lambda_1 = 2$ ist. Das ergibt $D = (1, 1, 2)$ und $\overrightarrow{DC} = (2, 0, 2)$ und damit ist die Gerade $g_2 : D + \mu\overrightarrow{DC}$ für $\mu \in \mathbb{R}$.

(c) Die Ebene E soll also parallel zu die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{DC}$ sein und den Punkt P enthalten. Das heißt $E\colon P + \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{DC}$ für $\lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$.

(d) Ein stumpfwinkliges Dreieck ABC hat genau einen Innenwinkel mit negativem Kosinus. Also überprüfen wir die Vorzeichen der Skalarprodukte $\left\langle \overrightarrow{AB} \middle| \overrightarrow{AC} \right\rangle$, $\left\langle \overrightarrow{BA} \middle| \overrightarrow{BC} \right\rangle$ und $\left\langle \overrightarrow{CA} \middle| \overrightarrow{CB} \right\rangle$. Man findet, dass $\left\langle \overrightarrow{BA} \middle| \overrightarrow{BC} \right\rangle = -1$. Damit ist das Dreieck stumpfwinklig.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 17. *Matrixmultiplikation*

Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie $(A+B)^2$ und $A^2 + 2AB + B^2$.

Lösungshinweise hierzu: Da die Matrizen A und B unter der Matrixmultiplikation nicht kommutieren ($AB \neq BA$), gilt

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2.$$

Aber man kann einfach berechnen, dass

$$A+B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \qquad AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 3 & -6 \end{pmatrix},$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Somit ergibt sich

$$(A+B)^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & 3 \\ -1 & -3 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 2 & -6 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 4 & 0 & -3 & 7 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -5 & -2 & 5 & -12 \end{pmatrix} = A^2 + 2AB + B^2.$$

(b) Berechnen Sie A^n für alle $n \in \mathbb{N}$.

Lösungshinweise hierzu: Man berechnet aus A,

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Damit kann man weiter machen und bekommt $A^3 = A^2 A = 0$. Somit erhält man für $n > 3$

$$A^n = A^3 A^{n-3} = 0 \cdot A^{n-3} = 0.$$

(c) Berechnen Sie B^n für alle $n \in \mathbb{N}$.

Lösungshinweise hierzu: Aus B errechnet man,

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Durch weiteres aufmultiplizieren von B bekommt man $B^3 = B^2 B = E_4$. Somit ist $B^4 = B^3 B = E_4 B = B$. Daraus ergibt sich folgendes Schema:

$$B^n = \begin{cases} B, & \text{falls } n \text{ geteilt durch } 3 \text{ Rest } 1 \text{ hat,} \\ B^2, & \text{falls } n \text{ geteilt durch } 3 \text{ Rest } 2 \text{ hat,} \\ E_4, & \text{falls } n \text{ geteilt durch } 3 \text{ Rest } 0 \text{ hat.} \end{cases}$$

(d) Bestimmen Sie alle $C \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ mit $C^\intercal C = 0$.

Lösungshinweise hierzu: Für allgemeines C mit Spaltenvektoren v_1, v_2, v_3 und $v_4 \in \mathbb{R}^4$ gilt

$$C^\intercal = \left(\begin{pmatrix} \\ v_1 \\ \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ v_2 \\ \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ v_3 \\ \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ v_4 \\ \\ \end{pmatrix} \right)^\intercal = \begin{pmatrix} (& v_1^\intercal &) \\ (& v_2^\intercal &) \\ (& v_3^\intercal &) \\ (& v_4^\intercal &) \end{pmatrix}.$$

Bildet man nun das Produkt $C^\intercal C$ erkennt man

$$C^\intercal C = \begin{pmatrix} \langle v_1 \,|\, v_1 \rangle & \langle v_1 \,|\, v_2 \rangle & \langle v_1 \,|\, v_3 \rangle & \langle v_1 \,|\, v_4 \rangle \\ \langle v_2 \,|\, v_1 \rangle & \langle v_2 \,|\, v_2 \rangle & \langle v_2 \,|\, v_3 \rangle & \langle v_2 \,|\, v_4 \rangle \\ \langle v_3 \,|\, v_1 \rangle & \langle v_3 \,|\, v_2 \rangle & \langle v_3 \,|\, v_3 \rangle & \langle v_3 \,|\, v_4 \rangle \\ \langle v_4 \,|\, v_1 \rangle & \langle v_4 \,|\, v_2 \rangle & \langle v_4 \,|\, v_3 \rangle & \langle v_4 \,|\, v_4 \rangle \end{pmatrix}.$$

Soll dieses Produkt nun gleich der Nullmatrix sein, so muss jedes Skalarprodukt gleich Null sein. Insbesondere natürlich dann auch die Diagonaleinträge der Matrix, also $\langle v_k \,|\, v_k \rangle = 0$ für $k = 1, 2, 3, 4$. Dies kann allerdings nur dann sein, wenn bereits $v_k = 0$ für $k = 1, 2, 3, 4$. Also kann die einzige Lösung von $C^\intercal C = 0$ nur $C = 0$ sein.

Aufgabe H 18. *Hessesche Normalform*

Es seien der Punkt $P = (3, 0, 4)$ und die Gerade $g = (2, 0, -5) + \mathbb{R}(1, 1, 0)$ gegeben.

(a) Bestimmen Sie die Hessesche Normalform der Ebene durch P und g.

Lösungshinweise hierzu: Da P nicht auf g liegt, ist die Ebene welche sowohl P als auch g enhält eindeutig gegeben. Man findet sie, indem man zunächst den Vektor vom Aufpunkt der Geraden zum Punkt P bestimmen. Dieser ist

$$\begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\0\\-5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\9\end{pmatrix}.$$

Zusammen mit dem Richtungsvektor der Geraden spannt dieser Vektor nun die gesuchte Ebene auf. Um die Hessesche Normalform dieser Ebene zu bestimmen, sucht man nun einen Normalenvektor der Ebene. Also insbesondere einen Vektor der orthogonal auf den beiden aufspannenden Vektoren steht. Dazu berechnet man das Kreuzprodukt der beiden Vektoren

$$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\0\\9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9\\-9\\-1\end{pmatrix}.$$

Daraus ergibt sich zunächst die Ebenengleichung $9x - 9y - z = d$, in welche man den Aufpunkt von g einsetzen kann, um den Abstand d zu bestimmen. Dieser ist $d = 9 \cdot 2 - 9 \cdot 0 - 1 \cdot (-5) = 23$. Damit ist $d > 0$ und man muss als letzten Schritt nur noch Normieren. Dabei ist $|(9, -9, -1)^\intercal| = \sqrt{163}$ und somit die Hessesche Normalform der gesuchten Ebene

$$\frac{9}{\sqrt{163}} \cdot x - \frac{9}{\sqrt{163}} \cdot y - \frac{1}{\sqrt{163}} \cdot z = \frac{23}{\sqrt{163}}.$$

(b) Bestimmen Sie die Hessesche Normalform der Ebene durch P senkrecht zu g.

Lösungshinweise hierzu: Da die gesuchte Ebene senkrecht zu g liegt, ist der normierte Richtungsvektor von g ein Normalenvektor dieser Ebene. Dadurch ergibt sich, mit $|(1, 1, 0)^\intercal| = \sqrt{2}$, zunächst

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot y = d.$$

Nun soll die Ebene den Punkt P enhalten. Dadurch ergibt sich $d = \frac{3}{\sqrt{2}} > 0$ durch Einsetzen von P in die obige Gleichung. Damit ist die Hessesche Normalform der gesuchten Ebene

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot y = \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

(c) Bestimmen Sie den Punkt Q auf g mit $\overrightarrow{PQ}$ senkrecht zu g.

Lösungshinweise hierzu: Die Ebene aus Aufgabenteil (b) ist die Ebene, welche senkrecht zu g steht und P enthält. Daraus ergibt sich, dass $\overrightarrow{PQ}$ in dieser Ebene liegt und der Punkt Q der Schnittpunkt dieser Ebene mit g ist. Um diesen zu berechnen, setzt man die Geradengleichung

$$g : \begin{pmatrix}2\\0\\-5\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2+t\\t\\-5\end{pmatrix}$$

mit $t \in \mathbb{R}$ in die Hessesche Normalform aus Aufgabenteil (b) ein und erhält

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (2+t) + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot t = \frac{3}{\sqrt{2}} \Longleftrightarrow 2 + 2t = 3 \Longleftrightarrow t = \frac{1}{2}.$$

Somit ist

$$Q = (2, 0, -5) + \frac{1}{2}(1, 1, 0) = \left(2 + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -5\right) = \left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, -5\right).$$

(d) Bestimmen Sie die Hessesche Normalform der Ebene durch g mit maximalem Abstand zu P.

Lösungshinweise hierzu: Da die gesuchte Ebene die Gerade g enhalten soll, muss der maximale Abstand der Ebene zu P durch den Abstand von P zu g nach oben hin beschränkt sein. Dieser Abstand ist gegeben durch die Länge des Vektors $\overrightarrow{PQ}$. Stellt man sich nun eine Kugel mit einem Radius $|\overrightarrow{PQ}|$ um den Punkt P vor, so wird klar, dass die gesuchte Ebene gerade die ist, welche zum einen g entält und zum anderen senktrecht zu $\overrightarrow{PQ}$ liegt. Damit liegt diese Ebene nämlich genau tangential zur gegebenen Kugel und berührt diese genau im Punkt Q. Insbesondere schneiden alle anderen Ebenen durch g diese Kugel, woran man sieht, dass man damit tatsächlich die Ebene mit maximalen Abstand gefunden hat.

Nun weiß man, dass $\overrightarrow{PQ}$ normiert ein Normalenvektor der gesuchten Ebene ist. Deswegen ist der nächste Schritt, diesen zu bestimmen. Es ist

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -9 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -18 \end{pmatrix} \qquad \text{und}$$

$$|\overrightarrow{PQ}| = \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -18 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2}\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-18)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{326}.$$

Daraus ergibt sich die Ebenengleichung

$$-\frac{1}{\sqrt{326}} \cdot x + \frac{1}{\sqrt{326}} \cdot y - \frac{18}{\sqrt{326}} \cdot z = d.$$

Setzt man nun den Aufpunkt der Gerade g in diese Gleichung ein, so erhält man

$$d = \frac{1}{\sqrt{326}}(-1 \cdot 2 + 1 \cdot 0 - 18 \cdot (-5)) = \frac{88}{\sqrt{326}} > 0.$$

Somit ergibt sich die gesuchte Hessesche Normalform als

$$-\frac{1}{\sqrt{326}} \cdot x + \frac{1}{\sqrt{326}} \cdot y - \frac{18}{\sqrt{326}} \cdot z = \frac{88}{\sqrt{326}}.$$

Aufgabe H 19. *Hessesche Normalform und Orthonormalbasis*

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei $E_\alpha := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha x = 1 - y - z\}$.

(a) Geben Sie eine Parameterdarstellung der Ebene E_α an.

Lösungshinweise hierzu: Man sucht zuerst drei Punkte in $\mathbb{R}^3$, die die Gleichung $\alpha x = 1 - y - z \iff \alpha x + y + z = 1$ erfüllen und geeigneter Weise nicht auf einer Geraden liegen. Dazu eignen sich $A = (0,1,0)$, $B = (0,0,1)$ und $C = (1,1,-\alpha)$. Man wählt nun einen Aufpunkt, z.B. A, und bestimmt die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$. Daraus ergibt sich eine Parameterdarstellung von E_α als

$$\overrightarrow{OA} + s \cdot \overrightarrow{AB} + t \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\alpha \end{pmatrix}$$

für $s, t \in \mathbb{R}$.

(b) Bestimmen Sie die Hessesche Normalform von E_α.

Lösungshinweise hierzu: Der Definition der Menge E_α entnimmt man schon die Gleichung $\alpha x = 1 - y - z$. Diese lässt sich umstellen zu $\alpha x + y + z = 1$, was fast schon der Hesseschen Normalform entspricht. Es bleibt nur noch den Vektor $(\alpha, 1, 1)^\mathsf{T}$ zu normieren. Es gilt

$$\left| \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{\alpha^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{\alpha^2 + 2}$$

und damit ist die Hessesche Normalform von E_α gegeben durch

$$\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+2}} \cdot x + \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+2}} \cdot y + \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+2}} \cdot z = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+2}}.$$

(c) Bestimmen Sie den Abstand von E_α zum Punkt $P = (1, -2, 1)$.

Lösungshinweise hierzu: Man bestimmt den Abstand $d(E_\alpha, Q)$ von der Ebene E_α zu einem beliebigen Punkt $Q = (q_1, q_2, q_3)$, mit Hilfe der Hesseschen Normalform aus Aufgabenteil (b), durch

$$d(E_\alpha, Q) = \left| \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+2}} \cdot q_1 + \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+2}} \cdot q_2 + \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+2}} \cdot q_3 - \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+2}} \right|.$$

Dadurch errechnet sich der gesuchte Abstand zu

$$d(E_\alpha, P) = \left| \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+2}} \cdot 1 + \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+2}} \cdot (-2) + \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+2}} \cdot 1 - \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+2}} \right| = \frac{|\alpha - 2|}{\sqrt{\alpha^2+2}}.$$

Im speziellen gilt, dass für $\alpha = 2$ der Abstand $d(E_2, P) = 0$ wird. Tatsächlich sieht man durch Einsetzen, dass der Punkt P in der Ebene E_2 liegt.

(d) Ergänzen Sie einen Normalenvektor von E_α zu einer Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$.

Lösungshinweise hierzu: Aus der Hesseschen Normalform in Aufgabenteil (b) erhält man bereits einen Normalenvektor als

$$n = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+2}} \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Damit ist ein normierter orthogonaler Vektor zu diesem z.B.

$$v = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Nun fehlt zu einer Orthonormalbasis nur noch das Kreuzprodukt aus n und v, denn aus dem Skript (2.10.3 (5.)) weiß man, dass n, v und $n \times v$ ein Rechtssystem ist und damit im speziellen eine Orthonormalbasis. Es ist noch zu berechnen

$$n \times v = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+2}} \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2\alpha^2+4}} \begin{pmatrix} -2 \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}.$$

Aufgabe H 20. *Kreuzprodukt*

Gegeben seien $u = (1,0,1)^\intercal$, $v = (1,1,0)^\intercal$ und $w = (1,2,-1)^\intercal$.

(a) Bestimmen Sie $|u|$ und $|v|$. Bestimmen Sie die Fläche des Parallelogramms, das von den Vektoren u und v aufgespannt wird. Bestimmen Sie unter Verwendung dieser Fläche den von u und v eingeschlossenen Winkel.

Lösungshinweise hierzu: Es ist $|u| = \sqrt{1^2+0^2+1^2} = \sqrt{2}$, sowie auch $|v| = \sqrt{1^2+1^2+0^2} = \sqrt{2}$. Die Fläche A des Parallelogramms, welches von u und v aufgespannt wird, ergibt sich nach 2.10.3 (4.) im Skript als

$$A = |u \times v| = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-1)^2+1^2+1^2} = \sqrt{3}.$$

Den Winkel α zwischen den beiden Vektoren erhält man nun aus der Beziehung $A = |u \times v| = |u||v|\sin(\alpha)$. Mit den bereits berechneten Werten ergibt sich

$$\sqrt{3} = (\sqrt{2})^2 \sin(\alpha) = 2\sin(\alpha) \iff \sin(\alpha) = \frac{1}{2}\sqrt{3} \iff \alpha = \frac{\pi}{3}.$$

Wobei man in der letzten Äquivalenzumformung benutzt, dass $\langle u \,|\, v \rangle = 1 > 0$, und somit nach 2.9.1 der Winkel kleiner als $\frac{\pi}{2}$ sein muss.

(b) Bestimmen Sie $\left\{b \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, u \times b = w\right\}$.

Lösungshinweise hierzu: Ein allgemeines b aus $\mathbb{R}^3$ sei

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Soll dieses die Gleichung $u \times b = w$ erfüllen, so ergibt sich aus

$$u \times b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_2 \\ b_1 - b_3 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcrcrcr} & - & b_2 & & & = & 1 \\ b_1 & & & - & b_3 & = & 2 \\ & & b_2 & & & = & -1 \end{array}$$

Dieses kann man lösen, indem man z.B. $b_3 = t$ setzt für ein beliebiges $t \in \mathbb{R}$. Daraus ergeben sich $b_1 = 2 + 1 \cdot t$, $b_2 = -1 + 0 \cdot t$ und $b_3 = 0 + 1 \cdot t$ und die gesuchte Lösungsmenge ist

$$\left\{b \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, u \times b = w\right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

(c) Bestimmen Sie $\left\{b \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, u \times b = v\right\}$ unter Verwendung von (a).

Lösungshinweise hierzu: Aus Aufgabenteil (a) weiß man, dass der Winkel zwischen u und v kein rechter Winkel ist. Damit kann es kein solches b geben, welches die Gleichung $u \times b = v$ erfüllt. Denn gäbe es ein solches, so wüsste man aus den Eigenschaften des Kreuzprodukts, dass v dann senkrecht auf sowohl b, als auch u stehen müsste. Dies widerspricht aber der Tatsache aus Aufgabenteil (a), dass der Winkel zwischen u und v kein rechter Winkel ist. Somit ist

$$\left\{b \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, u \times b = v\right\} = \emptyset.$$

(d) Berechnen Sie $(u \times v) \times w$ und $u \times (v \times w)$.

Lösungshinweise hierzu: Es ist

$$(u \times v) \times w = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{und}$$

$$u \times (v \times w) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Insbesondere sieht man $(u \times v) \times w \neq u \times (v \times w)$.

L. Allerhand
A. Armiti, J. Hörner
A. Kerschl, M. Werth
C. Winkel, C. Zeiler

6. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 1

M. Künzer
M. Stroppel

Wintersemester 2014/15

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 21. *Lineare Gleichungssysteme*

Entscheiden Sie ob die Mengen

$$M_1 := \{(25,-10,4,-3)\} \quad M_2 := (-1,0,2,0)+\mathbb{R}\,(0,1,0,1)$$
$$M_3 := \mathbb{R}\,(-1,1,1,-1) \qquad M_4 := \{(-3+t,4-2t,t,0), t\in\mathbb{R}\}$$

in der Lösungsmenge des Gleichungsystems

$$\begin{aligned} 1x_1+2x_2+3x_3+4x_4 &= 5\\ 3x_1+2x_2+1x_3 &= -1\end{aligned}$$

liegen. Bestimmen Sie die Lösungsmenge. Ist sie ein affiner Teilraum von $\mathbb{R}^4$? Ist sie ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^4$?

Lösungshinweise hierzu:

- $x := (25,-10,4,-3)$ liegt nicht in der Lösungsmenge, weil die zweite Gleichung nicht erfüllt ist. Es gilt nämlich:

  $$3\cdot 25+2\cdot(-10)+3\cdot 4 = 67 \neq -1.$$

  M_1 liegt also nicht in der Lösungsmenge des angegebenen Gleichungssystems.
- Die Menge M_2 liegt nicht in der Lösungsmenge des Gleichungsystems. Der Punkt $(-1,0,2,0)$ erfüllt zwar beide Gleichungen, aber $(0,1,0,1)$ ist kein Basisvektor des zugehörigen homogenen Gleichungssystems (z.B. ist $0+2+0+4=6\neq 0$), so dass also kein anderer Punkt aus M_2 das System löst.
- Die Menge M_3 liegt nicht in der Lösungsmenge des Gleichungsystems. $(-1,1,1,-1)$ ist zwar ein Basisvektor des zugehörigen homogenen Gleichungssystems ($-1+2+3-4=0, -3+2+1=0$), aber $(0,0,0,0)$ ist keine spezielle Lösung des inhomogenen Systems (das kann der Ursprung nie sein) und daher ist M_3 nicht Teil der Lösungsmenge.
- Die Menge M_4 liegt in der Lösungsmenge des Gleichungssystems, da

  $$\begin{aligned}(-3+t)+2(4-2t)+3t+4\cdot 0 &= -3+t+8-4t+3t = -3+8 = 5\\ 3(-3+t)+2(4-2t)+t &= -9+3t+8-4t+t = -9+8 = -1\end{aligned}$$

  unabhängig von der Wahl von t gilt.
- Das Gleichungssystem hat 2 unabhängige Gleichungen und 4 Unbekannte. Es gibt also $4-2=2$ linear unabhängige Vektoren, die die zusammen mit einer speziellen Lösung die Lösungsmenge bestimmen. Aus M_4 kann man die spezielle Lösung $(-3,4,0,0)$ und den Basisvektor $(1,-2,1,0)^\intercal$ ablesen. Und da M_3 das homogene System löst

hat man mit $(-1,1,1,-1)^\mathsf{T}$ einen weiteren Vektor. Dieser ist linear unabhängig vom ersten und somit ist die Lösungsmenge:

$$\left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

Diese Menge ist ein affiner Teilraum des $\mathbb{R}^4$ aber kein Untervektorraum, da 0 nicht enthalten ist.

Aufgabe H 22. *Lineares Gleichungssystem*

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ betrachten wir das folgende reelle lineare Gleichungssystem.

$$S(\alpha) : \left\{ \begin{array}{rcr} x_1 + x_2 - 2x_3 + 4x_4 + 11x_5 & = & 13 \\ -4x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 - 2x_5 & = & -81 \\ -2x_1 + x_2 - 2x_4 - 4x_5 & = & -39 \\ x_2 - 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 & = & -7 \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 2x_5 & = & \alpha \end{array} \right.$$

(a) Erstellen Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix für $S(26)$. Bringen Sie diese mittels Algorithmus 3.7.3 in die in Satz 3.7.2 angegebene Form.

(b) Bestimmen Sie eine spezielle Lösung von $S(26)$. Bestimmen Sie eine Basis des Lösungsraums des zugehörigen homogenen linearen Gleichungssystems $S(26)_H$.

(c) Geben Sie die Lösungsmenge von $S(26)$ an. Verwenden Sie dazu (b).

(d) Welche Lösungsmengen ergeben sich für die anderen Werte von α?

Lösungshinweise hierzu:

(a) Die erweiterte Koeffizientenmatrix für $S(26)$ ist

$$\left[\begin{array}{rrrrr||r} 1 & 1 & -2 & 4 & 11 & 13 \\ -4 & 3 & -1 & -2 & -2 & -81 \\ -2 & 1 & 0 & -2 & -4 & -39 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 6 & -7 \\ 2 & -2 & -3 & 0 & -2 & 26 \end{array} \right].$$

Addieren wir das vierfache der ersten Zeile zur zweiten, das doppelte der ersten zur dritten und subtrahieren wir das doppelte der ersten Zeile von der fünften, so erhalten wir

$$
\begin{array}{r}
\\ Z_2 + 4\,Z_1: \\ Z_3 + 2\,Z_1: \\ \\ Z_5 - 2\,Z_1:
\end{array}
\left[\begin{array}{rrrrr||r}
1 & 1 & -2 & 4 & 11 & 13 \\
0 & 7 & -9 & 14 & 42 & -29 \\
0 & 3 & -4 & 6 & 18 & -13 \\
0 & 1 & -2 & 2 & 6 & -7 \\
0 & -4 & 1 & -8 & -24 & 0
\end{array}\right]
$$

$$
\begin{array}{r}
\\ Z_2 \leftrightarrow Z_4: \\ \\ Z_2 \leftrightarrow Z_4: \\ \\
\end{array}
\left[\begin{array}{rrrrr||r}
1 & 1 & -2 & 4 & 11 & 13 \\
0 & 1 & -2 & 2 & 6 & -7 \\
0 & 3 & -4 & 6 & 18 & -13 \\
0 & 7 & -9 & 14 & 42 & -29 \\
0 & -4 & 1 & -8 & -24 & 0
\end{array}\right]
$$

$$
\begin{array}{r}
\\ \\ Z_3 - 3\,Z_2: \\ Z_4 - 7\,Z_2: \\ Z_5 + 4\,Z_2:
\end{array}
\left[\begin{array}{rrrrr||r}
1 & 1 & -2 & 4 & 11 & 13 \\
0 & 1 & -2 & 2 & 6 & -7 \\
0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 8 \\
0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 20 \\
0 & 0 & -7 & 0 & 0 & -28
\end{array}\right]
$$

$$
\begin{array}{r}
\\ \\ \frac{1}{2}\,Z_3: \\ \\ \\
\end{array}
\left[\begin{array}{rrrrr||r}
1 & 1 & -2 & 4 & 11 & 13 \\
0 & 1 & -2 & 2 & 6 & -7 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\
0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 20 \\
0 & 0 & -7 & 0 & 0 & -28
\end{array}\right]
$$

$$
\begin{array}{r}
\\ \\ \\ Z_4 - 5\,Z_3: \\ Z_5 + 7\,Z_3:
\end{array}
\left[\begin{array}{rrrrr||r}
1 & 1 & -2 & 4 & 11 & 13 \\
0 & 1 & -2 & 2 & 6 & -7 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]
$$

$$
\begin{array}{r}
Z_1 + 2\,Z_3: \\ Z_2 + 2\,Z_3: \\ \\ \\ \\
\end{array}
\left[\begin{array}{rrrrr||r}
1 & 1 & 0 & 4 & 11 & 21 \\
0 & 1 & 0 & 2 & 6 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]
$$

$$
\begin{array}{r}
Z_1 - 1\,Z_2: \\ \\ \\ \\ \\
\end{array}
\left[\begin{array}{rrrrr||r}
1 & 0 & 0 & 2 & 5 & 20 \\
0 & 1 & 0 & 2 & 6 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]
$$

(b) Eine spezielle Lösung von S ist damit

$$\begin{pmatrix} 20 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Koeffizientenmatrix des homogenen Gleichungssystems ist

$$\left[\begin{array}{ccccc||c} 1 & 0 & 0 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Eine Basis der Lösungsmenge des homogenen Gleichungssystems ist also nach Satz 3.7.6

$$B\colon \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(c) Die Lösungsmenge des Gleichungssystems ist also

$$\left\{ \begin{pmatrix} 20 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -5 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

(d) Führen wir die Umformungsschritte wie oben durch, so erhalten wir als fünfte Zeile:

$$\begin{array}{ccccc||c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha - 26 \end{array}$$

Das heißt, das Gleichungssystem für $\alpha \neq 26$ keine Lösung besitzt. Die Lösungsmenge ist also die leere Menge.

Aufgabe H 23. *Matrizen und lineare Gleichungssysteme*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

(a) Die Menge der Matrizen A, welche

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

erfüllen, enthält mehr als 2 Elemente.

Lösungshinweise hierzu: wahr. Die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

erfüllt die Bedingungen. Da die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

die Beziehungen

$$B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{und} \quad B \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

erfüllt, gibt es sogar wesentlich mehr als zwei Matrizen, nämlich

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

(b) Es existiert eine Matrix A mit $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $A \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Lösungshinweise hierzu: falsch. Aufgrund der Linearität muss

$$A \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gelten, es ist aber

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Sei $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}$. Sei $b \in \mathbb{R}^3$. Wenn $\left\{ x \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, Ax = b \right\} = \mathbb{R}^2$ ist, dann gilt $A = \mathbf{0}$ und $b = \mathbf{0}$.

Lösungshinweise hierzu: wahr. Für $x = (0,0)^\intercal$ ist $Ax = (0,0,0)^\intercal = b$. Des weiteren ergibt dann $A(1,0)^\intercal = b = 0$, dass die erste Spalte von A nur Nullen enthält und $A(0,1)^\intercal = b = 0$ das entsprechende für die zweite Spalte.

(d) Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n} \setminus \{\mathbf{0}\}$. Ist $m > n$, dann ist $\dim \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, Ax = 0 \right\} = 0$.

Lösungshinweise hierzu: falsch. z.B. hat

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

in $(0,1)^\intercal$ einen Basisvektor des Lösungsraums und dieser hat damit eine Dimension größer 0.

(e) Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n} \smallsetminus \{\mathbf{0}\}$. Ist $m < n$, dann ist $\dim \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, Ax = 0 \right\} > 0$.

Lösungshinweise hierzu: wahr. Nach der Gauß-Elimination hat die Matrix C mindesetns $n - m$ Spalten und somit der Lösungsraum des homogenen Systems eine Dimension $\geqq n - m > 0$.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 24. *Einschränkungen und Matrixbeschreibungen*

Sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \colon x \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} x$. Sei $B : (1,1,0)^\intercal, (0,1,1)^\intercal$. Sei $U := \mathrm{L}(B)$.

(a) Weisen Sie nach, dass auch $C : (0,1,1)^\intercal, (1,2,1)^\intercal$ eine Basis von U ist.

(b) Weisen Sie nach, dass $f(U) \subseteqq U$ ist.

(c) Sei $g\colon U \to U \colon x \mapsto f(x)$ die Einschränkung von f auf U.
Bestimmen Sie die Matrizen ${}_Bg_B$, ${}_Bg_C$ und ${}_B(g \circ g \circ g)_C$.

(d) Ist g bijektiv?

Lösungshinweise hierzu:

(a) Seien $b_1 = (1,1,0)^\intercal$, $b_2 = (0,1,1)^\intercal$, $c_1 = (0,1,1)^\intercal$ und $c_2 = (1,2,1)^\intercal$. Die Elemente c_1 und c_2 sind offensichtlich linear unabhängig. Weiterhin gilt, dass $c_2 - c_1 = b_1$ ist. Damit erhält man $\mathrm{L}(c_1, c_2) = \mathrm{L}(c_2 - c_1, c_1) = \mathrm{L}(b_1, b_2) = \mathrm{L}(B)$ und hat nachgewiesen, dass auch C eine Basis von U ist.

(b) Da B eine Basis von U ist, und

$$f(b_1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 3b_1 + b_2 \in U,$$

$$f(b_2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3b_2 \in U,$$

gilt $f(U) \subseteqq U$.

(c) Nach Satz **3.8.6** gilt

$$\begin{aligned} {}_Bg_B &= \begin{pmatrix} {}_Bg\,(b_1) & {}_Bg\,(b_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} {}_Bf\,(b_1) & {}_Bf\,(b_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} {}_B(3b_1 + b_2) & {}_B(3b_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Mit

$$f(c_2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} = c_1 + 3c_2 = 3b_1 + 4b_2 \in U,$$

gilt nach Satz **3.8.6**

$$\begin{aligned}
{}_Bg_C &= \begin{pmatrix} {}_Bg\left(c_1\right) & {}_Bg\left(c_2\right)\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} {}_Bf\left(c_1\right) & {}_Bf\left(c_2\right)\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} {}_B(3c_1) & {}_B(c_1+3c_2)\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} {}_B(3b_2) & {}_B(3b_1+4b_2)\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Zur Bestimmung von ${}_B(g\circ g\circ g)_C$ benutzt man ${}_B(g\circ g\circ g)_C = {}_Bg_B\,{}_Bg_B\,{}_Bg_C$ gemäß Satz **3.8.12**. Somit ergibt sich dann

$${}_B(g\circ g\circ g)_C = {}_Bg_B\,{}_Bg_B\,{}_Bg_C = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 27 \\ 27 & 54 \end{pmatrix}.$$

(d) Mit den Überlegungen aus Aufgabenteil **(b)** folgt sofort, dass $\mathrm{L}\left(g(b_1), g(b_2)\right) = U$, d. h. insbesondere $\mathrm{Bild}\left(g\right) = U$ und damit die Surjektivität von g. Die Injektivität von g erhält man leicht, indem man die zugehörige Matrixbeschreibung von g, z. B.

$${}_Bg_B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},$$

untersucht. Die Matrix ${}_Bg_B$ hat den Rang 2 und damit gilt mit der Dimensionsformel

$$\begin{aligned}
\dim U &= \dim \mathrm{Kern}\left(g\right) + \dim \mathrm{Bild}\left(g\right) \\
2 &= \dim \mathrm{Kern}\left(g\right) + 2.
\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass $\dim \mathrm{Kern}\left(g\right) = 0$ und somit die Injektivität und Bijektivität von g.

Aufgabe H 25. *Polynome und Matrixbeschreibungen*
Es sei der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad kleiner oder gleich 3 gegeben durch

$$\mathrm{Pol}_3\,\mathbb{R} = \left\{ p\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R} \;\middle|\; p(X) = \sum_{j=0}^{3} a_j X^j,\ a_j\in\mathbb{R}\right\}.$$

(a) Prüfen Sie, dass $B: 1,\ X,\ \frac{1}{2}(3X^2-1),\ \frac{1}{2}(5X^3-3X)$ eine Basis von $\mathrm{Pol}_3\,\mathbb{R}$ ist.

(b) Es sei $d\colon \mathrm{Pol}_3\,\mathbb{R}\to\mathrm{Pol}_3\,\mathbb{R}\colon p(X)\mapsto p(1)+p'(X)$. Geben Sie die Matrix ${}_Bd_B$ an.

(c) Bestimmen Sie $d\circ d$. Berechnen Sie ${}_B(d\circ d)_B$. Berechnen Sie $({}_Bd_B)^2$.

(d) Bestimmen Sie den Kern der Abbildung $\delta\colon \mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4\colon v\mapsto {}_Bd_B\,v$. Bestimmen Sie die Dimension des Bildes von δ.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Nach **3.8.13** ist $\operatorname{Pol}_3 \mathbb{R}$ ein Vektorraum der Dimension 4, eine Basis hat also genau 4 Elemente. Es ist daher zu prüfen, ob die vier gegeben Polynome linear unabhängig sind.

$$\begin{aligned}\forall X \in \mathbb{R}: \quad 0 &\stackrel{!}{=} \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot X + \lambda_3 \cdot \frac{1}{2}(3X^2 - 1) + \lambda_4 \cdot \frac{1}{2}(5X^3 - 3X) \\ &= \lambda_1 - \frac{\lambda_3}{2} + (\lambda_2 - \frac{3}{2}\lambda_4)X + \frac{3}{2}\lambda_3 X^2 + \frac{5}{2}\lambda_4 X^3\end{aligned}$$

Mit Koeffizientenvergleich erhält man $\lambda_4 = 0$, denn es steht $0 \cdot X^3$ auf der linken Seite. Somit folgt $\lambda_3 = 0$, also $\lambda_1 = 0$ und schließlich $\lambda_2 = 0$. Es gibt nur die triviale Kombination der Null, es sind also die Polynome linear unabhängig. Es handelt sich also um eine Basis.

(b) Ein Polynom $p \in \operatorname{Pol}_3 \mathbb{R}$ habe nun die folgende Darstellung

$$\begin{aligned}p(X) &= a \cdot 1 + b \cdot X + c \cdot \frac{1}{2}(3X^2 - 1) + d \cdot \frac{1}{2}(5X^3 - 3X) \\ &= a - \frac{c}{2} + (b - \frac{3}{2}d)X + \frac{3}{2}cX^2 + \frac{5}{2}dX^3\end{aligned}$$

mit der Koordinatendarstellung bzgl. der Basis B

$$_B p = (a, b, c, d).$$

Auswerten des Polynoms p in 1 ergibt

$$p(1) = a \cdot 1 + b \cdot 1 + c \cdot 1 + d \cdot 1$$

mit der Koordinatendarstellung bzgl. der Basis B

$$_B p(1) = (a + b + c + d, 0, 0, 0).$$

Ableiten von p ergibt

$$\begin{aligned}p'(X) &= b + c \cdot 3X + d \cdot \frac{3}{2}(5X^2 - 1) \\ &= b + 3c \cdot X + 5d \cdot \frac{3}{2}X^2 - d \cdot \frac{3}{2} \\ &= b + 3c \cdot X + 5d \cdot \frac{3}{2}X^2 - d \cdot \frac{3}{2} + d \cdot \frac{5}{2} - d \cdot \frac{5}{2} \\ &= b + d + 3c \cdot X + 5d \cdot \frac{1}{2}(3X^2 - 1)\end{aligned}$$

mit der Koordinatendarstellung bzgl. der Basis B

$$_B p' = (b + d, 3c, 5d, 0).$$

Addiert man nun $p(1)$ und $p(X)$, erhält man in der Koordinatendarstellung bzgl. B

$${}_Bp(1) + {}_Bp' = (a+b+c+d, 0, 0, 0) + (b+d, 3c, 5d, 0) = (a+2b+c+2d, 3c, 5d, 0)$$

und somit

$${}_Bp = (a,b,c,d) \mapsto {}_Bd_B \cdot {}_Bp^{\mathsf{T}} = ({}_Bp')^{\mathsf{T}} = (a+2b+c+2d, 3c, 5d, 0)^{\mathsf{T}}.$$

Es ergibt sich also

$${}_Bd_B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Die Bestimmung von $(d \circ d)(p(X)) = d(d(p(X))$ erfolgt durch zweimaliges Ausführen von d. Dazu kann man das Ergebnis aus Aufgabenteil **(b)** als Zwischenresultat zu benutzen

$$d(p(X)) = a + 2b + c + 2d + 3c \cdot X + 5d \cdot \frac{1}{2}(3X^2 - 1) =: \tilde{p}(X).$$

Um $(d \circ d)(p(X))$ zu bekommen, muss man jetzt nur noch d auf $\tilde{p}(X)$ anwenden

$$\begin{aligned} d(\tilde{p}(X)) &= \tilde{p}(1) + \tilde{p}'(X) \\ &= a + 2b + 4c + 7d + 3c + 5d + 5d \cdot 3X \\ &= a + 2b + 7c + 7d + 15d \cdot X. \end{aligned}$$

Wie im Aufgabenteil **(b)** bereits gezeigt, ergibt sich daraus

$${}_B(d \circ d)_B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ein schnellerer Weg zur Bestimmung von ${}_B(d \circ d)_B$ führt über Satz **3.8.12** durch Ausnutzung des Zusammenhangs

$${}_B(d \circ d)_B = {}_Bd_B\, {}_Bd_B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(d) Es ist $\operatorname{Kern}\delta = \{v \in \mathbb{R}^4 \mid \delta(v) = {}_Bd_B\, v = 0\}$. Es ist also das folgende homogene Gleichungssystem zu lösen

$$\left[\begin{array}{cccc||c} 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Durch Umformen erhält man

$$\left[\begin{array}{cccc||c} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

somit ist der Kern gegeben durch

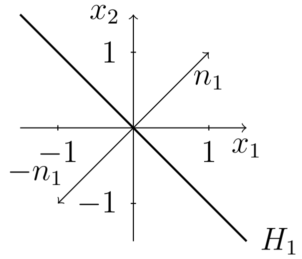
$$\operatorname{Kern}\delta = \left\{ v \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; v = t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Interpretation: Alle Vielfachen des Polynoms $p(X) = -2 + X$ werden unter d auf die 0 abgebildet.
Mit der Dimensionsformel für lineare Abbildungen folgt, dass die Dimension des Bildes 3 ist. Denn: $\dim \text{Urbildraum} = \dim \operatorname{Kern} + \dim \operatorname{Bild}$, also hier $4 = 1 + x$, es folgt $x = 3$.
Interpretation: Durch Ableiten kann es kein Polynom mit Grad drei mehr geben, es kann die Dimension also nicht vier sein. Es gibt aber beliebige Polynome vom Grad echt kleiner drei, also ist die Dimension 3.

Aufgabe H 26. *Spiegelungen*

Seien $H_1 : x_1 + x_2 = 0$ und $H_2 : x_2 + x_3 = 0$ Ebenen in $\mathbb{R}^3$. Sei σ_1 die Spiegelung an H_1. Sei σ_2 die Spiegelung an H_2. Sei E die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$.
Bestimmen Sie ${}_E(\sigma_1)_E$, ${}_E(\sigma_2)_E$, ${}_E(\sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \sigma_1)_E$.
Zeigen Sie, dass $\sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \sigma_1$ die Spiegelung an einer Ebene ist und bestimmen Sie diese.

Lösungshinweise hierzu: Zur Berechnung von ${}_E(\sigma_1)_E$ untersucht man als erstes die Lage der Ebene H_1 im Raum und stellt fest, dass sie sowohl die zweite Winkelhalbierende der x_1x_2-Ebene als auch die komplette x_3-Achse enthält. Somit ist klar, dass die x_3-Koordinate unter der Spiegelung σ_1 invariant ist und die Matrixbeschreibung von σ_1 die folgende Form hat



$$ {}_E(\sigma_1)_E = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wählt man nun einen Punkt $x \in H_1$, z. B. $x = (1, -1, 0)^\intercal$, und den Normalenvektor der Ebene H_1, der mit n_1 bezeichnet sei, so bekommt man folgende Bedingungen

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x = x, \quad \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} n_1 = -n_1.$$

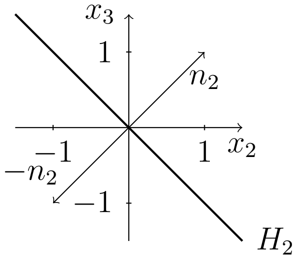
Diese Bedingungen führen auf das Gleichungssystem

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right],$$

welches eindeutig lösbar ist mit $a = d = 0$ und $b = c = -1$. Damit lautet

$${}_E(\sigma_1)_E = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Berechnung von ${}_E(\sigma_2)_E$ verläuft auf gleichem Weg. Der einzige Unterschied besteht in der Lage der Ebene H_2 im Raum. Sie enthält die zweite Winkelhalbierende der x_2x_3-Ebene und die komplette x_1-Achse. Daher folgt, dass die x_1-Koordinate unter der Spiegelung σ_2 invariant ist und die Matrixbeschreibung von σ_2 die folgende Form hat



$${}_E(\sigma_2)_E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}.$$

Wählt man nun wieder einen Punkt $x \in H_2$, z. B. $x = (0, 1, -1)^\top$, und den Normalenvektor der Ebene H_2, der mit n_2 bezeichnet sei, so bekommt man folgende Bedingungen

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x = x, \quad \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} n_1 = -n_1.$$

Diese Bedingungen führen auf das Gleichungssystem

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right],$$

welches eindeutig lösbar ist mit $a = d = 0$ und $b = c = -1$. Damit lautet

$${}_E(\sigma_2)_E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mit Satz **3.8.12** erhält man die Matrixbeschreibung der Komposition $\sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \sigma_1$ als das folgende Produkt der Matrizen ${}_E(\sigma_1)_E$ und ${}_E(\sigma_2)_E$

$$\begin{aligned}\sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \sigma_1 &= {}_E(\sigma_1)_E\,{}_E(\sigma_2)_E\,{}_E(\sigma_1)_E \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: {}_E(\sigma_3)_E\,.\end{aligned}$$

Sei nun die Komposition $\sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \sigma_1$ mit σ_3 und die zugehörige Matrixbeschreibung mit ${}_E(\sigma_3)_E$ bezeichnet. Unter der Annahme, dass σ_3 eine Spiegelung an einer Ebene ist, erhält man die Spiegelebene als Menge aller Punkte $x \in \mathbb{R}^3$, die unter σ_3 auf sich selbst abgebildet werden, d. h. die Gleichung ${}_E(\sigma_3)_E\, x = x$ lösen bzw. das zugehörige homogene Gleichungssystem

$$\left[\begin{array}{rrr||r} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right].$$

Die Spiegelebene ist somit $H_3 : x_1 - x_3 = 0$. Diese Ebene wird z. B. aufgespannt von den beiden Vektoren $(1, 0, -1)^\intercal$ und $(1, 1, -1)^\intercal$. Fügt man noch den Normalenvektor $(1, 0, -1)^\intercal$ hinzu, erhält man eine Basis

$$B : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

des $\mathbb{R}^3$. Betrachtet man jetzt die Bilder dieser Basis unter σ_3, sieht man sofort, dass

$${}_E(\sigma_3)_E \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, {}_E(\sigma_3)_E \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, {}_E(\sigma_3)_E \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Daraus kann man erkennen, dass σ_3 somit bezüglich der Basis B die folgende Darstellung

$${}_B(\sigma_3)_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

hat. Insbesondere bedeutet dies, dass alle Punkte in der Ebene H_3 wieder auf sich selbst und sämtliche zur Ebene orthogonalen Vektoren auf ihr Negatives abgebildet werden. Die Abbildung σ_3 ist somit die Spiegelung an der Ebene H_3.

Aufgabe H 27. *Lineares Gleichungssystem*

Sei das lineare Gleichungssystem $S : Ax = b$ gegeben durch

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad b := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bringen Sie $[A||b]$ mittels Algorithmus 3.7.3 in die in Satz 3.7.2 angegebene Form. Bestimmen Sie den Rang von A.

(b) Bestimmen Sie eine spezielle Lösung von S. Bestimmen Sie eine Basis des Lösungsraums des zugehörigen homogenen linearen Gleichungssystems S_H .

(c) Geben Sie die Lösungsmenge von S an. Verwenden Sie dazu **(b)**.

(d) Finden Sie $c \in \mathbb{R}^4$ so, dass $S' : Ax = c$ keine Lösung hat.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Die erweitere Koeffizientenmatrix $[A||b]$ hat die Form

$$\left[\begin{array}{rrrrrrr||r} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right].$$

Um $[A||b]$ auf die in Satz **3.7.2** angegebene Form zu bringen, zieht man zuerst Zeile 1 von 3 ab, danach Zeile 1 von Zeile 4 und vertauscht dann Spalte 2 und Spalte 3

$$\begin{array}{r} \\ \\ Z_3 - Z_1 : \\ Z_4 - Z_1 : \end{array} \left[\begin{array}{rrrrrrr||r} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} S_2 \leftrightarrow S_3 : \\ \\ \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{rrrrrrr||r} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right].$$

Im nächsten Schritt zieht man nun Zeile 2 von Zeile 3 und von Zeile 4 ab und vertauscht danach Zeile 3 und Zeile 4

$$\begin{array}{r} \\ \\ Z_3 - Z_2 : \\ Z_4 - Z_2 : \end{array} \left[\begin{array}{rrrrrrr||r} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ Z_3 \leftrightarrow Z_4 : \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{rrrrrrr||r} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Nach Vertauschung von Spalte 3 und Spalte 6 erhält man dann

$$S_3 \leftrightarrow S_6: \left[\begin{array}{ccccccc||c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Als letzte Schritte muss man noch Zeile 3 zu Zeile 1 hinzuaddieren und Zeile 3 mit dem Faktor -1 multiplizieren und man bekommt als Ergebnis

$$Z_1 + Z_3: \left[\begin{array}{ccccccc||c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$-1\, Z_3: \left[\begin{array}{ccccccc||c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Den Rang von A kann man nun direkt ablesen, er beträgt 3.

(b) Mit Satz **3.7.6** bekommt eine Lösung nun als

$$(1, 0, 1, 0, 0, 0, 0)^\mathsf{T}.$$

Da bei bei Anwendung des Gauß-Algorithmus Spaltenvertauschungen vorgenommen worden, hat diese Lösung allerdings die Struktur

$$(x_1, x_3, x_6, x_4, x_5, x_2, x_7)^\mathsf{T}.$$

und man erhält eine spezielle Lösung von S damit nach erneuter Vertauschung als

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Koeffizientenmatrix des homogenen Gleichungssystems ist

$$\left[\begin{array}{ccccccc||c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

und somit ergibt sich eine Basis der Lösungsmenge des homogenen Gleichungssystems nach Satz **3.7.6** (und erneuter Vertauschung) als

$$B\colon \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Ebenfalls mit Satz **3.7.6** ergibt sich die Lösungsmenge des Gleichungssystems also als

$$\mathcal{L}(S) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 - \lambda_1 - 2\lambda_3 - \lambda_4 \\ \lambda_3 \\ -2\lambda_3 - \lambda_4 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ 1 - \lambda_4 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda_1, \ldots, \lambda_4 \in \mathbb{R} \right\}.$$

(d) Mit Satz **3.9.8** weiß man, dass S lösbar ist, wenn der Rang von A und der Rang von $[A||b]$ übereinstimmen. Dies bedeutet also, dass S' : $Ax = c$ keine Lösung hat, wenn der Rang A und der Rang von $[A||c]$ nicht übereinstimmen. Sei der Vektor $c \in \mathbb{R}^4$ nun also gegeben als $c = (c_1, c_2, c_3, c_4)^\intercal$. Führt man den Gauß-Algorithmus erneut wie in Aufgabenteil **(a)** aus, bekommt man als Resultat

$$\left[\begin{array}{ccccccc||r} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & c_4 - c_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & c_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & c_1 + c_2 - c_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_3 - c_1 - c_2 \end{array}\right].$$

Setzt man den Vektor c nun z. B. als

$$c = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

so erhält man nach Einsetzen

$$\left[\begin{array}{ccccccc||r} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right],$$

d. h. insbesondere $\operatorname{Rg} A = 3 \neq 4 = \operatorname{Rg}[A||c]$ und somit hat S' keine Lösung.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 28. *Determinante und Inverse*

Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -3 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie P^{-1}. Berechnen Sie $P^{-1}AP$.

Lösungshinweise hierzu: Wir bestimmen P^{-1} über die Lösung eines linearen Gleichungssystems. Wir wollen das System $PX = E_3$ lösen. Wir verwenden dazu den Gauß-Algorithmus:

$$\left[\begin{array}{rrr||rrr} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{rrr||rrr} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{rrr||rrr} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{rrr||rrr} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{rrr||rrr} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{rrr||rrr} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{rrr||rrr} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -3 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 4 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

(b) Bestimmen Sie $\det(A)$, $\det(P)$ und $\det(P^{-1})$. Berechnen Sie $\det(P^{-1}AP)$ und $\det(P^{-1})\det(A)\det(P)$.

Lösungshinweise hierzu: Wir erhalten durch Rechnung

$$\begin{aligned} &\det(A) \\ &= 0\cdot 1\cdot 3 + (-2)\cdot 3\cdot(-1) + (-3)\cdot 1\cdot 2 - 2\cdot 1\cdot(-1) - (-2)\cdot(-3)\cdot 3 - 3\cdot 1\cdot 0 \\ &= -16 \end{aligned}$$

und

$$\det(P) = 1 + 1 = 2.$$

Mithilfe der Multiplikativität der Determinanten erhalten wir

$$\det(P^{-1}) = \det(P)^{-1} = \frac{1}{2}$$

und

$$\det(P^{-1}AP) = \det(P^{-1})\det(A)\det(P) = -16.$$

(c) Bestimmen Sie $(P^{-1}AP)^3 - P^{-1}A^3P$.

Lösungshinweise hierzu:

$$\begin{aligned} (P^{-1}AP)^3 - P^{-1}A^3P &= (P^{-1}AP)(P^{-1}AP)(P^{-1}AP) - P^{-1}A^3P \\ &= P^{-1}AAAP - P^{-1}A^3P = P^{-1}A^3P - P^{-1}A^3P = 0, \end{aligned}$$

wobei 0 hier die 3×3-Nullmatrix bezeichnet.

(d) Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist $tA - P^2$ regulär?

Lösungshinweise hierzu: Wir bestimmen die Determinante

$$\det(tA - P^2) = -4(t-1)(4t^2 + 2t - 1).$$

Die Determinante von $tA - P^2$ ist also gleich null für 1, $\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ und $\frac{-1-\sqrt{5}}{4}$. Da eine Matrix genau dann invertierbar ist, wenn sie regulär ist, erhalten wir, dass $tA - P^2$ regulär ist für $t \in \mathbb{R} \setminus \{1, \frac{-1+\sqrt{5}}{4}, \frac{-1-\sqrt{5}}{4}\}$.

Aufgabe H 29. *Links- und Rechtsinvertierbarkeit*

Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie $\left\{X \in \mathbb{R}^{4\times 2} \;\middle|\; AX = \mathrm{E}_2\right\}$.

Lösungshinweise hierzu: Sei X ein Element dieser Menge, dann muss für die Spaltenvektoren x_1, x_2 von X gelten, dass $Ax_1 = e_1$ und $Ax_2 = e_2$ ist, wobei e_1 und e_2 die Standardbasisvektoren $(1,0)^\intercal$ und $(0,1)^\intercal$ sind. Nun gibt es die Möglichkeit beide linearen Gleichungssysteme einzeln zu lösen, oder gleichzeitig. Will man es gleichzeitig tun, so ergibt sich

$$\left[\begin{array}{cccc||cc} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$Z_2 - Z_1 : \left[\begin{array}{cccc||cc} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$Z_1 + 2\,Z_2 : \left[\begin{array}{cccc||cc} 1 & 2 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$-1\,Z_2 : \left[\begin{array}{cccc||cc} 1 & 2 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

Nun muss man nur noch die zweite und dritte Spalte tauschen und sich erinnern, dies bei der Lösung wieder rückgängig zu machen. Damit erhält man die Lösung mit Zurücktauschung und somit die gesuchte Menge der Rechtsinversen von A als

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

(b) Bestimmen Sie $\left\{Y \in \mathbb{R}^{2\times 4} \;\middle|\; YB = \mathrm{E}_2\right\}$.

Lösungshinweise hierzu: Ähnlich zum Aufgabenteil (a) gilt es hier lineare Gleichungssysteme zu lösen. Allerdings muss man vorher etwas klären. Sei Y eine Matrix aus der gesuchten Menge, so gilt nach Voraussetzung $YB = \mathrm{E}_2$. Diese Gleichung ist äquivalent zur transponierten Version derselbigen. Damit ist

$$(YB)^\intercal = \mathrm{E}_2^\intercal \iff B^\intercal Y^\intercal = \mathrm{E}_2^\intercal = \mathrm{E}_2.$$

Damit haben wir die Suche nach Linksinversen von B durch Transponieren zu einer Suche nach Rechtsinversen von $B^\intercal$ gemacht. Man muss nur beachten am Ende das

Ergebnis wieder zu transponieren, um von den $Y^\intercal$ zu den gesuchten Y zu kommen. Mit dem entstandene lineare Gleichungssystem ergibt sich

$$\left[\begin{array}{rrrr||rr} -2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$Z_2 + Z_1 : \left[\begin{array}{rrrr||rr} -2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$-\tfrac{1}{2}\, Z_1 : \left[\begin{array}{rrrr||rr} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$-1\, Z_2 : \left[\begin{array}{rrrr||rr} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right].$$

Damit erhält man insgesamt die Menge der Linksinversen von B als

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

(c) Bestimmen Sie $\mathrm{Rg}(A)$, $\mathrm{Rg}(B)$, $\mathrm{Rg}(AB)$ und $\mathrm{Rg}(BA)$.

Lösungshinweise hierzu: Da A bzw. B zwei linear unabhängige Zeilen- bzw. Spaltenvektoren haben ist $\mathrm{Rg}(A) = \mathrm{Rg}(B) = 2$. Desweiteren ist

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Eine kurze Rechnung ergibt dann auch $\mathrm{Rg}(AB) = \mathrm{Rg}(BA) = 2$.

(d) Haben A, B, AB oder BA eine Inverse? Wenn ja, bestimmen Sie diese.

Lösungshinweise hierzu: Mit Aufgabenteil (c) kennen wir die Ränge der hier angegebenen Matrizen. Nur $AB = \mathrm{E}_2$ hat vollen Rang und damit ist auch nur diese Matrix invertierbar mit der eindeutigen Inversen E_2. Insbesondere sind B bzw. A Elemente der in Aufgabenteil (a) bzw. (b) gesuchten Mengen.

Aufgabe H 30. *Determinante und Rang*

Für $x \in \mathbb{R}$ sei $A_x := \begin{pmatrix} 2 & 2 & x & 2 \\ x & 2 & 2 & 2 \\ 2 & x & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & x \end{pmatrix}$.

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \det(A_x)$. Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \mathrm{Rg}(A_x)$.

(a) Ist die Abbildung f linear?

(b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt $f(x) = 0$?

(c) Bestimmen Sie das Bild $\{g(x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ von g.

Lösungshinweise hierzu: Zunächst sollte die Determinante bestimmt werden. Es ist

$$\det(A_x) = \begin{vmatrix} 2 & 2 & x & 2 \\ x & 2 & 2 & 2 \\ 2 & x & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & x & 2 \\ x-2 & 0 & 2-x & 0 \\ 0 & x-2 & 2-x & 0 \\ 0 & 0 & 2-x & x-2 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} 2 & 2 & x+6 & 2 \\ x-2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x-2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+6 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & x-2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x-2 \end{vmatrix} = (x+6)(x-2)^3,$$

wobei in der ersten Umformung von Zeilen 2 bis 4 Zeile 1 abgezogen wurde, in der zweiten Umformung Spalten 1, 2 und 4 auf Spalte 3 addiert wurden und in der dritten die ersten drei Spalten durchgetauscht wurden. Daran erkennt man, dass f nicht linear ist, denn $f(2) = 0 \neq -14 = 2f(1)$. Desweiteren ist $f(x) = 0$ für $x \in \{2, -6\}$.
Weiter bedeutet dies, dass die Matrix eine Determinante ungleich 0 hat für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{2, -6\}$ und damit invertierbar ist. Dies ist gleichbedeutend damit, dass A_x für diese x vollen Rang hat. Damit muss man nur noch den Rang für die beiden anderen Fälle berechnen, um das Bild von g bestimmen zu können.
Eine kurze Rechnung ergibt $\mathrm{Rg}(A_2) = 1$ und $\mathrm{Rg}(A_{-6}) = 3$. Damit ist das Bild von g die Menge $\{1, 3, 4\}$.

Aufgabe H 31. *Invertierbarkeit*

Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & a_{13} & a_{14} \\ 1 & 0 & a_{23} & a_{24} \\ 1 & 1 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 1 & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$.
Finden Sie reelle Werte für a_{kl} für $1 \leqq k \leqq 4$ und $3 \leqq l \leqq 4$ so, dass A regulär ist. Invertieren Sie diese Matrix A. Invertieren Sie A^2.

Lösungshinweise hierzu: Natürlich gibt es viele Möglichkeiten, diese Werte zu wählen. Eine davon ist

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Für diese Matrix gilt: $A^{-1} = A$ und damit $A^2 = E_4 = \left(A^2\right)^{-1}$.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 32. *Entwicklungssatz*

Seien $A := \begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 4 & 5 & 7 \\ 7 & 0 & 0 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 6 & 12 & 7 & 4 \end{pmatrix}$ und $B := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie $\det(A)$, $\det(B)$ und $\det(2AB)$.

Lösungshinweise hierzu: Um die Determinante von A zu berechnen, entwickeln wir einmal nach der vierten Zeile (siehe **3.13.4**) und erhalten

$$\det A = 1 \cdot (-1)^{4+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 6 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 6 & 12 & 7 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & 6 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 6 & 12 & 7 & 4 \end{vmatrix}.$$

Entwicklung nach der ersten Spalte ergibt

$$\det A = -3 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 & 7 \\ 0 & -1 & 4 \\ 12 & 7 & 4 \end{vmatrix} - 6 \cdot (-1)^{4+1} \cdot \begin{vmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 7 \\ 0 & -1 & 4 \end{vmatrix}.$$

Für die übrig bleibenden 3×3-Matrizen verwenden wir die Regel von Sarrus (siehe **3.11.5**). Als Ergebnis erhalten wir

$$\det A = -3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 & 7 \\ 0 & -1 & 4 \\ 12 & 7 & 4 \end{vmatrix} + 6 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 7 \\ 0 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -3 \cdot 196 + 6 \cdot 114 = 96.$$

Entwicklung nach der dritten Spalte in B ergibt

$$\begin{aligned} \det B &= 1 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{4+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} \\ &= -\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Die Determinante ändert sich nicht, wenn man eine Zeile der Matrix von einer anderen substrahiert (siehe **3.12.1**). Wir substrahieren die zweite Zeile von allen anderen und erhalten

$$\det B = -\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Jetzt entwickeln wir die erste Determinante nach der letzten Zeile und die zweite Determinante nach der vorletzten Zeile und erhalten

$$\det B = -(-1) \cdot (-1)^{4+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} - 2 \cdot 1 \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Die Anwendung der Regel von Sarrus auf die übrig bleibenden 3×3-Matrizen ergibt

$$\det B = 5 - 2 \cdot 5 = -5.$$

Nach **3.12.1** und **3.12.3** erhalten wir

$$\det(2AB) = 2^5 \cdot \det A \cdot \det B = 32 \cdot 96 \cdot (-5) = -15360.$$

Aufgabe H 33. *Affine Abbildungen*

Gegeben seien die Abbildungen

$$L_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad L_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 6 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$L_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : x \mapsto \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Welche der Abbildungen L_1, L_2, L_3 sind Affinitäten? Welche sind Isometrien? Welche sind eigentliche Isometrien?

(b) Bestimmen Sie $L_3 \circ L_2 \circ L_1$.

(c) Ist $L_3 \circ L_3$ eine Translation? Bestimmen Sie die Menge der Fixpunkte von L_3. Ist L_3 eine Spiegelung?

(d) Bestimmen Sie $(L_1)^{-1}$ und $(L_3)^{-1}$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Alle Abbildungen sind affine Abbildungen. Nach Definition ist eine affine Abbildung eine Affinität, falls die zugehörige Matrix eine reguläre Matrix ist. Wir berechnen die Determinaten der auftretenden Matrizen:

$$\det\left(\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\0&0&5\end{pmatrix}\right)=10,\quad \det\left(\begin{pmatrix}1&2&2\\1&6&1\\0&4&-1\end{pmatrix}\right)=0,\quad \det\left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&\sqrt{3}&0\\\sqrt{3}&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\right)=-1$$

Also sind L_1 und L_3 Affinitäten, L_2 ist keine Affinität. Da die Matrizen, die zu Isometrien gehören, immer die Determinante 1 oder -1 haben, sind L_1 und L_2 keine Isometrien. Wir berechnen

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&\sqrt{3}&0\\\sqrt{3}&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&\sqrt{3}&0\\\sqrt{3}&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}^{\mathsf{T}}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Also ist L_3 eine Isometrie. Aufgrund der vorher berechneten Determinate ist sie uneigentlich.

(b)

$$\begin{aligned}
L_3\circ L_2\circ L_1(x) &= L_3(L_2(L_1(x)))\\
&= L_3\left(\begin{pmatrix}1&2&2\\1&6&1\\0&4&-1\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\0&0&5\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}\right)+\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}\right)\\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&\sqrt{3}&0\\\sqrt{3}&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}1&4&11\\1&12&6\\0&8&-5\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}15\\25\\7\end{pmatrix}\right)+\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+\sqrt{3}&4+12\sqrt{3}&11+6\sqrt{3}\\\sqrt{3}-1&4\sqrt{3}-12&11\sqrt{3}-6\\0&16&-10\end{pmatrix}x+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}15+25\sqrt{3}\\15\sqrt{3}-25\\16\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(c) Es gilt

$$\begin{aligned}
L_3\circ L_3(x) &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&\sqrt{3}&0\\\sqrt{3}&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&\sqrt{3}&0\\\sqrt{3}&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)+\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Also ist $L_3\circ L_3$ eine Translation (und hat keine Fixpunkte). Auch L_3 hat keine Fixpunkte, denn jeder Fixpunkt von L_3 wäre auch ein Fixpunkt von $L_3\circ L_3$. Daher ist L_3 keine Spiegelung, denn zu jeder Spiegelung gehört eine Ebene, die aus Fixpunkten besteht.

(d) Es gilt

$$
\begin{aligned}
(L_1)^{-1}(x) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \left(x - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{5} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -\frac{6}{5} \\ -\frac{3}{2} \\ -\frac{4}{5} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 10 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} x + \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -12 \\ -15 \\ -8 \end{pmatrix} \\
(L_3)^{-1}(x) &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \left(x - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}} \left(x - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Aufgabe H 34. *Orthogonale Abbildungen*

Sei $B\colon b_1 := \frac{\sqrt{2}}{2}(1,0,1)^{\mathsf{T}}, b_2 := \frac{\sqrt{2}}{6}(1,4,-1)^{\mathsf{T}}, b_3 := \frac{1}{3}(2,-1,-2)^{\mathsf{T}}$ und sei $E\colon e_1, e_2, e_3$ die Standardbasis in $\mathbb{R}^3$.

Sei die lineare Abbildung $\delta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch ${}_B(\delta(e_1)) = \frac{1}{6}\left(-4, \sqrt{2}, 3\sqrt{2}\right)^{\mathsf{T}}$, ${}_B(\delta(e_2)) = \frac{1}{3}\left(1, 2\sqrt{2}, 0\right)^{\mathsf{T}}$, ${}_B(\delta(e_3)) = \frac{1}{6}\left(4, -\sqrt{2}, 3\sqrt{2}\right)^{\mathsf{T}}$.

(a) Untersuchen Sie, ob B eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ ist.

(b) Bestimmen Sie ${}_E\mathrm{id}_B$, ${}_B\delta_E$ und ${}_B\delta_B$.

(c) Untersuchen Sie, ob δ eine orthogonale Abbildung ist.

(d) Untersuchen Sie, ob δ^2 eine orthogonale Abbildung ist.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Untersucht man die Menge B, ist sofort ersichtlich, dass die einzelnen Elemente b_1, b_2 und b_3 linear unabhängig sind und somit eine Basis von $\mathbb{R}^3$ bilden. Der Beweis, dass B eine Orthonomalbasis darstellt, ist somit äquivalent dazu, die Spaltenmatrix $C = {}_E\mathrm{id}_B$ der Basisvektoren zu betrachten und zu zeigen, dass diese Matrix orthogonal ist. Man rechnet also:

$$
C^{\mathsf{T}} \cdot C = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} & 0 & 3\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 4\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 4 & -2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} & \sqrt{2} & 4 \\ 0 & 4\sqrt{2} & -2 \\ 3\sqrt{2} & -\sqrt{2} & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

(b) Mit Satz **3.10.11** gilt, dass ${}_B\delta_B = {}_B\delta_{EE}\operatorname{id}_B$ wobei ${}_B\delta_E$ durch die Aufgabenstellung gegeben ist und ${}_E\operatorname{id}_B = \left({}_E(b_1)\ {}_E(b_2)\ {}_E(b_3)\right)$. Man berechnet daher

$$ {}_B\delta_B = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -4 & 2 & 4 \\ \sqrt{2} & 4\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 3\sqrt{2} & 0 & 3\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3\sqrt{2} & \sqrt{2} & 4 \\ 0 & 4\sqrt{2} & -2 \\ 3\sqrt{2} & -\sqrt{2} & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} $$

(c) Aus Definition **4.5.2** weiß man, dass δ genau dann eine orthogonale Abbildung ist, wenn die Matrixbeschreibung bezüglich der Standardbasis, also ${}_E\delta_E$, eine orthogonale Matrix ist. Mit Aufgabenteil **(a)** und **(b)** folgt ${}_E\operatorname{id}_B^{\mathsf{T}} = {}_B\operatorname{id}_E$ und man berechnet

$$ \begin{aligned} {}_E\delta_E^{\mathsf{T}}\ {}_E\delta_E &= \left({}_E\operatorname{id}_B\ {}_B\delta_B\ {}_B\operatorname{id}_E\right)^{\mathsf{T}} \left({}_E\operatorname{id}_B\ {}_B\delta_B\ {}_B\operatorname{id}_E\right) \\ &= {}_B\operatorname{id}_E^{\mathsf{T}}\ {}_B\delta_B^{\mathsf{T}}\ {}_E\operatorname{id}_B^{\mathsf{T}}\ {}_E\operatorname{id}_B\ {}_B\delta_B\ {}_B\operatorname{id}_E \\ &= {}_E\operatorname{id}_B\ {}_B\delta_B^{\mathsf{T}}\ \underbrace{{}_B\operatorname{id}_E\ {}_E\operatorname{id}_B}_{=\mathbf{E}_3}\ {}_B\delta_B\ {}_B\operatorname{id}_E \\ &= {}_E\operatorname{id}_B\ \underbrace{{}_B\delta_B^{\mathsf{T}}\ {}_B\delta_B}_{=\mathbf{E}_3}\ {}_B\operatorname{id}_E \\ &= {}_E\operatorname{id}_B\ {}_B\operatorname{id}_E \\ &= \mathbf{E}_3. \end{aligned} $$

Also ist ${}_E\delta_E$ eine orthogonale Matrix und δ somit eine orthogonale Abbildung.

(d) Aus der Definiton von $\delta^2 = \delta \circ \delta$ folgt, dass δ^2 die Matrixbeschreibung ${}_E\delta_E \cdot {}_E\delta_E$ bezüglich der Standardbasis hat. Somit kann man wie in Aufgabenteil **(c)** vorgehen und überprüfen, ob ${}_E\delta_E \cdot {}_E\delta_E$ eine orthogonale Matrix ist. Man rechnet also

$$ \begin{aligned} ({}_E\delta_{EE}\delta_E)^{\mathsf{T}}({}_E\delta_{EE}\delta_E) &= ({}_E\delta_E^{\mathsf{T}}\ {}_E\delta_E^{\mathsf{T}})({}_E\delta_{EE}\delta_E) = {}_E\delta_E^{\mathsf{T}}(\underbrace{{}_E\delta_E^{\mathsf{T}}\ {}_E\delta_E}_{=\mathbf{E}_3}){}_E\delta_E \\ &= {}_E\delta_E^{\mathsf{T}}\ {}_E\delta_E = \mathbf{E}_3 \end{aligned} $$

Somit ist ${}_E\delta_{EE}\delta_E$ eine orthogonale Matrix und daher δ^2 eine orthogonale Abbildung.

Aufgabe H 35. *Schmidtsches Orthonormierungsverfahren*

Seien $v_1 = (1,0,-1,0)^{\mathsf{T}}$, $v_2 = (0,0,1,1)^{\mathsf{T}}$, $v_3 = (0,-1,1,0)^{\mathsf{T}}$ und $U = \mathrm{L}(v_1,v_2,v_3)$.

(a) Konstruieren Sie eine Orthonormalbasis $F\colon f_1,f_2,f_3$ von U derart, dass $\mathrm{L}(f_1) = \mathrm{L}(v_1)$, $\mathrm{L}(f_1,f_2) = \mathrm{L}(v_1,v_2)$ und $\mathrm{L}(f_1,f_2,f_3) = \mathrm{L}(v_1,v_2,v_3)$ ist.

(b) Konstruieren Sie eine Orthonormalbasis $G\colon g_1,g_2,g_3$ von U derart, dass $\mathrm{L}(g_1) = \mathrm{L}(v_1)$, $\mathrm{L}(g_1,g_2) = \mathrm{L}(v_1,v_3)$ und $\mathrm{L}(g_1,g_2,g_3) = \mathrm{L}(v_1,v_2,v_3)$ ist.

(c) Ist ${}_F\operatorname{id}_G$ orthogonal? Bestimmen Sie ${}_G\operatorname{id}_F$.

(d) Finden Sie ein $f_4 \in \mathbb{R}^4$ so, dass $F' : f_1, f_2, f_3, f_4$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^4$ ist.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Eine Orthonormalbasis besteht aus paarweise orthogonalen normierten Vektoren. Um die Bedingung $\mathrm{L}(f_1) = \mathrm{L}(v_1)$ zu erfüllen, muss v_1 normiert werden. Es gilt

$$|v_1| = \sqrt{\langle v_1 \mid v_1 \rangle} = \sqrt{2} \quad \text{und damit} \quad f_1 = \frac{v_1}{|v_1|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Um die Bedingung $\mathrm{L}(f_1, f_2) = \mathrm{L}(v_1, v_2)$ zu erfüllen, wird der Vektor v_2 mittels des Schmidtschen Orthonormierungsverfahren zu f_2 abgewandelt

$$\begin{aligned} f_2^* &= v_2 - \langle v_2 \mid f_1 \rangle f_1 \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nun ist

$$|f_2| = \sqrt{\langle f_2^* \mid f_2^* \rangle} = \frac{\sqrt{6}}{2} \quad \text{und damit} \quad f_2 = \frac{f_2^*}{|f_2^*|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Es gilt $f_1 = \frac{v_1}{|v_1|}$ und damit auch

$$f_2 = f_2^* = v_2 - \langle v_2 \mid f_1 \rangle f_1 = v_2 - \underbrace{\frac{\langle v_2 \mid f_1 \rangle}{|v_1|}}_{\in \mathbb{R}} v_1.$$

Also ist $f_2 \in \mathrm{L}(v_1, v_2)$. Außerdem gilt $f_1 \in \mathrm{L}(v_1) \subseteqq \mathrm{L}(v_1, v_2)$. Da f_1 und f_2 linear unabhängig sind (nach Konstruktion bilden sie eine Orthonormalbasis von $\mathrm{L}(v_1, v_2)$), ist die Bedingung $\mathrm{L}(v_1, v_2) = \mathrm{L}(f_1, f_2)$ also erfüllt.

Da $\mathrm{L}(v_1, v_2, v_3) = \mathbb{R}^3$ ist, bedeutet die Bedingung $\mathrm{L}(v_1, v_2, v_3) = \mathrm{L}(f_1, f_2, f_3)$ gerade, dass f_1, f_2, f_3 eine Basis bilden müssen, dies wird durch das Schmidtsche Verfahren gewährleistet. Man erhält

$$\begin{aligned} f_3^* &= v_3 - \langle v_3 \mid f_1 \rangle f_1 - \langle v_3 \mid f_2 \rangle f_2 \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\qquad - \frac{1}{6} \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -1 \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Nun ist

$$|f_3| = \sqrt{\langle f_3^* \mid f_3^* \rangle} = \frac{2}{\sqrt{3}} \quad \text{und damit} \quad f_3 = \frac{f_3^*}{|f_3^*|} = \frac{\sqrt{3}}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

Insgesamt erhält man also

$$F : \qquad \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{12}} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

(b) Wie in Aufgabenteil **(a)** gesehen, bedeutet die Bedingung $\mathrm{L}(f_1) = \mathrm{L}(v_1)$, $\mathrm{L}(f_1, f_2) = \mathrm{L}(v_1, v_2)$ und $\mathrm{L}(f_1, f_2, f_3) = \mathrm{L}(v_1, v_2, v_3)$ gerade, dass das Schmidtsche Verfahren auf die Basis v_1, v_2, v_3 angewendet werden muss. Entsprechend bedeuten die Bedingungen $\mathrm{L}(g_1) = \mathrm{L}(v_1)$, $\mathrm{L}(g_1, g_2) = \mathrm{L}(v_1, v_3)$ und $\mathrm{L}(g_1, g_2, g_3) = \mathrm{L}(v_1, v_2, v_3)$, dass das Schmidtsche Verfahren auf die Basis v_1, v_3, v_2 angewendet werden muss. Die Rollen von v_2 und v_3 sind nun also vertauscht. Es werden also die gleihen Rechnungen wie in Aufgabenteil **(a)** durchgeführt und statt v_2 wird v_3 bzw. v_3 statt v_2 verwendet. Somit ist

$$g_1 = \frac{v_1}{|v_1|} = f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Der zweite Schritt unterscheidet sich nun vom zweiten Schritt des Aufgabenteils **(a)**

$$\begin{aligned}
g_2^* &= v_3 - \langle v_3 \,|\, g_1 \rangle \, g_1 \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} .
\end{aligned}$$

Daraus erhält man

$$|g_2^*| = \sqrt{\langle g_2^* \,|\, g_2^* \rangle} = \frac{\sqrt{6}}{2} \quad \text{und damit} \quad g_2 = \frac{g_2^*}{|g_2^*|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Es bleibt g_3 zu bestimmen als

$$\begin{aligned}
g_3^* &= v_2 - \langle v_2 \,|\, g_1 \rangle \, g_1 - \langle v_2 \,|\, g_2 \rangle \, g_2 \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\qquad - \frac{1}{6} \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} .
\end{aligned}$$

Also gilt

$$|g_3^*| = \sqrt{\langle g_3^* \,|\, g_3^* \rangle} = \frac{1}{3}\sqrt{12} \quad \text{und damit} \quad g_3 = \frac{g_3^*}{|g_3^*|} = \frac{1}{\sqrt{12}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} .$$

Insgesamt erhält man also

$$G: \qquad \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \frac{1}{\sqrt{12}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} .$$

(c) Mit der Matrix ${}_F\mathrm{id}_G$ kann man Koordinatentupel bezüglich der Basis G in Koordinatentupel bezüglich der Basis F umrechnen. Zur Bestimmung dieser Matrix muss man ein LGS für mehrere rechte Seiten simultan lösen. Dabei sind die Spalten der Koeffizientenmatrix gerade die Basisvektoren g_1, g_2 und g_3 der Basis G und die rechten Seiten die Elemente f_1, f_2 und f_3 der Basis F. Man erhält also das folgende LGS

$$\left[\begin{array}{ccc||ccc} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{12}} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{\sqrt{12}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{12}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{12}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{12}} & 0 & 0 & \frac{3}{\sqrt{12}} \end{array}\right].$$

Um das LGS nun auf die in Satz **3.7.2** angegebene Form zu bringen, vertauscht man zuerst Zeile 2 und Zeile 4 und addiert danach Zeile 1 zu Zeile 3

$$\begin{array}{r} \\ \\ \\ Z_2 \leftrightarrow Z_4 : \end{array} \left[\begin{array}{ccc||ccc} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{12}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{12}} & 0 & 0 & \frac{3}{\sqrt{12}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{12}} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{\sqrt{12}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{12}} \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ Z_3 + Z_1 : \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc||ccc} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{12}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{12}} & 0 & 0 & \frac{3}{\sqrt{12}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{12}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{12}} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{\sqrt{12}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{12}} \end{array}\right].$$

Zieht man nun Zeile 2 von Zeile 3 ab und addiert dann Zeile 3 zu Zeile 4, erhält man

$$\begin{array}{r} \\ \\ Z_3 - Z_2 : \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc||ccc} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{12}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{12}} & 0 & 0 & \frac{3}{\sqrt{12}} \\ 0 & 0 & \frac{3}{\sqrt{12}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{12}} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{\sqrt{12}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{12}} \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ \\ Z_4 + Z_3 : \end{array} \left[\begin{array}{ccc||ccc} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{12}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{12}} & 0 & 0 & \frac{3}{\sqrt{12}} \\ 0 & 0 & \frac{3}{\sqrt{12}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{12}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Multiplikation von Zeile 3 mit $\frac{1}{3}$ und Subtraktion der Zeile 3 von Zeile 1 bzw. Addition von Zeile 3 zu Zeile 2 liefert dann das folgende Resultat

$$\begin{array}{r} \\ \\ \frac{1}{3}\,Z_3 : \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc||ccc} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{12}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{12}} & 0 & 0 & \frac{3}{\sqrt{12}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{12}} & 0 & \frac{2}{3\sqrt{6}} & -\frac{1}{3\sqrt{12}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} Z_1 - Z_3 : \\ Z_2 + Z_3 : \\ \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc||ccc} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{6}} & \frac{4}{3\sqrt{12}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & 0 & \frac{2}{3\sqrt{6}} & \frac{8}{3\sqrt{12}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{12}} & 0 & \frac{2}{3\sqrt{6}} & -\frac{1}{3\sqrt{12}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Skaliert man Zeile 2 mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ und substrahiert Zeile 2 von Zeile 1, folgt

$$\begin{array}{r} \frac{1}{2}\,Z_2: \\ \\ \\ \\ Z_1 - Z_2: \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{l} \left[\begin{array}{ccc||ccc} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{6}} & \frac{4}{3\sqrt{12}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & 0 & \frac{1}{3\sqrt{6}} & \frac{4}{3\sqrt{12}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{12}} & 0 & \frac{2}{3\sqrt{6}} & -\frac{1}{3\sqrt{12}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \\ \left[\begin{array}{ccc||ccc} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & 0 & \frac{1}{3\sqrt{6}} & \frac{4}{3\sqrt{12}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{12}} & 0 & \frac{2}{3\sqrt{6}} & -\frac{1}{3\sqrt{12}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]. \end{array}$$

Als letzten Schritt multipliziert man Zeile 1 mit $\sqrt{2}$, Zeile 2 mit $\sqrt{6}$ und Zeile 3 mit $\sqrt{12}$ und bekommt damit die in Satz **3.7.2** angegebene Form des LGS

$$\begin{array}{r} \sqrt{2}\,Z_1: \\ \sqrt{6}\,Z_2: \\ \sqrt{12}\,Z_3: \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc||ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \sqrt{2}\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \sqrt{2}\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Die Matrix ${}_F\mathrm{id}_G$ kann man nun direkt ablesen, sie hat also die Form

$${}_F\mathrm{id}_G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \sqrt{2}\frac{2}{3} \\ 0 & \sqrt{2}\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Gemäß Definition **4.5.2** überprüft man nun die folgende Bedingung

$${}_F\mathrm{id}_G^{\intercal}\,{}_F\mathrm{id}_G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \sqrt{2}\frac{2}{3} \\ 0 & \sqrt{2}\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \sqrt{2}\frac{2}{3} \\ 0 & \sqrt{2}\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und erhält damit, dass ${}_F\mathrm{id}_G$ eine orthogonale Matrix ist. Es bleibt ${}_G\mathrm{id}_F$ zu bestimmen. Nach Satz **3.10.11** gilt

$${}_G\mathrm{id}_F = ({}_F\mathrm{id}_G)^{-1} = ({}_F\mathrm{id}_G)^{\intercal} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \sqrt{2}\frac{2}{3} \\ 0 & \sqrt{2}\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

(d) Um die Orthonomalbasis F von U zu einer Orthonomalbasis F' des $\mathbb{R}^4$ zu vervollständigen, gibt es mehrere Ansätze. Eine Möglichkeit besteht darin einen Vektor v_4 so zu finden, dass $\mathrm{L}(v_1, v_2, v_3, v_4) = \mathbb{R}^4$ und dann f_4 mittels des Schmidtschen Orthonormierungsverfahren zu bestimmen. Eine einfache Wahl ist z. B. der Vektor $v_4 = (0, 1, 0, 0)^{\intercal}$. Indem man die Argumentation aus Aufgabenteil **(a)** weiterführt, folgt damit mittels des Ansatz aus dem Schmidtschen Orthonormierungsverfahren

$$\begin{aligned}
f_4^* &= v_4 - \langle v_4 \,|\, f_1\rangle\, f_1 - \langle v_4 \,|\, f_2\rangle\, f_2 - \langle v_4 \,|\, f_3\rangle\, f_3 \\
&= \begin{pmatrix} 0\\1\\0\\0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\left\langle \begin{pmatrix} 0\\1\\0\\0 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1\\0\\-1\\0 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 1\\0\\-1\\0 \end{pmatrix} \\
&\qquad - \frac{1}{6}\left\langle \begin{pmatrix} 0\\1\\0\\0 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1\\0\\1\\2 \end{pmatrix} \right\rangle - \frac{1}{12}\left\langle \begin{pmatrix} 0\\1\\0\\0 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1\\-3\\1\\-1 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 1\\-3\\1\\-1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0\\1\\0\\0 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1\\-3\\1\\-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\\ \frac{1}{4}\\ \frac{1}{4}\\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1\\1\\1\\-1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Nun ist

$$|f_4| = \sqrt{\langle f_4^* \,|\, f_4^*\rangle} = \frac{1}{2} \quad \text{und damit} \quad f_4 = \frac{f_4^*}{|f_4^*|} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1\\1\\1\\-1 \end{pmatrix}.$$

Insgesamt erhält man also

$$F' : \qquad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1\\0\\-1\\0 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1\\0\\1\\2 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{12}}\begin{pmatrix} 1\\-3\\1\\-1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1\\1\\1\\-1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe H 36. *Spiegelungen*

Sei $A := \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -4 & 8\\ -4 & 7 & 4\\ 8 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis $b_1,\, b_2$ von $\left\{v \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, Av = v\right\}$. Bestimmen Sie ein $b_3 \in \mathbb{R}^3$ mit $|b_3| = 1$ und $Ab_3 = -b_3$. Ist $\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : v \mapsto Av$ eine Spiegelung?

(b) Sei $\beta_s : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : v \mapsto Av + sb_1 + b_3$ mit $s \in \mathbb{R}$. Für welche s ist β_s eine Spiegelung?

(c) Sei $\gamma : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : v \mapsto A^{-1}v + t$ mit $t \in \mathbb{R}^3$. Finden Sie t so, dass $\gamma((1,0,1)^\mathsf{T}) = (2,1,2)^\mathsf{T}$ ist. Ist γ dann eine Spiegelung?

Lösungshinweise hierzu:

(a) Um die Basisvektoren b_1 und b_2 zu finden, müssen wir zuerst die Fixpunktmenge $\left\{v \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, Av = v\right\}$ bestimmen. Die Lösung des linearen Gleichungssystems $Av = v$ mit $v = (v_1, v_2, v_3)^\intercal \in \mathbb{R}^3$ ist die Ebene $E := 2v_1 + v_2 - 2v_3 = 0$. Für einen beliebigen Vektor $v \in E$ ist $b_1 = \dfrac{v}{|v|}$. Nun suchen wir einen Vektor $w = (t, s, t + \dfrac{s}{2})^\intercal \in E$ so, dass $\langle v \,|\, w \rangle = 0$. Dann ist $b_2 = \dfrac{w}{|w|}$. Beispielsweise $v = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)^\intercal$ und $b_2 = \dfrac{1}{\sqrt{18}}(-1, 4, 1)^\intercal$. Der Vektor b_3 ist orthogonal zur Spiegelebene E. Dass heisst, dass $b_3 = b_1 \times b_2$.

(b) Bei einer Spiegelung ist der Translationsanteil orthogonal zur Spiegelebene. Für die Abbildung β_s heisst, dass $s = 0$ sein muss.

(c) Es gilt $A^{-1} = A$, da A orthogonal und symmetrisch ist. Nach Einsetzen von $(1, 0, 1)^\intercal$ in die Abbildung γ, erhält man den Translationsanteil $t = (1, 1, 1)^\intercal$. Da der Translationsanteil nicht orthogonal zur Spiegelebene ist, beschreibt γ keine Spieglung.

Aufgabe H 37. *Isometrien*

Für $s \in \mathbb{R}$ sei $\beta_s : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : v \mapsto \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ 4 & s & 7 \\ -1 & -8 & -4 \end{pmatrix} v$.

Sei $\gamma : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die affine Abbildung, die sich aus einer Drehung um die x_3-Achse und einer nachfolgenden Translation in Richtung der x_3-Achse zusammensetzt und die $\gamma((0, 1, 0)^\intercal) = (1, 0, 1)^\intercal$ erfüllt.

(a) Bestimmen Sie s so, dass β_s eine eigentliche Isometrie ist.

(b) Bestimmen Sie die Drehachse und den Drehwinkel von β_s für s aus **(a)**.

(c) Bestimmen Sie den linearen Anteil und den Translationanteil von γ.

(d) Bestimmen Sie die Menge der Fixpunkte von $\gamma^{-1} \circ \beta_s \circ \gamma$ mit s aus **(a)**.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Die Abbildung β_s ist eigentlich genau dann, wenn der lineare Anteil orthogonal ist und die Determinante gleich 1 ist. Das ergibt $s = -4$.

(b) Die Drehachse von β_{-4} muss die Bedingung

$$\begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ 4 & -4 & 7 \\ -1 & -8 & -4 \end{pmatrix} v = 9\,v$$

erfüllen. Das ergibt das lineare Gleichungssystem

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -4 & 0 \\ 4 & -13 & 7 & 0 \\ -1 & -8 & -13 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & -9 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Die Lösung des LGS ergibt als Drehachse die Gerade $G : \left\{(5,1,-1)^\intercal + \lambda\,(10,-2,2)^\intercal \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\}$. Der Drehwinkel θ kann aus $\operatorname{Sp} A = 2\cos\theta + 1$ berechnet werden (siehe Anwendung **4.6.20**). Das ergibt $\cos\theta = -\frac{1}{2}$ und damit ist $\theta = \mp\frac{2}{3}\pi$.

(c) Der lineare Anteil der Abbildung γ ist eine Drehung um die x_3-Achse, beschrieben durch $x \mapsto Ax$ mit

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Der Winkel α ist noch unbestimmt. Wegen $\gamma((0,1,0))^\intercal = (1,0,1)^\intercal$, muss der Translationsanteil $t = \begin{pmatrix} 1+\sin\alpha \\ -\cos\alpha \\ 1 \end{pmatrix}$ sein. Nach der Bedingung, dass der Translationsanteil in Richtung der x_3-Achse gerichtet ist, muss der Winkel $\alpha = -\frac{\pi}{2}$ sein. Damit ist die Abbildung γ genau bestimmt

$$\gamma : v \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(d) Zuerst bestimmt man die Abbildung $\gamma^{-1} \circ \beta_{-4} \circ \gamma$ als

$$\gamma^{-1} \circ \beta_{-4} \circ \gamma(v) = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -4 & -4 & 7 \\ -1 & 8 & -4 \\ 8 & -1 & -4 \end{pmatrix} v + \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -7 \\ -4 \\ -13 \end{pmatrix}.$$

Die Fixpunktmenge dieser Abbildung ist die Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -13 & -4 & -7 & 7 \\ -1 & -1 & -4 & 4 \\ 8 & -1 & -13 & 13 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 9 & 45 & -45 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Damit ist die Fixpunktmenge die Gerade $G : \left\{(-9,-5,0)^\intercal + \lambda\,(9,5,-1)^\intercal \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\}$.

Aufgabe H 38. *Koordinatensysteme*

Sei $\mathbb{E}$ das Standardkoordinatensystem in $\mathbb{R}^3$. Betrachte die Koordinatentransformation ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}} : v \mapsto \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ -6 & 4 & 8 \\ 3 & -4 & -3 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Sei $\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : v \mapsto \begin{pmatrix} 3 & -1/2 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \\ -2 & -1/2 & -1 \end{pmatrix} v$.

(a) Bestimmen Sie das affine Koordinatensystems $\mathbb{F}$. Bestimmen Sie ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$.

(b) Geben Sie die Beschreibung ${}_{\mathbb{F}}\alpha_{\mathbb{F}}$ der Abbildung α bezüglich $\mathbb{F}$ an.

Lösungshinweise hierzu: Für die Basis $\mathbb{F} = (P; f_1, f_2, f_3)$ ergibt sich die Koordinatentransformation aus der Formel ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}(v) = Fv + P$. Dabei ist die Matrix $F = (f_1, f_2, f_3)$. Damit lässt sich das Koordinatensystem direkt ablesen:

$$\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix} \right).$$

Für die Umkehrabbildung gilt ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}(v) = F^{-1}(v - P)$. Man erhält damit

$${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}} : v \mapsto \begin{pmatrix} 10 & 1/2 & 8 \\ 3 & 0 & 2 \\ 6 & 1/2 & 5 \end{pmatrix} \left(v - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 10 & 1/2 & 8 \\ 3 & 0 & 2 \\ 6 & 1/2 & 5 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} -11 \\ -3 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Nach Satz 4.7.12 wird die Abbildung $\alpha(v) = Av + t$ bzgl. des Koordinatensystems $\mathbb{F}$ durch

$$v \mapsto F^{-1}AFv + F^{-1}(AP - P + t) = \begin{pmatrix} 69 & -49 & -88 \\ 17 & -11 & -22 \\ 45 & -33 & -57 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} -15 \\ -3 \\ -10 \end{pmatrix}$$

mit $t = 0$ beschrieben.

Aufgabe H 39. *Koordinatentransformationen*

Gegeben sind die Punkte $P = (-3, 3, 2)^\intercal$, $F_1 = (5, -2, 0)^\intercal$, $F_2 = (-4, 4, 2)^\intercal$ und $F_3 = (2, 0, 1)^\intercal$ sowie die Punkte $Q = (1, -1, -2)^\intercal$, $G_1 = (1, 0, -3)^\intercal$, $G_2 = (3, -2, 0)^\intercal$ und $G_3 = (2, 0, -3)^\intercal$.

(a) Zeigen Sie, dass durch die Punkte P und F_j bzw. die Punkte Q und G_j jeweils ein affines Koordinatensystem $\mathbb{F} = \left(P; \overrightarrow{PF_1}, \overrightarrow{PF_2}, \overrightarrow{PF_3}\right)$ bzw. $\mathbb{G} = \left(Q; \overrightarrow{QG_1}, \overrightarrow{QG_2}, \overrightarrow{QG_3}\right)$ gegeben ist. Sind dies auch kartesische Koordinatensysteme?

(b) Sei $\mathbb{E}$ das Standardkoordinatensystem. Berechnen Sie die Koordinatentransformationen ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$, ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$, ${}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{E}}$, ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{G}}$, ${}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{F}}$ und ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{G}}$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Man berechnet die Vektoren $f_1 = \overrightarrow{PF_1}$, $f_2 = \overrightarrow{PF_2}$ und $f_3 = \overrightarrow{PF_3}$ und erhält

$$f_1 = \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Diese Vektoren sind linear unabhängig $(\det(f_1, f_2, f_3) \neq 0)$, aber nicht normiert. Also bilden sie zwar eine Basis des $\mathbb{R}^3$ aber keine ONB. Also ist $\mathbb{F} = (P; F)$ ein affines, aber kein kartesisches Koordinatensystem.

Analoges gilt für die Vektoren $g_1 = \overrightarrow{QG_1}$, $g_2 = \overrightarrow{QG_2}$ und $g_3 = \overrightarrow{QG_3}$. Diese lauten

$$g_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad g_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad g_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Auch $\mathbb{G} = (Q; G)$ bildet ein affines, aber kein kartesisches Koordinatensystem.

(b) Als erstes werden die Matrizen F und G aus den Basisvektoren aufgestellt und invertiert:

$$F = \begin{pmatrix} 8 & -1 & 5 \\ -5 & 1 & -3 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad F^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

und analog

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad G^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Also ist

$$\begin{aligned} {}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}(v) &= F^{-1}(v-P) \\ {}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}(v) &= Fv+P \\ {}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{E}}(v) &= G^{-1}(v-Q) \\ {}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{G}}(v) &= Gv+Q. \end{aligned}$$

Für ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{G}}$ und ${}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{F}}$ benötigen wir die Matrizen jeweils zur Basis von $\mathbb{F}$ bzw, $\mathbb{G}$. Also berechnen wir

$${}_{\mathbb{G}}F = \begin{pmatrix} -34 & 5 & -20 \\ -7 & 1 & -4 \\ 22 & -3 & 13 \end{pmatrix} \text{ und } {}_{\mathbb{F}}G = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 3 & -2 & 4 \\ -1 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

und den jeweiligen Ursprungspunkt zur entsprechenden Basis

$${}_{\mathbb{G}}P = (32, 8, -20) \text{ und } {}_{\mathbb{F}}Q = (8, 0, -12)^{\mathsf{T}}.$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} {}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{G}}(v) &= {}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}({}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{G}}(v)) = {}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}(Gv+Q) = {}_{\mathbb{F}}Gv + {}_{\mathbb{F}}Q, \\ {}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{F}}(v) &= {}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{E}}({}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}(v)) = {}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{E}}(Fv+P) = {}_{\mathbb{G}}Fv + {}_{\mathbb{G}}P. \end{aligned}$$

L. Allerhand
A. Armiti, J. Hörner
A. Kerschl, M. Werth
C. Winkel, C. Zeiler

M. KÃ$\frac{1}{4}$nzer
M. Stroppel

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 40. *Diagonalisierbarkeit*

Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und zugehörigen Eigenräume dieser Matrizen.

Lösungshinweise hierzu:

<u>**Matrix A**</u>

Das charakteristische Polynom der Matrix A lautet

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_3) = (5-\lambda)(3-\lambda)(2-\lambda) + (2-\lambda) = (2-\lambda)(4-\lambda)^2$$

Die Nullstellen dieses Polynoms (die Eigenwerte von A) sind

$$\lambda_1 = 2 \quad \text{und} \quad \lambda_2 = 4 \quad \text{mit} \quad e_0 = 1 \quad \text{und} \quad e_2 = 2\,.$$

Die Eigenvektoren v_k zu diesen Eigenwerten erhält man durch Lösen des entsprechenden LGS

$$(A - \lambda_k E_3)v_k = 0, \quad k = 1, 2.$$

Für $\lambda_1 = 2$ erhalten wir

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

woraus folgt

$$v_1 = t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; t \in \mathbb{C}.$$

Als Eigenraum erhalten wir

$$V(2) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Analog ergibt sich für $\lambda_2 = 4$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten

$$v_2 = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; t \in \mathbb{C}.$$

Als Eigenraum erhalten wir

$$V(4) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

Matrix B

Die Eigenwerte der Matrix B berechnen wir als Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\chi_B(\lambda) = (2-\lambda)^2(6-\lambda)$, woraus

$$\lambda_1 = 2 \quad \text{und} \quad \lambda_2 = 6 \quad \text{mit} \quad e_{-2} = 2 \quad \text{und} \quad e_1 = 1\,.$$

folgt.

Als Eigenräume erhalten wir

$$(A - 2E_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; V(2) = \left\{ s\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \;\middle|\; s, t \in \mathbb{C} \right\},$$

$$(A - 6E_3) = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; V(6) = \left\{ s\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; s \in \mathbb{C} \right\}.$$

Matrix C

Das charakteristische Polynom der Matrix C ist $\chi_C(\lambda) = (9+\lambda^2)(-1-\lambda) = (-3\mathrm{i}-\lambda)(3\mathrm{i}-\lambda)(-1-\lambda)$ und die Eigenwerte sind damit

$$\lambda_1 = -1, \qquad \lambda_2 = -3\mathrm{i}, \qquad \text{und} \qquad \lambda_3 = 3\mathrm{i}\,.$$

Eigenräume:

$$(C + 1E_3) = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; V(-1) = \left\{ s\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -9 \end{pmatrix} \;\middle|\; s \in \mathbb{C} \right\},$$

$$(C - 3\mathrm{i}E_3) = \begin{pmatrix} 3\mathrm{i} & 6 & 3 \\ 0 & -1+3\mathrm{i} & 0 \\ -3 & 0 & 3\mathrm{i} \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; V(3\mathrm{i}) = \left\{ s\begin{pmatrix} -\mathrm{i} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; s \in \mathbb{C} \right\},$$

$$(C + 3\mathrm{i}E_3) = \begin{pmatrix} -3\mathrm{i} & 6 & 3 \\ 0 & -1-3\mathrm{i} & 0 \\ -3 & 0 & -3\mathrm{i} \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; V(-3\mathrm{i}) = \left\{ s\begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; s \in \mathbb{C} \right\}.$$

(b) Geben Sie in den diagonalisierbaren Fällen jeweils eine invertierbare Matrix T an, die die entsprechende Matrix in Diagonalgestalt transformiert. Bestimmen Sie die dazugehörige Diagonalmatrix D.

Lösungshinweise hierzu:

Matrix A

Die Matrix A ist nicht diagonalisierbar, weil die algebraische Vielfachheit des Eigenwerts $\lambda_2 = 4$ $(e_1 = 2)$ nicht gleich der geometrischen Vielfachheit von $\lambda_2 = 4$ $(d_1 = 1)$ ist (Folgerung 5.3.5).

Matrix B

Der Eigenwert $\lambda_1 = 2$ hat algebraische Vielfachheit $e_0 = 2$ und geometrische Vielfachheit $d_0 = 2$. Der Eigenwert $\lambda_2 = 6$ hat algebraische und geometrische Vielfachheit 1. Nach der Folgerung 5.3.5 ist die Matrix B diagonalisierbar. Eine mögliche Transformationsmatrix T_B ist durch

$$T_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Die zugehörige Diagonalmatrix D_B hat die Form

$$D_B = T_B^{-1} B T_B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Matrix C

Die Matrix C ist komplex diagonalisierbar, weil sie verschiedene Eigenwerte $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$ hat (Folgerung 5.3.3). Eine mögliche Transformationsmatrix T_C ist durch

$$T_C = (v_1,\, v_2,\, v_3) = \begin{pmatrix} -3 & i & -i \\ 5 & 0 & 0 \\ -9 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Die zugehörige Diagonalmatrix D_C hat die Form

$$D_C = T_C^{-1} C T_C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3i & 0 \\ 0 & 0 & -3i \end{pmatrix}.$$

(c) Ist B^3 diagonalisierbar? Geben Sie gegebenenfalls eine invertierbare Matrix T so an, dass $T^{-1}B^3T$ eine Diagonalmatrix ist. Bestimmen Sie die Eigenwerte von B^3.

Lösungshinweise hierzu: Aus $D_B = T_B^{-1} B T_B$ erhalten wir $B = T_B D_B T_B^{-1}$, woraus sofort

$$B^3 = T_B D_B T_B^{-1} T_B D_B T_B^{-1} T_B D_B T_B^{-1} = T_B D_B^3 T_B^{-1}$$

folgt, d.h. B^3 und D_B^3 sind konjugiert zueinander und haben die gleichen Eigenwerte (Satz 5.2.2.). Wir berechnen

$$D_B^3 = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 216 \end{pmatrix},$$

und erhalten die Eigenwerte von B^3:

$$\mu_1 = \mu_2 = 8, \quad \mu_3 = 216.$$

(d) Bestimmen Sie einen Eigenvektor und einen Eigenwert von A^{-1}.

Lösungshinweise hierzu: Da $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert 2 ist, gilt

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathrm{E}_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = A^{-1}A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = A^{-1}2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2A^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Also ist $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von A^{-1} zum Eigenwert $\frac{1}{2}$.

Genauso können wir mit dem Eigenvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ zum Eigenwert 4 starten und folgern, dass $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von A^{-1} zum Eigenwert $\frac{1}{4}$ ist.

Aufgabe H 41. *Eigenwerte und Eigenvektoren*

Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 4 & 1 \\ 2 & -10 & 15 & 7 \\ 6 & -11 & 12 & 6 \\ -4 & -1 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A.

Lösungshinweise hierzu: Durch geschickte Matrixmanipulation können wir das charakteristische Polynom wie folgt bestimmen:

$$\begin{aligned}
\chi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} -1-\lambda & -1 & 4 & 1 \\ 2 & -10-\lambda & 15 & 7 \\ 6 & -11 & 12-\lambda & 6 \\ -4 & -1 & 5 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} -1-\lambda & -1 & 3 & 1 \\ 2 & -10-\lambda & 5-\lambda & 7 \\ 6 & -11 & 1-\lambda & 6 \\ -4 & -1 & 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} -1-\lambda & -1 & 3 & 1 \\ -4 & 1-\lambda & 4 & 1 \\ 6 & -11 & 1-\lambda & 6 \\ -4 & -1 & 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} -1-\lambda & -1 & 3 & 1 \\ -4 & 1-\lambda & 4 & 1 \\ 6 & -11 & 1-\lambda & 6 \\ 0 & \lambda-2 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (\lambda-2)\begin{vmatrix} -1-\lambda & -1 & 3 & 1 \\ -4 & 1-\lambda & 4 & 1 \\ 6 & -11 & 1-\lambda & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda-2)\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 3 & 1 \\ -4 & 2-\lambda & 4 & 1 \\ 6 & -5 & 1-\lambda & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \\
&= (2-\lambda)\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 3 \\ -4 & 2-\lambda & 4 \\ 6 & -5 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (2-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 3 \\ 0 & 2-\lambda & 4 \\ 7-\lambda & -5 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (2-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 3 \\ 0 & 2-\lambda & 4 \\ 5 & -5 & -2-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (2-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 3 \\ 2-\lambda & 2-\lambda & 4 \\ 0 & -5 & -2-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (2-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 3 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & -5 & -2-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (2-\lambda)^2\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -5 & -2-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (2-\lambda)^2(\lambda^2-4+5) = (2-\lambda)^2(\lambda^2+1)
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir die Eigenwerte $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = \mathrm{i},\ \lambda_3 = -\mathrm{i}.$

(b) Geben Sie die zugehörigen Eigenräume an.

Lösungshinweise hierzu: Die Eigenvektoren v_k zu diesen Eigenwerten erhält man durch Lösen des entsprechendes LGS

$$(A - \lambda_k E_4)v_k = 0, \quad k = 1, 2, 3.$$

Für $\lambda_1 = 2$ erhalten wir

$$\begin{pmatrix} -3 & -1 & 4 & 1 \\ 2 & -12 & 15 & 7 \\ 6 & -11 & 10 & 6 \\ -4 & -1 & 5 & 1 \end{pmatrix} v_1 = 0,$$

woraus folgt

$$v_1 = t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{C}\backslash\{0\}.$$

Als Eigenraum erhalten wir daher

$$V(2) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Analoge Berechnung für den Eigenwert $\lambda_2 = \mathrm{i}$ führt zu:

$$\begin{pmatrix} -1-\mathrm{i} & -1 & 4 & 1 \\ 2 & -10-\mathrm{i} & 15 & 7 \\ 6 & -11 & 12-\mathrm{i} & 6 \\ -4 & -1 & 5 & 3-\mathrm{i} \end{pmatrix} v_2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad V(\mathrm{i}) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ \mathrm{i}+5 \\ \mathrm{i}+1 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$$

Der Eigenraum von $\lambda_3 = -\mathrm{i}$ lässt sich aus demjenigen von $\lambda_2 = \mathrm{i}$ herleiten:

$$Av = \mathrm{i}v \quad \Longrightarrow \quad \overline{Av} = \overline{\mathrm{i}v} \quad \Longrightarrow \quad A\bar{v} = -\mathrm{i}\bar{v}.$$

Und damit folgt für den Eigenraum von $\lambda_3 = -\mathrm{i}$

$$V(-\mathrm{i}) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ -\mathrm{i}+5 \\ -\mathrm{i}+1 \\ 4 \end{pmatrix} \right).$$

(c) Geben sie zu allen Eigenwerten jeweils die algebraische und geometrische Vielfachheit an. Existiert eine Basis von $\mathbb{C}^4$ aus Eigenvektoren von A?

Lösungshinweise hierzu: Die algebraische Vielfachheit und die geometrische Vielfachheitder Eigenwerte lauten somit:

$$\begin{aligned} e_{\mathrm{i}} &= 1, & e_{-\mathrm{i}} &= 1, & e_2 &= 2 \\ d_{\mathrm{i}} &= 1, & d_{-\mathrm{i}} &= 1, & d_2 &= 1 \end{aligned}$$

Es lässt sich keine Basis für $\mathbb{C}^4$ bilden, da e_2 und d_2 nicht den gleichen Wert haben.

(d) Ist $A + \mathrm{E}_4$ diagonalisierbar?

Lösungshinweise hierzu: Wäre $A+\mathrm{E}_4$ diagonalisierbar, so gäbe es eine invertierbare Matrix T und eine Diagonalmatrix D so, dass gilt

$$T^{-1}(A + \mathrm{E}_4)T = D.$$

Aber $T^{-1}(A + \mathrm{E}_4)T = T^{-1}AT + \mathrm{E}_4$. Damit wäre aber auch $T^{-1}AT = D - \mathrm{E}_4$ eine Diagonalmatrix, was nach Aufgabenteil **(c)** nicht möglich ist.

Aufgabe H 42. *Symmetrische Matrizen*

Gesucht ist eine symmetrische reelle Matrix A mit den Eigenwerten 1 und 4 und den zugehörigen Eigenräumen

$$V(1) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}\right), \qquad V(4) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right).$$

(a) Bestimmen Sie die Matrix A, mitsamt einer orthogonalen Matrix S, für welche $S^{\mathsf{T}}AS$ eine Diagonalmatrix ist.

Lösungshinweise hierzu: Wir bilden zunächst aus den Basen der Eigenräume eine ONB. Dazu gehen wir wie in den Präsenzübungen vor und erhalten:

$$f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}, f_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}, f_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}, f_4 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Hieraus bilden wir die orthogonale Basiswechselmatrix S und die dazugehörige Diagonalmatrix D als

$$S = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{2} & 0 & 1 & 1\\ -\sqrt{2} & 0 & 1 & 1\\ 0 & \sqrt{2} & -1 & 1\\ 0 & -\sqrt{2} & -1 & 1\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D = \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&4\end{pmatrix}.$$

Nun setzen wir

$$A = SDS^{\intercal} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 7 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 7 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 7 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

Dieses A erfüllt die geforderten Bedingungen, denn $S^{\intercal}AS = D$.

(b) Bestimmen Sie eine Orthogonalmatrix T mit $\det(T) = -\det(S)$, für welche $T^{\intercal}AT$ eine Diagonalmatrix ist.

Lösungshinweise hierzu: Setzen wir

$$T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -1 & 1 \\ 0 & -\sqrt{2} & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

so erhalten wir mit den Rechenregeln für Determinanten, dass $\det(T) = -\det(S)$ gilt. Außerdem können wir leicht nachrechnen, dass

$$T^{\intercal}AT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

ist.

(c) Berechnen Sie die Inverse von A, ohne den Gauß-Algorithmus anzuwenden.

Lösungshinweise hierzu: Da gilt $A = SDS^{\intercal}$ gilt auch $A^{-1} = (SDS^{\intercal})^{-1} = {S^{\intercal}}^{-1}D^{-1}S^{-1} = SD^{-1}S^{\intercal}$. Matrizenmultiplikation liefert dann

$$A^{-1} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 13 & -3 & -3 & -3 \\ -3 & 13 & -3 & -3 \\ -3 & -3 & 13 & -3 \\ -3 & -3 & -3 & 13 \end{pmatrix}.$$

(d) Berechnen Sie das charakteristische Polynom von $2A$.

Lösungshinweise hierzu: Das charakteristische Polynom von A ist nach Vorgabe

$$\chi_A(\lambda) = (1-\lambda)^3(4-\lambda),$$

da die Eigenwerte von A $\lambda_1 = 1$ mit Vielfachheit 3 und $\lambda_2 = 4$ mit Vielfachheit 1 sind. Die Eigenwerte von $2A$ sind $\lambda_1 = 2$ mit Vielfachheit 3 und $\lambda_2 = 8$ mit Vielfachheit 1. Daher gilt

$$\chi_{2A}(\lambda) = (2-\lambda)^3(8-\lambda).$$

L. Allerhand
A. Armiti, J. Hörner
A. Kerschl, M. Werth
C. Winkel, C. Zeiler

11. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 1

M. Künzer
M. Stroppel

Wintersemester 2014/15

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 43. *Quadratische Form*

Gegeben sei die quadratische Form $q_{a,b}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon x \mapsto a(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2bx_1x_2$.

(a) Für welche Werte $a, b \in \mathbb{R}$ ist die quadratische Form $q_{a,b}$ positiv definit, negativ definit beziehungsweise indefinit?

(b) Sei nun $a = 1$. Wir betrachten die Quadrik $\mathcal{Q}_b : q_{1,b}(x) - 1 = 0$. Geben Sie die Matrixbeschreibung dieser Quadrik an.

(c) Geben Sie in Abhängigkeit von b die euklidische Normalform von $\mathcal{Q}_b$ an, sowie ein kartesisches Koordinatensystem, in welchem diese euklidische Normalform angenommen wird.

(d) Geben Sie in Abhängigkeit von b die affine Normalform von $\mathcal{Q}_b$ an.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Die Matrixbeschreibung der quadratischen Form $q_{a,b}$ ist $A_{a,b} = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.

Die Eigenwerte dieser Matrix sind $\lambda_1 = a$, $\lambda_2 = a - b$ und $\lambda_3 = a + b$.
$q_{a,b}$ ist positiv definit, falls alle Eigenwerte von $A_{a,b}$ positiv sind:

$$\lambda_1 = a > 0, \qquad \lambda_2 = a - b > 0 \qquad \text{und} \qquad \lambda_3 = a + b > 0.$$

Das heißt

$$a > 0, \qquad b < a \qquad \text{und} \qquad b > -a.$$

Damit ist $q_{a,b}$ genau dann positiv definit, wenn $a > 0$ und $|b| < a$.
$q_{a,b}$ ist negativ definit, falls alle Eigenwerte von $A_{a,b}$ negativ sind:

$$\lambda_1 = a < 0, \qquad \lambda_2 = a - b < 0 \qquad \text{und} \qquad \lambda_3 = a + b < 0.$$

Das heisst

$$a < 0, \qquad b > a \qquad \text{und} \qquad b < -a.$$

Damit ist $q_{a,b}$ genau dann negativ definit , wenn $a < 0$ und $|b| < -a$.

Die quadratische Form ist indefinit, wenn es sowohl positive als auch negative Eigenwerte gibt, also wenn $|b| > |a|$ ist.

(b) Die Matrixbeschreibung der Quadrik $\mathcal{Q}_b = q_{1,b}(x) - 1$ ist

$$\mathcal{Q}_b = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid x^\intercal A_b x + 2a^\intercal x + c = 0 \right\} ,$$

wobei

$$A_b = \begin{pmatrix} 1 & b & 0 \\ b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c = -1.$$

(c) Die Eigenwerte der Quadrik $\mathcal{Q}_b$ sind $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1-b$ und $\lambda_3 = 1+b$. Durch Lösen der entsprechenden linearen Gleichungssysteme erhalten wir die normierten Eingenvektoren

$$f_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dies liefert die Transformationsmatrix

$$F := (f_1, f_2, f_3) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bezüglich des kartesischen Koordinatensystems $\mathbb{F} = (\vec{0}; f_1, f_2, f_3)$ hat die Quadrik $\mathcal{Q}_b$ die euklidische Normalform

$$-y_1^2 - (1-b)y_2^2 - (1+b)y_3^2 + 1 = 0\,, \quad b \neq 1.$$

Für $b = 1$ wird der zweite Eigenwert $\lambda_2 = 1 - b$ null, daher müssen in diesem Fall die Basisvektoren f_2 und f_3 vertauscht werden. Die Quadrik $\mathcal{Q}_1$ hat also die euklidische Normalform

$$-y_1^2 - 2y_2^2 + 1 = 0$$

im Koordinatensystem $\mathbb{F}_1 = (\vec{0}; f_1, f_3, f_2)$.

(d) Falls $b = 1$, erfüllt die Quadrik $\mathcal{Q}_1$ die Gleichung

$$-y_1^2 - 2y_2^2 + 1 = 0.$$

Mit $z_1 = y_1$, $z_2 = \sqrt{2}y_2$ und $z_3 = y_3$ ist die affine Normalform

$$-z_1^2 - z_2^2 + 1 = 0.$$

Damit ist die Quadrik ein elliptischer Zylinder mit Achse z_3.
Falls $b = -1$, erfüllt die Quadrik $\mathcal{Q}_{-1}$ die Gleichung

$$-y_1^2 - 2y_2^2 + 1 = 0.$$

Mit $z_1 = y_1$, $z_2 = \sqrt{2}y_2$ und $z_3 = y_3$ ist die affine Normalform

$$-z_1^2 - z_2^2 + 1 = 0.$$

Damit ist die Quadrik ein elliptischer Zylinder mit Achse z_3.

Falls $|b| < 1$, sind $(1-b)$ und $(1+b)$ positiv. Mit $z_1 = y_1$, $z_2 = \sqrt{(1-b)}\,y_2$ und $z_3 = \sqrt{1+b}\,y_3$ ist die affine Normalform

$$-z_1^2 - z_2^2 - z_3^2 + 1 = 0.$$

Damit ist die Quadrik ein Ellipsoid.

Der Fall $|b| > 1$ ergibt zwei Möglichkeiten:
(i) $b > 1 \Rightarrow (1-b) < 0$ und $(1+b) > 0$
Mit $z_1 = y_1$, $z_2 = \sqrt{-(1-b)}\, y_2$ und $z_3 = \sqrt{1+b}\, y_3$ ist die affine Normalform

$$-z_1^2 + z_2^2 - z_3^2 + 1 = 0.$$

(ii) $b < -1 \Rightarrow (1-b) > 0$ und $(1+b) < 0$
Mit $z_1 = y_1$, $z_2 = \sqrt{(1-b)}\, y_2$ und $z_3 = \sqrt{-(1+b)}\, y_3$ ist die affine Normalform

$$-z_1^2 - z_2^2 + z_3^2 + 1 = 0.$$

In beiden Fällen ist die Quadrik $\mathcal{Q}_b$ ein einschaliges Hyperboloid.

Aufgabe H 44. *Quadrikgleichung erstellen*
Bestimmen Sie eine Gleichung der Quadrik, die die Gerade $\left\{x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_1 = x_2 = 0\right\}$, den Kreis $\left\{x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 = 0, x_3 = 0\right\}$ sowie die Punkte $(1,-1,-1)$ und $(1,2,-1/2)$ enthält. Welche Gestalt hat diese Quadrik?

Lösungshinweise hierzu: Die Quadrik hat die Gleichung

$$a_{1,1}x_1^2 + a_{2,2}x_2^2 + a_{3,3}x_3^2 + a_{1,2}x_1x_2 + a_{1,3}x_1x_3 + a_{2,3}x_2x_3 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + c = 0\,.$$

Für $x_1 = x_2 = 0$ ergibt sich

$$a_{3,3}x_3^2 + b_3x_3 + c = 0\,.$$

Da dies für alle $x_3 \in \mathbb{R}$ gelten soll, folgt (Koeffizientenvergleich) $a_{3,3} = b_3 = c = 0\,.$
Für $x_3 = 0$ hat die Quadrikgleichung die Form ($c = 0$ eingesetzt):

$$a_{1,1}x_1^2 + a_{2,2}x_2^2 + a_{1,2}x_1x_2 + b_1x_1 + b_2x_2 = 0\,.$$

Mit

$$a_{1,1} = 1\,, a_{2,2} = 1, a_{1,2} = 0, b_1 = -2\,, b_2 = 0$$

entspricht dies der Kreisgleichung. (Dies ist nicht die einzige mögliche Lösung, man kann alle Koeffizienten auch noch mit einem Faktor $\neq 0$ skalieren.)
Es bleiben nun noch zwei unbestimmte Koeffizienten in der Gleichung

$$x_1^2 + x_2^2 + a_{1,3}x_1x_3 + a_{2,3}x_2x_3 - 2x_1 = 0\,.$$

die mit Hilfe der beiden Punkte bestimmt werden können:

$$\begin{aligned}(1,-1,-1) &: \quad 1^2 + 1^2 + a_{1,3}\cdot 1\cdot(-1) + a_{2,3}\cdot(-1)\cdot(-1) - 2 = 0 \Rightarrow a_{1,3} = a_{2,3} \\ (1,2,-1/2) &: \quad 1^2 + 2^2 + a_{1,3}\cdot 1\cdot(-1/2) + a_{2,3}\cdot 2\cdot(-1/2) - 2 = 0 \Rightarrow 3 = \frac{1}{2}a_{1,3} + a_{2,3}\end{aligned}$$

Also ist $a_{1,3} = a_{2,3} = 2$ und eine Gleichung der Quadrik ist

$$x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 - 2x_1 = 0\,.$$

Die zugehörige Matrix und erweiterte Matrix sind

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_{\mathsf{erw}} = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

mit $r = 3$ und $r_{\mathsf{erw}} = 4$ (Determinante jeweils $\neq 0$). Es handelt sich also um eine Mittelpunktsquadrik. Die Eigenwerte von A sind $1, 2, -1$, es handelt sich also um ein Hyperboloid und da es eine Gerade enthält, muss es einschalig sein.
Die Gestalt der Quadrik lässt sich natürlich auch durch eine Hauptachsentransformation auf die affine Normalform

$$z_1^2 - z_2^2 - z_3^2 + 1 = 0$$

ermitteln (Eigenvektoren: $(1,-1,0)^\intercal, (1,1,1)^\intercal, (1,1,-2)^\intercal$).

Aufgabe H 45. *Hauptachsentransformation*

Gegeben sei die Quadrik $\mathcal{Q}$: $4x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_3 - 4x_2x_3 + 8x_1 - 4x_2 + 8x_3 = 0$.

(a) Geben Sie die Matrixdarstellung von $\mathcal{Q}$ an.

(b) Ist der quadratische Teil der Quadrikgleichung von $\mathcal{Q}$ positiv definit?

(c) Geben Sie die erweiterte Matrix von $\mathcal{Q}$ an. Welchen Typ hat die Quadrik $\mathcal{Q}$?

(d) Bringen Sie $\mathcal{Q}$ auf euklidische Normalform und geben Sie ein kartesisches Koordinatensystem an, bezüglich dessen $\mathcal{Q}$ diese Normalform besitzt.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Die Matrixdarstellung der Quadrik $\mathcal{Q}$ ist

$$\mathcal{Q} = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid x^\intercal A x + 2a^\intercal x + c = 0 \right\}$$

wobei

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad c = 0.$$

(b) Das charakteristische Polynom zu A ist

$$(4-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda) - 4(2-\lambda) - 4(4-\lambda) = -\lambda(\lambda-3)(\lambda-6)$$

Die Eigenwerte des quadratischen Teils A sind somit $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 6$ und $\lambda_3 = 0$. Damit ist A nicht positiv definit, sondern positiv semidefinit.

(c) Die erweiterte Matrix von $\mathcal{Q}$ ist

$$A_{\text{erw}} = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 4 & -2 & 4 \\ \hline 4 & 4 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & -2 \\ 4 & 2 & -2 & 3 \end{array}\right)$$

Addition des doppelten der dritten Zeile auf die zweite und vierte Zeile ergibt

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 & 4 \\ 0 & 4 & 4 & -2 \\ -2 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

und nach Subtraktion des doppelten der vierten Zeile von den ersten beiden erhält man

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Es ist also $\text{Rg}(A_{\text{erw}}) = 3$ und $\text{Rg}(A) = 2$ (ein Eigenwert 0), folglich ist die Quadrik $\mathcal{Q}$ eine Mittelpunktsquadrik.

(d) Durch Lösen der entsprechenden linearen Gleichungssysteme erhalten wir die folgenden normierten Eigenvektoren

$$f_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad f_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Dies liefert die Transformationsmatrix

$$F := (f_1, f_2, f_3) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bezüglich des kartesischen Koordinatensystems $\mathbb{F} = (O; f_1, f_2, f_3)$ hat die Quadrik $\mathcal{Q}_b$ die Gleichung

$$3y_1^2 + 6y_2^2 + 12y_2 = 0.$$

Durch quadratische Ergänzung beseitigen wir den linearen Term in y_2. Wir bekommen dann

$$3y_1^2 + 6(y_2 + 1)^2 - 6 = 0.$$

Wir nehmen den neuen Ursprung P mit ${}_{\mathbb{F}}P = (0, -1, 0)^{\mathsf{T}}$, also $P = {}_{\mathbb{E}}P = \frac{1}{3}(-2, 1, -2)^{\mathsf{T}}$ und erhalten nach Division mit -6 bezüglich des kartesischen Koordinatensystems $\mathbb{G} = (P; f_1, f_2, f_3)$ die Gleichung

$$-\frac{1}{2}y_1^2 - y_2^2 + 1 = 0,$$

die einen elliptischen Zylinder beschreibt.

Aufgabe H 46. *Modell: Hyperbolisches Paraboloid (Sattelfläche)*
Gegeben sind die Ebenen $E_t = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = t\}$ für $t \in \mathbb{R}$ und die Quadrik Q, die Sie als Modell in den Übungen schon in der Hand hatten, mit der Gleichung $x_1^2 - x_2^2 + x_3 = 0$; im Modell dargestellt ist der Ausschnitt $-1 \leqq x_1, x_2 \leqq 1$. Sie finden das Modell auch unter:
www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/HM-Stroppel-Material/3D-Modelle/01

(a) Entscheiden Sie, für welche $t \in \mathbb{R}$ der Schnitt von Q und E_t die Form zweier sich schneidender Geraden, einer Ellipse bzw. einer Hyperbel hat.

Lösungshinweise hierzu: Für $t = 0$ erhält man die Schnittgleichung $x_1^2 - x_2^2 = 0$. Dies entspricht nach der Klassifikation der ebenen Quadriken einem Paar sich schneidender Geraden. Für $t \neq 0$ erhält man hingegen die Schnittgleichung $x_1^2 - x_2^2 + t = 0$, aus welcher sich die euklidische Normalform $x_1^2/t - x_2^2/t + 1 = 0$ ergibt. Daran erkennt man ebenfalls nach der Klassifikation der ebenen Quadriken, dass es sich hierbei um eine Hyperbel handelt. Damit sind alle $t \in \mathbb{R}$ abgedeckt und man kann schließen, dass der Schnitt nie die Form einer Ellipse hat.

(b) Das gelbe Linienpaar auf Q erfüllt die zusätzliche Gleichung $|x_1 + x_2| = \frac{1}{4}$. Ist es ein Geradenpaar? Parametrisieren Sie gegebenenfalls die beiden Geraden.

Lösungshinweise hierzu: Aus der zusätzlichen Gleichung ergibt sich

$$|x_1 + x_2| = \frac{1}{4} \Longleftrightarrow x_1 + x_2 = \pm\frac{1}{4} \Longleftrightarrow x_2 = -x_1 \pm \frac{1}{4}.$$

Eingesetzt in die Quadrikgleichung erhält man

$$x_1^2 - \left(-x_1 \pm \frac{1}{4}\right)^2 + x_3 \Longleftrightarrow x_3 = \mp\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{16}.$$

Wählt man nun für x_1 den Parameter $t \in \mathbb{R}$, so ergibt sich aus den beiden obigen Gleichungen eine Parametrisierung

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -t \pm \frac{1}{4} \\ \mp\frac{1}{2}t - \frac{1}{16} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \pm\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{16} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ \mp 1 \end{pmatrix}$$

der gelben Teilmenge. Man sieht daran, dass es sich um zwei Geraden handelt, die weder parallel sind noch einen Schnittpunkt haben.

(c) Welche der folgenden farbigen Teilmengen von Q entsteht als Schnitt von Q mit einer der folgenden Ebenen? Zu welcher Farbe bzw. Ebene gibt es keine Entsprechung?

- Grün • Schwarz • $x_3 = 0$ • $x_3 = -0{,}6$ • $x_1 = 0{,}2$
- Gelb • Magenta • $x_3 = 0{,}5$ • $x_2 = -0{,}6$ • $x_2 - 2x_3 = 1/8$

Lösungshinweise hierzu: Zunächst lässt sich die schwarze Teilmenge als Schnitt mit der Ebene $x_3 = 0$ identifizieren, denn nach Aufgabenteil (a) entspricht dieser Schnitt gerade einem sich schneidenden Geradenpaar.

Die magenta farbene Teilmenge lässt sich ebenfalls identifizieren als Schnitt mit der Ebene $x_1 = 0{,}2$, denn zum Einen muss es sich durch Inspektion um einen Schnitt mit einer Achsenparallelen Ebene handeln und zum Anderen sieht man, dass diese Teilmenge nahe dem Ursprung verläuft.

Damit ist geklärt wie die x_1- und wie die x_2-Achse im Modell liegen muss und daher auch welche der beiden Seiten die Ober- bzw. Unterseite ist. Denn entlang der x_2-x_3-Ebene ($x_1 = 0$), parallel zur Schnittebene für die magenta farbene Teilmenge, muss die Quadrik wie eine nach oben geöffnete Normalparabel ($x_3 = x_2^2$) verlaufen. Daher scheidet die Seite mit der magenta farbenen Parabel als Oberseite aus. D.h. die Seite mit der grünen Teilmenge ist die Oberseite und daher ist diese der Schnitt mit der Ebene $x_3 = 0{,}5$.

Ebenfalls durch Inspektion kann man erkennen, dass die gelbe Teilmenge ein windschiefes Geradenpaar ist und damit nicht als ein Schnitt mit einer Ebene entstanden sein kann. Andererseits kann man auch Aufgabenteil (b) benutzen. Mit den beiden Parametrisierungen der Geraden kann man sehen, dass diese keinen Schnittpunkt haben und auch nicht parallel verlaufen. Daher windschief sind und somit nicht in einer gemeinsamen Ebene liegen können. D.h. zur gelben Teilmenge gibt es keine Entsprechung.

Ebenfalls ohne Entsprechung sind damit die Ebenen $x_3 = -0{,}6$, $x_2 = -0{,}6$ und $x_2 - 2x_3 = 1/8$.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 47. *Ebene Quadriken*

Gegeben sei die Quadrik $\mathcal{Q} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + 10x_1x_2 + x_2^2 + 12x_1 + 12x_2 + 14 = 0\}$.

(a) Bestimmen Sie eine euklidische Normalform von $\mathcal{Q}$.

(b) Geben Sie das Koordinatensystem an, bezüglich dessen $\mathcal{Q}$ diese Normalform hat.

(c) Skizzieren Sie das Koordinatensystem und die Quadrik im Ausgangskoordinatensystem.

(d) Sei $\mathcal{Q}'$ die Vereinigungsmenge der beiden Asymptoten von $\mathcal{Q}$. Geben Sie im Ausgangskoordinatensystem eine Quadrikgleichung für $\mathcal{Q}'$ an.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Die Matrixdarstellung der Quadrik $\mathcal{Q}$ lautet $\mathcal{Q} = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x^\intercal Ax + 2a^\intercal x + c = 0\right\}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, \qquad a = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}, \qquad c = 14.$$

Diagonalisieren: Die Eigenwerte von A lauten $\lambda_1 = -4$, $\lambda_1 = 6$ und die dazugehörenden Eigenvektoren $v_1 = (1, -1)^\intercal$, $v_2 = (1, 1)^\intercal$. Bzgl. des Koordinatensystem

$$\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

lässt sich die Quadrik als $-4y_1^2 + 6y_2^2 + 12\sqrt{2}y_2 + 14 = 0$ schreiben. Dabei ist $y = {}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}(x) = F^\intercal x$ mit

$$F = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

schreiben.

Verschieben: Wir eliminieren den linearen Term durch quadratisches Ergänzen. Wir formen um

$$\begin{array}{cccc} -4y_1^2 & +6y_2^2 + 12\sqrt{2}y_2 & +14 & = & 0 \\ -4y_1^2 & +6(y_2^2 + 2\sqrt{2}y_2) & +14 & = & 0 \\ -4y_1^2 & +6(y_2^2 + 2\sqrt{2}y_2 + 2 - 2) & +14 & = & 0 \\ -4y_1^2 & +6((y_2 + \sqrt{2})^2 - 2) & +14 & = & 0 \\ -4y_1^2 & +6(y_2 + \sqrt{2})^2 & +2 & = & 0 \\ -4z_1^2 & +6(z_2)^2 & +2 & = & 0 \\ -2z_1^2 & +3(z_2)^2 & +1 & = & 0 \end{array}$$

Dabei ist $z_1 := y1$ und $z_2 := y_2 + \sqrt{2}$. Die euklidische Normalform von von $\mathcal{Q}$ lautet demnach $-2z_1^2 + 3z_2^2 + 1 = 0$.

(b) Gesucht also ein Koordinatensystem $\mathbb{G}$ bzgl. dessen $z = {}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{E}}(x)$ gilt. Aus Teil (a) ist die Transformation $y = {}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}(x) = F^{\intercal}x$ bekannt, es fehlt noch der Verschiebeanteil. Die Verschiebung hat bzgl. $\mathbb{F}$ stattgefunden.

$$ {}_{\mathbb{G}}z = {}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{F}}({}_{\mathbb{F}}y) = {}_{\mathbb{F}}y - {}_{\mathbb{F}}P \text{ mit } {}_{\mathbb{F}}P = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}. $$

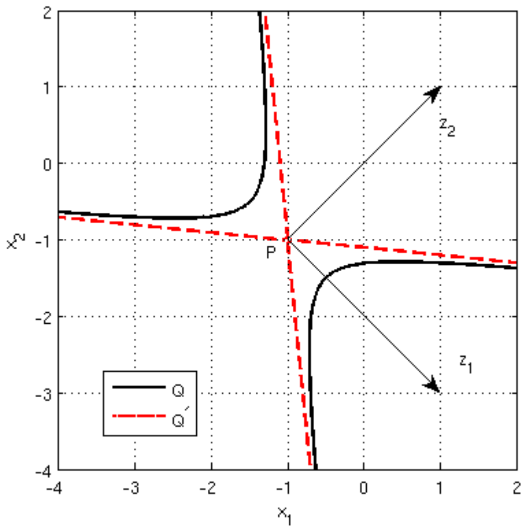
Der neue Ursprung muss noch bzgl. $\mathbb{E}$ dargestellt werden:

$$ {}_{\mathbb{E}}P = {}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}({}_{\mathbb{F}}P) = F({}_{\mathbb{F}}P) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}. $$

Das gesuchte Koordinatensystem lautet damit

$$ \mathbb{G} = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}; \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right). $$

(c) Skizze:



Die rot gestrichelte Linie bezieht sich auf die in Teil (d) geforderte Quadrik $\mathcal{Q}'$.

(d) Die Asymptoten von $\mathcal{Q}$ bilden ein sich schneidendes Geradenpaar. Im Vergleich zur Hyperbel $\mathcal{Q}$ besitzt das sich schneidende Geradenpaar in Euklidischer Normalform keinen absolut Wert. Die gesuchte Quadrik lautet also $\mathcal{Q} : -2z_1^2 + 3z_2^2 = 0$ bzgl. $\mathbb{G}$ und bzgl. des Ausgangskoordinatensystem $\mathbb{E}$

$$ \mathcal{Q}' = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + 10x_1x_2 + x_2^2 + 12x_1 + 12x_2 + 12 = 0 \right\}. $$

Aufgabe H 48. *Quadrikgleichung transformieren*

Wir betrachten die Quadrik $\mathcal{Q} := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + 4x_2 + 3x_3 = 0\}$ und das kartesische Koordinatensystem $\mathbb{F} := \left((0,0,0)^{\intercal}; (1,0,0)^{\intercal}, \tfrac{1}{5}(0,4,3)^{\intercal}, \tfrac{1}{5}(0,3,-4)^{\intercal}\right)$.

(a) Bestimmen Sie eine Gleichung von $\mathcal{Q}$ bezüglich $\mathbb{F}$.

Lösungshinweise hierzu: Die Gleichung der Quadrik lautet $x^\intercal A x + 2a^\intercal x + c = 0$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}, \quad c = 0.$$

Die Koordinatentransformation ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$ ist gegeben also

$${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}} : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Damit ist die transformierte Gleichung gegeben als

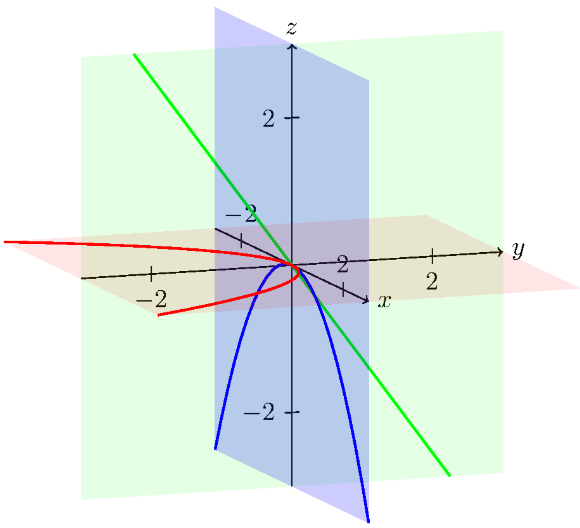
$$y_1^2 + \frac{5}{2} y_2 = 0.$$

(b) Bestimmen Sie die euklidische Normalform, die Gestalt und den Typ von $\mathcal{Q}$.

Lösungshinweise hierzu: Die oben bestimmte Gleichung ist die euklidische Normalform eines parabolischen Zylinders.

(c) Zeichnen Sie in das Ausgangskoordinatensystem die Schnitte von $\mathcal{Q}$ mit der Ebene $x_1 = 0$, der Ebene $x_2 = 0$ und der Ebene $x_3 = 0$.

Lösungshinweise hierzu:



Aufgabe H 49. *Quadriken im* $\mathbb{R}^3$

Gegeben sei die Quadrik $\mathcal{Q} := \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_1^2 + 4x_2^2 - 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 6x_1 - 12x_2 + 7 = 0 \right\}$.

(a) Bestimmen Sie den Typ von $\mathcal{Q}$ mittels der erweiterten Matrix.

(b) Bestimmen Sie die euklidische Normalform und die Gestalt von $\mathcal{Q}$.

(c) Bestimmen Sie ein Koordinatensystem $\mathbb{F}$, bezüglich dessen $\mathcal{Q}$ diese Normalform hat.

(d) Bestimmen Sie ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$ und ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Die Gleichung der Quadrik lautet $x^\intercal Ax + 2a^\intercal x + c = 0$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c = 7, \quad A_{\text{erw}} = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -6 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \\ -6 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Da der Rang von A 2 ist und der Rang von A_{erw} ist 3. Also handelt es sich um eine Mittelpunktsquadrik.

(b) Das charakteristische Polynom der Matrix A lautet $\chi_A = (-2 - \lambda)(\lambda - 5)\lambda$ und die Eigenwerte sind damit

$$\lambda_1 = -2, \qquad \lambda_2 = 5, \qquad \text{und} \qquad \lambda_3 = 0\,.$$

Zur Bestimmung der Eigenvektoren ergeben sich die drei Gleichungssysteme

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 2 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und daraus die Eigenvektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix der orthogonalen Transformation $y = F^\intercal x$ lautet also

$$F = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ \sqrt{5} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und diese transformiert den linearen Anteil der Gleichung auf

$$\tilde{a} = F^\intercal a = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dies ergibt die transformierte Gleichung

$$-2y_1^2 + 5y_2^2 + \frac{30}{\sqrt{5}} y_2 + 14 = 0\,.$$

Quadratische Ergänzung liefert

$$-2y_1^2 + 5\left(y_2 + \frac{3}{\sqrt{5}}\right)^2 - 2 = 0\,.$$

Die euklidische Normalform ergibt sich schließlich aus $z = y + P$, wobei $P = \left(0, \frac{3}{\sqrt{5}}, 0\right)^\mathsf{T}$. Sie lautet

$$z_1^2 - \frac{5}{2} z_2^2 + 1 = 0\,.$$

Die Gestalt ist ein hyperbolischer Zylinder.

(c) Wir erhalten damit

$$\mathbb{F} = \left(\frac{3}{5}\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\right).$$

(d) Die Koordinatenwechsel ergeben sich zu:

$${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}} : \begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}0 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -2\\ \sqrt{5} & 0 & 0\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix} - \frac{3}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$$

und

$${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}} : \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}0 & 0 & \sqrt{5}\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} + \frac{3}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Aufgabe H 50. *Modell: Kegelschnitte*

Sei $\mathcal{Q}$ der durch die Gleichung $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$ gegebene Doppelkegel; im Modell dargestellt ist der Bereich $-\frac{7}{2} \leqq x_1, x_2, x_3 \leqq \frac{7}{2}$. Außerdem sei in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$ eine Ebene E_α gegeben durch $x_1 + \alpha x_3 = 1$ im Standardkoordinatensystem.

(a) Welche Ebenen erhalten Sie für $\alpha \in \{-1, 0, 2\}$?
Wie hängen diese Ebenen mit dem Modell zusammen?

(b) Die Basis B_α: $b_1 := \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}(1,0,\alpha)^\mathsf{T}, b_2 := (0,1,0)^\mathsf{T}, b_3 := \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}(-\alpha,0,1)^\mathsf{T}$ von $\mathbb{R}^3$ liefert das kartesische Koordinatensystem $\mathbb{F}_\alpha = (\frac{1}{1+\alpha^2}(1,0,\alpha)^\mathsf{T}; B_\alpha)$. Geben Sie die Ebene E_α in Hessescher Normalform bezüglich des Koordinatensystems $\mathbb{F}_\alpha$ an. Prüfen Sie, ob $\mathbb{F}'_\alpha := (\frac{1}{1+\alpha^2}(1,0,\alpha)^\mathsf{T}; b_2, b_3)$ ein kartesisches Koordinatensystem von E_α ist.

(c) Geben Sie eine Quadrikgleichung für den Doppelkegel $\mathcal{Q}$ bezüglich des Koordinatensystems $\mathbb{F}_\alpha$ an.

(d) Geben Sie eine Gleichung für die Schnittquadrik $E_\alpha \cap \mathcal{Q}$ bezüglich $\mathbb{F}'_\alpha$ an. Bestimmen Sie die Gestalt dieser Schnittquadrik in Abhängigkeit von α.

www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/HM-Stroppel-Material/3D-Modelle/02

Lösungshinweise hierzu:

(a) Man erhält:

- $\alpha = -1$: $x_1 - x_3 = 1$, das ist im Modell die blaue Ebene,
- $\alpha = 0$: $x_1 = 1$, das ist die grüne Ebene,
- $\alpha = 2$: $x_1 + 2x_3 = 1$, diese Ebene ist parallel (aber nicht gleich) zur gelben Ebene.

(b) Bezeichne mit $x = (x_1, x_2, x_3)^\intercal$ die Standardkoordinaten, mit $y = (y_1, y_2, y_3)^\intercal$ die $\mathbb{F}_\alpha$-Koordinaten, dann lässt sich die Koordinatentransformation wie folgt darstellen:

$$x = {}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}_\alpha}(y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}} & 0 & -\frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}} \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} \frac{1}{1+\alpha^2} \\ 0 \\ \frac{\alpha}{1+\alpha^2} \end{pmatrix}.$$

Es ergibt sich daraus $x_2 = y_2$, sowie

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}y_1 - \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}y_3 + \frac{1}{1+\alpha^2}, \qquad x_3 = \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}y_3 + \frac{\alpha}{1+\alpha^2}.$$

Einsetzen in die Ebenengleichung $x_1 + \alpha x_3 = 1$ liefert die Hessesche Normalform in y-Koordinaten:

$$E_\alpha\colon \quad y_1 = 0.$$

Der Ursprung von $\mathbb{F}'_\alpha$ liegt auf E_α, die Basisvektoren b_2 und b_3 sind normiert, orthogonal zueinander und Richtungsvektoren von E_α. Also ist $\mathbb{F}'_\alpha$ ein kartesisches Koordinatensystem von E_α.

(c) Setze die Beziehungen $x_1 = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}y_1 - \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}y_3 + \frac{1}{1+\alpha^2}$, $x_2 = y_2$ und $x_3 = \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}y_3 + \frac{\alpha}{1+\alpha^2}$ in die Quadrikgleichung $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$ von Q ein:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}y_1 - \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}y_3 + \frac{1}{1+\alpha^2}\right)^2 + y_2^2 - \left(\frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}y_3 + \frac{\alpha}{1+\alpha^2}\right)^2 = 0.$$

Ausmultiplizieren und Zusammenfassen endet in

$$\frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2}y_1^2 + y_2^2 + \frac{\alpha^2-1}{1+\alpha^2}y_3^2 - \frac{4\alpha}{1+\alpha^2}y_1y_3 + \frac{2-2\alpha^2}{(1+\alpha^2)^{3/2}}y_1 - \frac{4\alpha}{(1+\alpha^2)^{3/2}}y_3 + \frac{1-\alpha^2}{(1+\alpha^2)^2} = 0.$$

Man darf sich hier nicht darüber wundern, dass man eine komplizierte Gleichung erhält, denn die y-Koordinaten sind der Ebene E_α angepasst, nicht der Quadrik Q.

(d) Eine Gleichung für die Schnittquadrik $E_\alpha \cap Q$ erhält man durch Einsetzen der Ebenengleichung in die Quadrikgleichung, und zwar alles in y-Koordinaten. Ein analoges

Vorgehen in x-Koordinaten würde ein verzerrtes Bild der Schnittquadrik liefern (genauer gesagt eine Projektion in eine der x-Koordinatenebenen).
Setze also $y_1 = 0$ in die Gleichung aus (c) ein:

$$y_2^2 + \frac{\alpha^2 - 1}{1+\alpha^2} y_3^2 - \frac{4\alpha}{(1+\alpha^2)^{3/2}} y_3 + \frac{1-\alpha^2}{(1+\alpha^2)^2} = 0.$$

Dies ist eine ebene Quadrik in der y_2-y_3-Ebene (beschrieben durch das Koordinatensystem $\mathbb{F}'_\alpha$). Im Fall $\alpha^2 = 1$ ergibt sich

$$y_2^2 - \sqrt{2}\alpha y_3 = 0.$$

Dies beschreibt eine Parabel.
Im Fall $\alpha^2 \neq 1$ muss man quadratisch ergänzen (die Matrix dieser Quadrik ist bereits diagonal):

$$\begin{aligned} y_2^2 + \frac{\alpha^2-1}{1+\alpha^2}\left(y_3 - \frac{2\alpha}{(\alpha^2-1)\sqrt{1+\alpha^2}}\right)^2 - \frac{4\alpha^2}{(\alpha^2-1)(1+\alpha^2)^2} + \frac{1-\alpha^2}{(1+\alpha^2)^2} &= 0, \\ y_2^2 + \frac{\alpha^2-1}{1+\alpha^2}\left(y_3 - \frac{2\alpha}{(\alpha^2-1)\sqrt{1+\alpha^2}}\right)^2 - \frac{4\alpha^2 + (\alpha^2-1)^2}{(\alpha^2-1)(1+\alpha^2)^2} &= 0, \\ y_2^2 + \frac{\alpha^2-1}{1+\alpha^2}\left(y_3 - \frac{2\alpha}{(\alpha^2-1)\sqrt{1+\alpha^2}}\right)^2 - \frac{(\alpha^2+1)^2}{(\alpha^2-1)(1+\alpha^2)^2} &= 0, \\ y_2^2 + \frac{\alpha^2-1}{1+\alpha^2}\left(y_3 - \frac{2\alpha}{(\alpha^2-1)\sqrt{1+\alpha^2}}\right)^2 - \frac{1}{(\alpha^2-1)} &= 0, \\ -(\alpha^2-1)y_2^2 - \frac{(\alpha^2-1)^2}{1+\alpha^2}\left(y_3 - \frac{2\alpha}{(\alpha^2-1)\sqrt{1+\alpha^2}}\right)^2 + 1 &= 0. \end{aligned}$$

Setze $z_2 = y_2$ und $z_3 = y_3 - \frac{2\alpha}{(\alpha^2-1)\sqrt{1+\alpha^2}}$, dann erhält man

$$-(\alpha^2-1)z_2^2 - \frac{(\alpha^2-1)^2}{1+\alpha^2} z_3^2 + 1 = 0.$$

Im Fall $\alpha^2 > 1$ handelt es sich demnach um eine Ellipse, im Fall $\alpha^2 < 1$ um eine Hyperbel.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 51. *Häufungspunkte*

Bestimmen Sie jeweils die Häufungspunkte der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(a) $a_n = \begin{cases} \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) & \text{für } n \text{ gerade} \\ \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases}$

(b) $a_n = \frac{4n^2+3}{3n^2-9}(-1)^{n+1}$

(c) $a_n = n^{((-1)^{n+1})}$

(d) $a_n = n^{-1} + \sqrt{1 - \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{n\pi}{3}\right)\right)^2}$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Man wählt die Teilfolgen $(a_{8k})_{k\in\mathbb{N}}$, $(a_{2+8k})_{k\in\mathbb{N}}$, $(a_{4+8k})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(a_{6+8k})_{k\in\mathbb{N}}$. Jedes Folgenglied dieser Teilfolgen ist ein gerades Folgenglied der eigentlichen Folge. Damit wird immer der Cosinus gewählt. Für die 4 Teilfolgen gilt nun

$$a_{8k} = \cos(2k\pi) = 1, \qquad a_{2+8k} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = 0,$$
$$a_{4+8k} = \cos(\pi + 2k\pi) = -1, \qquad a_{6+8k} = \cos\left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right) = 0.$$

Außerdem wird bis auf a_2, a_4 und a_6 jedes gerade Folgenglied durch diese Teilfolgen abgedeckt. Nun werden die Teilfolgen $(a_{1+8k})_{k\in\mathbb{N}}$, $(a_{3+8k})_{k\in\mathbb{N}}$, $(a_{5+8k})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(a_{7+8k})_{k\in\mathbb{N}}$ gewählt. Diese enthalten nur ungerade Folgenglieder der ursprünglichen Folge und decken bis auf a_1, a_3, a_5 und a_7 alle ungeraden Folgenglieder dieser ab. Damit wird immer der Sinus gewählt und es gilt

$$a_{1+8k} = \sin\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad a_{3+8k} = \sin\left(\frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right) = \frac{1}{\sqrt{2}},$$
$$a_{5+8k} = \sin\left(\frac{5\pi}{4} + 2k\pi\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad a_{7+8k} = \sin\left(\frac{7\pi}{4} + 2k\pi\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Man hat somit konstante Teilfolgen und kann an diesen die Häufungspunkte der Folge ablesen. Diese sind $-1, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}$ und 1.

(b) Man wählt die Teilfolgen aller geraden bzw. aller ungeraden Folgenglieder. Für die Teilfolge der geraden Folgenglieder ist

$$\frac{4n^2+3}{3n^2-9}(-1)^{n+1} = -\frac{4+\frac{3}{n^2}}{3-\frac{9}{n^2}} \to -\frac{4}{3}.$$

Für die Teilfolge der ungeraden Folgenglieder ist

$$\frac{4n^2+3}{3n^2-9}(-1)^{n+1} = \frac{4+\frac{3}{n^2}}{3-\frac{9}{n^2}} \to \frac{4}{3}.$$

Da beide Teilfolgen die Folge komplett abdecken sind die Häufungspunkte damit $-\frac{4}{3}$ und $\frac{4}{3}$.

(c) Man wählt wieder die Teilfolgen aller geraden bzw. aller ungeraden Folgenglieder. Für die Teilfolge der geraden Folgenglieder ist $n^{((-1)^{n+1})} = n^{-1} = \frac{1}{n}$. Für die Teilfolge der ungeraden Folgenglieder ist $n^{((-1)^{n+1})} = n$. Diese beiden Teilfolgen streben nun gegen 0 bzw. $+\infty$. Da beide Teilfolgen die komplette Folge abdecken sind diese beiden Werte damit auch die Häufungspunkte der Folge.

(d) Man wählt die Teilfolgen $(a_{6k})_{k\in\mathbb{N}}$, $(a_{1+6k})_{k\in\mathbb{N}}$, $(a_{2+6k})_{k\in\mathbb{N}}$, $(a_{3+6k})_{k\in\mathbb{N}}$, $(a_{4+6k})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(a_{5+6k})_{k\in\mathbb{N}}$. Diese decken die eigentliche Folge bis auf $a_1, \ldots, a_5$ komplett ab. Nun gilt mit $\sqrt{1-(\cos(x))^2} = \sqrt{(\sin(x))^2} = |\sin(x)|$, dass

$$
\begin{aligned}
a_{6k} = \frac{1}{6k} + \left|\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{6k\pi}{3}\right)\right| &= \frac{1}{6k} + \left|\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)\right| &&= \frac{1}{6k} + 1 &&\to 1 \\
a_{1+6k} &= \frac{1}{1+6k} + \left|\sin\left(\frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right)\right| &&= \frac{1}{1+6k} + \frac{1}{2} &&\to \frac{1}{2} \\
a_{2+6k} &= \frac{1}{2+6k} + \left|\sin\left(\frac{7\pi}{6} + 2k\pi\right)\right| &&= \frac{1}{2+6k} + \frac{1}{2} &&\to \frac{1}{2} \\
a_{3+6k} &= \frac{1}{3+6k} + \left|\sin\left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)\right| &&= \frac{1}{3+6k} + 1 &&\to 1 \\
a_{4+6k} &= \frac{1}{4+6k} + \left|\sin\left(\frac{11\pi}{6} + 2k\pi\right)\right| &&= \frac{1}{4+6k} + \frac{1}{2} &&\to \frac{1}{2} \\
a_{5+6k} &= \frac{1}{5+6k} + \left|\sin\left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right)\right| &&= \frac{1}{5+6k} + \frac{1}{2} &&\to \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Und damit sind die Häufungspunkte der Folge $\frac{1}{2}$ und 1.

Aufgabe H 52. *Rekursive Folge, Monotonie und Beschränktheit*

Sei $q \in \mathbb{R}$. Gegeben sei die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die rekursiv durch $a_1 := 2$ und $a_{n+1} := qa_n + 3$ für $n \in \mathbb{N}$ definiert ist.

(a) Geben Sie a_n durch einen Ausdruck an, der nicht mehr rekursiv von anderen Folgengliedern abhängt.

(b) Für welche $q \in \mathbb{R}$ ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton?

(c) Für welche $q \in \mathbb{R}$ ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt?

(d) Bestimmen Sie die Häufungspunkte der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für $q \in \{-1, -1/2, 1\}$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es ist für $n > 1$

$$\begin{aligned} a_n &= qa_{n-2} + 3 \\ &= q(qa_{n-2} + 3) + 3 \\ &= \ldots \\ &= q(\ldots q(2q + 3) + \ldots + 3) + 3 \\ &= 2q^n + 3(q^{n-1} + \ldots + q + 1) \\ &= 2q^n + 3\sum_{k=0}^{n-1} q^k. \end{aligned}$$

(b) Man betrachte die Differenz direkt aufeinander folgender Folgenglieder. Für das $n+1$-te und n-te Folgenglied mit $n \geqq 1$ ist dann mit Teil (a)

$$a_{n+1} - a_n = 2q^{n+1} + 3\sum_{k=0}^{n} q^k - (2q^n + 3\sum_{k=0}^{n-1} q^k) = 2q^{n+1} + 3q^n - 2q^n = q^n(2q + 1).$$

Somit ist die Differenz für $q > 0$ immer größer als 0 und damit ist die Folge sogar streng monoton wachsend. Für $q = 0$ ist das erste Folgenglied 2 und alle weiteren gleich 3 und somit monoton wachsend. Für $q = -\frac{1}{2}$ ist die Differenz der Folgenglieder immer gleich 0 und die Folge selbst konstant immer gleich 2 und somit monoton. Für $-\infty < q < -\frac{1}{2}$ und $-\frac{1}{2} < q < 0$ hingegen ist die Differenz abwechselnd positiv und negativ. Daher wächst und fällt die Folge abwechselnd und ist nicht monoton für diese Werte.

(c) Mit Teil (b) für $q \in \{0, -\frac{1}{2}\}$ ist 2 bzw. 3 eine untere bzw. eine obere Schranke und damit ist die Folge für diese Werte beschränkt.

Für $q > 0$ ist die Folge nach unten beschränkt, z.B. durch ihr erstes Folgenglied $a_1 = 2$, denn die Folge ist in diesem Fall streng monoton wachsend und kann diese Schranke somit nicht unterbieten. Untersucht man in diesem Fall obere Schranken, so wird man für $q \geqq 1$ keine finden. Denn für jede natürliche Zahl M gilt hier $a_M > M$:

$$a_1 = 2 > 1 \text{ und } a_M = \underbrace{2q^M}_{>0} + 3\sum_{k=0}^{M-1} \underbrace{q^k}_{\geqq 1} > 3\sum_{k=0}^{M-1} 1 = 3M > M$$

für $M > 1$. Für $0 < q < 1$ hingegen gilt $a_n < \frac{3}{1-q}$ für $n \in \mathbb{N}$. Dafür berechnet man zunächst

$$(1-q)\sum_{k=0}^{n} q^k = \sum_{k=0}^{n} q^k - \sum_{k=0}^{n} q^{k+1} = \sum_{k=0}^{n} q^k - \sum_{k=1}^{n+1} q^k = 1 - q^{n+1}$$

und somit gilt für $q \neq 1$, dass $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$. Damit lässt sich a_n vereinfachen zu

$$a_n = 2q^n + 3\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{2q^n - 2q^{n+1}}{1-q} + \frac{3 - 3q^n}{1-q} = \frac{3 - (q^n + 2q^{n+1})}{1-q}.$$

Da nun in diesem Fall $q^n + 2q^{n+1} > 0$ kann man den Zähler des Bruches nach oben abschätzen, indem wir diesen positiven Teil durch 0 ersetzen und somit weniger abziehen. Damit gilt insbesondere $a_n < \frac{3}{1-q}$. Für $0 < q < 1$ ist die Folge somit beschränkt, für $1 \leqq q$ hingegen nur nach unten.

Es bleibt der Fall $q < 0$ mit $q \neq -\frac{1}{2}$. Sei zunächst $q < -1$. Dann gilt für den Betrag der Differenz von aufeinander folgender Folgenglieder nach Teil (b), dass

$$|a_{n+1} - a_n| = |q^n(2q+1)| = |q|^n \cdot |2q+1| \to +\infty.$$

Zudem ist die Differenz abwechselnd positiv und negativ, woraus man schließt, dass die Folge in diesem Fall nicht beschränkt ist, sondern sowohl gegen $+\infty$ als auch $-\infty$ strebt. Als nächstes sei nun $q = -1$. In diesem Fall ist die Differenz der Folgenglieder

$$a_{n+1} - a_n = q^n(2q+1) = (-1)^n(-2+1) = (-1)^n(-1) = (-1)^{n+1}.$$

Somit wird abwechselnd 1 abgezogen und dann 1 dazuaddiert. In der Tat wechselt die Folge in diesem Fall zwischen 2 und 1 hin und her und ist somit von diesem beiden Werten beschränkt. Zuletzt ist der Fall $-1 < q < 0$ mit $q \neq -\frac{1}{2}$ zu untersuchen. Ähnlich wie im Fall $0 < q < 1$ lässt sich hier der Betrag jedes Folgengliedes abschätzen durch

$$|a_n| = |2q^n + 3\sum_{k=0}^{n-1} q^k| \leqq 2|q|^n + 3\sum_{k=0}^{n-1} |q|^k = \frac{3 - (|q|^n + 2|q|^{n+1})}{1-|q|} < \frac{3}{1-|q|}.$$

D.h. man erhällt $\frac{-3}{1-|q|} < a_n < \frac{3}{1-|q|}$ und sieht damit, dass die Folge in diesem Fall beschränkt ist.

Zusammengefasst ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt für $q \in [-1, 1)$, nur nach unten beschränkt für $q \in [1, \infty)$ und unbeschränkt für $q \in (-\infty, -1)$.

(d) Mit Teil (c) gilt: Für $q = -1$ sind die Häufungspunkte der Folge 1 und 2, für $q = -\frac{1}{2}$ ist der Häufungspunkt 2 und für $q = 1$ ist der Häufungspunkt $+\infty$.

Aufgabe H 53. *Monotonie und Beschränktheit*

Untersuchen Sie die Folgen auf Monotonie und Beschränktheit. Geben Sie dabei jeweils zwei obere beziehungsweise zwei untere Schranken an, falls solche existieren.

(a) $\left(\dfrac{2n^2+2n+7}{n^2+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

(b) $\left(n \cdot 2^{1-n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

(c) $\left(2 + \left(-\frac{1}{4}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$

(d) $\left(3\,\pi\,n^2 + 2n\,\cos(\pi n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Sei die gegebene Folge mit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bezeichnet. Um diese Folge auf Monotonie und Beschränktheit zu untersuchen, ist es hilfreich, die ersten Folgenglieder zu berechnen.

$$a_1 = \frac{11}{2} = 5{,}5\ , \quad a_2 = \frac{19}{5} = 3{,}8\ , \quad a_3 = \frac{31}{10} = 3{,}1\ , \quad \ldots$$

Diese Ergebnisse legen nahe, dass die Folge monoton fallend ist. Um dies zu zeigen, untersucht man die Differenz zweier aufeinanderfolgender Folgenglieder

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n \overset{!}{\leqq} 0 &\iff a_{n+1} \leqq a_n \\ &\iff \frac{2(n+1)^2 + 2(n+1) + 7}{(n+1)^2 + 1} \leqq \frac{2n^2 + 2n + 7}{n^2 + 1} \\ &\iff (2(n+1)^2 + 2(n+1) + 7)(n^2 + 1) \leqq (2n^2 + 2n + 7)((n+1)^2 + 1) \\ &\iff 0 \leqq 2n^2 + 12n + 3 \end{aligned}$$

Die letzte Umformung ergibt eine Ungleichung, die gültig ist für alle $n \geqq 1$. Damit ist die untersuchte Folge monoton fallend und folglich auch nach oben beschränkt durch $a_1 = \frac{11}{2}$ oder eine beliebige größere Zahl wie z. B. 6. Um eine untere Schranke zu finden, schätzt man die Folge nach unten ab und erhält

$$a_n = \frac{2n^2 + 2n + 7}{n^2 + 1} \geqq \frac{2n^2 + 2n}{n^2 + 1} = \frac{2n(n+1)}{n^2 + 1} = \frac{2(n+1)}{n + \frac{1}{n}} \geqq 2.$$

Damit hat man für alle $n \geqq 1$ eine untere Schranke gefunden, nämlich 2 oder jede beliebige kleinere Zahl wie z. B. 1. Also ist die betrachtete Folge beschränkt.

(b) Sei die gegebene Folge wieder mit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bezeichnet. Aus der Struktur der Folge erkennt man, dass jedes Folgenglied echt positiv, d. h. insbesondere ungleich 0 ist. Um die Monotonie zu untersuchen, hilft wiederum die Berechnung der ersten Folgeglieder.

$$a_1 = 1\ , \quad a_2 = \frac{1}{4}\ , \quad a_3 = \frac{3}{256}\ , \quad \ldots$$

Auch diese Folge scheint also monoton fallend zu sein. Um dies zu überprüfen, bietet es sich in diesem Fall an den Quotienten von zwei aufeinanderfolgenden Folgegliedern zu untersuchen.

$$\begin{aligned} a_{n+1} \overset{!}{\leqq} a_n &\iff \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqq 1 \\ &\iff \frac{(n+1)2^{1-(n+1)^2}}{n2^{1-n^2}} = \frac{n+1}{n}\frac{2^{1-n^2-2n-1}}{2^{1-n^2}} = \frac{n+1}{n}\frac{1}{2^{2n+1}} \\ &\iff \left(1 + \frac{1}{n}\right)\frac{1}{2^{2n+1}} \leqq 2\frac{1}{2^{2n+1}} = \frac{1}{2^{2n}} = \frac{1}{4^n} \leqq 1 \end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung ist eine wahre Aussage für alle $n \geqq 1$. Daher ist die Folge monoton fallend und insbesondere nach oben beschränkt durch $a_1 = 1$ oder jede andere größere Zahl wie z. B. 2. Eine untere Schranke erhält man aus der anfänglichen Aussage, dass alle Folgenglieder echt positiv sind. Somit sind z. B. 0 oder -1 untere Schranken für die Folge, die damit insbesondere beschränkt ist.

(c) Es bezeichnet $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die gegebene Folge. Berechnen der ersten Folgeglieder liefert

$$a_1 = \frac{7}{4}\,, \quad a_2 = \frac{33}{16}\,, \quad a_3 = \frac{127}{64}\,, \quad a_4 = \frac{513}{256}\,, \quad a_5 = \frac{2047}{1024}\,, \quad \ldots$$

Mit diesen Berechnungen und der Struktur der Folge erkennt man, dass die Folgenglieder um den Wert 2 springen und damit die Folge nicht monoton sein kann. Obere und untere Schranken kann man durch Abschätzen erhalten. Es gilt nämlich

$$a_n = 2 + \left(-\frac{1}{4}\right)^n \leqq 2 + \frac{1}{16} = \frac{33}{16} \quad \text{bzw.} \quad a_n = 2 + \left(-\frac{1}{4}\right)^n \geqq 2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$$

Somit erält man als obere Schranken z. B. $\frac{33}{16}$ und 3 und als untere Schranken $\frac{7}{4}$ und 1. Inbesondere ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ damit beschränkt.

(d) Mit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei die gegebene Folge bezeichnet. In Analogie zur bisherigen Vorgehensweise ist es auch in diesem Fall wieder hilfreich die ersten Folgenglieder zu berechnen, um Vermutungen über Monotonie und Beschränktheit aufzustellen. Dabei ist es sinnvoll zu benutzen, dass $\cos(\pi n) = (-1)^n$ gilt.

$$a_1 = 3\pi - 2 \approx 7{,}4\,, \quad a_2 = 12\pi + 4 \approx 41{,}7\,, \quad a_3 = 27\pi - 6 \approx 78{,}8\,, \quad \ldots$$

Die Rechnungen legen nahe, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend. Um dies zu überprüfen, kann man wie bisher verfahren und die Differenz zweier aufeinanderfolgender Folgeglieder untersuchen.

$$\begin{aligned}
a_{n+1} - a_n \overset{!}{\geqq} 0 &\iff a_{n+1} \geqq a_n \\
&\iff 3\,\pi\,(n+1)^2 + 2(n+1)\,\cos(\pi(n+1)) \geqq 3\,\pi\,n^2 + 2n\,\cos(\pi n) \\
&\iff 3\,\pi\,(2n+1) + 2(n+1)\,(-1)^{n+1} \geqq 2n\,(-1)^n \\
&\iff 3\,\pi\,(2n+1) - 2(n+1)\,(-1)^n - 2n\,(-1)^n \geqq 0 \\
&\iff 3\,\pi\,(2n+1) - (-1)^n\,2(2n+1) \geqq 0 \\
&\iff (3\,\pi\, - 2(-1)^n)(2n+1) \geqq 0
\end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung ist gültig für alle $n \geqq 1$, da $3\pi > 2$ und somit der vordere wie auch der hintere Faktor stets positiv sind. Die Folge besitzt somit die untere Schranke $a_1 = 3\pi - 2$ und jede beliebige kleinere Zahl, wie z. B. 7. Eine obere Schranke findet man hingegen nicht. Dazu kann man die Teilfolge $a_{2k} = 3\,\pi\,4k^2 + 4k \to \infty\,(k \to \infty)$ betrachten und erkennt, dass damit die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht beschränkt sein kann.

Aufgabe H 54. *Rekursive Folge, Definition Grenzwert*

Für die Folge $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ gelte $a_1 = \frac{1}{2}$ und $a_n = (a_{n-1}^{-1} + 2)^{-1}$ für $n \geqq 2$.

(a) Geben Sie eine geschlossene Formel für a_n an und zeigen Sie diese mit Induktion.

(b) Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Finden Sie dazu ein n_ε so, dass $|a_n| < \varepsilon$ ist für $n > n_\varepsilon$.

(c) Bestimmen Sie $\lim_{n\to\infty} a_n$ und begründen Sie Ihre Antwort mittels **(b)**.

(d) Für welche $q \in \mathbb{R}$ ist $(a_n + q(n+1)^{-1})_{n\in\mathbb{N}}$ streng monoton fallend?

Lösungshinweise hierzu:

(a) Um die explizite Form der Folge $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ zu finden, ist es hilfreich zunächst einmal die ersten Folgenglieder direkt zu berechnen.

$$a_1 = \frac{1}{2}\ ,\ a_2 = (a_1^{-1}+2)^{-1} = (2+2)^{-1} = \frac{1}{4}\ ,\ a_3 = (a_2^{-1}+2)^{-1} = (4+2)^{-1} = \frac{1}{6}\ , \quad \ldots$$

Daraus kann man die Vermutung ableiten

$$a_n = \frac{1}{2}\frac{1}{n}$$

Dies ist nun durch vollständige Induktion zu beweisen.

IA Für $n = 1$ wurde die Behauptung bereits überprüft.

IH Die Annahme ist, dass die Behauptung für n bereits gezeigt wurde.

IS Damit erhält man

$$a_{n+1} = (a_n^{-1} + 2)^{-1} = \left(\left(\frac{1}{2}\frac{1}{n}\right)^{-1} + 2\right)^{-1} = (2n+2)^{-1} = \frac{1}{2(n+1)}$$

und die Behauptung ist für $n \geqq 1$ bewiesen.

(b) Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann soll für $n > n_\varepsilon$ gelten, dass $|a_n| < \varepsilon$ ist. Man rechnet also

$$|a_n| \overset{!}{<} \varepsilon \iff \frac{1}{2n} < \varepsilon \iff \frac{1}{2\varepsilon} < n$$

Somit hat man, dass bei gegebenem $\varepsilon > 0$ für alle $n > n_\varepsilon := \frac{1}{2\varepsilon}$ gilt, dass $|a_n| < \varepsilon$.

(c) In Aufgabenteil **(b)** wurde gezeigt, dass für alle $\varepsilon > 0$ ein $n_\varepsilon := \frac{1}{2\varepsilon}$ so existiert, dass für alle $n > n_\varepsilon$ gilt

$$|a_n| = \left|\frac{1}{2n}\right| = \left|0 - \frac{1}{2n}\right| = \frac{1}{2n} < \varepsilon.$$

Mit **Definition 1.4.1** folgt dann sofort, dass $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ gilt.

(d) Es sei $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge gegeben durch $b_n := a_n + q(n+1)^{-1}$ mit beliebigem, aber festem $q \in \mathbb{R}$. Es soll nun $q \in \mathbb{R}$ so bestimmt werden, dass $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ streng monoton fallend ist. Dazu muss gemäß **Definition 1.2.2** die folgende Ungleichung gelten.

$$\begin{aligned}
b_{n+1} \overset{!}{<} b_n &\iff b_{n+1} - b_n < 0 \\
&\iff a_{n+1} + \frac{q}{n+2} < a_n + \frac{q}{n+1} \\
&\iff \frac{1}{2(n+1)} + \frac{q}{n+2} < \frac{1}{2n} + \frac{q}{n+1} \\
&\iff \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{2n} < \frac{q}{n+1} - \frac{q}{n+2} \\
&\iff -\frac{1}{2n(n+1)} < \frac{q}{(n+1)(n+2)} \\
&\iff -\frac{n+2}{2n} < q \\
&\iff -\frac{1}{2} - \frac{1}{n} < q
\end{aligned}$$

Die linke Seite der letzten Ungleichung besteht aus der Summe von $-\frac{1}{2}$ und der Folge $(-\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$. Diese Folge ist streng monoton wachsend und konvergiert gegen 0. Somit lässt sich die letzte Ungleichung (durch eine Abschätzung nach oben) vereinfachen zu

$$q \geqq -\frac{1}{2}.$$

Damit gilt, dass $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann streng monoton fallend ist, wenn $q \geqq -\frac{1}{2}$ ist.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 55. *Matrixpotenzen*

Die drei Firmen Weiß, Sauber und Rein führen ein völlig neuartiges Waschmittel am Markt ein. Zu Beginn besitzen Weiß 50 %, Sauber 30 % und Rein 20 % Marktanteil. Während des ersten Jahres verliert Weiß jeweils 20 % seiner Kunden an Sauber und Rein, Sauber gibt 10 % an Weiß und 50 % an Rein ab, und Rein verliert 10 % an Weiß und 30 % an Sauber. Während der folgenden Jahre verändern sich die Marktanteile stets nach demselben Schema.

(a) Bestimmen Sie eine Matrix A mit der sich die Veränderung der Marktanteile als lineare Abbildung schreiben lässt, d.h. wenn m_k ein Vektor ist, dessen Komponenten den Marktanteilen nach k Jahren entsprechen, so gilt $m_{k+1} = Am_k$.

(b) Die Matrix A hat den Eigenwert 1. Bestimmen Sie den zugehörigen Eigenvektor v_1. Geben Sie eine zu A konjugierte Diagonalmatrix an. Geben Sie eine zu A^n konjugierte Diagonalmatrix an für $n \geqq 1$.

(c) Begründen Sie mit Hilfe der Ergebnisse aus **(b)**, warum der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} A^n m_0$ ein Vielfaches von v_1 ist.

(d) Geben Sie die Grenzverteilung der Marktanteile an. Welche Firma wird auf lange Sicht zum Marktführer?

Lösungshinweise hierzu:

(a) Bezeichnen w_k, s_k und r_k die Marktanteile der Firmen Weiß bzw. Sauber bzw. Rein nach k Jahren, so folgen aus der Aufgabe die Gleichungen

$$\begin{aligned} w_{k+1} &= 0,6w_k + 0,1s_k + 0,1r_k, \\ s_{k+1} &= 0,2w_k + 0,4s_k + 0,3r_k, \\ r_{k+1} &= 0,2w_k + 0,5s_k + 0,6r_k \end{aligned}$$

und somit die Matrix $A = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

(b) Setzt man $v_1 = (x, y, z)^T$, so ergeben sich aus $Av_1 = v_1$ die Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{1}{10}(6x + y + z) &= x, \\ \frac{1}{10}(2x + 4y + 3z) &= y, \\ \frac{1}{10}(2x + 5y + 6z) &= z, \end{aligned}$$

welche z.B. die Lösung $v_1 = (9, 14, 22)^T$ besitzen.
Seien λ_2 und λ_3 die anderen Eigenwerte von A. Da die Spur einer Matrix mit der Summe ihrer Eigenwerte übereinstimmt und die Determinante mit dem Produkt, folgt

$$\begin{aligned}\mathrm{Sp}(A) &= \frac{16}{10} = 1 + \lambda_2 + \lambda_3,\\ \det(A) &= \frac{50}{1000} = 1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3.\end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich $\lambda_2 = \frac{1}{2}$ und $\lambda_3 = \frac{1}{10}$. Somit ist A zur Matrix $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$ konjugiert. Ist S eine Matrix, so dass $S^{-1}AS = D$ gilt, so folgt

$$\begin{aligned}S^{-1}A^nS &= S^{-1}A(SS^{-1})A(SS^{-1})A...AS = (S^{-1}AS)(S^{-1}AS)...(S^{-1}AS)\\ &= D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^n} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{10^n} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

(c) Sind v_2 und v_3 Eigenvektoren zu den Eigenwerten λ_2 bzw. λ_3, so bilden v_1, v_2 und v_3 eine Basis des $\mathbb{R}^3$. Somit existieren $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$, so dass $x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 = m_0$ gilt. Es ist dann

$$\lim_{n\to\infty} A^n m_0 = \lim_{n\to\infty} A^n(x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3) = \lim_{n\to\infty}(x_1v_1 + \frac{x_2}{2^n}v_2 + \frac{x_3}{10^n}v_3) = v_1.$$

(d) Die Grenzverteilung entspricht nach Obigem einem Eigenvektor zum Eigenwert 1, welcher außerdem die Länge 1 besitzen muss. Ein solcher Vektor ist $\frac{1}{\sqrt{761}}(9, 14, 22)^T$. D.h. auf lange Sicht ist r_k größer als w_k und s_k und die Firma Rein wird zum Marktführer.

Aufgabe H 56. *Rekursive Folgen*

Die rekursiv definierten Folgen

$$a_0 = 4\sqrt{3}\,,\ b_0 = 6\,, \quad a_{n+1} = \tfrac{2a_nb_n}{a_n+b_n}\,, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1}b_n}$$

entsprechen den Umfängen von regelmäßigen $6 \cdot 2^n$-Ecken, die den Einheitskreis als Inkreis oder Umkreis haben. Zeigen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ die Beziehung

$$b_n < b_{n+1} < a_{n+1} < a_n$$

gilt und begründen Sie damit, dass beide Folgen konvergieren. Begründen Sie geometrisch, gegen welchen Grenzwert diese Folgen streben.

Lösungshinweise hierzu:
Induktionsanfang:
Durch Quadrieren von a_0 und b_0 erhält man $b_0^2 = 36 < 16 \cdot 3 = 48 = a_0^2$ also gilt $b_0 < a_0$.
Induktionsannahme: Es gelte $b_n < a_n$ für ein n aus $\mathbb{N}_0$.
Induktionsschritt:

Aus der Rekursionsformel für a_{n+1} und der Induktionsannahme folgt

$$b_n = \frac{2a_nb_n}{a_n + a_n} < \underbrace{\frac{2a_nb_n}{a_n + b_n}}_{=a_{n+1}} < \frac{2a_nb_n}{b_n + b_n} = a_n$$

also $b_n < a_{n+1} < a_n$ und weiter aus der Rekursionsformel für b_{n+1}

$$b_n = \sqrt{b_nb_n} < \underbrace{\sqrt{b_na_{n+1}}}_{b_{n+1}} < \sqrt{a_{n+1}a_{n+1}} = a_{n+1}\,.$$

Induktionsschluss: Die Ungleichungen $b_n < b_{n+1} < a_{n+1} < a_n$ gelten für alle n aus $\mathbb{N}_0$.
Es handelt sich bei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ um durch a_0 und b_0 beschränkte Folgen, welche streng monoton sind. Insbesondere sind sie somit konvergent.
Mit steigendem n kommt der Umfang eines regelmäßigen $6\cdot 2^n$-Ecks, welches vom Einheitskreis umschlossen wird bzw. welches den Einheitskreis umschließt dem Umfang des Einheitskreises immer näher. Der Grenzwert der Folgen ist somit 2π.

Aufgabe H 57. *Konvergenz von Reihen*

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{5+n}{5n}\right)^n$ **(b)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+2n+2}}$ **(c)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{33(n!)^3}{(3n)!}$ **(d)** $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n^2-\sin(n)}$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wurzelkriterium:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\left|(-1)^n\left(\frac{5+n}{5n}\right)^n\right|\right.} = \lim_{n\to\infty}\left|(-1)\left(\frac{5+n}{5n}\right)\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{5+n}{5n}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{5}{n}+1}{5} = \frac{1}{5} < 1$$

also ist die Reihe absolut konvergent.

(b) Leibnizkriterium:

Offensichtlich ist $\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2n+2}}\right)$ eine monotone Nullfolge, und somit ist die Reihe nach Leibniz konvergent.

Die Reihe ist nicht absolut konvergent, denn $\frac{1}{\sqrt{n^2+2n+2}} \geqq \frac{1}{\sqrt{n^2+2n+4}} = \frac{1}{\sqrt{(n+2)^2}} = \frac{1}{n+2}$.

Da die harmonische Reihe $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{1}{n+2} = \sum\limits_{i=3}^{\infty}\frac{1}{i}$ divergent ist, divergiert nach dem Minorantenkriterium auch die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+2n+2}}$.

(c) Quotientenkriterium:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{33((n+1)!)^3}{(3(n+1))!}}{\frac{33(n!)^3}{(3n)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{((n+1)!)^3(3n)!}{(n!)^3(3n+3)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}$$
$$< \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3}{(3n)^3} = \frac{1}{27} < 1$$

Also ist die Reihe absolut konvergent.

(d) Wegen $|\sin(n)| \leqq 1$, ist

$$\frac{1}{n^2 - \sin(n)} \leqq \frac{1}{n^2-1} \leqq \frac{1}{(n-1)^2}.$$

Da $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ absolut konvergent ist, ist die Reihe absolut konvergent.

Aufgabe H 58. *Werte von Reihen*

Bestimmen Sie die Werte folgender Reihen.

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+2}}{2\cdot 5^n}$ **(b)** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{n^k}{(n+1)^k}$ für $n \in \mathbb{N}$ **(c)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(n+1)(n+3)}$

Hinweis: Zeigen Sie für **(c)** zunächst, dass $\frac{2}{(n+1)(n+3)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3}$ gilt.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Die geometrische Reihe konvergiert für $q = 3/5$, somit ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+2}}{2\cdot 5^n} = \frac{9}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{5^n} = \frac{9}{2}\left(-1 + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n\right) = \frac{9}{2}\left(-1+\frac{5}{2}\right) = \frac{27}{4}\,.$$

(b) Die Variable n ist unabhängig vom Summationsindex, somit gilt mit $\frac{n}{n+1} < 1$ und der geometrischen Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{n^k}{(n+1)^k} = -1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^k}{(n+1)^k} = -1 + \frac{1}{1-\frac{n}{n+1}} = -1 + \frac{1}{\frac{1}{n+1}} = n\,.$$

(c) Mit Hilfe des Hauptnenners gilt

$$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3} = \frac{(n+3)-(n+1)}{(n+1)(n+3)} = \frac{2}{(n+2)(n+3)}\,,$$

es ergibt sich also die Teleskopsumme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(n+2)(n+3)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3} = \lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3}$$
$$= \lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \ldots + \frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+3}\right)$$
$$= \lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3}\right) = \frac{5}{6}.$$