A. Armiti, M. Fetzer
J. Magiera
T. Pfrommer, C. Zeiler

1. Gruppenübung zur Vorlesung
Höhere Mathematik 1

M. Künzer
M. Stroppel

Wintersemester 2015/16

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 1. *Vollständige Induktion*

Beweisen Sie folgende Aussagen mit vollständiger Induktion.

(a) Es ist $4^n - 1$ durch 3 teilbar für $n \geqq 0$.

Lösungshinweise hierzu: Wir beweisen diese Aussage mittels Induktion.

IA $n = 0$:

$$4^0 - 1 = 1 - 1 = 0 \text{ ist durch } 3 \text{ teilbar.}$$

IH Sei nun die Aussage für ein $n \in \mathbb{N}$ bewiesen, d.h. für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte

$$4^n - 1 = 3k \text{ für ein } k \in \mathbb{N}.$$

IS Wir zeigen, dass dann auch die Aussage für $n + 1$ gilt.

$$\begin{aligned} 4^{n+1} - 1 &= 4\,4^n - 1 \\ &\overset{\text{IH}}{=} 4\,(3k+1) - 1 \\ &= 3(4k+1). \end{aligned}$$

Damit ist die Aussage für alle $n \in \mathbb{N}_0$ bewiesen.

(b) Es ist $\sum_{k=1}^{n} k^3 = n^2(n+1)^2/4$ für $n \geqq 1$.

Lösungshinweise hierzu: Wir beweisen diese Aussage mittels Induktion.

IA $n = 1$:

$$\sum_{k=1}^{1} k^3 = 1^3 = 1 = \frac{1^2(1+1)^2}{4}.$$

IH Sei nun die Aussage für ein $n \in \mathbb{N}$ bewiesen, d.h. für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

IS Wir zeigen, dass dann auch die Aussage für $n+1$ gilt.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 \\ &\overset{\text{IH}}{=} \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \\ &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{4(n+1)^3}{4} \\ &= \frac{(n+1)^2\left(n^2+4(n+1)\right)}{4} \\ &= \frac{(n+1)^2\left(n+2\right)^2}{4}\end{aligned}$$

Damit ist die Aussage für alle $n \in \mathbb{N}$ bewiesen.

(c) Es ist $\sum_{j=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{j}} \geqq \sqrt{n}$ für $n \geqq 1$.

Lösungshinweise hierzu: Wir beweisen diese Aussage mittels Induktion.

IA $n = 1$:

$$\sum_{j=1}^{1} \frac{1}{\sqrt{j}} = 1 \geqq \sqrt{1}.$$

IH Sei nun die Aussage für ein $n \in \mathbb{N}$ bewiesen, d.h. für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{j}} \geqq \sqrt{n}.$$

IS Wir zeigen, dass dann auch die Aussage für $n+1$ gilt.

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{j}} &= \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{j}}\right) + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \\ &\overset{\text{IH}}{\geqq} \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}.\end{aligned}$$

Nun beweisen wir $\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \geqq \sqrt{n+1}$ durch Widerspruch. Angenommen ist

$$\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leqq \sqrt{n+1}.$$

Wir multiplizieren die ungleichung mit $\sqrt{n+1}$,

$$\begin{aligned}\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n+1}} &\leqq \sqrt{n+1}\\ \sqrt{n^2+n}+1 &\leqq n+1\\ \sqrt{n^2+n} &\leqq n,\end{aligned}$$

was ein Widerspruch zu unserer Annahme ist. Damit ist die Aussage für alle $n \in \mathbb{N}$ bewiesen.

(d) Es ist $n! > 2^n$ für $n \geqq 4$.

Lösungshinweise hierzu: Wir beweisen diese Aussage mittels Induktion.

IA $n = 4$:

$$4! = 24 > 2^4 = 16.$$

IH Sei nun die Aussage für ein $n \in \mathbb{N}$ bewiesen, d.h. für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte

$$n! > 2^n.$$

IS Wir zeigen, dass dann auch die Aussage für $n+1$ gilt.

$$\begin{aligned}(n+1)! &= (n+1)n!\\ &\overset{\text{IH}}{>} (n+1)2^n.\end{aligned}$$

Da $n \geqq 4$ ist, folgte

$$(n+1)! > 2\,2^n = 2^{n+1}.$$

Aufgabe H 2. *Binomischer Lehrsatz, Binomialkoeffizienten*

Zeigen Sie folgende Aussagen.

(a) Es ist $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 4^k = 5^n$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

Lösungshinweise hierzu: Wir beweisen diese Aussage mittels des binomischen Lehrsatzes:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 4^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 4^k (1)^{n-k} = (4+1)^n = 5^n.$$

(b) Es ist $\sum_{k=0}^{n} \cos(\frac{\pi}{4} + k\pi)\binom{n}{k} = 0$ für $n \in \mathbb{N}$.

Lösungshinweise hierzu: Wir beweisen diese Aussage mittels des binomischen Lehrsatzes und des Additionssatzes für Kosinus ($\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$).

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(\frac{\pi}{4}+k\pi) &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(\frac{\pi}{4})\cos(k\pi)(1)^{n-k}\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\cos(\pi))^k(1)^{n-k}\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k(1)^{n-k}\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1-1)^n = 0.\end{aligned}$$

(c) Die Gleichung $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$ hat genau eine Lösung x aus $\mathbb{R}$.

Lösungshinweise hierzu: Durch Termumformung erhalten wir

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (x+1)^3.$$

Die faktorisierte rechte Seite hat -1 als vierfache Nullstelle und damit hat obige Gleichung nur eine Lösung.

(d) Es ist $\sum_{j=0}^{k}\binom{j+1}{j} = \binom{k+2}{k}$ für $k \in \mathbb{N}_0$.

Lösungshinweise hierzu: Für die rechte Seite wenden wir den Binomialkoeffizient und die Gaussche Summenformel ($\sum_{k=1}^{n} k = n(n+1)/2$) an.

$$\sum_{j=0}^{k}\binom{j+1}{j} = \sum_{j=0}^{k}\frac{(j+1)!}{j!} = \sum_{j=0}^{k}(j+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Für die linke Seite wenden wir auch den Binomialkoeffizient an

$$\binom{k+2}{k} = \frac{(k+2)!}{k!\,2!} = \frac{(k+2)(k+1)k!}{k!\,2} = \frac{(k+2)(k+1)}{2}.$$

Damit haben wir die Aussage bewiesen.

Aufgabe H 3. *Fakultät*

(a) Finden Sie Parameter $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $an^2 + bn + c = n!$ für $n \in \{2, 3, 4\}$.

Lösungshinweise hierzu: Die Substitution der Werte $n \in \{2, 3, 4\}$ in der Gleichung $an^2 + bn + c = n!$ ergibt ein System von 3 Gleichungen

$$\begin{aligned}4a + 2b + c &= 2\\ 9a + 3b + c &= 6\\ 16a + 4b + c &= 24\end{aligned}$$

Wir lösen das System um die Parameter zu finden

$$\left.\begin{aligned} 4a+2b+c&=2\\ 9a+3b+c&=6\\ 16a+4b+c&=24 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 5a+b&=4\\ 7a+b&=18 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} a&=7\\ b&=-31\\ c&=36. \end{aligned}$$

(b) Sei mit den in **(a)** gefundenen Parametern $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}\colon x\mapsto ax^2+bx+c$. Bestimmen Sie das kleinste $n\in\mathbb{N}_0$ mit $f(n)<n!$.

Lösungshinweise hierzu: Mit den in **(a)** gefundenen Parametern ist die Funktion f als

$$f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}\colon x\mapsto 7x^2-31x+36,$$

definiert. Aus **(a)** haben wir $f(n)=n!$ für $n=\{2,3,4\}$. Wir berechnen für $n=5$ und finden, dass 5 das kleinste Zahl mit $f(n)<n!$ ist.

Aufgabe H 4. *Funktionsgraphen*

(a) Sei $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}\colon x\mapsto |x^2-1|$. Skizzieren Sie den Graphen von f. Bestimmen Sie den Wertebereich von f. Bestimmen Sie $\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\, f(x)=\frac{1}{2}\right\}$.

Lösungshinweise hierzu: Der Wertebereich ist $[0,\infty)$. Die Menge $\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\, f(x)=\frac{1}{2}\right\}$ beduetet

$$x^2-1=\frac{1}{2}\quad\text{oder}\quad x^2-1=-\frac{1}{2}.$$

Das ergibt

$$x=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}\quad\text{oder}\quad x=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$$

Damit ist $\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\, f(x)=\frac{1}{2}\right\}=\left\{\sqrt{\frac{3}{2}},-\sqrt{\frac{3}{2}},\sqrt{\frac{1}{2}},-\sqrt{\frac{1}{2}}\right\}$.

(b) Sei $g\colon [-1,0]\to\mathbb{R}\colon x\mapsto \ln(2\mathrm{e}^{-x^2})$. Skizzieren Sie den Graphen von g. Bestimmen Sie den Wertebereich von g. Bestimmen Sie $\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\, g(x)=0\right\}$.

Lösungshinweise hierzu: Der Wertebereich ist $(-\infty,\ln(2)]$. Durch Funktionumformel erhalten wir

$$g(x)=\ln(2\mathrm{e}^{-x^2})=\ln(2)+\ln(\mathrm{e}^{-x^2})=\ln(2)-x^2.$$

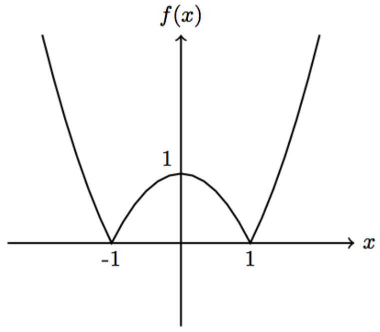
Damit ist die Menge $\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\, g(x)=0\right\}=\left\{\sqrt{\ln(2)},-\sqrt{\ln(2)}\right\}$.

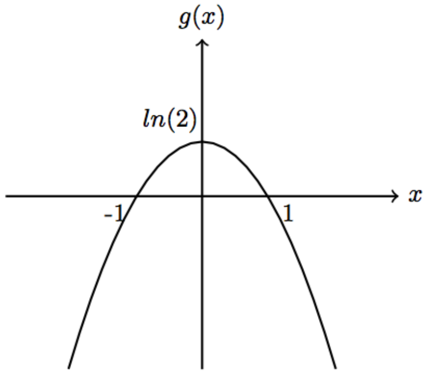
(c) Sei $h\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}\colon x\mapsto 2-\mathrm{e}^{2x}$. Skizzieren Sie den Graphen von h. Bestimmen Sie den Wertebereich von h. Bestimmen Sie $\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\, h(x)\geqq 0\right\}$.

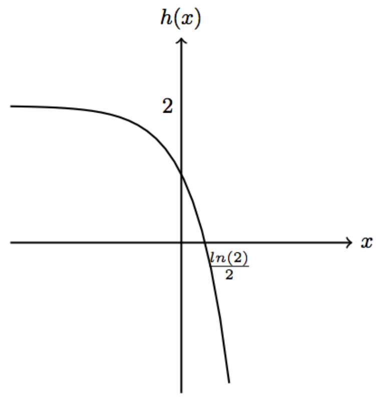
Lösungshinweise hierzu: Der Wertebereich ist $(-\infty,2)$. Um die Menge $\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\, h(x)\geqq 0\right\}$ zu bestimmen, schreiben wir $2-\mathrm{e}^{2x}\geqq 0$. Das ergibt

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{2x}&\leqq 2\\ 2x&\leqq \ln(2)\\ x&\leqq\frac{\ln(2)}{2}. \end{aligned}$$

Damit ist $\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\, h(x)\geqq 0\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\, x\leqq \ln(2)/2\right\}$.


f(x)
1
-1
1
x


g(x)
ln(2)
-1
1
x


h(x)
2
ln(2)/2
x

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 5. *Abbildungen*

(a) Sei $f_1\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+\colon x \mapsto x^2+1$. Ist f_1 injektiv? Ist f_1 surjektiv? Ist f_1 bijektiv?

(b) Sei $f_2\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon (x,y) \mapsto (x+y, x-y)$. Ist f_2 bijektiv?

(c) Konstruieren Sie eine Abbildung von $[0,1]$ nach $[0,1]$, die injektiv, aber nicht surjektiv ist.

(d) Konstruieren Sie eine Abbildung von $[0,1]$ nach $[0,1]$, die surjektiv, aber nicht injektiv ist.

Lösungshinweise hierzu:

(a)
- Surjektivität: Der Wert $\frac{1}{2}$ liegt nicht im Bild von f_1, somit ist f_1 nicht surjektiv. Hierzu:
$$x^2+1 \overset{!}{=} \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 = -\frac{1}{2},$$
dies ist jedoch nicht möglich da x eine reelle Zahl ist.
- Injektivität: Seien $a,b \in \mathbb{R}^+$, wobei $f_1(a) = f_1(b)$ gelte, so folgt
$$a^2+1 = b^2+1 \Leftrightarrow a^2 = b^2 \overset{a,b\in\mathbb{R}^+}{\Leftrightarrow} a = b.$$
Somit ist f_1 injektiv.
- Bijektivität: Da f_1 nicht surjektiv ist, ist f_1 nicht bijektiv.

(b)
- Surjektivität: Sei $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ beliebig. Wir müssen zeigen, dass $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ existiert mit $f(x,y) = (a,b)$. D.h. wir suchen eine Lösung des Gleichungssystems
$$\begin{aligned} x+y &= a \\ x-y &= b \end{aligned}$$
Dazu lösen wir die zweite Gleichung nach x auf und erhalten $x = b+y$. Eingesetzt ergibt sich
$$\begin{aligned} x &= \frac{a+b}{2} \\ y &= \frac{a-b}{2}. \end{aligned}$$
Für diese Wahl von (x,y) gilt also $f(x,y) = (a,b)$. Da $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ beliebig war ist f_2 surjektiv.

- Injektivität: Für die Untersuchung auf Injektivität nehmen wir an, dass

$$f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2) = (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

gilt. Obige Umformung zeigt, dass dann

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{a+b}{2} \\ y_1 &= \frac{a-b}{2}. \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{a+b}{2} \\ y_2 &= \frac{a-b}{2}. \end{aligned}$$

gelten muss. Also ist $x_1 = x_2$ und $y_1 = y_2$; die Abbildung ist also injektiv.
- Bijektivität: Da f_2 injektiv und surjektiv ist, ist f_2 bijektiv.

(c) Dies kann man sogar mit einer linearen Abbildung erreichen: Wir wählen $f_3(x) = \frac{1}{2}x$. Dann ist $f_3 : [0,1] \to [0,1]$ offensichtlich nicht surjektiv, da $f_3(x) = 1$ impliziert, dass $x = 2 \notin [0,1]$. Zum formalen Beweis der Injektivität nehmen wir wiederum an, dass $f_3(x_1) = f_3(x_2)$. Dann folgt sofort $x_1 = x_2$.

(d) Wir verschieben und strecken die Betragsfunktion: $f_4(x) = 2|x - \frac{1}{2}|$. Surjektivität: Sei $y \in [0,1]$, dann gilt $f_4(\frac{y+1}{2}) = |y + 1 - 1| = |y| = y$. Weiter gilt $\frac{y+1}{2} \in [0,1]$ für alle $y \in [0,1]$. Injektivität: Offensichtlich gilt $f_4(1) = 1 = f_4(0)$ und damit ist f_4 wie gewünscht nicht injektiv.

Aufgabe H 6. *Teilmengen*

(a) Skizzieren Sie die folgenden Mengen.

$$\begin{aligned} M_1 &:= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; |x| < 2\right\} \\ M_2 &:= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; |xy| \leqq 1\right\} \\ M_3 &:= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; (x-1)^2 + (y+1)^2 \leqq 4\right\} \end{aligned}$$

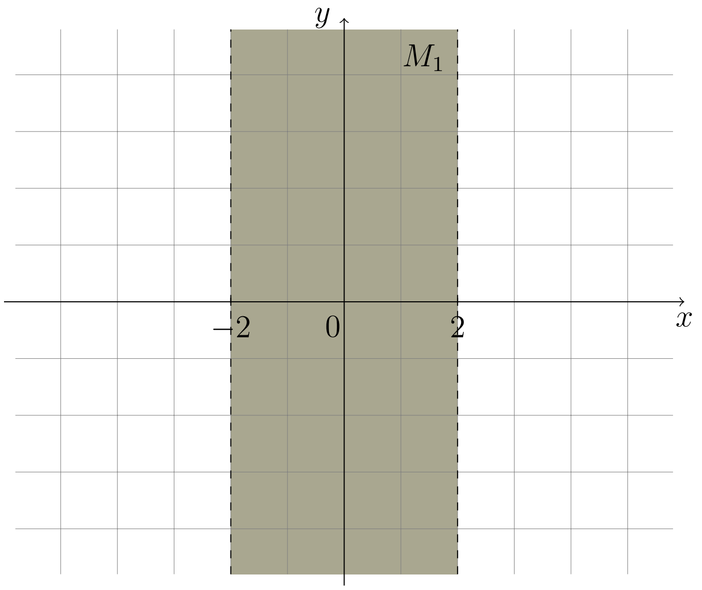
Skizzieren Sie $M_2 \cap M_3$.

(b) Skizzieren Sie die Menge

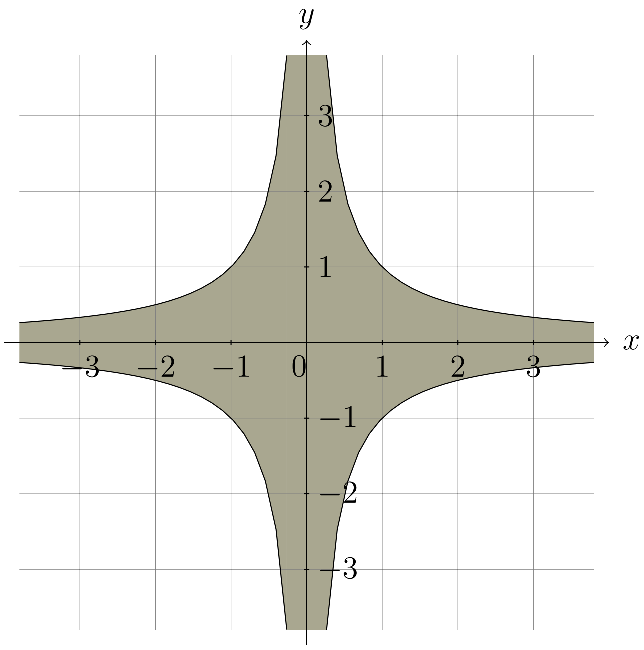
$$M_4 := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 2(x-2)^2 + (y-1)^2 \leqq 1 \;\vee\; (x-2)^2 + 2(y+1)^2 \leqq 4\right\} .$$

Lösungshinweise hierzu:

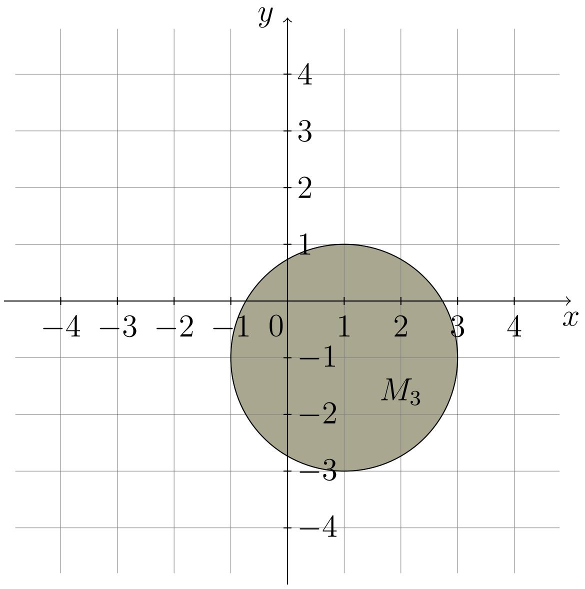
(a) Die Menge M_1 ist der Streifen, wobei der Rand $x = \pm 2$ nicht zu der Menge gehört.



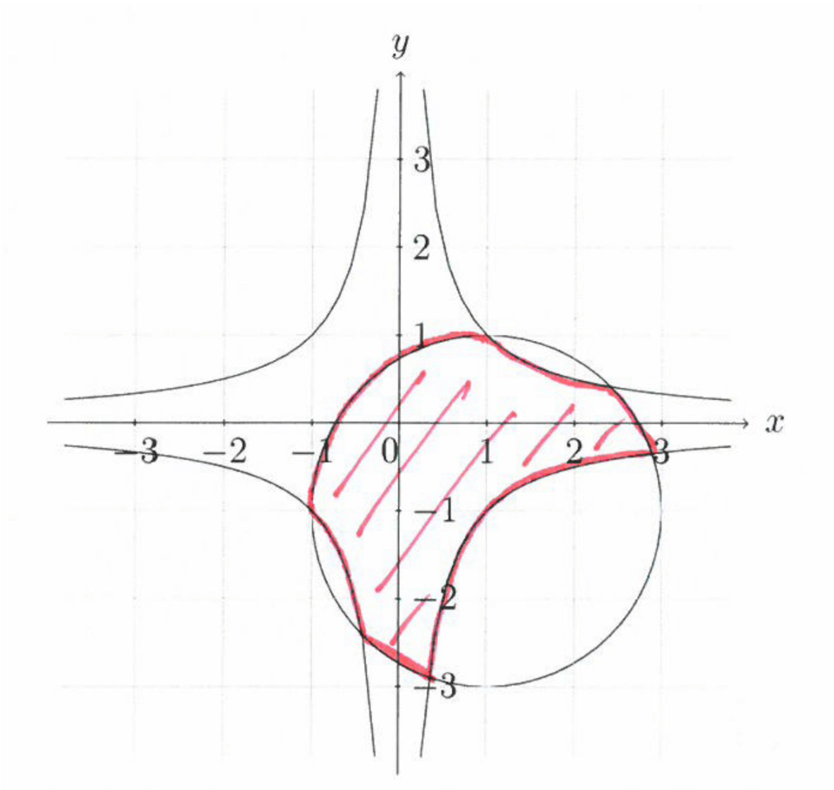
M_2 ist die graue Fläche innerhalb der Hyperbeln; die Hyperbeln gehören zur Menge.



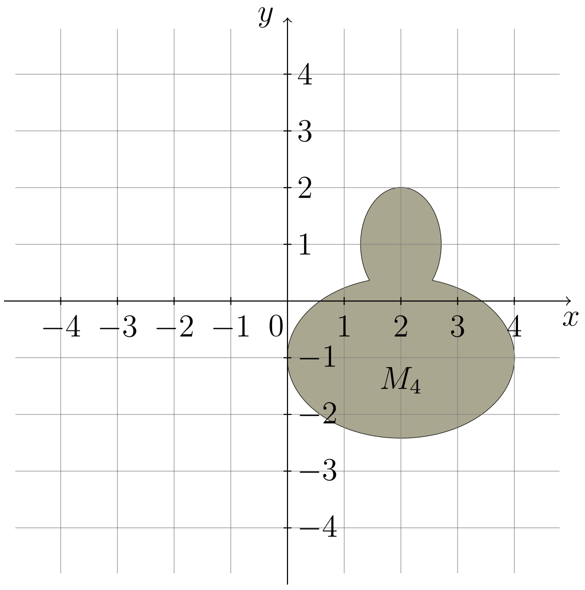
Die Menge M_3 ist eine Kreisscheibe mit Radius 2 und dem Mittelpunkt $(1, -1)$, wobei der Rand Bestandteil der Menge ist.



Die Menge $M_2 \cap M_3$ ist rot schraffiert.



(b) Die Menge M_4 besteht aus zwei Ellipsen. Die Erste hat ihren Mittelpunkt bei $(2, 1)$ und die Halbachsen $a = 1/\sqrt{2}, b = 1$. Die Zweite hat ihren Mittelpunkt bei $(2, -1)$ und die Halbachsen $a = 2, b = \sqrt{2}$. Die Berandungslinien sind Teil der Menge.



Aufgabe H 7. *Ungleichungen*

Bestimmen Sie jeweils die Menge der $x \in \mathbb{R}$, die die Ungleichung erfüllen.

(a) $2|x-2| < x+1$

(b) $(x+1)(x-2)(x+3)(x-4)(x+5) > 0$

(c) $|x-3||x-1| < (x+1)|x-5|$

(d) $|x^2+x-2| < x+3$

Lösungshinweise hierzu:

(a) 1. Fall: $x \geqq 2$:

$$\begin{aligned} 2(x-2) &< x+1 \\ x &< 5 \end{aligned}$$

also $\mathbb{L}_1 = [2, 5)$

2. Fall: $x < 2$:

$$\begin{aligned} 2(2-x) &< x+1 \\ 1 &< x \end{aligned}$$

$\mathbb{L}_2 = (1, 2)$. Und somit $\mathbb{L} = (1, 5)$.

(b) Unterscheide folgende Fälle: $x < -5$, $-5 < x < -3$, $-3 < x < -1$, $-1 < x < +2$, $2 < x < 4$, $4 < x$. Im ersten Fall, $x < -5$ stellen wir fest, dass

$$\underbrace{(x+1)}_{<0}\underbrace{(x-2)}_{<0}\underbrace{(x+3)}_{<0}\underbrace{(x-4)}_{<0}\underbrace{(x+5)}_{<0},$$

also der gesamte Term als Produkt einer ungeraden Anzahl von negativen Faktoren wiederum negativ ist. Für $-5 < x < -3$ gilt

$$\underbrace{(x+1)}_{<0}\underbrace{(x-2)}_{<0}\underbrace{(x+3)}_{<0}\underbrace{(x-4)}_{<0}\underbrace{(x+5)}_{>0}.$$

Das Produkt ist also positiv. Analoges Vorgehen in den verbleibenden Fällen ergibt $\mathbb{L} = \{x \mid -5 < x < -3 \ \vee\ -1 < x < 2 \ \vee\ x > 4\}$.

(c) 1. Fall: $x < 1$:

$$\begin{aligned}(3-x)(1-x) &< (5-x)(x+1)\\ 2x^2 + 8x - 2 &< 0\\ (x-(2-\sqrt{5}))(x-(2+\sqrt{5})) &< 0\end{aligned}$$

also $\mathbb{L}_1 = \{x \mid 2-\sqrt{5} < x < 1\}$.

2. Fall: $1 \leqq x < 3$:

$$\begin{aligned}(3-x)(x-1) &< (5-x)(x+1)\\ -3 &< 5\end{aligned}$$

also $\mathbb{L}_2 = \{x \mid 1 \leqq x < 3\}$.

3. Fall: $3 \leqq x < 5$:

$$\begin{aligned}(x-3)(1-x) &< (5-x)(x+1)\\ 2x^2 + 8x - 2 &< 0\\ (x-(2-\sqrt{5}))(x-(2+\sqrt{5})) &< 0\end{aligned}$$

also $\mathbb{L}_3 = \{x \mid 3 \leqq x < 2+\sqrt{5}\}$.

4. Fall: $x \geqq 5$:

$$\begin{aligned}(x-3)(x-1) &< (x-5)(x+1)\\ 3 &< -5 \text{ Widerspruch!!!}\end{aligned}$$

also $\mathbb{L}_4 = \emptyset$. Somit ist $\mathbb{L} = \{x \mid 2-\sqrt{5} < x < 2+\sqrt{5}\}$.

(d) Genaues Hinsehen oder Mitternachtsformel ergibt $x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$.

1. Fall: $x \leqq -2$:

$$\begin{aligned}x^2 + x - 2 &< x + 3\\ x^2 &< 5\end{aligned}$$

also $\mathbb{L}_1 = \{x \mid -\sqrt{5} < x \leqq -2\}$.

2. Fall: $x \in (-2, 1)$:

$$\begin{aligned} -x^2 - x + 2 &< x + 3 \\ 0 &< x^2 + 2x + 1 \\ 0 &< (x+1)^2 \end{aligned}$$

also $\mathbb{L}_2 = \{x \mid -2 < x < -1 \vee -1 < x < 1\}$.
3. Fall: $x \geqq 1$:

$$\begin{aligned} x^2 + x - 2 &< x + 3 \\ x^2 &< 5 \end{aligned}$$

also $\mathbb{L}_3 = \{x \mid 1 \leqq x < \sqrt{5}\}$. Somit $\mathbb{L} = \{x \mid -\sqrt{5} < x < -1 \vee -1 < x < \sqrt{5}\}$.

Aufgabe H 8. *Teilmengen im Komplexen*
Bestimmen Sie folgende Mengen und skizzieren Sie diese.

(a) $\left\{z \in \mathbb{C} \,\middle|\, z(1+\mathrm{i}) \in \mathbb{R}\right\}$

(b) $\left\{z \in \mathbb{C} \,\middle|\, z^2 = \mathrm{i}\right\}$

(c) $\left\{z \in \mathbb{C} \,\middle|\, 2\,\mathrm{Im}(z^2) = \mathrm{Im}(z)^2\right\}$

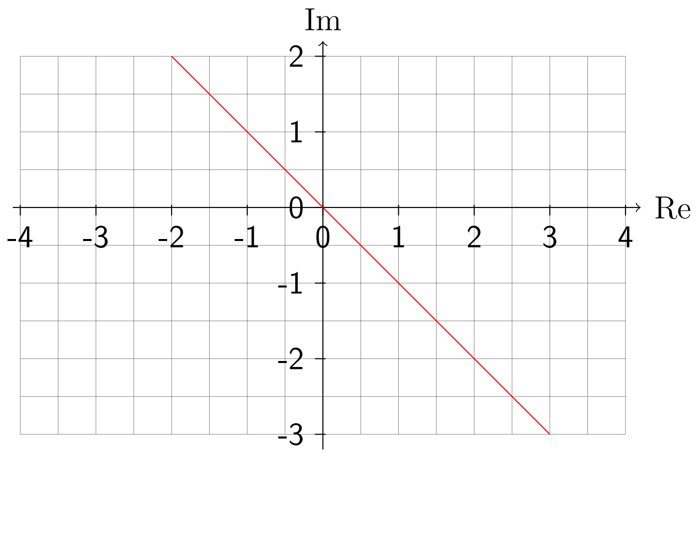
(d) $\left\{(1-\mathrm{i})^k \,\middle|\, k \in \{0,1,2,3\}\right\}$

Lösungshinweise hierzu: Es sei $z = x + iy$.

(a)

$$z(1+i) = (x+iy)(1+i) = x + ix + iy - y \overset{!}{\in} \mathbb{R}$$

Somit ist $x = -y$, also $z = x - ix$.



(b)

$$z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy \stackrel{!}{=} i$$

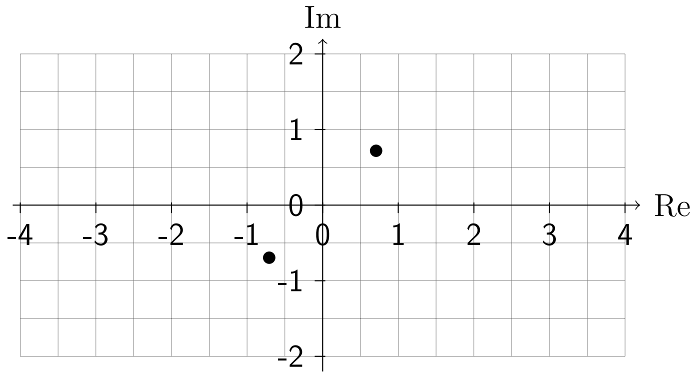
ergibt

$$\begin{aligned} 2ixy &= i \\ xy &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= 0 \\ x^2 &= y^2 \\ x &= \pm y. \end{aligned}$$

Der Fall $x = -y$ widerspricht $xy = \frac{1}{2}$. Somit ist $x = y$. Einsetzen liefert $xy = x^2 = \frac{1}{2}$ und somit $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Folglich ist $z = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$ oder $z = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$.



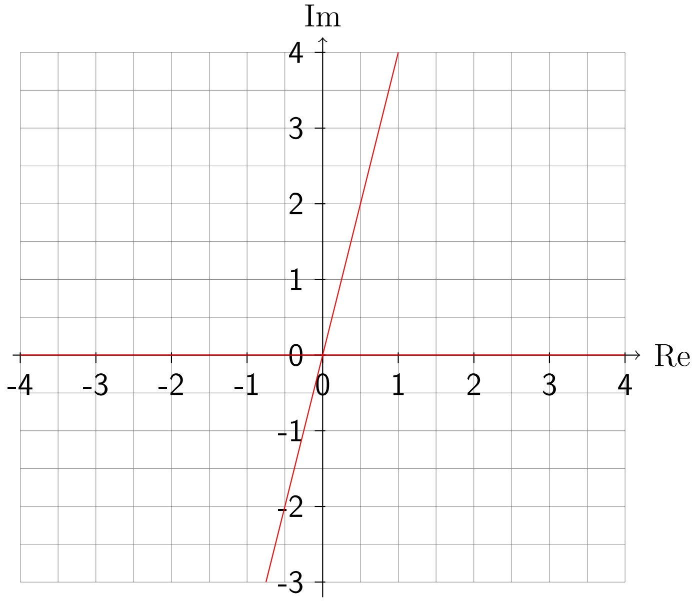
(c)

$$2\,\mathrm{Im}(z^2) = 2\,\mathrm{Im}(x^2 - y^2 + 2ixy) = 4xy \stackrel{!}{=} y^2 = \mathrm{Im}(z)^2$$

ergibt

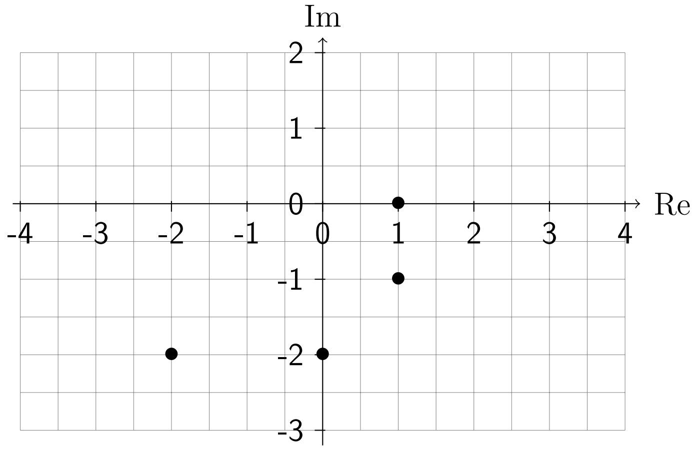
$$\begin{aligned} 4xy &= y^2 \\ 0 &= y(y - 4x). \end{aligned}$$

Dies wird erfüllt, wenn $y = 4x$ oder $y = 0$ und x beliebig.



(d)

$$
\begin{aligned}
(1-i)^0 &= 1 \\
(1-i)^1 &= 1-i \\
(1-i)^2 &= 1-2i-1=-2i \\
-2i(1-i) &= -2i+2i^2=-2-2i
\end{aligned}
$$



Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 9. *Nullstellen von Polynomen*

Berechnen Sie alle Nullstellen in $\mathbb{C}$ der folgenden Polynome.

(a) $p_1(x) = x^2 + 1$

(b) $p_2(x) = x^3 - 13x + 12$

(c) $p_3(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 4\lambda + 8$

(d) $p_4(z) = z^4 + 2z^2 + 2$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Die Gleichung $x^2 = -1$ hat die Lösungen $x_1 = \mathrm{i}$ und $x_2 = -\mathrm{i}$.

(b) Das Polynom p_2 hat die Nullstelle $x_1 = 1$ (Raten). Polynomdivision ergibt $p_2(x) = (x-1)(x^2+x-12)$. Die Mitternachtsformel liefert die beiden anderen Nullstellen $x_2 = 3$ und$x_3 = -4$.

(c) Raten liefert die erste Nullstelle $\lambda_1 = -1$. Nach Polynomdivision erhalten wir $p_3(\lambda) = (\lambda+1)(\lambda^2-4\lambda+8)$. Quadratisches Ergänzen führt zu $\lambda^2-4\lambda+8 = (\lambda-2)^2+4$. Wir substituieren $(\lambda-2) = u$ und erhalten die Gleichung $u^2+4=0$. Diese hat die beiden Lösungen $u_1 = 2i$ und $u_2 = -2i$. Rücksubstitution ergibt $\lambda_2 = u_1 + 2 = 2 + 2i$ und $\lambda_3 = u_2 + 2 = 2 - 2i$.

(d) Die Substitution $t = z^2$ liefert $t^2 + 2t + 2 = 0$. Anwendung der Mitternachtsformel gibt die Nullstellen $t_1 = -1 + \mathrm{i}$ und $t_2 = -1 - \mathrm{i}$. Resubtitution liefert die Gleichungen

$$z^2 = -1 + \mathrm{i}, \qquad z^2 = -1 - \mathrm{i}.$$

Um die Wurzeln zu ziehen nutzen wir die Darstellung in Polarkoordinaten. Es gilt $|-1 \pm \mathrm{i}| = \sqrt{2}$, $\arg(-1+\mathrm{i}) = \frac{3}{4}\pi$ und $\arg(-1-\mathrm{i}) = \frac{5}{4}\pi$. Demnach gilt es

$$z^2 = \sqrt{2}(\cos(\tfrac{3}{4}\pi) + \mathrm{i}\sin(\tfrac{3}{4}\pi)), \qquad z^2 = \sqrt{2}(\cos(\tfrac{5}{4}\pi) + \mathrm{i}\sin(\tfrac{5}{4}\pi))$$

zu lösen. Damit ergeben sich gemäß dem Wurzelziehen komplexer Zahlen die Nullstellen

$$z_{1,2} = \sqrt[4]{2}(\cos(\tfrac{3}{8}\pi + \ell\pi) + \mathrm{i}\sin(\tfrac{3}{8}\pi + \ell\pi)), \quad \text{für } \ell = 0, 1,$$
$$z_{3,4} = \sqrt[4]{2}(\cos(\tfrac{5}{8}\pi + \ell\pi) + \mathrm{i}\sin(\tfrac{5}{8}\pi + \ell\pi)), \quad \text{für } \ell = 0, 1.$$

Aufgabe H 10. *Komplexe Zahlen*

Bestimmen Sie jeweils Real- und Imaginärteil, Betrag, komplex Konjugiertes und Kehrwert der folgenden komplexen Zahlen.

(a) $z_1 = \dfrac{2+\mathrm{i}}{4-3\mathrm{i}}$

(b) $z_2 = \dfrac{3}{2}\mathrm{i} + \dfrac{1-2\mathrm{i}}{(1+\mathrm{i})^2}$

(c) $z_3 = \overline{\left(\dfrac{5}{2+\mathrm{i}}\right)}$

(d) $z_4 = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}(-1+\mathrm{i})\right)^8$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es ist

$$z_1 = \frac{2+i}{4-3i} = \frac{(2+i)\overline{(4-3i)}}{(4-3i)\overline{(4-3i)}} = \frac{(2+i)(4+3i)}{|4-3i|^2} = \frac{8+6i+4i-3}{4^2+3^2} = \frac{1}{5} + \frac{2}{5}i.$$

Also erhalten wir

$$\mathrm{Re}(z_1) = \frac{1}{5},\ \mathrm{Im}(z_1) = \frac{2}{5},\ \overline{z_1} = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i,\ |z_1| = \sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{5}},$$

$$z_1^{-1} = 1 - 2\mathrm{i}$$

(b) Es gilt $(1+\mathrm{i})^2 = 2\mathrm{i}$. Weiter ergibt sich

$$z_2 = \frac{3}{2}\mathrm{i} + \frac{1-2\mathrm{i}}{(1+\mathrm{i})^2} = \frac{3}{2}\mathrm{i} + \frac{1-2\mathrm{i}}{2\mathrm{i}} = \frac{3}{2}\mathrm{i} + \frac{(1-2\mathrm{i})\mathrm{i}}{2\mathrm{i}^2} = \frac{3}{2}\mathrm{i} + \frac{\mathrm{i}+2}{-2} = \frac{3}{2}\mathrm{i} - \frac{1}{2}\mathrm{i} - 1 = -1 + \mathrm{i}.$$

Es gilt

$$\mathrm{Re}(z_2) = -1, \quad \mathrm{Im}(z_2) = +1, \quad \overline{z_2} = -1 - \mathrm{i}, \quad |z_2| = \sqrt{2},$$

$$z_2^{-1} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}.$$

(c) Wir berechnen

$$z_3 = \overline{\left(\frac{5}{2+\mathrm{i}}\right)} = \overline{\left(\frac{5(2-\mathrm{i})}{(2+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}\right)} = \overline{\left(\frac{10-5\mathrm{i}}{5}\right)} = \overline{(2-\mathrm{i})} = 2 + \mathrm{i}.$$

Es gilt

$$\mathrm{Re}(z_3) = 2, \quad \mathrm{Im}(z_2) = 1, \quad \overline{z_3} = 2 - \mathrm{i}, \quad |z_3| = \sqrt{5},$$

$$z_3^{-1} = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}\mathrm{i}.$$

(d) Es ist

$$z_4 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(-1+\mathrm{i})\right)^8 = \frac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^8}(-1+\mathrm{i})^8 = \frac{1}{16}(-1-\mathrm{i})^8.$$

Es gilt $(-1+\mathrm{i}) = -2\mathrm{i}$. Weiter ergibt sich $(-1-\mathrm{i})^8 = (-2\mathrm{i})^4 = 16\mathrm{i}^4 = 16$. Insgesamt ist also $z_4 = 1$. Es gilt

$$\mathrm{Re}(z_4) = 1, \quad \mathrm{Im}(z_4) = 0, \quad \overline{z_4} = 1, \quad |z_4| = 1,\ z_4^{-1} = 1.$$

Aufgabe H 11. *Mengen in* $\mathbb{C}$

Gegeben sind folgende Mengen.

$$
\begin{aligned}
M_1 &= \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z - 2\mathrm{i}| \geqq 2 \right\} \\
M_2 &= \left\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \,\middle|\, \operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) > 1 \right\} \\
M_3 &= \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, z^8 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} \right\} \\
M_4 &= \left\{ 1 + \mathrm{i}t \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}
\end{aligned}
$$

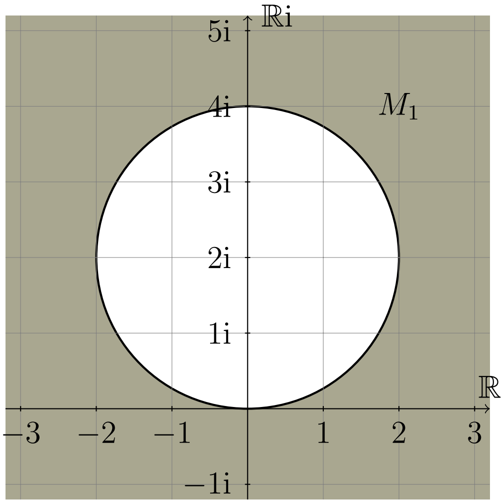
(a) Zeichnen Sie die Mengen M_1, M_2 und M_3.

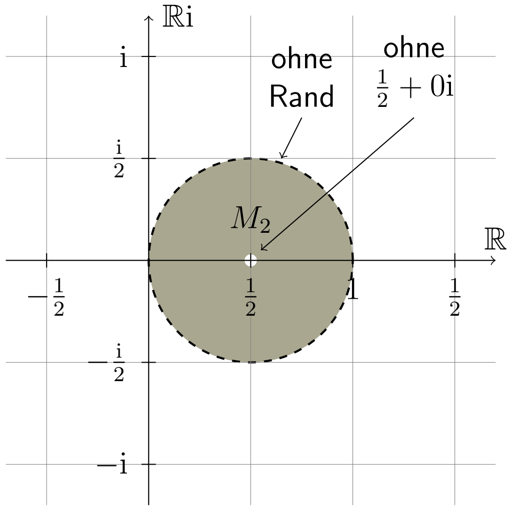
(b) Sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}\colon z \mapsto z^2$. Zeichnen Sie die Mengen M_4, $f(M_4)$ und $f(f(M_4))$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Die Mengen M_1 und M_2 sind unten skizziert. Für die Menge M_2 erhält man nach quadratischer Ergänzung

$$
M_2 = \left\{ a + b\mathrm{i} \,\middle|\, (a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ mit } \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + b < \frac{1}{4} \right\}.
$$





Die Menge M_3 beinhaltet komplexe Wurzeln. Die Menge lässt sich folgendermaßen darstellen

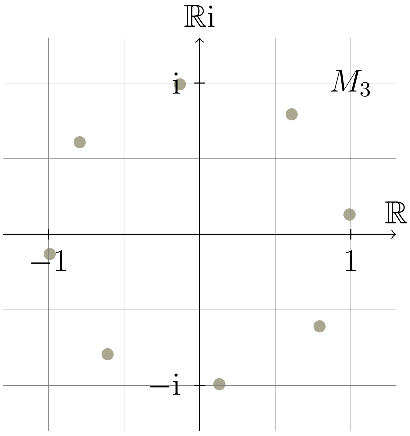
$$
M_3 = \left\{ \cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi) \,\middle|\, \varphi \in \left\{ \frac{\pi}{24} + \ell\frac{\pi}{4} \,\middle|\, \ell \in \mathbb{Z} \right\} \right\}
$$

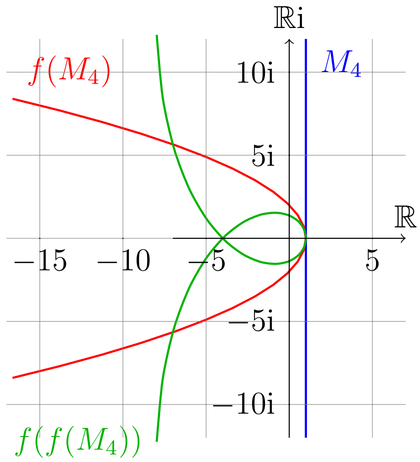
und ist auf der nächsten Seite skizziert.

(b) Man erhält für

$$f(M_4) = \left\{ -t^2 + t\,2\mathrm{i} + 1 \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}, \text{ und}$$
$$f(f(M_4)) = \left\{ (t^2-1)^2 - 4\,t^2 + 4\,t\,(1-t^2)\mathrm{i} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}$$

die Skizzen:





Aufgabe H 12. *Polarkoordinaten*

(a) Stellen Sie die folgenden komplexen Zahlen in Polarkoordinaten dar.

- $z = 1 + \mathrm{i}$
- $z = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$

(b) Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke in Polarkoordinaten.

- $(1+\mathrm{i})^k$ für $k \in \mathbb{Z}$
- $(1-\mathrm{i}\sqrt{3})^k$ für $k \in \mathbb{Z}$

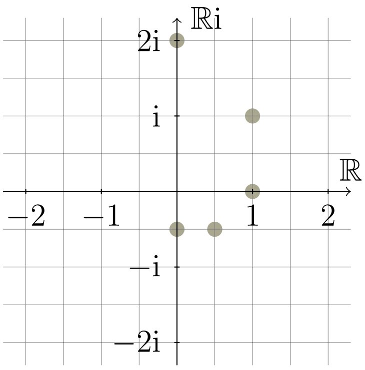
Zeichnen Sie die Ergebnisse jeweils für $-2 \leqq k \leqq 2$ in die komplexe Zahlenebene ein.

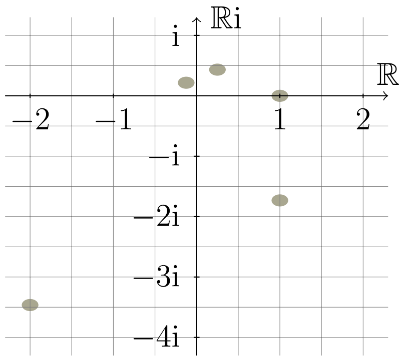
Lösungshinweise hierzu:

(a) Man erhält $1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}\left(\cos(\frac{\pi}{4}) + \mathrm{i}\sin(\frac{\pi}{4})\right)$ und $1 + \sqrt{3}\mathrm{i} = 2\left(\cos(\frac{5\pi}{3}) + \mathrm{i}\sin(\frac{5\pi}{3})\right)$.

(b) In Polarkoordinaten erhält man einfache Ausdrücke für Potenzen komplexer Zahlen:

$$(1+\mathrm{i})^k = (\sqrt{2})^k\left(\cos(\tfrac{k\pi}{4}) + \mathrm{i}\sin(\tfrac{k\pi}{4})\right) \qquad (1+\sqrt{3}\mathrm{i})^k = 2^k\left(\cos(\tfrac{5k\pi}{3}) + \mathrm{i}\sin(\tfrac{5k\pi}{3})\right)$$





Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 13. *Lineare Unabhängigkeit, Basis, Erzeugendensystem*

Gegeben seien die Vektoren $v_1 = (3, 0, 3, 6)$, $v_2 = (2, -1, 1, 2)$, $v_3 = (-1, 1, 0, 0)$, $v_4 = (0, 1, 2, \pi)$ und $v_5 = (2, 1, 4, 4 + \pi)$ aus $\mathbb{R}^4$.
Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

(a) Die Vektoren v_1 und v_2 sind linear unabhängig.

(b) Die Vektoren v_1 und v_2 bilden eine Basis von $\mathrm{L}(v_1, v_2, v_3)$

(c) Die Vektoren v_1, v_2, v_4, v_5 bilden eine Basis von $\mathbb{R}^4$.

(d) Die Vektoren v_2, v_3, v_4, v_5 sind linear unabhängig.

(e) Die Vektoren v_1, v_2, v_4 bilden ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^3$.

(f) Der Vektorraum $\mathrm{L}(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ hat eine Basis aus 3 Vektoren.

Lösungshinweise hierzu:

(a) wahr, in der Bedingung $a_1v_1 + a_2v_2 = 0$ folgt aus der zweiten Koordinatengleichung, dass $a_2 = 0$ sein muss, und dann z.B. aus der ersten Koordinatengleichung $a_1 = 0$.

(b) wahr, da $v_3 = \frac{1}{3}v_1 - v_2$ ist, kann jede Linearkombination aus $\mathrm{L}(v_1, v_2, v_3)$ auch mit v_1 und v_2 dargestellt werden. Nach **(a)** sind v_1 und v_2 linear unabhängig, bilden also eine Basis.

(c) falsch, es ist $v_5 - v_4 - \frac{2}{3}v_1 = 0$ und somit sind die Vektoren nicht linear unabhängig.

(d) falsch, da $v_1 = 3(v_2 + v_3)$ gilt mit **(c)** auch $v_5 - v_4 - 2(v_2 + v_3) = 0$.

(e) falsch, die drei Vektoren sind zwar linear unabhängig, allerdings erzeugen sie einen dreidimensionalen Untervektorraum des $\mathbb{R}^4$ und nicht den $\mathbb{R}^3$.

(f) richtig, nach **(b)** und **(c)** sind v_1 und v_2 als Linearkombination v_3, v_4, v_5 darstellbar und somit ist $\mathrm{L}(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5) = \mathrm{L}(v_3, v_4, v_5)$. Aus der Bedingung $a_3v_3 + a_4v_4 + a_5v_5 = 0$ folgt aus der dritten Koordinatengleichung $a_4 = -2a_5$ und dann aus der vierten $a_4 = a_5 = 0$. Die restlichen Gleichungen forden dann $a_3 = 0$. Damit sind die drei Vektoren linear unabhängig und der von ihnen aufgespannte Raum hat Dimension 3.

Aufgabe H 14. *Ebenen*

(a) Liegen die beiden folgenden Geraden in einer Ebene?

$$g = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad h = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(b) Gegeben seien die Punkte: $A = (2, 3, 2)$, $B = (3, 0, -2)$, $C = (1, 4, -3)$ und $D = (-2, 9, -9)$. Gibt es eine Ebene, die das Viereck $ABCD$ enthält?

Lösungshinweise hierzu:

(a) Die Geraden sind nicht parallel, da ihre Richtungsvektoren nicht linear abhängig sind. Die Geraden liegen in einer Ebene, wenn sie sich schneiden. Wir berechnen die Schnittmenge, indem wir gleichsetzen.

$$\begin{aligned} (5,1,-1)+\lambda(4,3,-2) &= (1,5,-3)+\mu(2,0,-1) \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} &= \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die zweite Zeile ergibt $\lambda = \frac{4}{3}$. Wir setzen dies in die erste Zeile ein und erhalten $\mu = \frac{14}{3}$. Dies überprüfen wir, indem wir $\lambda = \frac{4}{3}$ auch noch in die dritte Zeile einsetzen und erhalten $\mu = \frac{2}{3}$. Dies ist ein Widerspruch. Die Geraden schneiden sich nicht und liegen somit nicht in einer Ebene.

(b) Wir betrachten die Ebene, die die Punkte A, B und C enthält. Diese ist gegeben durch

$$E : x = (2,3,2)+\lambda(1,-3,-4)+\mu(-1,1,-5)$$

wobei $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Wir fragen uns, ob λ und μ existieren, dass

$$(2,3,2)+\lambda(1,-3,-4)+\mu(-1,1,-5) = (-2,9,-9)$$

gilt. Wir formen dieses Gleichungssystem um und erhalten drei Gleichungen

$$\begin{array}{rrl} \lambda & -\mu & = -4 \\ -3\lambda & +\mu & = 6 \\ -4\lambda & -5\mu & = -11. \end{array}$$

Wir lösen die erste Zeile nach λ auf und setzen dies in die zweite Zeile ein.
Wir erhalten $6 = -3(\mu-4)+\mu = -2\mu+12$, also $\mu = 3$ und somit $\lambda = -1$ (vgl. erste Zeile). Wir führen mit diesen Werten eine Probe in der dritten Zeile durch, es ergibt sich $-4(-1)-5\cdot 3 = 4-15 = -11$. Die Probe hält. Der Punkt D liegt in der Ebene, d.h. das Viereck ist eben.

Aufgabe H 15. *Funktionenräume*

Gegeben seien die folgenden Funktionen aus dem Vektorraum $\mathcal{C}^0([0,2\pi])$ (siehe **2.6.3**):

$f_1\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}\colon x \mapsto 1$ $\qquad$ $f_2\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \cos(x)$

$f_3\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \sin(x)$ $\qquad$ $f_4\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \cos(2x)$

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

(a) Die Funktionen f_1, f_2, f_3 und f_4 sind linear unabhängig.

(b) Sei $g\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \big(\cos(x)-2\big)\cos(2x) + \big(3+\sin(2x)\big)\sin(x)$.
Dann ist $\mathrm{L}(f_1,f_2,f_3,f_4) = \mathrm{L}(f_1,f_2,f_3,f_4,g)$.

(c) Es ist $\langle f_2 \,|\, f_3 \rangle = \langle f_1 \,|\, f_1 \rangle$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir betrachten eine Linearkombination der Funktionen. Es soll für alle $x \in \mathbb{R}$ gelten, dass

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{!}{=} \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) + \lambda_3 f_3(x) + \lambda_4 f_4(x) \\ &= \lambda_1 + \lambda_2 \cos(x) + \lambda_3 \sin(x) + \lambda_4 \cos(2x). \end{aligned}$$

Wir setzen nun verschiedene Werte für x ein, um die Koeffizienten λ_i zu bestimmen.

Sei $x = 0$, dann gilt

$$0 = \lambda_1 + \lambda_2 + 0 + \lambda_4 + 0. \tag{1}$$

Sei nun $x = \frac{\pi}{2}$, dann gilt

$$0 = \lambda_1 + 0 + \lambda_3 - \lambda_4 + 0. \tag{2}$$

Sei nun $x = \pi$, dann gilt

$$0 = \lambda_1 - \lambda_2 + 0 + \lambda_4. \tag{3}$$

Sei nun $x = -\frac{\pi}{2}$, dann gilt

$$0 = \lambda_1 + 0 - \lambda_3 - \lambda_4. \tag{4}$$

Wir lösen Gleichung (3) nach λ_2 auf und setzen in Gleichung (1) ein:

$$2\lambda_1 + 2\lambda_4 = 0. \tag{5}$$

Nun lösen wir Gleichung (4) nach λ_3 auf und setzen in Gleichung (2) ein:

$$2\lambda_1 - 2\lambda_4 = 0. \tag{6}$$

Ineinander Einsetzen von Gleichungen (5) und (6) ergibt, dass $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_4 = 0$. Einsetzen in Gleichung (1) liefert $\lambda_2 = 0$ und Einsetzen in Gleichung (2) liefert $\lambda_3 = 0$. Somit sind die Funktionen linear unabhängig.

(b) Es gelten folgende Additionstheoreme (vgl. 1.8.3):

$$\begin{aligned} \cos(2x) &= \cos(x)\cos(x) - \sin(x)\sin(x) \\ \sin(2x) &= \sin(x)\cos(x) + \cos(x)\sin(x) \end{aligned}$$

Damit berechnen wir

$$\begin{aligned} \cos(2x)\cos(x) + \sin(2x)\sin(x) &= \big(\cos(x)^2 - \sin(x)^2\big)\cos(x) + \big(2\sin(x)\cos(x)\big)\sin(x) \\ &= \big(\cos(x)^2 + \sin(x)^2\big)\cos(x) \\ &= \cos(x) \end{aligned}$$

Folglich ist $\cos(2x)\cos(x)+\sin(2x)\sin(x)=\cos(x)$. Die Funktion g ist daher gegeben durch

$$g(x)=\cos(x)-2\cos(2x)+3\sin(x).$$

Die Funktion g ist als Linearkombination der Funktionen f_2, f_3 und f_4 darstellbar. Die Aussage ist also korrekt.

(c) Für Skalarprodukte auf dem Vektorraum $\mathcal{C}^0([0,2\pi])$ berechnen wir die Skalarprodukte der Bauart $\langle f \mid g\rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx$.

$$\begin{aligned}\langle f_2 \mid f_3\rangle &= \int_0^{2\pi} \cos(x)\sin(x)dx = \left[\frac{1}{2}\big(\sin(x)\big)^2\right]_0^{2\pi} = 0\\ \langle f_1 \mid f_1\rangle &= \int_0^{2\pi} 1dx = 2\pi\end{aligned}$$

Die Aussage ist also falsch.

Aufgabe H 16. *Geraden und Ebenen*

Gegeben sind die Punkte $P_1=(1,2,1)$, $P_2=(1,2,-3)$, $P_3=(2,0,1)$, $P_4=(5,2,2)$ und $P_{5,\alpha}=(7,\alpha,1)$, wobei $\alpha\in\mathbb{R}$.

(a) Berechnen Sie eine Parameterdarstellung der Ebene E_1, die die Punkte P_1, P_2 und P_3 beinhaltet.

Lösungshinweise hierzu:

$$E_1:\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}0\\0\\-4\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix},\quad \lambda,\mu\in\mathbb{R}$$

(b) Für welche α liegt der Punkt $P_{5,\alpha}$ auf der Ebene E_1?

Lösungshinweise hierzu: Es gilt

$$\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\-4\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\\alpha\\1\end{pmatrix}$$

und somit

$$\lambda\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\-4\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\\alpha-2\\0\end{pmatrix}.$$

Man sieht an der dritten Zeile, dass $\lambda=0$ und an der ersten Zeile, dass $\mu=6$ sein muss. Einsetzen in die zweite Zeile liefert

$$-12=\alpha-2 \quad\Leftrightarrow\quad -10=\alpha.$$

(c) Bestimmen Sie α so, dass die Gerade g durch die Punkte P_4 und $P_{5,\alpha}$ parallel zu der Ebene E_1 verläuft.

Lösungshinweise hierzu: Die Gerade g ist genau dann parallel zu der Ebene E_1, wenn der Richtungsvektor $\overrightarrow{P_4P_{5,\alpha}}$ linear abhängig von den Spannvektoren der Ebene E_1 ist. Es gilt also

$$\lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ \alpha - 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow \lambda = \frac{1}{4} \Longrightarrow \mu = 2 \Longrightarrow \alpha = -2.$

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 17. *Darstellungen von Ebenen*

Es seien der Punkt $P = (2, 0, 1)$ und die Gerade $g = (2, 0, -1) + \mathbb{R}\,(0, 1, 1)$ in $\mathbb{R}^3$ gegeben.

(a) Bestimmen Sie die Hesse-Normalform der Ebene durch P und g.

(b) Bestimmen Sie die Hesse-Normalform der Ebene durch P senkrecht zu g.

(c) Bestimmen Sie $Q \in g$ mit $\overrightarrow{PQ}$ senkrecht zu g.

(d) Bestimmen Sie die Hesse-Normalform der Ebene durch g mit maximalem Abstand zu P.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Die gesuchte Ebene hat den Stützvektor $(2, 0, -1)$ und die beiden Richtungsvektoren $(0, 1, 1)$ und $(0, 0, 2)$. Das Kreuzprodukt dieser ist $(2, 0, 0)$ und somit ist die normierte Normale an die Ebene $(1, 0, 0)$.
Die Hesse-Normalform sieht dann so $1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = d$ aus. Es soll P auf der Ebene sein. Wir setzen P in die HNF ein und erhalten $d = 2$. Somit ist die Ebene gegeben durch $x_1 = 2$.

(b) Die gesuchte Ebene hat einen Normalenvektor, der linear abhängig zu dem Richtungsvektor von g ist. Wir normieren diesen und erhalten $\frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1)$. Die HNF hat dann die Form $\frac{1}{\sqrt{2}}x_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}x_3 = d$. Wir setzen den Punkt P ein und erhalten $\frac{1}{\sqrt{2}} = d$. Somit ist die HNF gegeben durch $\frac{1}{\sqrt{2}}x_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}x_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

(c) Es ist der Punkt $Q \in g$ gesucht, dass $\langle PQ, (0, 1, 1)\rangle = 0$ gilt.
Wir schreiben $Q = (2, 0, -1) + \lambda\,(0, 1, 1)$ und $PQ = Q - P = (0, 0, -2) + \lambda\,(0, 1, 1)$ für $\lambda \in \mathbb{R}$ und erhalten die Gleichung $0 = \lambda - 2 + \lambda = 2(\lambda - 1)$. Die Lösung ist $\lambda = 1$. Somit ist $Q = (1, 1, 0)$.

(d) Die gesuchte Ebene hat den Normalvektor PQ und g liegt in dieser Ebene. Es liegt also insbesondere der Punkt $(1, 0, -1)$ in der Ebene. Wir normieren PQ und erhalten $\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Somit ergibt sich die HNF durch $\frac{1}{\sqrt{2}}x_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}x_2 = d$. Wir setzen $(1, 0, -1)$ ein und erhalten $d = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Also lautet die HNF $\frac{1}{\sqrt{2}}x_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}x_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Aufgabe H 18. *Flächeninhalt eines Dreiecks*

Seien die Punkte $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $C_\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \alpha \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^3$ gegeben, wobei $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Berechnen Sie $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC_\alpha}$.

(b) Bestimmen Sie den Flächeninhalt F_α des Dreiecks mit den Ecken A, B und C_α. Bestimmen Sie $\beta \in \mathbb{R}$ mit F_β minimal.

(c) Bestimmen Sie die Gerade g durch C_β, die die Gerade durch A und B in einem Punkt schneidet und die senkrecht auf $\overrightarrow{AB}$ steht.

(d) Bestimmen Sie den Winkel zwischen g und $\overrightarrow{C_0C_1}$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC_\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha-1 \\ \alpha-1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

(b) Für den Flächeninhalt des Dreiecks gilt

$$F_\alpha = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC_\alpha}| = \frac{1}{2}\sqrt{2(\alpha-1)^2+4}.$$

Dieser wird also minimal für $\beta = 1$. Dort gilt dann $F_\beta = 1$.

(c) Wir parametrisieren zunächst alle Punkte Q_s auf der Geraden:

$$Q_s = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Dann gilt

$$\overrightarrow{C_\beta Q_s} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Wir wollen nun s so bestimmen, dass der resultierende Vektor senkrecht auf $\overrightarrow{AB}$ stehen, d.h. folgende Gleichung erfüllt ist

$$0 = \left\langle \overrightarrow{AB} \,\middle|\, \overrightarrow{C_\beta Q_s} \right\rangle .$$

Dies liefert $s = 1$ und damit die Gerade

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(d) Offensichtlich steht der Richtungsvektor von g senkrecht auf $\overrightarrow{C_0C_1}$.

Aufgabe H 19. *Matrizenmultiplikation*

(a) Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie $\left\{X \in \mathbb{R}^{2\times 2} \,\middle|\, AX = \mathrm{E}_2\right\}$.

(b) Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Sei $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie $\left\{X \in \mathbb{R}^{2\times 3} \,\middle|\, XA = B\right\}$.

(c) Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie $\left\{X \in \mathbb{C}^{2\times 2} \,\middle|\, XA = AX\right\}$.

(d) Bestimmen Sie $\left\{X \in \mathbb{C}^{2\times 2} \,\middle|\, XX^\intercal = 0\right\}$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir schreiben die Matrixgleichung zuerst Komponentenweise. Mit $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$ ergibt sich das LGS

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{21} &= 1 \\ x_{12} + x_{22} &= 0 \\ x_{11} + x_{21} &= 0 \\ x_{12} + x_{22} &= 1 \end{aligned}$$

und man sieht sofort, dass zum Beispiel die erste und dritte Gleichung nicht gleichzeitig erfüllt werden kann. Also ist

$$\left\{ X \in \mathbb{R}^{2\times 2} \,\middle|\, AX = \mathrm{E}_2 \right\} = \{\}.$$

(b) Wie gehen vor wie gehabt. Sei wiederum $X = (x_{i,j})_{i,j}$, dann ergeben sich hier die Gleichungen

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{13} &= 3 \\ x_{12} &= 1 \\ x_{11} + x_{13} &= 3 \\ x_{21} + x_{23} &= 0 \\ x_{22} &= 2 \\ x_{21} + x_{23} &= 0 \end{aligned}$$

Die dritte und sechste Gleichung liefern keine zusätzliche Information. Mit $s, t \in \mathbb{R}$ setzten wir $x_{13} = s$ und $x_{23} = t$ und erhalten $x_{11} = 3 - s$ und $x_{21} = -t$. Damit folgt

$$\left\{ X \in \mathbb{R}^{2\times 3} \,\middle|\, XA = B \right\} = \left\{ X \in \mathbb{R}^{2\times 3} \,\middle|\, X = \begin{pmatrix} 3-s & 1 & s \\ -t & 2 & t \end{pmatrix},\ s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

(c) Wie zuvor erhalten wir die Gleichungen

$$\begin{aligned} x_{11} &= x_{11} + \mathrm{i}x_{21} \\ \mathrm{i}x_{11} - x_{12} &= x_{12} + \mathrm{i}x_{22} \\ x_{21} &= -x_{21} \\ \mathrm{i}x_{21} - x_{22} &= -x_{22}. \end{aligned}$$

Gleichung eins, drei und vier liefern lediglich $x_{21} = 0$. Wir benutzen noch Gleichung zwei und erhalten nach Division durch i

$$x_{11} = -2\mathrm{i}x_{12} + x_{22}.$$

Als Ergebnis erhalten wir

$$\left\{ X \in \mathbb{C}^{2\times 2} \,\middle|\, XA = AX \right\} = \left\{ X \in \mathbb{C}^{2\times 2} \,\middle|\, X = \begin{pmatrix} -2\mathrm{i}s + t & s \\ 0 & t \end{pmatrix},\ s, t \in \mathbb{C} \right\}.$$

(d) Die resultierenden Gleichungen sind dieses Mal quadratisch:

$$\begin{aligned} x_{11}^2 + x_{12}^2 &= 0 \\ x_{11}x_{21} + x_{12}x_{22} &= 0 \\ x_{11}x_{21} + x_{12}x_{22} &= 0 \\ x_{21}^2 + x_{22}^2 &= 0. \end{aligned}$$

Gleichung zwei und drei sind identisch. Gleichung eins und vier liefern

$$x_{11} = \pm \mathrm{i} x_{12} \quad \text{und} \quad x_{21} = \pm \mathrm{i} x_{22}.$$

Wir machen eine Fallunterscheidung

- $x_{12} = 0$: Dies impliziert $x_{11} = 0$ und wir erhalten als Lösungsmenge des quadratischen Gleichungssystems

$$\mathbb{L}_1 = \left\{ X \in \mathbb{C}^{2\times 2} \,\middle|\, X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \pm \mathrm{i}t & t \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{C} \right\}$$

- $x_{12} \neq 0$: Wir nehmen zuerst an, dass $x_{22} = 0$ gilt. dann erhält man vollkommen analog

$$\mathbb{L}_2 = \left\{ X \in \mathbb{C}^{2\times 2} \,\middle|\, X = \begin{pmatrix} \pm \mathrm{i}t & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{C} \right\}$$

  Falls auch $x_{22} \neq 0$ gilt setzen wir $x_{12} = s \in \mathbb{C}$, $x_{22} = t \in \mathbb{C}$ und erhalten mit Hilfe der zweiten Gleichung

$$-(\pm s)(\pm t) + st = 0.$$

  D.h. die Vorzeichen müssen übereinstimmen und wir erhalten

$$\mathbb{L}_3 = \left\{ X \in \mathbb{C}^{2\times 2} \,\middle|\, X = \begin{pmatrix} \mathrm{i}s & s \\ \mathrm{i}t & t \end{pmatrix},\ s,t \in \mathbb{C} \right\}$$

  und

$$\mathbb{L}_4 = \left\{ X \in \mathbb{C}^{2\times 2} \,\middle|\, X = \begin{pmatrix} -\mathrm{i}s & s \\ -\mathrm{i}t & t \end{pmatrix},\ s,t \in \mathbb{C} \right\}.$$

Insgesamt erhalten wir zuerst $\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 \cup \mathbb{L}_3 \cup \mathbb{L}_4$. Da aber $\mathbb{L}_1, \mathbb{L}_2$ in $\mathbb{L}_3, \mathbb{L}_4$ enthalten sind, schreiben wir die Lösungsmenge kompakter als

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}_3 \cup \mathbb{L}_4.$$

Aufgabe H 20. *Matrizenmultiplikation*

Seien

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3\sqrt{5}}{10} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3\sqrt{5}}{10} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{5}}{10} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{5}}{10} & \frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{3}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie

$$\textbf{(a)}\ Q^\intercal Q\,,\quad \textbf{(b)}\ Q^\intercal A\,,\quad \textbf{(c)}\ Q^\intercal A\,S\,,\quad \textbf{(d)}\ SQ^\intercal A\,S\,Q^\intercal A - S\,S^\intercal A^\intercal Q\,Q^\intercal A\,.$$

Hinweis: Für Matrizen M und N, für die MN definiert ist, gilt $(MN)^\intercal = N^\intercal M^\intercal$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) $Q^\intercal Q = \mathrm{E}_3$

(b) $Q^\intercal A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \sqrt{5} & \frac{3\sqrt{5}}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{6}}{2} \end{pmatrix}$

(c) $Q^\intercal A\,S = \mathrm{E}_3$

(d)

$$SQ^\intercal ASQ^\intercal A - SS^\intercal A^\intercal QQ^\intercal A = S\left(Q^\intercal AS - S^\intercal A^\intercal Q\right)Q^\intercal A = S\,(\mathrm{E}_3 - \mathrm{E}_3)\,Q^\intercal A = 0$$

oder

$$SQ^\intercal ASQ^\intercal A - SS^\intercal A^\intercal QQ^\intercal A = SQ^\intercal A - SQ^\intercal A = \mathrm{E}_3 - \mathrm{E}_3 = 0$$

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 21. *Lineares Gleichungssystem*

Sei U der Lösungsraum des folgenden linearen Gleichungssystems.

$$\begin{aligned} 4x_1 + 5x_2 - x_3 - x_4 &= 0 \\ 4x_1 + 4x_2 - 2x_3 \quad &= 0 \end{aligned}$$

(a) Entscheiden Sie, ob die Mengen $M_1 := (1,-1,1,0)+\mathbb{R}\,(2,0,0,0)$, $M_2 := \mathbb{R}\,(2,1,6,7)$, $M_3 := \{x \in \mathbb{R}^4 | \, x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0\}$, $M_4 := \mathbb{R}\,(1,2,6,8)$ in U liegen.

(b) Bestimmen Sie eine Basis von U.

Lösungshinweise hierzu:

(a)
- $x := (1,-1,1,0) \in M_1$ liegt nicht in der Lösungsmenge, weil die erste Gleichung nicht erfüllt ist. Es gilt nämlich:
$$4 - 5 - 1 - 0 = -2 \neq 0.$$
M_1 liegt also nicht in der Lösungsmenge des angegebenen Gleichungssystems.
- Die Menge M_2 liegt in der Lösungsmenge des Gleichungssystems.
Beweis: Jeder Vektor $x \in M_2$ lässt sich als $x = \lambda\,(2,1,6,7)$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ schreiben. Wir setzen diese Darstellung in das Gleichungssystem ein und überprüfen, ob x eine Lösung ist.
$$\begin{aligned} 4x_1 + 5x_2 - x_3 - x_4 &= 4 \cdot 2\lambda + 5\lambda - 6\lambda - 7\lambda = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 &= 2 \cdot 2\lambda + 2\lambda - 6\lambda = 0. \end{aligned}$$
Das gilt für alle $\lambda \in \mathbb{R}$, also für alle $x \in M_2$. Wir haben also gezeigt, dass alle Elemente der Menge M_2 in der Lösungsmenge des Gleichungssystems liegen.
- Die Menge M_3 liegt nicht in der Lösungsmenge des Gleichungsystems. Als Begründung reicht es aus, einen Punkt zu finden, der zu M_3 gehört, aber nicht in der Lösungsmenge des Gleichungssystems liegt. Zum Beispiel gilt $x := (0,-1,1,0) \in M_3$, denn $0 - 1 + 1 + 0 = 0$, jedoch erfüllt x die zweite Gleichung nicht. Es gilt nämlich $4 \cdot 0 + 4 \cdot (-1) - 2 \cdot 1 = -6 \neq 0$.
- Die Menge M_4 liegt in der Lösungsmenge des Gleichungsystems.
Beweis: Sei $x \in M_4$. Dann existiert ein $\lambda \in \mathbb{R}$ so, dass $x = \lambda\,(1,2,6,8)$ gilt. Wir setzen diese Darstellung im Gleichungssystem ein und überprüfen, ob x eine Lösung ist. Es gilt für alle $x \in M_4$, also für alle $\lambda \in \mathbb{R}$:
$$\begin{aligned} 4x_1 + 5x_2 - x_3 - x_4 &= 4 \cdot \lambda + 5 \cdot 2\lambda - 6\lambda - 8\lambda = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 &= 2 \cdot 1\lambda + 2 \cdot 2\lambda - 6\lambda = 0. \end{aligned}$$
Wir haben also gezeigt, dass alle Elemente der Menge M_4 in der Lösungsmenge des Gleichungssystems liegen.

(b) Das Gleichungssystem hat 2 Gleichungen und 4 Unbekannten. Es gibt also maximal $4-2=2$ linear unabhängige Vektoren, die die Lösungsmenge erzeugen.
Da $v_1 = (2,1,6,7)$ und $v_2 = (1,2,6,8)$ in der Lösungsmenge liegen und linear unabhängig sind, bilden sie eine Basis der Lösungsmenge.

Aufgabe H 22. *Lineares Gleichungssystem*

Wir betrachten das folgende reelle lineare Gleichungssystem.

$$S : \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcrcr} -2x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & - & 8x_4 & - & 4x_5 & = & 0 \\ & & x_2 & - & x_3 & - & 3x_4 & - & 2x_5 & = & 2 \\ 2x_1 & - & 5x_2 & + & 5x_3 & + & 17x_4 & + & 10x_5 & = & -6 \\ -2x_1 & + & 3x_2 & - & 3x_3 & - & 11x_4 & - & 6x_5 & = & 2 \\ -3x_1 & + & 4x_2 & - & 4x_3 & - & 15x_4 & - & 8x_5 & = & 2 \end{array} \right.$$

(a) Erstellen Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix für S. Bringen Sie diese mittels Algorithmus 3.7.3 in die in Satz 3.7.2 angegebene Form.

(b) Bestimmen Sie eine spezielle Lösung von S. Bestimmen Sie eine Basis des Lösungsraums des zugehörigen homogenen linearen Gleichungssystems S_H .

(c) Geben Sie die Lösungsmenge von S an. Verwenden Sie dazu **(b)**.

(d) Ersetzen Sie in der letzten Gleichung 2 durch -2 und bestimmen Sie nun die Lösungsmenge.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Die erweiterte Koeffizientenmatrix für S ist

$$\left[\begin{array}{rrrrr||r} -2 & 2 & -2 & -8 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & -2 & 2 \\ 2 & -5 & 5 & 17 & 10 & -6 \\ -2 & 3 & -3 & -11 & -6 & 2 \\ -3 & 4 & -4 & -15 & -8 & 2 \end{array} \right].$$

Wir verwenden den Algorithmus 3.7.3:

$$\begin{array}{r} -\frac{1}{2}\,Z_1 : \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{rrrrr||r} 1 & -1 & 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & -2 & 2 \\ 2 & -5 & 5 & 17 & 10 & -6 \\ -2 & 3 & -3 & -11 & -6 & 2 \\ -3 & 4 & -4 & -15 & -8 & 2 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ Z_3 - 2\,Z_1 : \\ Z_4 + 2\,Z_1 : \\ Z_5 + 3\,Z_1 : \end{array} \left[\begin{array}{rrrrr||r} 1 & -1 & 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & 9 & 6 & -6 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & -2 & 2 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{r} Z_1 + Z_2 : \\ \\ Z_3 + 3\,Z_2 : \\ Z_4 - Z_2 : \\ Z_5 - Z_2 : \end{array} \left[\begin{array}{ccccc||c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

(b) Eine spezielle Lösung von S ist dann $\begin{pmatrix} 2, & 2, & 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}^{\intercal}$.
Die Koeffizientenmatrix des homogenen Gleichungssystems ist

$$\left[\begin{array}{ccccc||c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Eine Basis der Lösungsmenge des homogenen Gleichungssystems ist also nach Satz 3.7.6

$$B\colon \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Die Lösungsmenge des Gleichungssystems ist also

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R} \right\}.$$

(d) Ersetzen wir in der letzten Gleichung 2 durch -2, dann lautet die fünfte Gleichung $-3x_1 + 4x_2 - 4x_3 - 15x_4 - 8x_5 = -2$. Addieren wir die zweite und $\frac{3}{2}$ erste Zeile, dann erhalten wir $-3x_1 + 4x_2 - 4x_3 - 15x_4 - 8x_5 = 2$. Folglich ist $2 = -2$. Das heißt, das Gleichungssystem besitzt keine Lösungen. Die Lösungsmenge ist die leere Menge.

Aufgabe H 23. *Lineares Gleichungssystem*

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ ein Parameter. Sei $A_\alpha := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Sei $b := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie $\left\{ x \in \mathbb{R}^6 \;\middle|\; A_\alpha x = 0 \right\}$ in Abhängigkeit von α.

(b) Bestimmen Sie $\left\{ x \in \mathbb{R}^6 \;\middle|\; A_\alpha x = b \right\}$ in Abhängigkeit von α.

Lösungshinweise hierzu:

- Die erweiterte Koeffizientenmatrix ist

$$\left[\begin{array}{cccccc||c} 0 & 0 & \alpha & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

- Wir verwenden den Algorithmus 3.7.3:

$$Z_1 \leftrightarrow Z_3 : \left[\begin{array}{cccccc||c} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$Z_2 - Z_1 : \left[\begin{array}{cccccc||c} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\tfrac{1}{2} Z_2 : \left[\begin{array}{cccccc||c} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$S_2 \leftrightarrow S_5 : \left[\begin{array}{cccccc||c} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} Z_1 + Z_2 : \\ \\ Z_3 - Z_2 : \end{array} \left[\begin{array}{cccccc||c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha+1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

- Wenn $\alpha = -1$ dann die erweiterte Koeffizientenmatrix ist

$$\left[\begin{array}{cccccc||c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

- Wenn $\alpha \neq -1$ dann die erweiterte Koeffizientenmatrix ist

$$\tfrac{1}{(\alpha+1)} Z_3 : \left[\begin{array}{cccccc||r} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/(\alpha+1) \end{array}\right]$$

$$Z_2 + Z_3 : \left[\begin{array}{cccccc||r} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/(\alpha+1) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/(\alpha+1) \end{array}\right]$$

(a) Wenn $\alpha = -1$ denn die Koeffizientenmatrix des homogenen Gleichungssystems ist

$$\left[\begin{array}{cccccc||c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

und eine Basis der Lösungsmenge $\left\{x \in \mathbb{R}^6 \,\middle|\, A_{-1}x = 0\right\}$ ist

$$B\colon \begin{pmatrix} 0\\0\\1\\0\\1\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1\\0\\0\\1\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1\\1\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1\\0\\0\\0\\0\\1 \end{pmatrix}$$

(der zweite und der fünfte Eintrag der Vektoren wurden zurück getauscht).
Wenn $\alpha \neq -1$ denn die Koeffizientenmatrix des homogenen Gleichungssystems ist

$$\left[\begin{array}{cccccc||c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

und eine Basis der Lösungsmenge $\left\{x \in \mathbb{R}^6 \,\middle|\, A_{\alpha}x = 0\right\}$ ist

$$C\colon \begin{pmatrix} -1\\0\\0\\1\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1\\1\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1\\0\\0\\0\\0\\1 \end{pmatrix}.$$

(Der zweite und der fünfte Eintrag der Vektoren wurden wieder zurück getauscht)

(b) Wenn $\alpha = -1$ denn die Koeffizientenmatrix ist

$$\left[\begin{array}{cccccc||c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

so erhalten wir als dritte Zeile $0 = 1$, die Lösungsmenge ist also die leere Menge.
Wenn $\alpha \neq -1$ denn die Koeffizientenmatrix ist

$$\left[\begin{array}{cccccc||r} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/(\alpha+1) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/(\alpha+1) \end{array}\right].$$

Eine spezielle Lösung ist damit $\begin{pmatrix} 0, & 0, & 1/(\alpha+1), & 0, & 1/(\alpha+1), & 0 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}$ und die Lösungsmenge $\left\{x \in \mathbb{R}^6 \,\middle|\, A_{\alpha}x = b\right\}$ ist also

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0\\0\\1/(\alpha+1)\\0\\1/(\alpha+1)\\0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1\\0\\0\\1\\0\\0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1\\1\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} -1\\0\\0\\0\\0\\1 \end{pmatrix}. \,\middle|\, \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R} \right\}.$$

(Der zweite und der fünfte Eintrag der Vektoren wurden wieder zurück getauscht)

Aufgabe H 24. *Schnitt von Untervektorräumen*

Seien

$$v_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix},\ v_2=\begin{pmatrix}2\\1\\1\\1\end{pmatrix},\ v_3=\begin{pmatrix}5\\4\\1\\4\end{pmatrix},\ v_4=\begin{pmatrix}2\\0\\1\\1\end{pmatrix},\ v_5=\begin{pmatrix}8\\3\\3\\5\end{pmatrix},\ v_6=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\ v_7=\begin{pmatrix}6\\3\\2\\3\end{pmatrix}.$$

(a) Sei $A \in \mathbb{R}^{4\times 7}$ die Matrix mit Spalten v_j für $1 \leqq j \leqq 7$.
Bestimmen Sie eine Basis des Lösungsraums $\left\{x \in \mathbb{R}^7 \,\middle|\, Ax = 0\right\}$.

(b) Bestimmen Sie $\mathrm{L}\,(v_1, v_2, v_3, v_4) \cap \mathrm{L}\,(v_5, v_6, v_7)$ unter Verwendung von **(a)**.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Die Koeffizientenmatrix lautet

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 2 & 8 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 4 & 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 5 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Wir verwenden den Gauß-Algorithmus und formen um:

$$\begin{array}{r} \\ Z_2 - Z_1: \\ \\ Z_4 - Z_1: \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 2 & 8 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & -5 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -3 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{r} \\ -Z_2: \\ \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 2 & 8 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -3 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{r} Z_1 - 2\,Z_2: \\ \\ Z_3 - Z_2: \\ Z_4 + Z_2: \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Die Spalten 3 und 4 werden vertauscht.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ -Z_3: \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{r} Z_1 + 2\,Z_3: \\ Z_2 - 2\,Z_3: \\ \\ Z_4 - Z_3: \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Die Spalten 4 und 6 werden vertauscht.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{r} Z_1 + Z_4: \\ \\ \\ -Z_4: \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Die Basisvektoren lassen sich gemäß Satz 3.7.6 ablesen und lauten
$\tilde{e}_1 = \begin{pmatrix} -2, & -1, & -2, & 0, & 1, & 0, & 0 \end{pmatrix}^\mathsf{T}$, $\tilde{e}_2 = \begin{pmatrix} -3, & -1, & 0, & 0, & 0, & 1, & 0 \end{pmatrix}^\mathsf{T}$,
$\tilde{e}_3 = \begin{pmatrix} -1, & -1, & -1, & -1, & 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}^\mathsf{T}$. Auf Grund der Spaltenvertauschungen müssen die Einträge der Basisvektoren zurück getauscht werden. Die Reihenfolge ist dabei zu beachten, zuerst Eintrage 4 und 6 vertauschen, dann 3 und 4:
$e_1 = \begin{pmatrix} -2, & -1, & 0, & -2, & 1, & 0, & 0 \end{pmatrix}^\mathsf{T}$, $e_2 = \begin{pmatrix} -3, & -1, & 1, & 0, & 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}^\mathsf{T}$,
$e_3 = \begin{pmatrix} -1, & -1, & 0, & -1, & 0, & -1, & 1 \end{pmatrix}^\mathsf{T}$

(b) Wir lösen $\lambda_1\,v_1 + \lambda_2\,v_2 + \lambda_3\,v_3 + \lambda_4\,v_4 - \mu_1\,v_5 - \mu_2\,v_6 - \mu_3\,v_7 = 0$. Mit dem Koeffizientenvektor $\nu = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, -\mu_1, -\mu_2, -\mu_3)$ erhalten wir das lineare Gleichungssystem aus Teil (a). An e_1 lässt sich ablesen, dass $\mu_1 = -1$, $\mu_2 = 0$, $\mu_3 = 0$ gilt und damit liegt v_5 im Schnitt. An e_3 lässt sich ablesen, dass $v_6 - v_7$ im Schnitt liegt. Aus e_2 erhält man keinen weiteren linear unabhängigen Vektor, da hier $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 0$, $\mu_3 = 0$.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 25. *Rang, Matrixbeschreibung*

Sei $A := \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & -1 \end{pmatrix}$. Sei $A' := \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Wir betrachten die Basis $B : \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix}$ von $\mathbb{C}^2$.

(a) Bestimmen Sie $\operatorname{Rg} A$.

(b) Bestimmen Sie eine Basis von $\left\{ S \in \mathbb{C}^{2\times 2} \,\middle|\, AS = SA' \right\}$

(c) Sei $f\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2 : x \mapsto Ax$. Ist $\operatorname{Kern}(f) = \operatorname{Bild}(f)$?

(d) Bestimmen Sie ${}_B f_B$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Die erste Zeile von A ist das i-fache der zweiten Zeile. Also ist $\operatorname{Rg} A = 1$.

(b) Sei $S := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Dann gilt

$$AS = \begin{pmatrix} \text{a + ic} & \text{b + id} \\ \text{ia - c} & \text{ib - d} \end{pmatrix}, \quad SA' = \begin{pmatrix} 0 & \text{2a} \\ 0 & \text{2c} \end{pmatrix}$$

Wir erhalten also die Gleichungen

$$\begin{cases} a & & +\mathrm{i}c & & = 0 \\ -2a & +b & & +\mathrm{i}d & = 0 \\ \mathrm{i}a & & -c & & = 0 \\ & +\mathrm{i}b & -2c & -d & = 0 \end{cases}$$

Die Koeffizientenmatrix des Gleichungssystem ist

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \mathrm{i} & 0 \\ -2 & 1 & 0 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \mathrm{i} & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Wir verwenden Algorithmus 3.7.3:

$$\begin{array}{r} \\ Z_2 + 2\,Z_1 : \\ Z_3 - \mathrm{i}\,Z_1 : \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \mathrm{i} & 0 \\ 0 & 1 & 2\mathrm{i} & \mathrm{i} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{i} & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ \\ Z_4 - \mathrm{i}\,Z_2 : \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \mathrm{i} & 0 \\ 0 & 1 & 2\mathrm{i} & \mathrm{i} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Eine Basis der Löungsmenge des homogenen Gleichungssystems nach Satz 3.7.6 ist also C': $\begin{pmatrix} -\mathrm{i}, & -2\mathrm{i}, & 1, & 0 \end{pmatrix}^\intercal$, $\begin{pmatrix} 0, & -\mathrm{i}, & 0, & 1 \end{pmatrix}^\intercal$, das heißt, eine Basis von $\left\{S \in \mathbb{C}^{2\times 2} \,\middle|\, AS = SA'\right\}$ ist

$$C\colon \begin{pmatrix} \text{-i} & \text{-2i} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \text{-i} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Wir können die Aussage mit der Basis B überprüfen:

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; A\begin{pmatrix} 1 \\ \text{-i} \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

Somit ist $\operatorname{Kern}(f) = \mathrm{L}\left((1,i)^\intercal\right) = \operatorname{Bild}(f)$.

(d) Mit den Berechnungen in **(c)** haben wir ${}_Bf_B = A'$.

Aufgabe H 26. *Matrixbeschreibung einer linearen Abbildung*
Sei die lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben mit

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wir betrachten den Untervektorraum $U := \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_1 - x_2 - x_3 = 0 \right\} \subsetneqq \mathbb{R}^3$.

(a) Geben Sie die Matrixdarstellung ${}_Ef_E$ von f bezüglich der Standardbasis E an.

(b) Bestimmen Sie zwei verschiedene Basen B und C von U.

(c) Sei $g\colon U \to U\colon x \mapsto f(x)$ die Einschränkung von f auf U.
Bestimmen Sie die Matrizen ${}_Bg_B$ und ${}_Bg_C$.

(d) Ist f bijektiv? Ist g bijektiv?

Lösungshinweise hierzu: Seien

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Man erkennt, dass

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = v_1 - \frac{1}{2}v_2 - \frac{1}{2}v_3$$

da f linear ist, gilt auch

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = f(v_1) - \frac{1}{2}f(v_2) - \frac{1}{2}f(v_3)$$
$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

Außerdem ist

$$f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}f(v_2) + \frac{1}{2}f(v_3) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$
$$f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}f(v_2) - \frac{1}{2}f(v_3) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

Folglich ist die Matrixdarstellung von f bezüglich E gegeben durch

$$_{E}f_{E} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

(b) Zwei verschiedene Basen von U seien $C\colon v_1,\, v_3$ und

$$B\colon \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ v_1$$

(c) Wir berechnen g mit der Basis C

$$g(v_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\quad g(v_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = v_1$$

Folglich haben wir

$$_{B}g_{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Um $_{B}g_{B}$ zu berechnen benötigen wir zudem

$$g\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = {_{E}f_{E}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - v_1,$$

und folgern

$$_{B}g_{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(d) Wir berechnen den Rang von

$$ {}_E f_E = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}. $$

Hierfür verwenden wir den Gaußalgorithmus:

$$ \begin{array}{r} 2\,Z_1: \\ -\,Z_2: \\ Z_3 -\ Z_2: \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ \begin{array}{r} Z_1 +\ Z_2: \\ \\ Z_3 -\ Z_2: \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} $$

$$ S_2 \leftrightarrow S_3: \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} $$

Also ist $\mathrm{Rg}\,{}_E f_E = 2$ und daher f nicht bijektiv. Da ${}_B g_C = E_2$, ist g bijektiv.

Aufgabe H 27. *Rang einer Matrix*

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ ein Parameter. Sei

$$ A_\alpha := \begin{pmatrix} \alpha-1 & 1 & -1 & 0 \\ \alpha-2 & \alpha-1 & -\alpha+2 & -\alpha+2 \\ -3+\alpha & 0 & 1 & 3-\alpha \\ 1 & 1 & -1 & \alpha-2 \end{pmatrix} . $$

(a) Bestimmen Sie den Rang von A_α in Abhängigkeit von α.

(b) Für welche α ist $\varphi_\alpha : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4 : x \mapsto (A_\alpha)^2 x$ injektiv?

(c) Bestimmen Sie den Rang von $(A_\alpha)^2$ in Abhängigkeit von α.

Lösungshinweise hierzu:

(a) fachen durch Zeilen- und Spaltenoperationen. Addiere 4. auf 1. Spalte sowie 2. auf 3. Spalte:

$$ \begin{pmatrix} \alpha-1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha-1 & 1 & -\alpha+2 \\ 0 & 0 & 1 & 3-\alpha \\ \alpha-1 & 1 & 0 & \alpha-2 \end{pmatrix} $$

Addiere nun das α-fache der 3. Spalte auf die 4. Spalte und addiere das -1-fache der 1. Zeile auf die 4. Zeile:

$$ \begin{pmatrix} \alpha-1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha-1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha-2 \end{pmatrix} $$

Hier können wir ablesen, dass die Matrix für $\alpha \neq 1$ und $\alpha \neq 2$ Rang 4 hat. Wir betrachten nun die verbleibenden Fälle. Für $\alpha = 1$ erhalten wir die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

welche Rang 3 hat, und für $\alpha = 2$ erhalten wir die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

die ebenfalls Rang 3 hat.

(b) Mit unserem Wissen über den Rang folgern wir: Für $\alpha \notin \{1, 2\}$ ist die Abbildung $\psi_\alpha : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4 \colon x \mapsto A_\alpha x$ injektiv.

(c) Die Abbildung $\psi_\alpha : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4 \colon x \mapsto A_\alpha x$ ist sogar bijektiv für $\alpha \notin \{1, 2\}$. Wir wissen bereits, dass die Verknüpfung bijektiver Abbildungen wiederum bijektiv ist. Somit ist $\varphi_\alpha : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4 \colon x \mapsto (A_\alpha)^2 x$ bijektiv für $\alpha \notin \{1, 2\}$. In diesen Fällen wiederum muss die jeweilige Abbildungsmatrix vollen Rang haben. Somit hat φ_α für $\alpha \notin \{1, 2\}$ den Rang 4. Es verbleiben noch die Fälle $\alpha = 1$ und $\alpha = 2$. Berechne $(A_1)^2$ und bestimme den zugehörigen Rang.

$$(A_1)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Addiere 1. auf 2. Zeile und das -1-fache der dritten auf die 2. Ziele:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hier können wir Rang 2 ablesen.

$$(A_2)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Addiere das -1-fache der 1. auf die 3. Zeile und anschliessend das -2-fach der 2. auf die 1. Zeile:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Addiere nun das 2-fache der 4. auf die 1. Zeile:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hier können wir Rang 3 ablesen.

Aufgabe H 28. *Matrixbeschreibung einer linearen Abbildung*

Sei $f\colon \operatorname{Pol}_4 \mathbb{R} \to \operatorname{Pol}_4 \mathbb{R} : p(x) \mapsto p'(x) + x^2 p(1)$.

(a) Geben Sie eine Basis B von $\operatorname{Pol}_4 \mathbb{R}$ an. Bestimmen Sie ${}_Bf_B$.

(b) Bestimmen Sie eine Basis des Kerns von f.

(c) Ist f injektiv? Ist f surjektiv?

(d) Sei $V := \operatorname{L}(x, x^2+1)$. Wählen Sie eine Basis C von V und eine Basis D von $U := f(V)$. Sei $g\colon V \to U\colon p(x) \mapsto p'(x) + x^2 p(1)$. Bestimmen Sie ${}_Dg_C$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Eine mögliche Basis ist $B\colon 1, x, x^2, x^3, x^4$. Wir werten die einzelnen Basiselemente aus:

$$\begin{aligned} f(1) &= x^2 \\ f(x) &= 1 + x^2 \\ f(x^2) &= 2x + x^2 \\ f(x^3) &= 4x^2 \\ f(x^4) &= 4x^3 + x^2 \end{aligned}$$

und erhalten

$${}_Bf_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Der Rang von ${}_Bf_B$ ist 4. Mit der Dimensionsformel 3.8.17 folgt damit, dass der Kern 1-dimensional ist. Mit dem Gaußalgorithmus (addiere entsprechende Vielfache von 1., 2. und 4. Zeile auf die 3.) vereinfachen wir

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Da

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ist $B_k\colon\ -x^3+4$ eine Basis des Kerns.

(c) Laut Satz 3.8.18 ist f nicht injektiv, da die Dimension des Kerns 1 und somit $\mathrm{Kern}({}_Bf_B) \neq \{0\}$. Da zum Beispiel x^4 nicht im Bild ist, ist f auch nicht surjektiv. Alternativ kann man auch hier mit Satz 3.8.18 argumentieren: Betrachte die 5×5-Matrix ${}_Bf_B$. Mit der Notation von 3.8.18 ist dann $z=5$ und $s=5$. Außerdem ist die Dimension des Kerns 1. Also ist f nicht surjektiv, da $5 \neq 5-1=4$.

(d) Ein Erzeugendensystem von V bildet x, x^2+1. Da im Allgemeinen x kein Vielfaches von x^2+1 ist, ist das Erzeugendensystem auch eine Basis von V. Wir wählen also einfach $C\colon x, x^2+1$. Damit berechnen wir

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + x^2 = 1\cdot(x^2+1) \\ f(x^2+1) &= 2x + 2x^2 = 2\cdot(x^2+x). \end{aligned}$$

Da hier mit x^2+1, x^2+x ein linear unabhängiges Erzeugendensystem von U vorliegt, können wir $D\colon x^2+1, x^2+x$ als Basis von U wählen und folgern

$${}_Dg_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 29. *Determinante*

Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ Parameter. Sei $A_\alpha := \begin{pmatrix} 0 & (\alpha-1)^2 & (\alpha-1)(\alpha-2) \\ 4 & 0 & 2 \\ 2 & (\alpha-1)(\alpha-2) & 3+\alpha(\alpha-3) \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie $\det(A_\alpha)$ in Abhängigkeit von α.

(b) Bestimmen Sie $\operatorname{Rg}(A_\alpha)$ in Abhängigkeit von α.

(c) Bestimmen Sie $\det(A_\alpha A_\beta A_\alpha^\intercal)$ in Abhängigkeit von α und β.

(d) Bestimmen Sie $A_0^{-2} := (A_0^{-1})^2 = (A_0^2)^{-1}$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir verwenden die Regel von Sarrus (3.11.5):

$$\begin{aligned}\det(A_\alpha) &= 4(\alpha-1)^2 + 4(\alpha-1)^2(\alpha-2)^2 - 4(\alpha-1)^2(3+\alpha(\alpha-3)) \\ &= 4(\alpha-1)^2(1+(\alpha-2)^2-(3+\alpha(\alpha-3))) \\ &= 4(\alpha-1)^2(1+\alpha^2-4\alpha+4-3-\alpha^2+3\alpha) \\ &= -4(\alpha-1)^2(\alpha-2).\end{aligned}$$

Hier können wir ablesen, dass $\det(A_\alpha) = 0$ für $\alpha = 1$ und $\alpha = 2$.

(b) Für $\boldsymbol{\alpha \neq 1, 2}$ ist $\det(A_\alpha) \neq 0$, somit $\operatorname{Rg}(A_\alpha) = 3$.
Für $\boldsymbol{\alpha = 1}$ erhalten wir die Matrix

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Die zweiten Zeile ist das 2-fache der dritte Zeile. Also ist $\operatorname{Rg}(A_1) = 1$.
Für $\boldsymbol{\alpha = 2}$ erhalten wir die Matrix

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Hierfür verwenden wir den Gauß Algorithmus:

$$\begin{array}{r} \frac{1}{2} Z_3 : \\ Z_1 : \\ Z_2 - 2 Z_3 : \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$S_3 - \frac{1}{2} S_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

also $\operatorname{Rg}(A_2) = 2$.

(c) Wir wissen das $\det(A) = \det(A^T)$ und $\det(AB) = \det(A)\det(B)$, also

$$\det(A_\alpha A_\beta A_\alpha^\intercal) = \det(A_\alpha)\det(A_\beta)\det(A_\alpha^\intercal) = \det(A_\alpha)^2\det(A_\beta).$$

Folglich haben wir $\det(A_\alpha A_\beta A_\alpha^\intercal) = 0$ für $\alpha = 1$ oder $\alpha = 2$ oder $\beta = 1$ oder $\beta = 2$. In die verbleibenden Fälle

$$\det(A_\alpha A_\beta A_\alpha^\intercal) = -64(\alpha-1)^4(\alpha-2)^2(\beta-1)^2(\beta-2).$$

(d) Wir bestimmen A_0^{-1} mit dem Gaußalgorithmus:

$$\begin{array}{r}
\\ \\ \\
\end{array}
\left[\begin{array}{rrr|rrr}
0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\
4 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\
2 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r}
\frac{1}{4}\,Z_2: \\
Z_3 - \frac{1}{2}\,Z_2: \\
Z_1:
\end{array}
\left[\begin{array}{rrr|rrr}
1 & 0 & 1/2 & 0 & 1/4 & 0 \\
0 & 2 & 2 & 0 & -1/2 & 1 \\
0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0
\end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r}
\\
\frac{1}{2}\,Z_2: \\
Z_3 - \frac{1}{2}\,Z_2:
\end{array}
\left[\begin{array}{rrr|rrr}
1 & 0 & 1/2 & 0 & 1/4 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & -1/4 & 1/2 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1/4 & -1/2
\end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r}
Z_1 - \frac{1}{2}\,Z_3: \\
Z_2 - Z_3: \\
\\
\end{array}
\left[\begin{array}{rrr|rrr}
1 & 0 & 0 & -1/2 & 1/8 & 1/4 \\
0 & 1 & 0 & -1 & -1/2 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1/4 & -1/2
\end{array}\right]$$

Folglich haben wir

$$A_0^{-2} = \left(A_0^{-1}\right)^2 = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/8 & 1/4 \\ -1 & -1/2 & 1 \\ 1 & 1/4 & -1/2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 3/8 & -1/16 & -1/8 \\ 2 & 3/8 & -5/4 \\ -5/4 & -1/8 & 3/4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe H 30. *Determinante*

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ ein Parameter. Seien

$$A_\alpha := \begin{pmatrix} 3 & \alpha & -7 & 2 \\ 2 & 1 & \alpha & 4 \\ 1 & 3 & 4 & -3 \\ -1 & -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_\alpha := \begin{pmatrix} 3 & \alpha & -7 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & \alpha & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & -3 & 3 \\ -1 & -2 & -3 & 1 & 4 \\ 5 & \alpha+2 & \alpha-6 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie $\det(A_\alpha)$.

(b) Bestimmen Sie $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} B_\alpha$. Bestimmen Sie $\det(B_\alpha)$ und $\det(\alpha B_\alpha)$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir verwenden Algorithmus 3.7.3 und 3.12.5:

$$
\begin{array}{rl}
 & \begin{vmatrix} 3 & \alpha & -7 & 2 \\ 2 & 1 & \alpha & 4 \\ 1 & 3 & 4 & -3 \\ -1 & -2 & -3 & 1 \end{vmatrix} \\
S_2 \leftrightarrow S_4 : & = - \begin{vmatrix} 3 & 2 & -7 & \alpha \\ 2 & 4 & \alpha & 1 \\ 1 & -3 & 4 & 3 \\ -1 & 1 & -3 & -2 \end{vmatrix} \\
\begin{matrix} Z_3 : \\ Z_4 + Z_3 : \\ Z_2 + 2\,Z_4 : \\ Z_1 - 3\,Z_3 : \end{matrix} & = - \begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & \alpha - 6 & -3 \\ 0 & 11 & -19 & \alpha - 9 \end{vmatrix}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl}
\begin{matrix} -\frac{1}{2}\,Z_2 : \\ Z_3 + 3\,Z_2 : \\ Z_4 + \frac{11}{2}\,Z_2 : \end{matrix} & = -2 \begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \alpha - 3 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{27}{2} & \alpha - \frac{7}{2} \end{vmatrix} \\
\begin{matrix} S_3 \leftrightarrow S_4 : \\ Z_3 \leftrightarrow Z_4 : \end{matrix} & = -2 \begin{vmatrix} 1 & -3 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \alpha - \frac{7}{2} & -\frac{27}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \alpha - 3 \end{vmatrix}
\end{array}
$$

Folglich haben wir $\det(A_\alpha) = -2(\alpha - \frac{7}{2})(\alpha - 3)$.

(b) Wir berechnen $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} B_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$. Damit kann mann die letze Zeile mit $Z_5 - Z_4 - Z_3 - Z_2 - Z_1$ erstatten,

$$
\det(B_\alpha) = \begin{vmatrix} 3 & \alpha & -7 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & \alpha & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & -3 & 3 \\ -1 & -2 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -9 \end{vmatrix} = -9 \begin{vmatrix} 3 & \alpha & -7 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & \alpha & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & -3 & 3 \\ -1 & -2 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}
$$

Mann merkt auch, dass die obere linke 4×4-Block matrix is genau A_α. Das ergibt, mittels (a), dass

$$
\det(B_\alpha) = 18 \begin{vmatrix} 1 & -3 & 3 & 4 & \clubsuit \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \clubsuit \\ 0 & 0 & \alpha - \frac{7}{2} & -\frac{27}{2} & \clubsuit \\ 0 & 0 & 0 & \alpha - 3 & \clubsuit \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}
$$

und damit haben wir $\det(B_\alpha) = 18(\alpha - \frac{7}{2})(\alpha - 3)$. Ferner,

$$\det(\alpha B_\alpha) = \alpha^5 \det(B_\alpha) = 18\,\alpha^5(\alpha - \frac{7}{2})(\alpha - 3).$$

Aufgabe H 31. *Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen*

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ ein Parameter. Seien $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ und $B_\alpha := \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie die Menge aller Rechtsinversen zu A.

(b) Verwenden Sie eine Rechtsinverse aus **(a)**, um ein $x \in \mathbb{R}^3$ mit $Ax = (1,2)^\intercal$ zu finden.

(c) Für welche Werte des Parameters α ist B_α invertierbar?

(d) Seien $y := (2,2,1)^\intercal$, $b := (-1,3,1)^\intercal$. Ist $B_1 y = b$? Bestimmen Sie $\left\{x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, B_1 x = b\right\}$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir lösen simultan

$$\left(\begin{array}{ccc||cc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc||cc} 1 & 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

(b) Somit ergibt sich als Lösungsmenge für die erste Spalte des gesuchende Rechinverse

$$y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right),$$

und als Lösungsmenge für die zwite Spalte des gesuchende Rechinverse

$$y = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right),$$

Zusammen genommen erhalten wir die Menge aller Rechtsinversen für A als

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s & t \\ -s & -t \\ s & t \end{pmatrix} \,\middle|\, s,t \in \mathbb{R}\right\}$$
$$= \left\{\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, s,t \in \mathbb{R}\right\}$$

(c) Für $l = s = 0$, ist eine Lösung von $Ax = (1,2)^\intercal$ gegeben als

$$x = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(d) Die Matrix B_α ist invertierbar für alle α mit $\det B_\alpha \neq 0$. Wir rechnenn

$$\det B_\alpha = 4 - \alpha.$$

Das ergibt, dass B_α für $\alpha \in \mathbb{R} \smallsetminus \{4\}$ invertierbar ist.

(e) Der Vektor $y = (2,2,1)^\intercal$ erfült das Gleichungssystem $B_1 x = b$. Da B_α invertierbar ist, ist y der eingeutige Lösung des Gleichungssystems. Damit haben wir

$$\left\{x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, B_1 x = b\right\} = \{(2,2,1)^\intercal\}$$

.

Aufgabe H 32. *Basiswechsel*

Seien $b_1=(1,0,1)^\intercal$, $b_2=(1,2,0)^\intercal$, $b_3=(0,1,1)^\intercal$, $c_1=(1,1,1)^\intercal$, $c_2=(1,2,3)^\intercal$, $c_3=(2,1,1)^\intercal$. Wir betrachten $B: b_1, b_2, b_3$ und $C: c_1, c_2, c_3$. Sei E die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$.

(a) Verwenden Sie Determinanten, um zu überprüfen, dass B und C Basen von $\mathbb{R}^3$ sind.

(b) Bestimmen Sie ${}_E\mathrm{id}_B$, ${}_B\mathrm{id}_E$, ${}_E\mathrm{id}_C$ und ${}_C\mathrm{id}_E$.

(c) Sei die lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch $\varphi(b_j) = j c_j$ für $j \in \{1,2,3\}$. Bestimmen Sie ${}_C\varphi_B$ und ${}_E\varphi_E$.

(d) Sei ${}_Bv = (1,1,1)^\intercal$. Bestimmen Sie ${}_C\varphi(v)$, v und $\varphi(v)$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir berechnen die Determinanten für die Matrizen B und C,

$$\det(b_1, b_2, b_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3,$$

$$\det(c_1, c_2, c_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = 1.$$

Da die Determinanten ungleich Null sind, haben die Matrizen vollen Rang und damit sind B und C Basen von $\mathbb{R}^3$.

(b) Da E sie Standardbasis ist, haben wir

$${}_E\mathrm{id}_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad {}_E\mathrm{id}_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es gilt ${}_B\mathrm{id}_E = ({}_E\mathrm{id}_B)^{-1}$ und ${}_C\mathrm{id}_E = ({}_E\mathrm{id}_C)^{-1}$. Das ergibt

$${}_B\mathrm{id}_E = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad {}_C\mathrm{id}_E = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Die Definition von der lineare Abbildung φ ergibt leicht die Matrix

$$ {}_C\varphi_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} $$

und

$$ {}_E\varphi_E = {}_E\mathrm{id}_C \cdot {}_C\varphi_B \cdot {}_B\mathrm{id}_E = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -8 & 7 & 11 \\ 0 & 6 & 3 \\ 2 & 8 & 1 \end{pmatrix} . $$

(d) Für ${}_Bv = (1,1,1)^\intercal$ haben wir die Vektoren

$$ {}_C\varphi(v) = {}_C\varphi_B \cdot {}_Bv = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} , $$

$$ v = {}_E\mathrm{id}_B \cdot {}_Bv = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} $$

und

$$ \varphi(v) = {}_E\mathrm{id}_C \cdot {}_C\varphi_B \cdot {}_Bv = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} $$

$$ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix} . $$

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 33. *Determinante, Cofaktor-Matrix*

Seien $A := \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$, $B := \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie die Cofaktor-Matrizen $\tilde{A}$ von A und $\tilde{B}$ von B.

(b) Bestimmen Sie $\det(A)$ und $\det(B)$.

(c) Bestimmen Sie B^{-1} unter Verwendung von **(a)** und **(b)**.

(d) Bestimmen Sie $A\tilde{A}^\intercal$ und $\det(\tilde{A}^\intercal)$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Der (j,k)-Cofaktor von A ist $\tilde{a}_{jk} := (-1)^{j+k} \det \tilde{A}_{jk}$. Wir berechnen $\det \tilde{A}_{jk}$ für $1 \leqq j,k \leqq 3$:

$$\det \tilde{A}_{11} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 12\,, \quad \det \tilde{A}_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 2\,, \quad \det \tilde{A}_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -4,$$

$$\det \tilde{A}_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = -4\,, \quad \det \tilde{A}_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 2\,, \quad \det \tilde{A}_{23} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4,$$

$$\det \tilde{A}_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -10\,, \quad \det \tilde{A}_{32} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1\,, \quad \det \tilde{A}_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 6.$$

Die Cofaktor-Matrix von A ist $\tilde{A} = (\tilde{a}_{jk})_{1 \leqq j,k \leqq n}$, folglich haben wir

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 12 & -2 & -4 \\ 4 & 2 & -4 \\ -10 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Für B haben wir die Cofaktoren

$$\det \tilde{B}_{11} = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -3\,, \quad \det \tilde{B}_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -6\,, \quad \det \tilde{B}_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 5,$$

$$\det \tilde{B}_{21} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -6\,, \quad \det \tilde{B}_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 3\,, \quad \det \tilde{B}_{23} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 5,\ ,$$

$$\det \tilde{B}_{31} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -6\,, \quad \det \tilde{B}_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3\,, \quad \det \tilde{B}_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0,$$

also ist

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 5 \\ 6 & 3 & -5 \\ -6 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Laut Satz 3.13.4 haben wir (Entwicklung nach der ersten Zeile)

$$\det(A) = \sum_{l=1}^{3} a_{1l}\tilde{a}_{1l} = 2\cdot 12 + 2\cdot(-2) + 3\cdot(-4) = 8,$$

und (Entwicklung nach der dritte Spalte)

$$\det(B) = \sum_{l=1}^{3} b_{l3}\tilde{b}_{l3} = 0\cdot 5 + 3\cdot(-5) + 3\cdot 0 = -15.$$

(c) Wir wenden wieder Satz 3.13.4 an und erhalten $B^{-1} = \frac{1}{\det(B)}\tilde{B}^{\mathsf{T}}$, damit folgt

$$B^{-1} = -\frac{1}{15}\begin{pmatrix} -3 & 6 & -6 \\ 6 & 3 & -3 \\ 5 & -5 & 0 \end{pmatrix}.$$

(d) Wir wissen bereits, dass $A\tilde{A}^{\mathsf{T}} = \det(A)\ E_3 = 8\ E_3$.
Folglich ist $\det(A\tilde{A}^{\mathsf{T}}) = \det(\det(A)\ E_3) = \det(A)^3$, und $\det(A\tilde{A}^{\mathsf{T}}) = \det(A)\det(\tilde{A}^{\mathsf{T}})$.
Also ist $\det(\tilde{A}^{\mathsf{T}}) = \det(A)^2 = 64$.

Aufgabe H 34. *Determinante, Block-Dreiecksmatrizen*

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ ein Parameter. Sei $A_\alpha := \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & \alpha+4 & 1 & \alpha+2 \\ -1 & 1 & 7 & -7 \\ 1 & \alpha+4 & -7 & \alpha+10 \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie $\det(A_\alpha)$ in Abhängigkeit von α.

(b) Bestimmen Sie die Determinanten der Blockmatrizen $\left(\begin{array}{c|c} A_\alpha & A_\alpha^{\mathsf{T}} \\ \hline 0 & A_\alpha \end{array}\right)$, $\left(\begin{array}{c|c} A_\alpha & A_\alpha \\ \hline 3A_\alpha & A_\alpha \end{array}\right) \in \mathbb{R}^{8\times 8}$.

(c) Ist $\det\left(\begin{array}{c|c} B_1 & B_2 \\ \hline B_3 & B_4 \end{array}\right) = \det(B_1)\det(B_4) - \det(B_2)\det(B_3)$ für $B_j \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ für $1 \leqq j \leqq 4$?

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir bestimmen $\det(A_\alpha)$ mit dem Gaußalgorithmus:

$$\begin{aligned}
& \begin{vmatrix} 4 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & \alpha+4 & 1 & \alpha+2 \\ -1 & 1 & 7 & -7 \\ 1 & \alpha+4 & -7 & \alpha+10 \end{vmatrix} \\
\begin{matrix} Z_3 \leftrightarrow Z_1: \\ Z_1 + 4Z_3: \\ Z_4 + Z_3: \\ Z_2 - Z_3: \end{matrix} \quad = -& \begin{vmatrix} -1 & 1 & 7 & -7 \\ 0 & 3 & 27 & -27 \\ 0 & \alpha+5 & 0 & \alpha+3 \\ 0 & \alpha+3 & -6 & \alpha+9 \end{vmatrix} \\
S_2 \leftrightarrow S_3: \quad = \ & \begin{vmatrix} -1 & 7 & 1 & -7 \\ 0 & 27 & 3 & -27 \\ 0 & 0 & \alpha+5 & \alpha+3 \\ 0 & -6 & \alpha+3 & \alpha+9 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} \\ = \\ \\ Z_4 + \frac{2}{9}\,Z_2 : \end{array} \begin{vmatrix} -1 & 7 & 1 & -7 \\ 0 & 27 & 3 & -27 \\ 0 & 0 & \alpha+5 & \alpha+3 \\ 0 & 0 & \alpha+\frac{11}{3} & \alpha+3 \end{vmatrix} .$$

Diese Matrix ist eine Block-Dreiecksmatrizen Matrix, also kann man die Determinante wie folgt berechnen

$$\begin{aligned} \det(A_\alpha) &= \begin{vmatrix} -1 & 7 \\ 0 & 27 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha+5 & \alpha+3 \\ \alpha+\frac{11}{3} & \alpha+3 \end{vmatrix} \\ &= -27\left(\alpha^2+8\alpha+15-\alpha^2-\frac{20}{3}\alpha-11\right) \\ &= -36(\alpha+3). \end{aligned}$$

(b) Die erste Matrix ist eine Block-Dreiecksmatrizen Matrix, also gilt

$$\det\left(\begin{array}{c|c} A_\alpha & A_\alpha^\intercal \\ \hline 0 & A_\alpha \end{array}\right) = \det(A_\alpha)\det(A_\alpha) = \det(A_\alpha)^2.$$

Die zweite Block-Zeile von die zweite Matrix ist das 3-fache der erste Block-Zeile, also

$$\det\left(\begin{array}{c|c} A_\alpha & A_\alpha \\ \hline 3\ A_\alpha & A_\alpha \end{array}\right) = \det\left(\begin{array}{c|c} A_\alpha & A_\alpha \\ \hline 0 & -2\ A_\alpha \end{array}\right) = \det(A_\alpha)\det(-2A_\alpha) = 16\det(A_\alpha)^2.$$

(c) Die Aussage ist falsch. Betrachte hierzu

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir haben $\det(B_1) = \det(B_2) = \det(B_3) = \det(B_4) = 0$, folglich ist $\det(B_1)\det(B_4) - \det(B_2)\det(B_3) = 0$, jedoch gilt

$$\det\left(\begin{array}{c|c} B_1 & B_2 \\ \hline B_3 & B_4 \end{array}\right) = 1.$$

Aufgabe H 35. *Orthogonale Matrizen*

Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ Parameter. Gegeben seien die folgenden Matrizen.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},\quad A_2 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},\quad A_3 = \frac{1}{75}\begin{pmatrix} 3 & 12 \\ -4 & 9 \end{pmatrix},$$
$$B_{\alpha,\beta} = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ -\alpha & \beta \end{pmatrix} \quad C_{\alpha,\beta} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & \beta \end{pmatrix}$$

(a) Welche der Matrizen A_1, A_2, A_3 sind orthogonal?

(b) Für welche Paare (α, β) ist $B_{\alpha,\beta}$ orthogonal? Für welche ist $C_{\alpha,\beta}$ orthogonal?

Lösungshinweise hierzu:

(a) A_1 und A_3 sind nicht orthogonal. A_2 ist orthogonal, da $A_2^\top A_2 = E_2$ gilt.

(b) Zu $B_{\alpha,\beta}$: Es gilt zu überpüfen für welche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $B_{\alpha,\beta}^\top B_{\alpha,\beta} = E_2$ gilt. Betrachte hierfür

$$B_{\alpha,\beta}^\top B_{\alpha,\beta} = \frac{1}{1+\alpha^2}\begin{pmatrix} 1+\alpha^2 & \alpha\beta-\alpha \\ \alpha\beta-\alpha & \alpha^2+\beta^2 \end{pmatrix}.$$

Die Diagonaleinträge sollen 1 sein, also soll gelten

$$1+\alpha^2 = \alpha^2+\beta^2,$$

woraus $\beta = \pm 1$ folgt. Ferner soll

$$\alpha\beta - \alpha = \alpha(\beta-1) = 0$$

erfüllt sein. Daraus folgt, dass die Matrix $B_{\alpha,\beta}$ für

$$(\alpha,\beta) \in \{(\alpha,\beta) \;:\; \alpha = 0, \beta = \pm 1\} \cup \{(\alpha,\beta) \;:\; \alpha \in \mathbb{R}, \beta = 1\}$$

orthogonal ist.

Zu $C_{\alpha,\beta}$: Wir überpüfen wieder für welche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $C_{\alpha,\beta}^\top C_{\alpha,\beta} = E_2$ gilt. Zunächst betrachten wir

$$C_{\alpha,\beta}^\top C_{\alpha,\beta} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\alpha^2 & 1+\alpha\beta \\ 1+\alpha\beta & 1+\beta^2 \end{pmatrix}.$$

Die Diagonaleinträge sollen 1 sein, also soll gelten

$$\frac{1+\alpha^2}{2} = \frac{1+\beta^2}{2} = 1,$$

woraus $\alpha^2 = \beta^2 = 1$ folgt, und somit $\alpha = \pm 1$, $\beta = \pm 1$. Ferner soll

$$1 + \alpha\beta = 0$$

gelten, und demnach $\alpha = -\beta$. Daraus folgt, dass die Matrix $C_{\alpha,\beta}$ für

$$(\alpha,\beta) \in \{(1,-1),(-1,1)\}$$

orthogonal ist.

Aufgabe H 36. *Drehung*

Seien $b_1 := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^\intercal$, $b_2 := \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^\intercal$, $b_3 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^\intercal$ die Vektoren der Basis B, seien $c_1 := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^\intercal$, $c_2 := \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}^\intercal$, $c_3 := \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}^\intercal$ die Vektoren der Basis C, sei E die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$. Sei $\gamma\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ linear mit $\gamma(b_j) = c_j$ für $j \in \{1,2,3\}$.

(a) Bestimmen Sie ${}_E\mathrm{id}_C$, ${}_C\gamma_B$, ${}_B\mathrm{id}_E$ und ${}_E\gamma_E$.

(b) Ist γ eine Drehung? Bestimmen Sie gegebenenfalls die Drehachse und den Cosinus des Drehwinkels von γ.

(c) Ist ${}_B\gamma_B$ eine Orthogonalmatrix?

Lösungshinweise hierzu:

(a) Da E die Standardbasis ist, haben wir

$$ {}_E\mathrm{id}_C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad {}_E\mathrm{id}_B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} $$

und das ergibt

$$ {}_B\mathrm{id}_E = ({}_E\mathrm{id}_B)^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}. $$

Die Definition der lineare Abbildung γ ergibt die Matrix

$$ {}_C\gamma_B = ({}_C\gamma(b_1),\ {}_C\gamma(b_2),\ {}_C\gamma(b_3)) = E_3. $$

Folglich haben wir

$$ \begin{aligned} {}_E\gamma_E = {}_E\mathrm{id}_C \cdot {}_C\gamma_B \cdot {}_B\mathrm{id}_E &= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} $$

(b) Wir verwenden die Regel von Sarrus (3.11.5):

$$ \det({}_E\gamma_E) = \frac{1}{27}(4+4+4-(-8-8+1)) = 1, $$

also ist γ eine Drehung. Die Drehachse ist b_1 da $\gamma(b_1) = c_1 = b_1$. Der Cosinus des Drehwinkels α von γ ist (Anwendung von 4.6.20)

$$ \cos(\alpha) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{Sp}\left({}_E\gamma_E\right) - 1\right) $$

und

$$ \mathrm{Sp}\left({}_E\gamma_E\right) = \frac{1}{3}(2+2+1) = \frac{5}{3}. $$

Zusammen genommen erhalten wir $\cos(\alpha) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{Sp}\left({}_E\gamma_E\right) - 1\right) = \frac{1}{3}$.

(c) Zunächst berechnen wir ${}_B\gamma_B$:

$$
{}_B\gamma_B = {}_B\mathrm{id}_E \cdot {}_E\mathrm{id}_C \cdot {}_C\gamma_B = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}
$$
$$
= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}.
$$

Nun überpüfen wir ob ${}_B\gamma_B^{\intercal}\,{}_B\gamma_B = E_3$ gilt. Dies ist jedoch nicht der Fall, folglich ist ${}_B\gamma_B$ keine Orthogonalmatrix.

Aufgabe H 37. *Charakteristische Polynome*

Seien $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ und $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

(a) Geben Sie die charakteristischen Polynome von A, A^2, B und C an und berechnen Sie deren Nullstellen.

(b) Subtrahieren Sie die erste Zeile von der zweiten Zeile in A und ersetzen Sie die zweite Zeile durch das Ergebnis. Berechnen Sie das charakteristische Polynom der resultierenden Matrix und geben Sie die Nullstellen des charakteristischen Polynoms an.

Lösungshinweise hierzu: Das charakteristische Polynom einer $n \times n$-Matrix M erhält man durch $p(\lambda) = \det(M - \lambda E_n)$.

(a) Zu A: Das charakteristische Polynom lautet $p(\lambda) = \lambda^2 + 7\lambda$, die Nullstellen sind $\pm\mathrm{i}$.
Zu A^2: Es gilt

$$
A^2 = \begin{pmatrix} 11 & 7 \\ 14 & 18 \end{pmatrix}.
$$

Das charakteristische Polynom ist $p(\lambda) = \lambda^2 - 29\lambda + 100$. Die Nullstellen sind 4 und 25. (Anmerkung: Falls Eigenwerte bereits bekannt sind, kann man die Nullstellen/Eigentwerte direkt aus denen von A bestimmen.)
Zu B: Das charakteristische Polynom lautet $p(\lambda) = \lambda^2 - 7\lambda + 10$, die Nullstellen sind 2 und 5.
Zu C: Bei einer oberen Dreiecksmatrix ist die Determinante gegeben durch das Produkt der Diagonaleinträge. Folglich ist

$$
p(\lambda) = \det(C - \lambda E_3) = (1-\lambda)\cdot(2-\lambda)\cdot(3-\lambda)\cdot(4-\lambda) = \lambda^4 - 10\lambda^3 + 35\lambda^2 - 50\lambda + 24.
$$

Die Nullstellen sind $1, 2, 3$ und 4 – was man direkt ablesen kann.

(b) Die resultierende Matrix hat die Form

$$
B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.
$$

Das charakteristische Polynom ist $p(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 10$. Die Nullstellen sind $3 \pm \mathrm{i}$.

Aufgabe H 38. *Affine Abbildungen*

(a) Bestimmen Sie eine affine Abbildung $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

(b) Bestimmen Sie das Bild der Geraden $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ unter f.

(c) Bestimmen Sie die inverse Abbildung zu f.

(d) Existiert eine affine Abbildung $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$g\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad g\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad g\begin{pmatrix} 9 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \end{pmatrix}?$$

Wie kann die Antwort allein mit der Geradentreue begründet werden?

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir suchen eine Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und einen Vektor $t = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ mit

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Das ergibt die Gleichungen

$$\begin{aligned} a+b+e &= 2 \\ c+d+f &= 6 \\ 5a-2b+e &= -4 \\ 5c-2d+f &= 1 \\ a+3b+e &= 6 \\ c+3d+f &= 12. \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 6 \\ 5 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 5 & -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 12 \end{array}\right)$$

Dieses Gleichungssystem hat die Lösungen

$$\begin{aligned} a &= 0 \\ b &= 2 \\ c &= 1 \\ d &= 3 \\ e &= 0 \\ f &= 2. \end{aligned}$$

Die gesuchte Abbildung ist also

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon v \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

(b) Die beiden Punkte $P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ haben die Bilder $f(P_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $f(P_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$. Damit ist das Bild der Geraden die Verbindungsgerade $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

(c) Die Inverse der Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ ist die Matrix $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Damit ist die inverse Abbildung

$$f^{-1}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon x \mapsto \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\left(v - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$$

oder

$$f^{-1}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon x \mapsto \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(d) Die Punkte $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 9 \\ -5 \end{pmatrix}$ liegen auf der Geraden $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}\right)$. Nach Satz 4.6.3 liegen die Bilder dieser drei Punkte unter jeder affinen Abbildung auf einer Geraden. Allerdings liegen die Punkte $\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 6 \\ 12 \end{pmatrix}$ nicht auf einer Geraden.

Aufgabe H 39. *Schmidtsches Orthonormierungsverfahren*

Seien $v_1 = (-1, 0, 1, 0)^\intercal$, $v_2 = (1, 1, 0, 0)^\intercal$, $v_3 = (1, 0, 0, -1)^\intercal$ und $U = \mathrm{L}(v_1, v_2, v_3)$.

(a) Konstruieren Sie eine Orthonormalbasis $F\colon f_1, f_2, f_3$ von U derart, dass $\mathrm{L}(f_1) = \mathrm{L}(v_1)$, $\mathrm{L}(f_1, f_2) = \mathrm{L}(v_1, v_2)$ und $\mathrm{L}(f_1, f_2, f_3) = \mathrm{L}(v_1, v_2, v_3)$ ist.

(b) Konstruieren Sie eine Orthonormalbasis $G\colon g_1, g_2, g_3$ von U derart, dass $\mathrm{L}(g_1) = \mathrm{L}(v_1)$, $\mathrm{L}(g_1, g_2) = \mathrm{L}(v_1, v_3)$ und $\mathrm{L}(g_1, g_2, g_3) = \mathrm{L}(v_1, v_2, v_3)$ ist.

(c) Ist ${}_F\mathrm{id}_G$ orthogonal? Bestimmen Sie ${}_G\mathrm{id}_F$.

(d) Finden Sie ein $f_4 \in \mathbb{R}^4$ so, dass $F'\colon f_1, f_2, f_3, f_4$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^4$ ist.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Eine Orthonormalbasis besteht aus paarweise orthogonalen normierten Vektoren. Um die Bedingung $\mathrm{L}(f_1) = \mathrm{L}(v_1)$ zu erfüllen, muss v_1 normiert werden. Es gilt

$$|v_1| = \sqrt{\langle v_1 \mid v_1 \rangle} = \sqrt{2} \quad \text{und damit} \quad f_1 = \frac{v_1}{|v_1|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Um die Bedingung $\mathrm{L}(f_1, f_2) = \mathrm{L}(v_1, v_2)$ zu erfüllen, wird der Vektor v_2 mittels des Schmidtschen Orthonormierungsverfahren zu f_2 abgewandelt

$$\begin{aligned}
f_2^* &= v_2 - \langle v_2 \,|\, f_1 \rangle f_1 \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Nun ist

$$|f_2| = \sqrt{\langle f_2^* \,|\, f_2^* \rangle} = \frac{\sqrt{6}}{2} \quad \text{und damit} \quad f_2 = \frac{f_2^*}{|f_2^*|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es gilt $f_1 = \frac{v_1}{|v_1|}$ und damit auch

$$f_2 = f_2^* = v_2 - \langle v_2 \,|\, f_1 \rangle f_1 = v_2 - \underbrace{\frac{\langle v_2 \,|\, f_1 \rangle}{|v_1|}}_{\in \mathbb{R}} v_1.$$

Also ist $f_2 \in \mathrm{L}(v_1, v_2)$. Außerdem gilt $f_1 \in \mathrm{L}(v_1) \subseteqq \mathrm{L}(v_1, v_2)$. Da f_1 und f_2 linear unabhängig sind (nach Konstruktion bilden sie eine Orthonormalbasis von $\mathrm{L}(v_1, v_2)$), ist die Bedingung $\mathrm{L}(v_1, v_2) = \mathrm{L}(f_1, f_2)$ also erfüllt.
Da $\mathrm{L}(v_1, v_2, v_3) = \mathbb{R}^3$ ist, bedeutet die Bedingung $\mathrm{L}(v_1, v_2, v_3) = \mathrm{L}(f_1, f_2, f_3)$ gerade, dass f_1, f_2, f_3 eine Basis bilden müssen, dies wird durch das Schmidtsche Verfahren gewährleistet. Man erhält

$$\begin{aligned}
f_3^* &= v_3 - \langle v_3 \,|\, f_1 \rangle f_1 - \langle v_3 \,|\, f_2 \rangle f_2 \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\qquad - \frac{1}{6} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Nun ist

$$|f_3| = \sqrt{\langle f_3^* \,|\, f_3^* \rangle} = \frac{2}{\sqrt{3}} \quad \text{und damit} \quad f_3 = \frac{f_3^*}{|f_3^*|} = \frac{\sqrt{3}}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Insgesamt erhält man also

$$F: \qquad \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{12}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

(b) Wie in Aufgabenteil **(a)** gesehen, bedeutet die Bedingung $\mathrm{L}(f_1) = \mathrm{L}(v_1)$, $\mathrm{L}(f_1, f_2) = \mathrm{L}(v_1, v_2)$ und $\mathrm{L}(f_1, f_2, f_3) = \mathrm{L}(v_1, v_2, v_3)$ gerade, dass das Schmidtsche Verfahren auf die Basis v_1, v_2, v_3 angewendet werden muss. Entsprechend bedeuten die Bedingungen $\mathrm{L}(g_1) = \mathrm{L}(v_1)$, $\mathrm{L}(g_1, g_2) = \mathrm{L}(v_1, v_3)$ und $\mathrm{L}(g_1, g_2, g_3) = \mathrm{L}(v_1, v_2, v_3)$, dass das Schmidtsche Verfahren auf die Basis v_1, v_3, v_2 angewendet werden muss. Die Rollen von v_2 und v_3 sind nun also vertauscht. Es werden also die gleihen Rechnungen wie in Aufgabenteil **(a)** durchgeführt und statt v_2 wird v_3 bzw. v_3 statt v_2 verwendet. Somit ist

$$g_1 = \frac{v_1}{|v_1|} = f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Der zweite Schritt unterscheidet sich nun vom zweiten Schritt des Aufgabenteils **(a)**

$$\begin{aligned} g_2^* &= v_3 - \langle v_3 \,|\, g_1 \rangle \, g_1 \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Daraus erhält man

$$|g_2^*| = \sqrt{\langle g_2^* \,|\, g_2^* \rangle} = \frac{\sqrt{6}}{2} \quad \text{und damit} \quad g_2 = \frac{g_2^*}{|g_2^*|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Es bleibt g_3 zu bestimmen als

$$\begin{aligned} g_3^* &= v_2 - \langle v_2 \,|\, g_1 \rangle\, g_1 - \langle v_2 \,|\, g_2 \rangle\, g_2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\qquad - \frac{1}{6} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Also gilt

$$|g_3^*| = \sqrt{\langle g_3^* \,|\, g_3^* \rangle} = \frac{1}{3}\sqrt{12} \quad \text{und damit} \quad g_3 = \frac{g_3^*}{|g_3^*|} = \frac{1}{\sqrt{12}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Insgesamt erhält man also

$$G: \qquad \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{12}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Mit der Matrix ${}_F\mathrm{id}_G$ kann man Koordinatentupel bezüglich der Basis G in Koordinatentupel bezüglich der Basis F umrechnen. Zur Bestimmung dieser Matrix muss man ein LGS für mehrere rechte Seiten simultan lösen. Dabei sind die Spalten der Koeffizientenmatrix gerade die Basisvektoren g_1, g_2 und g_3 der Basis G und die rechten Seiten die Elemente f_1, f_2 und f_3 der Basis F. Man erhält also das folgende LGS

$$\left[\begin{array}{ccc||ccc} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{12}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{12}} & 0 & 0 & \frac{3}{\sqrt{12}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{12}} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{\sqrt{12}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{12}} \end{array}\right].$$

Um das LGS nun auf die in Satz **3.7.2** angegebene Form zu bringen, addiert man zuerst Zeile 1 und Zeile 3:

$$Z_3 + Z_1 : \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{12}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{12}} & 0 & 0 & \frac{3}{\sqrt{12}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{12}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{12}} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{\sqrt{12}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{12}} \end{array}\right]$$

Zieht man nun Zeile 2 von Zeile 3 ab und addiert dann Zeile 3 zu Zeile 4, erhält man

$$Z_3 - Z_3 : \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{12}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{12}} & 0 & 0 & \frac{3}{\sqrt{12}} \\ 0 & 0 & \frac{3}{\sqrt{12}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{12}} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{\sqrt{12}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{12}} \end{array}\right]$$

$$Z_4 + Z_3 : \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{12}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{12}} & 0 & 0 & \frac{3}{\sqrt{12}} \\ 0 & 0 & \frac{3}{\sqrt{12}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{12}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Zuletzt bringen wir die linke Seite noch auf Diagonalenform:

$$Z_2 + \tfrac{1}{3} Z_3 : \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{12}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & 0 & \frac{2}{3\sqrt{12}} & \frac{8}{3\sqrt{12}} \\ 0 & 0 & \frac{3}{\sqrt{12}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{12}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$Z_1 - \tfrac{1}{2} Z_2 - \tfrac{1}{3} Z_3 : \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & 0 & \frac{2}{3\sqrt{12}} & \frac{8}{3\sqrt{12}} \\ 0 & 0 & \frac{3}{\sqrt{12}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{12}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Als letzten Schritt multipliziert man Zeile 1 mit $\sqrt{2}$, Zeile 2 mit $\sqrt{6}$ und Zeile 3 mit $\sqrt{12}$ und bekommt damit die in Satz **3.7.2** angegebene Form des LGS

$$\begin{array}{r} \sqrt{2}\, Z_1 : \\ \sqrt{6}/2\, Z_2 : \\ \sqrt{12}/3\, Z_3 : \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \sqrt{2}\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \sqrt{2}\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Die Matrix ${}_F\mathrm{id}_G$ kann man nun direkt ablesen, sie hat also die Form

$${}_F\mathrm{id}_G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \sqrt{2}\frac{2}{3} \\ 0 & \sqrt{2}\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Gemäß Definition **4.5.2** überprüft man nun die folgende Bedingung

$$ {}_F\mathrm{id}_G{}^{\mathsf{T}}\,{}_F\mathrm{id}_G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \sqrt{2}\frac{2}{3} \\ 0 & \sqrt{2}\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \sqrt{2}\frac{2}{3} \\ 0 & \sqrt{2}\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} $$

und erhält damit, dass ${}_F\mathrm{id}_G$ eine orthogonale Matrix ist. Es bleibt ${}_G\mathrm{id}_F$ zu bestimmen. Nach Satz **3.10.11** gilt

$$ {}_G\mathrm{id}_F = \left({}_F\mathrm{id}_G\right)^{-1} = \left({}_F\mathrm{id}_G\right)^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \sqrt{2}\frac{2}{3} \\ 0 & \sqrt{2}\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}. $$

(d) Um die Orthonomalbasis F von U zu einer Orthonomalbasis F' des $\mathbb{R}^4$ zu vervollständigen, gibt es mehrere Ansätze. Eine Möglichkeit besteht darin einen Vektor v_4 so zu finden, dass $\mathrm{L}(v_1, v_2, v_3, v_4) = \mathbb{R}^4$ und dann f_4 mittels des Schmidtschen Orthonormierungsverfahren zu bestimmen. Eine einfache Wahl ist z. B. der Vektor $v_4 = (0,0,0,1)^{\mathsf{T}}$. Indem man die Argumentation aus Aufgabenteil **(a)** weiterführt, folgt damit mittels des Ansatz aus dem Schmidtschen Orthonormierungsverfahren

$$ \begin{aligned} f_4^* &= v_4 - \langle v_4 \mid f_1 \rangle f_1 - \langle v_4 \mid f_2 \rangle f_2 - \langle v_4 \mid f_3 \rangle f_3 \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\qquad - \frac{1}{6} \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle - \frac{1}{12} \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} $$

Nun ist

$$ |f_4| = \sqrt{\langle f_4^* \mid f_4^* \rangle} = \frac{1}{2} \quad \text{und damit} \quad f_4 = \frac{f_4^*}{|f_4^*|} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. $$

Insgesamt erhält man also

$$ F': \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{12}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. $$

Aufgabe H 40. *Spiegelung, Drehung*

Sei $\alpha\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die Spiegelung an $U := \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\end{pmatrix}^\intercal, \begin{pmatrix}1 & 2 & 1\end{pmatrix}^\intercal\right)$. Sei $\beta\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die Spiegelung an $V := \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\end{pmatrix}^\intercal, \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\end{pmatrix}^\intercal\right)$. Sei E die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$.

(a) Bestimmen Sie ${}_E\alpha_E$ und $\det({}_E\alpha_E)$.

(b) Bestimmen Sie ${}_E\beta_E$ und $\det({}_E\beta_E)$.

(c) Ist $\beta \circ \alpha$ eine Drehung? Bestimmen Sie gegebenenfalls die Drehachse.

(d) Bestimmen Sie $U \cap V$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es sei $b_1 := \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\end{pmatrix}^\intercal$, $b_2 := \begin{pmatrix}1 & 2 & 1\end{pmatrix}^\intercal$ und $b_3 := \begin{pmatrix}1 & -1 & 1\end{pmatrix}^\intercal$. Folglich haben wir $U = \mathrm{L}(b_1, b_2)$ und $\langle b_1 \,|\, b_3\rangle = \langle b_2 \,|\, b_3\rangle = 0$. Ferner sei $B : b_1, b_2, b_3$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$. Wir berechnen ${}_E\alpha_E$ mit Hilfe von ${}_B\alpha_B$. Nach der Definition der Spiegelung α und der Basis B erhalten wir

$$\alpha(b_1) = b_1,\ \alpha(b_2) = b_2,\ \alpha(b_3) = -b_3,$$

also

$${}_B\alpha_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Da E die Standardbasis ist, haben wir

$${}_E\mathrm{id}_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

und damit

$${}_B\mathrm{id}_E = \left({}_E\mathrm{id}_B\right)^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zusammen genommen erhalten wir

$${}_E\alpha_E = {}_E\mathrm{id}_B \cdot {}_B\alpha_B \cdot {}_B\mathrm{id}_E = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

und

$$\begin{aligned}\det({}_E\alpha_E) &= \det({}_E\mathrm{id}_B \cdot {}_B\alpha_B \cdot {}_B\mathrm{id}_E) = \det({}_E\mathrm{id}_B)\det({}_B\alpha_B)\det({}_B\mathrm{id}_E) \\ &= \det({}_E\mathrm{id}_B)\det({}_B\alpha_B)\det(({}_E\mathrm{id}_B)^{-1}) = \det({}_B\alpha_B) = -1.\end{aligned}$$

(b) Wir wiederholen die selben Berechnungen mit $c_1 := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}^\intercal$, $c_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^\intercal$, $c_3 := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}^\intercal$, bezüglich der Basis $C : c_1, c_2, c_3$, und erhalten

$$ {}_E\mathrm{id}_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \ {}_C\mathrm{id}_E = \left({}_E\mathrm{id}_C\right)^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} $$

sowie

$$ {}_C\beta_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. $$

Demnach ist

$$ {}_E\beta_E = {}_E\mathrm{id}_C \cdot {}_C\beta_C \cdot {}_C\mathrm{id}_E = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} $$

und $\det({}_E\beta_E) = -1$.

(c) Es gilt ${}_E(\beta \circ \alpha)_E = {}_E\beta_E \cdot {}_E\alpha_E$, und somit ist $\det({}_E(\beta \circ \alpha)_E) = \det({}_E\beta_E)\det({}_E\alpha_E) = 1$. Folglich ist $\beta \circ \alpha$ eine Drehung.

Die Drehachse von $\beta \circ \alpha$ ist die Gerade $\mathbb{R}\, w$, für einen Vektor w, für den gilt ${}_E(\beta \circ \alpha)_E w = w = E_3 w$, oder $\left({}_E(\beta \circ \alpha)_E - E_3\right) w = 0$. Also betrachten wir die Matrix ${}_E(\beta \circ \alpha)_E - E_3$, welche gegeben ist durch

$$ {}_E(\beta \circ \alpha)_E - E_3 = {}_E\beta_E \cdot {}_E\alpha_E - E_3 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -7 & 4 & -4 \\ -4 & 1 & 8 \\ 4 & 8 & 1 \end{pmatrix} - E_3 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -16 & 4 & -4 \\ -4 & -8 & 8 \\ 4 & 8 & -8 \end{pmatrix}. $$

Also erfüllt der gesuchte Vektor w das lineare Gleichungssystem

$$ \begin{pmatrix} -16 & 4 & -4 \\ -4 & -8 & 8 \\ 4 & 8 & -8 \end{pmatrix} w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. $$

Um w zu berechnen verwenden wir den Gauß Algorithmus:

$$ \begin{array}{r} \frac{1}{4}\, Z_3 : \\ Z_1 + 4\, Z_3 : \\ Z_2 + \ Z_3 : \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 36 & -36 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} $$

$$ \begin{array}{r} Z_1 - \frac{1}{36}\, Z_2 : \\ \frac{1}{36}\, Z_2 : \\ \ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. $$

Also wird die Drehachse aufgspannt von $w = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^\intercal$.

(d) Falls $u \in U \cap V$, dann gilt $(\beta \circ \alpha)u = u$. Wie wir aber vorhin schon gezeigt haben, ist w die Drehachse von $\beta \circ \alpha$, und somit ist $U \cap V = \mathrm{L}(w)$.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 41. *Parameterabhängige Eigenwerte und Eigenräume*

Gegeben sei die von den Parametern $a, b \in \mathbb{R}^+$ abhängige Matrix $A = \begin{pmatrix} -a & ab & a+b \\ 0 & b & ab \\ 0 & ab & b \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A in Abhängigkeit von a und b.

(b) Bestimmen Sie die Eigenräume der Matrix A in Abhängigkeit von a und b.

(c) Bestimmen Sie alle $v \in \mathbb{C}^3$ mit $Av = \mathrm{i}v$.

(d) Sei $\alpha\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3\colon x \mapsto Ax$. Für welche Paare (a, b) ist $\dim \operatorname{Kern}(\alpha) \geqq 1$?

Lösungshinweise hierzu:

(a) Das charakteristische Polynom ist

$$\chi_A(\lambda) = (-a - \lambda)((b - \lambda)^2 - a^2b^2)$$

und hat die Nullstellen $\lambda_1 = -a, \lambda_{2,3} = b(1 \pm a)$.

(b) Die Eigenräume sind

$$V(\lambda_1) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right), \quad V(\lambda_2) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad V(\lambda_3) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

sofern drei unterschiedliche Eigenwerte entstehen.
Für $b = -a/(1 + a)$ ist $\lambda_1 = \lambda_2$ und somit

$$V(\lambda_1) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

und für $b = -a/(1 - a)$ ist $\lambda_1 = \lambda_3$ und somit

$$V(\lambda_1) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

(c) Für reelle a, b sind alle Eigenwerte reell. D.h. die einzige Lösung der Gleichung ist $v = 0$.

(d) $\dim \operatorname{Kern}(\alpha) \geqq 1$ is genau dann der Fall wenn A den Eigenwert 0 besitzt. Da $a = 0$ und $b = 0$ nicht erlaubt sind, muss für einen Eigenwert 0 der Parameter $a = \pm 1$ gewählt werden.

Aufgabe H 42. *Diagonalisierung und Matrixpotenzen*

Seien $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & 2 \\ -1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie die charakteristischen Polynome $\chi_A(\lambda)$ und $\chi_B(\lambda)$.

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenräume von A und von B.

(c) Geben Sie eine invertierbare Matrix S so an, dass $S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix ist. Bestimmen Sie $(S^{-1}AS)^4$ und A^4.

(d) Geben Sie eine invertierbare Matrix T so an, dass $T^{-1}BT$ eine Diagonalmatrix ist. Bestimmen Sie für $k \geqq 1$ die Matrizen $(T^{-1}BT)^k$, $T^{-1}B^kT$ und B^k.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es gilt

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1 \quad \text{und} \quad \chi_B(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 - 2\lambda$$

(b) Damit sind die Eigenwerte von A gegeben durch $1, -\mathrm{i}, \mathrm{i}$ und diejenigen von B durch $-2, 0, 1$. Die zugehörigen Eigenräume für A sind

$$V(1) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad V(-\mathrm{i}) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} -\mathrm{i} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad V(\mathrm{i}) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right);$$

und für B

$$V(-2) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad V(0) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right), \quad V(1) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

(c) Mit der letzten Teilaufgabe erhalten wir

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i} & \mathrm{i} \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Damit ist $(S^{-1}AS)^4 = \mathrm{E}_3$ und $A^4 = S\mathrm{E}_3S^{-1} = \mathrm{E}_3$.

(d) Analog zur letzten Teilaufgabe gilt

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Damit ist

$$F := (T^{-1}BT)^k = T^{-1}B^kT = \begin{pmatrix} (-2)^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$B^k = TFT^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ (-2)^k & 2\cdot(-2)^k & -(-2)^k \\ (-2)^k+1 & 2\cdot(-2)^k & -(-2)^k \end{pmatrix}.$$

Aufgabe H 43. *Test auf Eigenvektor*

Seien $A = \begin{pmatrix} 12 & 4 & 0 & -9 \\ 2 & 10 & 0 & -3 \\ 2 & 2 & 1 & -6 \\ 2 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(a) Untersuchen Sie, welche der Vektoren v_1, v_2, v_3 Eigenvektoren von A sind.

(b) Geben Sie die Eigenwerte von A und jeweils einen zugehörigen Eigenvektor an.

(c) Welche algebraische und geometrische Vielfachheit besitzen die Eigenwerte jeweils?

Lösungshinweise hierzu:

(a) Nach kurzer Rechnung erhält man $Av_1 = (8,-8,8,0)^\mathsf{T}$ und $Av_3 = 10v_3$. Da der Nullvektor nie ein Eigenvektor sein kann, ist also lediglich v_3 ein Eigenvektor von A.

(b) Die Eigenwerte ergeben sich zu $1, 10, 8$ wobei 8 doppelte Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist. Zugehörige Eigenvektoren sind zum Beispiel

$$v(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v(10) = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v(8) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Die algebraischen Vielfachheiten sind $e_1 = 1 = e_{10}$ und $e_8 = 2$. Da der Eigenraum zum Eigenwert 8 die Dimension 1 hat gilt $d_8 = 1$. Da die geometrische Vielfachheit immer kleine gleich der algebraischen ist, gilt außerdem $d_1 = d_{10} = 1$.

Aufgabe H 44. *Eigenvektoren*

Für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ definieren wir $M(A) := \begin{pmatrix} \mathbf{0} & A \\ E_n & \mathbf{0} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$.

(a) Zeigen Sie: Ist v ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda \neq 0$, dann existieren Zahlen $\mu^+ \neq \mu^-$ so, dass die Vektoren $w^+ = \begin{pmatrix} \mu^+ v \\ v \end{pmatrix}$ und $w^- = \begin{pmatrix} \mu^- v \\ v \end{pmatrix}$ Eigenvektoren von $M(A)$ sind. Bestimmen Sie die zugehörigen Eigenwerte.

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenräume von $M(A)$ für $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Der Beweis geht in analoger Weise für w^+ und w^-, deshalb schreiben wir in den Gleichungen $w^\pm$. Wir müssen lediglich die Eigenwertgleichung nachrechnen, d.h. zeigen, dass Mw^+ ein Vielfaches von w^+ ist und analog für w^-. Wir betrachten $Mw^\pm$ und erhalten:

$$\begin{aligned} Mw^\pm &= \begin{pmatrix} \mathbf{0} & A \\ E_n & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu^\pm v \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Av \\ \mu^\pm E_n v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda v \\ \mu^\pm v \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (\mu^\pm)^2 v \\ \mu^\pm v \end{pmatrix} = \mu^\pm \begin{pmatrix} \mu^\pm v \\ v \end{pmatrix} = \mu^\pm w^\pm \end{aligned}$$

D.h sowohl w^+ als auch w^- erfüllt eine Eigenwertgleichung. Also ist w^+ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\mu^+ := +\sqrt{\lambda}$ und w^- ein Eigenvektor zum Eigenwert $\mu^- := -\sqrt{\lambda}$.

(b) Nach Teilaufgabe (a) genügt es die Matrix A gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

auf Eigenwerte und -vektoren zu untersuchen. Diese werden dann verwendet um die Eigenwerte und -vektoren von M gemäß der Vorschrift aus Teilaufgabe (a) zu bestimmen. Wir berechnen die Determinate von $A - \lambda E_3$ indem wir nach der ersten Spalte entwickeln und erhalten

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda E_3) &= (1-\lambda)\Big((1-\lambda)(4-\lambda) - 3 \cdot 0\Big) \\ &= (1-\lambda)(1-\lambda)(4-\lambda) \end{aligned}$$

Wir untersuchen die Matrix A weiter auf Eigenvektoren zu den Eigenwerten $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$ und $\lambda_3 = 4$. Offensichtlich ist $(1,0,0)^\mathsf{T}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 1. Den zweiten Eigenvektor zum Eigenwert 1 sieht man ebenfalls schnell:

$$\lambda_2 = 1 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow V(1) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

Für den dritten Eigenwert bekommt man

$$\lambda_3 = 4 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -3 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow V(4) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

Damit hat M die Eigenwerte $\mu_{1,2} = 1$, $\mu_{3,4} = -1$, $\mu_5 = 2$, $\mu_6 = -2$. Die dazugehörenden Eigenräume sind:

$$V(1) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right), \qquad V(-1) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right),$$

$$V(2) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right), \qquad V(-2) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right).$$

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 45. *Orthogonales Diagonalisieren*

Es sei $A_x = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ eine vom reellen Parameter x abhängige Matrix.

(a) Berechnen Sie $A_x(1,0,-1,0)^{\intercal}$ und $A_x(1,0,0,-1)^{\intercal}$. Welche Abschätzung für die algebraische Vielfachheit welchen Eigenwerts von A_x folgt hieraus?

(b) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom und die Eigenwerte von A_x.

(c) Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix S so, dass $S^{\intercal} A_{-1} S$ eine Diagonalmatrix ist.

(d) Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix T so, dass $T^{\intercal} A_1 T$ eine Diagonalmatrix ist.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Einfaches Multiplizieren von Matrizen liefert

$$A_x(1,0,-1,0)^{\intercal} = (-2,0,2,0)^{\intercal}$$

und

$$A_x(1,0,0,-1)^{\intercal} = (-2,0,0,2)^{\intercal}.$$

Somit besitzt A_x den Eigenwert -2 und die algebraische Vielfachheit diese Eigenwerts ist mindestens 2.

(b) Es ist

$$\chi_{A_x}(\lambda) = \det\left(A_x - \lambda E_4\right) = \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1-\lambda \end{pmatrix}.$$

Die Determinante ist als Abbildung linear in jeder Zeile bzw. Spalte, vgl. 3.11.4. Somit bleibt die Determinante der Matrix $A_x - \lambda E_4$ erhalten, wenn wir die erste Zeile von jeder der anderen Zeilen abziehen. Es ergibt sich

$$\chi_{A_x}(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 2+\lambda & x-1-\lambda & 0 & 0 \\ 2+\lambda & 0 & -2-\lambda & 0 \\ 2+\lambda & 0 & 0 & -2-\lambda \end{pmatrix}.$$

Addiert man nun die dritte und vierte Spalte auf die erste, so folgt

$$\chi_{A_x}(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 2+\lambda & x-1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2-\lambda \end{pmatrix}.$$

Mittels zweifachen Entwickelns nach der letzten Zeile erhält man dann

$$\begin{aligned} \chi_{A_x}(\lambda) &= -(2+\lambda) \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 2+\lambda & x-1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -2-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (2+\lambda)^2 \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 2+\lambda & x-1-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (2+\lambda)^2((1-\lambda)(x-1-\lambda) - (2+\lambda) \\ &= (2+\lambda)^2(\lambda^2 - \lambda(x+1) + x - 3). \end{aligned}$$

Bestimmt man nun die Nullstellen der einzelnen Faktoren, so erhält man für die Eigenwerte von A_x genau $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = \frac{1}{2}(x+1+\sqrt{x^2-2x+13})$ und $\lambda_4 = \frac{1}{2}(x+1-\sqrt{x^2-2x+13})$.

(c) Nach b) besitzt A_{-1} den Eigenwert -2 mit algebraischer Vielfachheit 3, da $\lambda_4 = -2$ gilt, und den Eigenwert $\lambda_3 = 2$ mit algebraischer Vielfachheit 1. Da die Matrix A_x symmetrisch ist, ist sie nach Satz 5.4.2 orthogonal diagonalisierbar. Insbesondere stimme für jeden Eigenwert die algebraiche und geometrische Vielfachheit überein. Zum Eigenwert -2 kennen wir nach a) bereits die Eigenvektoren $(1, 0, -1,)^\intercal$ und $(1, 0, 0, -1)^\intercal$. Wir lösen das LGS

$$0 = (A_x - (-2)E_4)v^\intercal = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} v^\intercal.$$

Subtraktion der ersten Zeile von den anderen Zeilen führt zu

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} v^\intercal = 0.$$

Dieses LGS besitzt die Lösung $(1, -1, 0, 0)^\intercal$ und diese ist linear unabhängig von den beiden Eigenvektoren aus a). Da wir orthogonal diagonalisieren wollen, müssen wir eine ONB des Eigenraums $V(-2)$ bestimmen. Setze hierfür $b_1 = (1, -1, 0, 0)^\intercal$, $b_2 = (1, 0, -1, 0)^\intercal$ und $b_3 = (1, 0, 0, -1)^\intercal$ und führe das Schmidtsche Orthonormierungsverfahren wie in 4.5.10 durch. Es folgt $f_1 = \frac{b_1}{|b_1|} \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0, 0)^\intercal$ und weiterhin

$$f_2^* = b_2 - \langle b_2 \mid f_1 \rangle f_1 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1, 0)^\intercal.$$

Somit ist $f_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2,0)$ und

$$f_3^* = b_3 - \langle b_3 \,|\, f_1 \rangle\, f_1 - \langle b_3 \,|\, f_2 \rangle\, f_2 = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -1)^{\mathsf{T}}.$$

Man erhält $f_3 = \frac{1}{\sqrt{12}}(1,1,1,-3)^{\mathsf{T}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}(1,1,1,-3)^{\mathsf{T}}$.
Ein Eigenvektor zum Eigenwert 2 steht auf jedem der Vektoren b_1, b_2 und b_3 senkrecht, was offensichtlich vom Vektor $(1,1,1,1)^{\mathsf{T}}$ erüllt wird. Ein Eigenvektor der Länge 1 zum Eigenwert 2 ist somit $\frac{1}{2}(1,1,1,1)^{\mathsf{T}}$. Diese Orthonormalbasis aus Eigenvektoren bildet die Spalten der Matrix S und somit ist

$$S = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \sqrt{6} & \sqrt{2} & 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{2} & 1 & \sqrt{3} \\ 0 & -2\sqrt{2} & 1 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & -3 & \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

(d) Mit $x = 1$ und b) gilt $\lambda_3 = \frac{1}{2}(2 + \sqrt{12}) = 1 + \sqrt{3}$ und $\lambda_4 = 1 - \sqrt{3}$. Wir bestimmen den Eigenvektor zum Eigenwert $1 + \sqrt{3}$. Dies führt auf das LGS

$$\begin{pmatrix} -2-\sqrt{3} & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\sqrt{3} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2-\sqrt{3} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2-\sqrt{3} \end{pmatrix} v^{\mathsf{T}} = 0.$$

Dieses Gleichungssystem ist in der ersten, dritten und vierten Variable symmetrisch. Diese Koordinaten müssen also gleich sein und sind nicht 0, da sonst das Gleichungssystem offensichtlich nicht lösbar ist. Somit kann man v von der Form $(1,\alpha,1,1)^{\mathsf{T}}$ annehmen. Aus der zweiten Zeile des LGS folgt dann $3 - \sqrt{3}\alpha = 0$ und somit $\alpha = \sqrt{3}$. Analog erhält man zum Eigenwert $1 - \sqrt{3}$ den Eigenvektor $(1, -\sqrt{3}, 1, 1)$. Normiert man diese Eigenvektoren so erhält man $\frac{1}{\sqrt{6}}(1, \pm\sqrt{3}, 1, 1)^{\mathsf{T}}$. Der Eigenraum zum Eigenwert -2 wird durch die in a) gegebenen Vektoren aufgespannt und wir erhalten als Orthonormalbasis von $V(-2)$ die Vektoren $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1,0)^{\mathsf{T}}$ und $\frac{1}{\sqrt{6}}(1,0,1,-2)^{\mathsf{T}}$. Schreibt man diese Eigenvektoren nun als Spalten der Matrix T, so folgt

$$T = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe H 46. *Affine Abbildungen, Koordinatensysteme*

In $\mathbb{R}^2$ seien die Punkte $P = (1,2)^{\mathsf{T}}$, $Q = (3,-1)^{\mathsf{T}}$, $R = (5,3)^{\mathsf{T}}$ und $S = (4,1)^{\mathsf{T}}$ gegeben. Sei $\alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine affine Abbildung, für welche $\alpha(P) = R$, $\alpha(Q) = S$ und $\alpha(R) = P$ ist. Sei $\mathbb{F} = (P; \overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PQ})$. Sei $\mathbb{E}$ das Standardkoordinatensystem.

(a) Zeichnen Sie P, Q, R und S in $\mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie ${}_{\mathbb{F}}P$, ${}_{\mathbb{F}}Q$, ${}_{\mathbb{F}}R$ und ${}_{\mathbb{F}}S$.

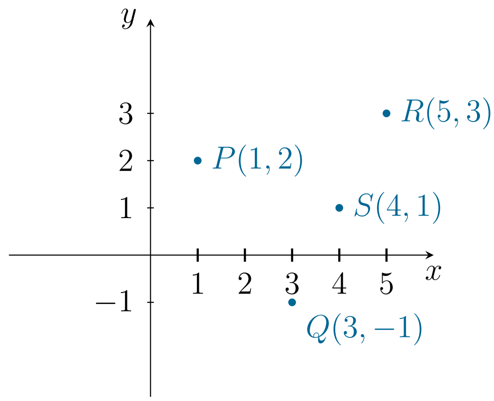
(b) Bestimmen Sie A und t mit ${}_{\mathbb{F}}\alpha(x) = A_{\mathbb{F}}x + t$ für $x \in \mathbb{R}^2$. Ist α bijektiv?

(c) Bestimmen Sie ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$ und ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$.

(d) Bestimmen Sie mittels **(b)** und **(c)** B und u mit ${}_{\mathbb{E}}\alpha(x) = B_{\mathbb{E}}x + u$ für $x \in \mathbb{R}^2$. Ist α eine Isometrie?

Lösungshinweise hierzu:

(a)



Da P der Ursprung des Koordinatensystems $\mathbb{F}$ ist, gilt ${}_{\mathbb{F}}P = (0,0)^\intercal$. Der Vektor von P, also dem Ursprung von $\mathbb{F}$, nach Q ist der zweite Basisvektor von $\mathbb{F}$. Somit ist ${}_{\mathbb{F}}Q = (0,1)^\intercal$. Der Vektor von P nach R ist der erste Basisvektor des Systems $\mathbb{F}$ und somit ist ${}_{\mathbb{F}}R = (1,0)^\intercal$. Der Punkt S ist der Mittelpunkt der Strecke zwischen Q und R. Es ist

$${}_{\mathbb{F}}(\overrightarrow{RQ}) = {}_{\mathbb{F}}(\overrightarrow{RP} + \overrightarrow{PQ}) = (-1,0)^\intercal + (0,1)^\intercal = (-1,1)^\intercal.$$

Somit ist

$${}_{\mathbb{F}}(S) = {}_{\mathbb{F}}(\overrightarrow{PR} + \frac{1}{2}\overrightarrow{RQ}) = (1,0)^\intercal + \frac{1}{2}(-1,1)^\intercal = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^\intercal.$$

(b) Da $(1,0)^\intercal = {}_{\mathbb{F}}R = {}_{\mathbb{F}}\alpha(P) = {}_{\mathbb{F}}\alpha((0,0)^\intercal)$ gilt, folgt $t = (1,0)^\intercal$. Es sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Dann ist

$$(0,0)^\intercal = {}_{\mathbb{F}}P = {}_{\mathbb{F}}\alpha(R) = {}_{\mathbb{F}}\alpha((1,0)^\intercal) = (a,c)^\intercal + t = (a+1,c)^\intercal$$

und somit $(a,c) = (-1,0)$. Weitherhin ist analog

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^\intercal = {}_{\mathbb{F}}S = {}_{\mathbb{F}}\alpha(Q) = {}_{\mathbb{F}}\alpha((0,1)^\intercal) = (b+1,d)^\intercal.$$

Somit folgt $(b,d) = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ und schließlich $A = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Da diese Matrix invertierbar ist, folgt, dass α bijektiv ist.

(c) In Standardkoordinaten ist $\overrightarrow{PR} = (4,1)^\intercal$ und $\overrightarrow{PQ} = (2,-3)^\intercal$. Mit 4.7.6 gilt somit

$$_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}(v) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} v + (1,2)^\intercal .$$

Das Inverse der Matrix $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ ist $\frac{-1}{14}\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Wiederum nach 4.7.6 ist dann

$$_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}(v) = \frac{-1}{14}\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}(v - (1,2)^\intercal) = \frac{-1}{14}\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} v + \left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right)^\intercal$$

(d) Es ist

$$_{\mathbb{E}}\alpha(x) = {}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}({}_{\mathbb{F}}\alpha({}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}(x)).$$

Das Berechnen liefert somit

$$\begin{aligned}
_{\mathbb{E}}\alpha(x) &= {}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}({}_{\mathbb{F}}\alpha({}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}(x)) \\
&= {}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}(\frac{-1}{14}\begin{pmatrix} -1 & \frac{-1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} x + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & \frac{-1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}(-1,1)^\intercal + (1,0)^\intercal) \\
&= \frac{-1}{28}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} x + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}(5,1)^\intercal + (1,2)^\intercal \\
&= \frac{-1}{14}\begin{pmatrix} 13 & 4 \\ 5 & -6 \end{pmatrix} x + \frac{1}{2}(13,5)^\intercal
\end{aligned}$$

Da die Matrix $\frac{-1}{14}\begin{pmatrix} 13 & 4 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}$ nicht orthogonal ist, handelt es sich bei α nach 4.6.4 nicht um eine Isometrie.

Aufgabe H 47. *Quadratische Formen*

Seien a und b reelle Parameter.
Sei $q_{a,b}\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}\colon x \mapsto a(x_1^2 + x_2^2 + bx_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + bx_4^2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_4 - 2bx_2x_4) - 4x_1x_3$.

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom der zu $q_{a,b}$ gehörigen Matrix.

(b) Bestimmen Sie die Menge P der Paare (a,b), für welche $q_{a,b}$ positiv definit ist.

(c) Bestimmen Sie die Menge I der Paare (a,b), für welche $q_{a,b}$ indefinit ist.

(d) Skizzieren Sie die Teilmengen P und I von $\mathbb{R}^2$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Die zu $q_{a,b}$ gehörige Matrix ist

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & a-2 & 0 \\ 0 & a+ab & 0 & a-ab \\ a-2 & 0 & a & 0 \\ 0 & a-ab & 0 & a+ab \end{pmatrix}.$$

Da das Vertauschen von Zeilen und Spalten einer Matrix nach 3.4.11 genau das Vorzeichen der Determinante ändert, erhalten wir durch Vertauschen der zweiten und dritten Spalte und anschließendes Vertauschen der zweiten und dritten Zeile

$$\chi_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} a-\lambda & a-2 & 0 & 0 \\ a-2 & a-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a+ab-\lambda & a-ab \\ 0 & 0 & a-ab & a+ab-\lambda \end{pmatrix}.$$

Da letztere Matrix Blockgestalt hat, ist diese Determinante nach 3.13.8 das Produkt der Determinanten der einzelnen Blöcke, also

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) &= ((a-\lambda)^2) - (a-2)^2)((a+ab-\lambda)^2 - (a-ab)^2) \\ &= (\lambda^2 - 2a\lambda + 4a - 4)(\lambda^2 - 2(a+ab)\lambda + 4a^2 b). \end{aligned}$$

Als Nullstellen des ersten Faktors ergeben sich

$$a \pm \sqrt{a^2 - 4a + 4} = a \pm \sqrt{(a-2)^2} = a \pm (a-2) = \{2, 2(a-1)\}$$

und als Nullstellen des zweiten Faktors

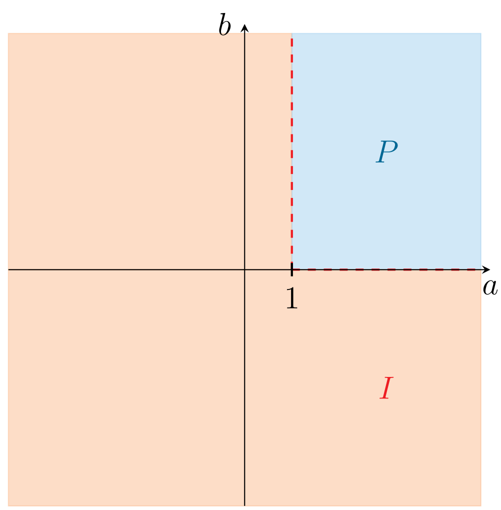
$$a + ab \pm \sqrt{a^2 - 2a^2 b + a^2 b^2} = a + ab \pm \sqrt{(a-ab)^2} = \{2a, 2ab\}.$$

Die Eigenwerte sind somit $\{2, 2(a-1), 2a, 2ab\}$.

(b) Wir müssen jene Werte von Paaren (a, b) berechnen, die dazu führen, dass alle in a) berechneten Eigenwerte positiv sind. Es ist $2(a-1) > 0$ genau dann, wenn $a > 1$. Mit $a > 1$ ist dann $2ab > 0$ genau dann, wenn $b > 0$. Weiterhin gilt dann auch $2a > 0$ und es gilt immer $2 > 0$. Somit ist $P = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a > 1 \wedge b > 0\}$.

(c) Da stets der positive Eigenwert 2 vorliegt, müssen wir die Paare (a, b) bestimmen, für die einer der Eigenwerte $2a, 2(a-1)$ oder $2ab$ negativ wird. Es ist $2(a-1) < 0$ genau dann, wenn $a < 1$. Es ist $2a < 0$ genau dann, wenn $a < 0$, die Bedingung $a < 1$ ist aber schwächer. Gilt hingegen $a \geqq 1$, so ist $2ab$ genau dann negativ, wenn $b < 0$ gilt. Somit ist $I = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a < 1 \vee b < 0\}$.

(d) Die gestricheltene roten Linien gehören zu keinem der Gebiete.



Aufgabe H 48. *Eigenwerte, Diagonalisierbarkeit*

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei $A_\alpha = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ \alpha & -5 \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume von A_4 .

(b) Berechnen Sie für jedes α die Eigenwerte von A_α , sowie deren jeweilige algebraische und geometrische Vielfachheit. Für welche α ist A_α diagonalisierbar?

(c) Bestimmen Sie ein α, für welches A_α orthogonal diagonalisierbar ist.

(d) Für welche α ist $(3+6\mathrm{i},\, -5\mathrm{i})^\intercal$ ein Eigenvektor von A_α?
Für welche α ist $(3-6\mathrm{i},\, 5\mathrm{i})^\intercal$ ein Eigenvektor von A_α?

Lösungshinweise hierzu:

(a)

$$A_4 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$$

Das charakteristische Polynom lautet

$$\det\left(\begin{pmatrix} -1-\lambda & 3 \\ 4 & -5-\lambda \end{pmatrix}\right) = \lambda^2 + 6\lambda - 7$$

und hat die Nullstellen $\lambda_1 = -7$ und $\lambda_2 = 1$. Die Eigenräume sind die Lösungsmengen der Gleichungssysteme

$$\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} v = 0 \qquad \text{beziehungsweise} \qquad \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} v = 0\,.$$

Die Eigenräume sind somit

$$V(\lambda_1) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) \qquad V(\lambda_2) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$$

(b) Die Eigenwerte von A_α sind $\lambda_1 = -3 + \sqrt{4+3\alpha}$ und $\lambda_2 = -3 - \sqrt{4+3\alpha}$.

- Fall 1: $\alpha \neq -\frac{4}{3}$. Für $\alpha \neq -\frac{4}{3}$ gilt $\lambda_1 \neq \lambda_2$ und daher $e_{\lambda_1} = e_{\lambda_2} = 1$. Damit gilt auch $d_{\lambda_1} = d_{\lambda_2} = 1$.
- Fall 2: $\alpha = -\frac{4}{3}$. In diesem Fall ist -3 der einzige Eigenwert und es gilt $e_{-3} = 2$. Der Eigenraum ist die Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -\frac{4}{3} & -2 \end{pmatrix} v = 0.$$

Dieser Lösungsraum ist eindimensional, da der Rang der beschreibenden Matrix 1 ist. Also ist $d_{-3} = 1$.

(c) Falls $\alpha \neq -\frac{4}{3}$ gilt, ist die Matrix nach Lemma 5.3.2 diagonalisierbar. Falls $\alpha = -\frac{4}{3}$ gilt, ist die Matrix nicht diagonalisierbar, da die geometrische und algebraische Vielfachheit des einzigen Eigenwerts nicht übereinstimmen. Also ist A_α für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{4}{3}\right\}$ diagonalisierbar. Für $\alpha = 3$ ist die Matrix symmetrisch und nach Satz $5.4.2$ orthogonal diagonalisierbar.

(d) Damit der Vektor $\begin{pmatrix} 3+6\mathrm{i} \\ -5\mathrm{i} \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor ist, muss es eine Zahl λ geben, so dass die Gleichung

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ \alpha & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3+6\mathrm{i} \\ -5\mathrm{i} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 3+6\mathrm{i} \\ -5\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

erfüllt ist. Das ergibt

$$\begin{pmatrix} -3-21\mathrm{i} \\ 3\alpha+6\alpha\mathrm{i}+25\mathrm{i} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 3+6\mathrm{i} \\ -5\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

Aus der Gleichung der ersten Zeile erhalten wir $\lambda = \frac{-3-21\mathrm{i}}{3+6\mathrm{i}} = -3-\mathrm{i}$. Einsetzen in der zweiten Zeile ergibt

$$\begin{aligned} -5\mathrm{i}(-3-\mathrm{i}) &\stackrel{!}{=} 3\alpha+6\alpha\mathrm{i}+25\mathrm{i} \\ \alpha &= \frac{-5-10\mathrm{i}}{3+6\mathrm{i}} \end{aligned}$$

Also ist $\alpha = -\frac{5}{3}$ die einzige reelle Zahl für die $(3+6\mathrm{i},\, -5\mathrm{i})^{\mathsf{T}}$ ein Eigenvektor von A_α ist.
Der zweite Vektor $(3-6\mathrm{i},\, 5\mathrm{i})^{\mathsf{T}}$ ist komplex konjugiert zum vorherigen Vektor $(3+6\mathrm{i},\, -5\mathrm{i})^{\mathsf{T}}$. Folglich ist nach Lemma 5.1.9 $\lambda = \overline{(-3-\mathrm{i})} = -3\mathrm{i}$ ein Eigenwert der reellen Matrix $A_{-\frac{5}{3}}$ mit Eigenvektor $(3-6\mathrm{i},\, 5\mathrm{i})^{\mathsf{T}}$. Demnach ist $(3-6\mathrm{i},\, 5\mathrm{i})^{\mathsf{T}}$ für $\alpha = -\frac{5}{3}$ ein Eigenvektor von A_α. Für andere Werte von $\alpha \in \mathbb{R}$ ist dies nicht der Fall, da diese sonst nach Lemma 5.1.9 im ersten Teil auftreten würden.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 49. *Räumliche Quadrik*

Bestimmen Sie die euklidische Normalform und die Gestalt der Quadrik

$$\mathcal{Q} = \left\{ (x_1, x_2, x_3)^\intercal \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, -3x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 - 8x_1x_2 + 4x_1x_3 - 12x_2x_3 - 6x_1 + 24x_2 - 18 = 0 \right\}.$$

Geben Sie ein kartesisches Koordinatensystem $\mathbb{F}$ an, in dem $\mathcal{Q}$ diese euklidische Normalform annimmt. Geben Sie ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$ und ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$ an.

Lösungshinweise hierzu: Schreiben wir $\mathcal{Q}$ in Matrixform $x^\intercal Ax + 2a^\intercal x + c = 0$, so ist $A = \begin{pmatrix} -3 & -4 & 2 \\ -4 & 1 & -6 \\ 2 & -6 & 2 \end{pmatrix}$. Mittels der Regel von Sarrus ergibt sich als charkteristisches Polynom von A

$$\begin{aligned}\chi_A(\lambda) =& (-3-\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda) + 48 + 48 - 4(1-\lambda) - 36(-3-\lambda) - 16(2-\lambda) \\ =& -\lambda^3 + 63\lambda + 162\end{aligned}$$

Wir erraten den Eigenwert $\lambda_1 = -3$ und mit Polynomdivision folgt

$$(-\lambda^3 + 63\lambda + 162) : (\lambda + 3) = \lambda^2 - 3\lambda - 54.$$

Somit sind die weiteren Eigenwerte $\lambda_2 = -6$ und $\lambda_3 = 9$. Wir bestimmen die zugehörigen Eigenvektoren, indem wir die Gleichungsysteme $(A - \lambda_i E_3)v = 0$ mit $v = (v_1, v_2, v_3)^\intercal$ lösen. Aus

$$0 = (A + 3E_3)v = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 2 \\ -4 & 4 & -6 \\ 2 & -6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

folgt mit der ersten Zeile $v_3 = 2v_2$. Setzt man dies in die drtitte Zeile ein, ergibt sich $v_1 = -2v_2$ und wir erhalten den normierten Eigenvektor $w_1 = \frac{1}{3}(-2, 1, 2)^\intercal$. Analoges Vorgehen für λ_3 liefert

$$0 = (A - 9E_3)v = \begin{pmatrix} -12 & -4 & 2 \\ -4 & -8 & -6 \\ 2 & -6 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}.$$

Aus der ersten Zeile erhalten wir $v_3 = 6v_1 + 2v_2$ und Eisetzen in die zweite Zeile liefert dann $v_2 = -2v_1$. Somit ist $w_3 = \frac{1}{3}(1, -2, 2)^\intercal$ ein normierter Eigenvektor zum Eigenwert 9. Da A als symmetrische Matrix orthogonal diagonalisierbar ist und jeder Eigenwert die algebraische

Vielfachheit 1 besitzt, berechenen wir den Eigenvektor zum Eigenwert -6 als Kreuzprodukt von w_1 und w_3. Um die Rechung zu vereinfachen ignorieren wir den Normierungsfaktor $\frac{1}{3}$:

$$\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\6\\3\end{pmatrix}.$$

Als normierten Eigenvektor erhalten wir $w_2 = \frac{1}{3}(2,2,1)^{\mathsf{T}}$. Die Eigenvektoren setzen wir als Spalten der Transformationsmatrix T fest. Für den Linearteil der transformierten Gleichung erhalten wir

$$a^{\mathsf{T}} T = (-3,12,0)\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2 & 2 & 1\\ 1 & 2 & -2\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix} = (6,6,-9)$$

und somit hat die Quadrik in den Koordinaten $y = Tx$ die Form

$$0 = -3y_1^2-6y_2^2+9y_3^2+12y_1+12y_2-18y_3-18 = -3(y_1-2)^2+12-6(y_2-1)^2+6+9(y_3-1)^2-9-18.$$

Mit $z = y-(2,1,1)^{\mathsf{T}}$ ergibt sich also

$$0 = -3z_1^2 - 6z_2^2 + 9z_3^2 - 9$$

und somit die euklidische Normalform

$$\frac{1}{3}z_1^2 + \frac{2}{3}z_2^2 - z_3^2 + 1 = 0.$$

Es handelt sich nach 6.3.8 also um einen zweischaligen Hyperboloid. Als Ursprung des neuen Koordinatensystems $\mathbb{F}$, in dem Q die euklidische Normalform annimmt, erhalten wir somit $P = T(2,1,1)^{\mathsf{T}} = \frac{1}{3}(-1,2,7)^{\mathsf{T}}$. Somit ist $\mathbb{F} = (P; w_1, w_2, w_3)$. Für die Transformationen zwischen den Koordinatensystemen erhalten wir

$$_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}(v) = Tv + P$$

und nach 4.7.6 und da es sich bei T um eine orthogonale Matrix handelt, d.h. $T^{-1} = T^{\mathsf{T}}$ gilt, folgt

$$_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}(v) = T^{\mathsf{T}}(v-P) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 1\\ 1 & -2 & 2\end{pmatrix} v - \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Aufgabe H 50. *Modell: Hyperbolisches Paraboloid (Sattelfläche)*
Gegeben sind die Ebenen $E_t = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_3 = t\right\}$ für $t \in \mathbb{R}$ und die Quadrik Q, die Sie als Modell in den Übungen schon in der Hand hatten, mit der Gleichung $x_1^2-x_2^2+x_3 = 0$; im Modell dargestellt ist der Ausschnitt $-1 \leqq x_1, x_2 \leqq 1$. Sie finden das Modell auch unter:

www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/HM-Stroppel-Material/3D-Modelle/01

(a) Entscheiden Sie, für welche $t \in \mathbb{R}$ der Schnitt von Q und E_t die Form zweier sich schneidender Geraden, einer Ellipse bzw. einer Hyperbel hat.

Lösungshinweise hierzu: Für $t = 0$ erhält man die Schnittgleichung $x_1^2 - x_2^2 = 0$. Dies entspricht nach der Klassifikation der ebenen Quadriken einem Paar sich schneidender Geraden. Für $t \neq 0$ erhält man hingegen die Schnittgleichung $x_1^2 - x_2^2 + t = 0$, aus welcher sich die euklidische Normalform $x_1^2/t - x_2^2/t + 1 = 0$ ergibt. Daran erkennt man ebenfalls nach der Klassifikation der ebenen Quadriken, dass es sich hierbei um eine Hyperbel handelt. Damit sind alle $t \in \mathbb{R}$ abgedeckt und man kann schließen, dass der Schnitt nie die Form einer Ellipse hat.

(b) Das blaue Linienpaar auf Q erfüllt die zusätzliche Gleichung $|x_1 - x_2| = \frac{1}{4}$. Ist es ein Geradenpaar? Parametrisieren Sie gegebenenfalls die beiden Geraden.

Lösungshinweise hierzu: Aus der zusätzlichen Gleichung ergibt sich

$$|x_1 - x_2| = \frac{1}{4} \iff x_1 - x_2 = \pm\frac{1}{4} \iff x_2 = x_1 \pm \frac{1}{4}.$$

Eingesetzt in die Quadrikgleichung erhält man

$$x_1^2 - \left(x_1 \pm \frac{1}{4}\right)^2 + x_3 = 0 \iff x_3 = \pm\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{16}.$$

Wählt man nun für x_1 den Parameter $t \in \mathbb{R}$, so ergibt sich aus den beiden obigen Gleichungen eine Parametrisierung

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t \pm \frac{1}{4} \\ \pm\frac{1}{2}t + \frac{1}{16} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \pm\frac{1}{4} \\ \frac{1}{16} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$$

der blauen Teilmenge. Man sieht daran, dass es sich um zwei Geraden handelt, die weder parallel sind noch einen Schnittpunkt haben.

(c) Welche der folgenden farbigen Teilmengen von Q entstehen als Schnitt von Q mit einer der folgenden Ebenen? Zu welcher Farbe bzw. Ebene gibt es keine Entsprechung?

• Schwarz	• Rot (Hyperbel)	• $x_3 = 0$	• $x_3 = -0{,}6$	• $x_1 = 0{,}2$
• Gelb	• Blau (Parabel)	• $x_3 = 0{,}5$	• $x_2 = -0{,}6$	• $x_2 - 2x_3 = 1/8$

Lösungshinweise hierzu: Zunächst lässt sich die schwarze Teilmenge als Schnitt mit der Ebene $x_3 = 0$ identifizieren, denn nach Aufgabenteil (a) entspricht dieser Schnitt gerade einem sich schneidenden Geradenpaar.

Die blaue Parabel lässt sich ebenfalls identifizieren als Schnitt mit der Ebene $x_2 = -0,6$, denn zum Einen muss es sich durch Inspektion um einen Schnitt mit einer Ebene handeln, auf der alle Punkte, die selbe x_1 oder x_2-Koordinate haben müssen. Zum Anderen sieht man, dass diese Teilmenge nicht nahe dem Ursprung verläuft, somit sollte die kosntate x_1- bzw. x_2-Koordinate sicherlich größer als $\frac{1}{2}$ sein.

Damit ist geklärt wie die x_1- und wie die x_2-Achse im Modell liegen muss und daher auch welche der beiden Seiten die Ober- bzw. Unterseite ist. Denn entlang der x_1-x_3-Ebene ($x_2 = 0$), parallel zur Schnittebene für die blaue Parabel, muss die Quadrik wie eine nach unten geöffnete Normalparabel ($x_3 = -x_1^2$) verlaufen. Daher scheidet die Seite mit der blauen Parabel als Oberseite aus. D.h. die Seite mit der roten Hyperbel ist die Oberseite und daher ist diese der Schnitt mit der Ebene $x_3 = -0,6$.

Ebenfalls durch Inspektion kann man erkennen, dass die gelbe Teilmenge ein windschiefes Geradenpaar ist und damit nicht als ein Schnitt mit einer Ebene entstanden sein kann. Andererseits kann man durch analoges Vorgehen wie in b) die gelben Geraden auch explizit parametrisieren. Mit den beiden Parametrisierungen der Geraden kann man sehen, dass diese keinen Schnittpunkt haben und auch nicht parallel verlaufen, daher windschief sind und somit nicht in einer gemeinsamen Ebene liegen können. D.h. zur gelben Teilmenge gibt es keine Entsprechung.

Ebenfalls ohne Entsprechung sind damit die Ebenen $x_3 = 0,5$, $x_1 = 0,2$ und $x_2 - 2x_3 = 1/8$.

Aufgabe H 51. *Modell: Kegelschnitte*

Sei $\mathcal{Q}$ der durch die Gleichung $-x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 = 0$ gegebene Doppelkegel; im Modell dargestellt ist der Bereich $-\frac{7}{2} \leqq x_1, x_2, x_3 \leqq \frac{7}{2}$. Außerdem sei in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$ eine Ebene E_α gegeben durch $x_1 + \alpha x_3 = 1$ im Standardkoordinatensystem.

(a) Welche Ebenen erhalten Sie für $\alpha \in \{-1, -1/2, 0\}$?
Wie hängen diese Ebenen mit denen des Modells zusammen?

(b) Die Basis B_α: $b_1 := \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}(1,0,\alpha)^\intercal, b_2 := (0,1,0)^\intercal, b_3 := \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}(\alpha,0,-1)^\intercal$ von $\mathbb{R}^3$ liefert das kartesische Koordinatensystem $\mathbb{F}_\alpha = (\frac{1}{1+\alpha^2}(1,0,\alpha)^\intercal; B_\alpha)$. Ist B_α ein Rechtssystem? Geben Sie die Ebene E_α in Hessescher Normalform bezüglich des Koordinatensystems $\mathbb{F}_\alpha$ an. Prüfen Sie, ob $\mathbb{F}'_\alpha := (\frac{1}{1+\alpha^2}(1,0,\alpha)^\intercal; b_2, b_3)$ ein kartesisches Koordinatensystem von E_α ist.

(c) Geben Sie eine Quadrikgleichung für den Doppelkegel $\mathcal{Q}$ bezüglich des Koordinatensystems $\mathbb{F}_\alpha$ an.

(d) Geben Sie eine Gleichung für die Schnittquadrik $E_\alpha \cap \mathcal{Q}$ bezüglich $\mathbb{F}'_\alpha$ an. Bestimmen Sie die Gestalt dieser Schnittquadrik in Abhängigkeit von α.

www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/HM-Stroppel-Material/3D-Modelle/02

Lösungshinweise hierzu:

(a) Man erhält:

- $\alpha = -1$: $x_1 - x_3 = 1$, das ist im Modell die blaue Ebene,
- $\alpha = 0$: $x_1 = 1$, das ist die grüne Ebene,
- $\alpha = -1/2$: $x_1 - \frac{1}{2}x_3 = 1$, diese Ebene verläuft durch die selbe Gerade wie die blaue und grüne Ebene und ist gegenüber der gelben Ebene um 90° gekippt.

(b) Bezeichne mit $x = (x_1, x_2, x_3)^\intercal$ die Standardkoordinaten, mit $y = (y_1, y_2, y_3)^\intercal$ die $\mathbb{F}_\alpha$-Koordinaten, dann lässt sich die Koordinatentransformation wie folgt darstellen:

$$x = {}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}_\alpha}(y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}} & 0 & \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}} \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} \frac{1}{1+\alpha^2} \\ 0 \\ \frac{\alpha}{1+\alpha^2} \end{pmatrix}.$$

Die Determinante der obigen Matrix ist -1, es handelt sich also um ein Linkssystem, was keinerlei Auswirkungen auf das nachfolge Vorgehen hat.
Es ergibt sich $x_2 = y_2$, sowie

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}} y_1 + \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}} y_3 + \frac{1}{1+\alpha^2}, \qquad x_3 = \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}} y_1 - \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}} y_3 + \frac{\alpha}{1+\alpha^2}.$$

Einsetzen in die Ebenengleichung $x_1 + \alpha x_3 = 1$ liefert die Hessesche Normalform in y-Koordinaten:

$$E_\alpha\colon \quad y_1 = 0.$$

Der Ursprung von $\mathbb{F}'_\alpha$ liegt auf E_α, die Basisvektoren b_2 und b_3 sind normiert, orthogonal zueinander und Richtungsvektoren von E_α. Also ist $\mathbb{F}'_\alpha$ ein kartesisches Koordinatensystem von E_α.

(c) Setze die Beziehungen $x_1 = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}} y_1 + \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}} y_3 + \frac{1}{1+\alpha^2}$, $x_2 = y_2$ und $x_3 = \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}} y_1 - \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}} y_3 + \frac{\alpha}{1+\alpha^2}$ in die Quadrikgleichung $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$ von Q ein:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}} y_1 + \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}} y_3 + \frac{1}{1+\alpha^2}\right)^2 + y_2^2 - \left(\frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}} y_1 - \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}} y_3 + \frac{\alpha}{1+\alpha^2}\right)^2 = 0.$$

Ausmultiplizieren und Zusammenfassen endet in

$$\frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2} y_1^2 + y_2^2 + \frac{\alpha^2-1}{1+\alpha^2} y_3^2 + \frac{4\alpha}{1+\alpha^2} y_1 y_3 + \frac{2-2\alpha^2}{(1+\alpha^2)^{3/2}} y_1 + \frac{4\alpha}{(1+\alpha^2)^{3/2}} y_3 + \frac{1-\alpha^2}{(1+\alpha^2)^2} = 0.$$

Man darf sich hier nicht darüber wundern, dass man eine komplizierte Gleichung erhält, denn die y-Koordinaten sind der Ebene E_α angepasst, nicht der Quadrik Q.

(d) Eine Gleichung für die Schnittquadrik $E_\alpha \cap Q$ erhält man durch Einsetzen der Ebenengleichung in die Quadrikgleichung, und zwar alles in y-Koordinaten. Ein analoges Vorgehen in x-Koordinaten würde ein verzerrtes Bild der Schnittquadrik liefern (genauer gesagt eine Projektion in eine der x-Koordinatenebenen).
Setze also $y_1 = 0$ in die Gleichung aus (c) ein:

$$y_2^2 + \frac{\alpha^2-1}{1+\alpha^2} y_3^2 + \frac{4\alpha}{(1+\alpha^2)^{3/2}} y_3 + \frac{1-\alpha^2}{(1+\alpha^2)^2} = 0.$$

Dies ist eine ebene Quadrik in der y_2-y_3-Ebene (beschrieben durch das Koordinatensystem $\mathbb{F}'_\alpha$). Im Fall $\alpha^2 = 1$ ergibt sich

$$y_2^2 \pm \sqrt{2}\alpha y_3 = 0.$$

Dies beschreibt eine Parabel.

Im Fall $\alpha^2 \neq 1$ muss man quadratisch ergänzen (die Matrix dieser Quadrik ist bereits diagonal):

$$\begin{aligned}
y_2^2 + \frac{\alpha^2-1}{1+\alpha^2}\left(y_3 + \frac{2\alpha}{(\alpha^2-1)\sqrt{1+\alpha^2}}\right)^2 - \frac{4\alpha^2}{(\alpha^2-1)(1+\alpha^2)^2} + \frac{1-\alpha^2}{(1+\alpha^2)^2} &= 0,\\
y_2^2 + \frac{\alpha^2-1}{1+\alpha^2}\left(y_3 + \frac{2\alpha}{(\alpha^2-1)\sqrt{1+\alpha^2}}\right)^2 - \frac{4\alpha^2+(\alpha^2-1)^2}{(\alpha^2-1)(1+\alpha^2)^2} &= 0,\\
y_2^2 + \frac{\alpha^2-1}{1+\alpha^2}\left(y_3 + \frac{2\alpha}{(\alpha^2-1)\sqrt{1+\alpha^2}}\right)^2 - \frac{(\alpha^2+1)^2}{(\alpha^2-1)(1+\alpha^2)^2} &= 0,\\
y_2^2 + \frac{\alpha^2-1}{1+\alpha^2}\left(y_3 + \frac{2\alpha}{(\alpha^2-1)\sqrt{1+\alpha^2}}\right)^2 - \frac{1}{(\alpha^2-1)} &= 0,\\
-(\alpha^2-1)y_2^2 - \frac{(\alpha^2-1)^2}{1+\alpha^2}\left(y_3 + \frac{2\alpha}{(\alpha^2-1)\sqrt{1+\alpha^2}}\right)^2 + 1 &= 0.
\end{aligned}$$

Setze $z_2 = y_2$ und $z_3 = y_3 + \frac{2\alpha}{(\alpha^2-1)\sqrt{1+\alpha^2}}$, dann erhält man

$$-(\alpha^2-1)z_2^2 - \frac{(\alpha^2-1)^2}{1+\alpha^2}z_3^2 + 1 = 0.$$

Im Fall $\alpha^2 > 1$ handelt es sich demnach um eine Ellipse, im Fall $\alpha^2 < 1$ um eine Hyperbel.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 52. *Quadrik mit Parameter*
Betrachten Sie die von einem Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ abhängige Quadrik

$$Q_\alpha := \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1^2 - 2x_2^2 + \alpha x_3^2 + 4x_1x_2 + 2\sqrt{5}\,x_1 + 4\sqrt{5}\,x_2 + \alpha = 0 \right\}.$$

(a) Schreiben Sie die Gleichung der Quadrik Q_α in Matrixform.

Lösungshinweise hierzu: Für die Matrixform der Gleichung der Quadrik erhalten wir $x^\intercal Ax + 2a^\intercal x + c = 0$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}, \qquad a = \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 2\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad c = \alpha.$$

(b) Bestimmen Sie den Typ der Quadrik Q_α in Abhängigkeit von α.

Lösungshinweise hierzu: Aus der Rangbestimmung der Matrix A und der erweiterten Matrix $A_{\mathsf{erw}} = \begin{pmatrix} \alpha & \sqrt{5} & 2\sqrt{5} & 0 \\ \sqrt{5} & 1 & 2 & 0 \\ 2\sqrt{5} & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$ erhält man

$$\operatorname{Rg} A = \begin{cases} 2 & \text{für } \alpha = 0, \\ 3 & \text{für } \alpha \neq 0, \end{cases} \qquad \operatorname{Rg} A_{\mathsf{erw}} = \begin{cases} 3 & \text{für } \alpha \in \{0, 5\}, \\ 4 & \text{für } \alpha \notin \{0, 5\}. \end{cases}$$

Damit ist Q_α für $\alpha = 5$ eine kegelige Quadrik und für $\alpha \neq 5$ eine Mittelpunktsquadrik.

(c) Bestimmen Sie eine euklidische Normalform von Q_α in Abhängigkeit von α.

(d) Geben Sie die Gestalt von dieser Quadrik in Abhängigkeit von α an.

Lösungshinweise hierzu:
Die Matrix A hat das charakteristische Polynom $(\alpha - \lambda)(\lambda^2 + \lambda - 6)$. Daraus ergeben sich die Eigenwerte

$$\lambda_1 = 2, \qquad \lambda_2 = -3, \qquad \lambda_3 = \alpha.$$

Zugehörige Eigenvektoren sind

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Somit erhalten wir die Transformationsmatrix

$$F = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix}$$

Mit $F^{\mathsf{T}} a = \left(\begin{smallmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ ergibt sich die transformierte Gleichung

$$2y_1^2 - 3y_2^2 + \alpha y_3^2 + 8y_1 - 6y_2 + \alpha = 0.$$

Mit quadratischer Ergänzung erhalten wir

$$2(y_1 + 2)^2 - 3(y_2 + 1)^2 + \alpha y_3^2 + (\alpha - 5) = 0$$

und damit schließlich die Gleichung

$$2z_1^2 - 3z_2^2 + \alpha z_3^2 + (\alpha - 5) = 0.$$

Nun können wir die Normalform und die Gestalt der Quadrik genauer spezifizieren:

- Falls $\alpha = 5$ ist, fällt der konstante Teil weg und wir erhalten die Normalform

  $$2z_1^2 - 3z_2^2 + 5z_3^2 = 0.$$

  Diese Gleichung beschreibt einen Doppelkegel.
- Falls $\alpha = 0$ ist, ergibt sich die Normalform

  $$-\frac{2}{5}z_1^2 + \frac{3}{5}z_2^2 + 1 = 0.$$

  In diesem Fall haben wir es mit einem hyperbolischen Zylinder zu tun.
- Für $\alpha \notin \{0, 5\}$ erhalten wir schließlich die Normalform

  $$\frac{2}{\alpha - 5}z_1^2 - \frac{3}{\alpha - 5}z_2^2 + \frac{\alpha}{\alpha - 5}z_3^2 + 1 = 0.$$

  Die Gestalt der Quadrik hängt jetzt davon ab, welches Vorzeichen α und $\alpha - 5$ haben:
  Für $\alpha < 0$ und für $\alpha > 5$ sind jeweils zwei der Koeffizienten im quadratischen Teil positiv und nur einer negativ. Also beschreibt die Gleichung in diesen beiden Fällen ein zweischaliges Hyperboloid.
  Für $0 < \alpha < 5$ sind zwei der Koeffizienten im quadratischen Teil negativ und nur einer positiv. Also beschreibt die Gleichung in diesen Fällen ein einschaliges Hyperboloid.

Aufgabe H 53. *Folgen*

Gegeben ist die vom reellen Parameter $\beta \neq -\frac{1}{4}$ abhängige Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch

$$a_1 := 1 \text{ und } a_{n+1} := \frac{2+3\beta}{1+4\beta}a_n$$

(a) Für welche β ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton?

(b) Für welche β ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt?

(c) Bestimmen Sie die Häufungspunkte der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in Abhängigkeit von β.

(d) Für welche β konvergiert die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
Bestimmen Sie in diesen Fällen den Grenzwert.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Aus der rekursiven Vorschrift lässt sich die Beschreibung $a_n = \left(\frac{2+3\beta}{1+4\beta}\right)^{n-1}$ ableiten. Da wir mehrmals im Laufe der Aufgabe Ungleichungen mit dem Nenner $1+4\beta$ durchmultiplizieren werden, klären wir, wann dieser Nenner negativ ist:

$$1+4\beta < 0 \iff \beta < \frac{-1}{4}.$$

Setze $x_\beta = \frac{2+3\beta}{1+4\beta}$. Die Folge ist monoton genau dann, wenn x_β nicht negativ ist. Wir unterscheiden die Fälle, dass der Nenner positiv bzw. negativ ist. Im ersten Fall gilt $\beta > \frac{-1}{4}$, und

$$\frac{2+3\beta}{1+4\beta} \geqq 0 \iff 2+3\beta \geqq 0 \iff \beta \geqq \frac{-2}{3}$$

liefert $\frac{-1}{4} < \beta$, weil $\frac{-2}{3} < \frac{-1}{4}$.
Im zweiten Fall gilt $\beta < \frac{-1}{4}$, und

$$\frac{2+3\beta}{1+4\beta} \geqq 0 \iff 2+3\beta \leqq 0 \iff \beta \leqq \frac{-2}{3}$$

liefert $\beta \leqq \frac{-2}{3}$.
Die Folge ist demnach monoton genau dann, wenn $\beta \leqq \frac{-2}{3}$ oder $\frac{-1}{4} < \beta$.

(b) Die Folge ist beschränkt genau dann, wenn $|x_\beta| \leqq 1$ gilt. Wir unterscheiden wieder die Fälle $\beta > \frac{-1}{4}$ und $\beta < \frac{-1}{4}$.
Im Fall $\beta > \frac{-1}{4}$ reduziert sich die Bedingung zu

$$-1 \leqq \frac{2+3\beta}{1+4\beta} \leqq 1 \iff -1-4\beta \leqq 2+3\beta \leqq 1+4\beta \iff (-3 \leqq 7\beta) \wedge (1 \leqq \beta),$$

also bleibt wegen $\frac{-3}{7} < \frac{-1}{4} < 1$ die Bedingung $1 \leqq \beta$.

Im zweiten Fall ergeben sich wegen $\beta < \frac{-1}{4}$ die Äquivalenzen

$$-1 \leqq \frac{2+3\beta}{1+4\beta} \leqq 1 \iff -1-4\beta \geqq 2+3\beta \geqq 1+4\beta \iff (-3 \geqq 7\beta) \wedge (1 \geqq \beta)$$

und daraus wegen $\frac{-3}{7} < \frac{-1}{4} < 1$ die Bedingung $\beta \leqq \frac{-3}{7}$.
Die Folge ist beschränkt genau dann, wenn $\beta \leqq \frac{-3}{7}$ oder $\beta \geqq 1$.

(c) Wir benutzen Beispiel 1.5.8 der Vorlesung zur Klärung der Konvergenzfragen und zur Bestimmung der Häufungspunkte.
Im Fall $|x_\beta| < 1$ konvergiert die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_\beta^{n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0 (und 0 ist der einzige Häufungspunkt). Dies tritt nach (b) genau dann auf, wenn $\beta < \frac{-3}{7}$ oder $\beta > 1$.
Ist $x_\beta > 1$, so hat die Folge den Häufungspunkt $+\infty$ und keinen anderen; es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$. Um die entsprechenden Werte von β zu bestimmen, unterscheiden wir wieder die Fälle $\beta > \frac{-1}{4}$ und $\beta < \frac{-1}{4}$.
Im ersten Fall gilt

$$\frac{2+3\beta}{1+4\beta} > 1 \iff 2+3\beta > 1+4\beta \iff 1 > \beta$$

und damit $\frac{-1}{4} < \beta < 1$. Im anderen Fall gilt

$$\frac{2+3\beta}{1+4\beta} > 1 \iff 2+3\beta < 1+4\beta \iff 1 < \beta\,.$$

Weil dies im Widerspruch zur Annahme $\beta < \frac{-1}{4}$ steht, erhalten wir keine weiteren Kandidaten für β aus diesem Fall. Es gilt also $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ genau dann, wenn $\frac{-1}{4} < \beta < 1$.
Im Fall $x_\beta < -1$ hat die Folge die Häufungspunkte $+\infty$ und $-\infty$ (und keine anderen). Nach Teil (a) tritt dies im Fall $\beta > \frac{-1}{4}$ nicht auf. Im Fall $\beta < \frac{-1}{4}$ erhalten wir

$$\frac{2+3\beta}{1+4\beta} < -1 \iff 2+3\beta > -1-4\beta \iff 7\beta > -3\,,$$

also $\frac{-3}{7} < \beta < \frac{-1}{4}$.

Es sind noch die Sonderfälle $x_\beta = \pm 1$ zu behandeln. Im Fall $x_\beta = 1$ ist die Folge konstant, und 1 ist der einzige Häufungspunkt. Dies tritt auf für $\beta = 1$. Ist $x_\beta = -1$, so nimmt die Folge die Werte 1 und -1 alternierend an und besitzt somit die Punkte 1 und -1 als Häufungspunkte (und keine anderen). Dies tritt ein für $\beta = \frac{-3}{7}$.

(d) Eine Folge ist genau dann konvergent, wenn sie genau einen Häufungspunkt besitzt und dieser nicht im Unendlichen liegt. Dieser Häufungspunkt ist dann auch der Grenzwert der Folge. Nach (c) tritt dies im Fall $\beta < \frac{-3}{7}$ oder $\beta \geqq 1$ auf. Im Fall $\beta = 1$ konvergiert die Folge gegen 1, in allen anderen Fällen gegen 0.

Aufgabe H 54. *Quadrik*

Sei $Q = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 5x_1^2 + 3x_2 + 4x_3 = 0\right\}$. Sei $\mathbb{G} := \left(\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{5}\begin{pmatrix}0\\3\\4\end{pmatrix}, \frac{1}{5}\begin{pmatrix}0\\-4\\3\end{pmatrix}\right)$.

(a) Bestimmen Sie den Typ von Q.

Lösungshinweise hierzu: Als Matrixbeschreibung der Gleichung für Q erhalten wir $x^\mathsf{T} A x + 2a^\mathsf{T} x = 0$ mit $A = \left(\begin{smallmatrix}5&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{smallmatrix}\right)$ und $a = \left(\begin{smallmatrix}0\\\frac{3}{2}\\2\end{smallmatrix}\right)$. Wegen $\mathrm{Rg}(A) = 1$ und $\mathrm{Rg}(A_{\mathsf{erw}}) = \mathrm{Rg}\left(\begin{smallmatrix}0&0&\frac{3}{2}&2\\0&5&0&0\\\frac{3}{2}&0&0&0\\2&0&0&0\end{smallmatrix}\right) = 3$ ist Q eine parabolische Quadrik.

(b) Bestimmen Sie ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{G}}$ und ${}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{E}}$.

Lösungshinweise hierzu: Für $x = {}_{\mathbb{E}}X$ und $y = {}_{\mathbb{G}}X$ gilt

$$x = {}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{G}}(y) = My \text{ mit } M := \begin{pmatrix}1&0&0\\0&3/5&-4/5\\0&4/5&3/5\end{pmatrix}, \qquad y = {}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{E}}(x) = M^\mathsf{T} x\,.$$

(c) Bestimmen Sie die Quadrikgleichung für Q in Koordinaten bezüglich $\mathbb{G}$.
Welche Gestalt hat Q?

Lösungshinweise hierzu: In die Matrixbeschreibung $x^\mathsf{T} A x + 2a^\mathsf{T} x = 0$ für Q setzen wir $x = My$ ein und erhalten $y^\mathsf{T} M^\mathsf{T} A M y + 2a^\mathsf{T} M y = 0$. Wegen $M^\mathsf{T} A M = \left(\begin{smallmatrix}5&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{smallmatrix}\right)$ und $a^\mathsf{T} M = (0, \frac{5}{2}, 0)$ erhalten wir die neue Gleichung $5\,y_1^2 + 5\,y_2 = 0$; die euklidische Normalform dazu ist $2\,y_1^2 + 2\,y_2 = 0$. Damit erkennen wir Q als einen parabolischen Zylinder.

(d) Finden Sie ein kartesisches Koordinatensystem, bezüglich dessen die Quadrik Q eine Matrixbeschreibung aufweist, deren Matrix keine Nulleinträge hat.

Lösungshinweise hierzu: Hier gibt es viele Möglichkeiten. Beispielsweise

$$\mathbb{F} := \left(\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}; \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}, \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}, \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}\right).$$

Für $z = {}_{\mathbb{F}}X$ und $x = {}_{\mathbb{E}}X$ gilt dann $x = Fz$ mit $F = \frac{1}{3}\left(\begin{smallmatrix}1&2&2\\2&1&-2\\2&-2&1\end{smallmatrix}\right)$.
In die Matrixbeschreibung $x^\mathsf{T} A x + 2a^\mathsf{T} x = 0$ für Q setzen wir $x = Fz$ ein und erhalten die Gleichung $z^\mathsf{T} F^\mathsf{T} A F z + 2a^\mathsf{T} F z = 0$, wegen $F^\mathsf{T} A F = \frac{1}{9}\left(\begin{smallmatrix}5&10&10\\10&20&20\\10&20&20\end{smallmatrix}\right)$ und $a^\mathsf{T} F = \frac{1}{3}(7, -\frac{5}{2}, -1)$ also (nach Multiplikation mit dem Faktor 9):

$$5z_1^2 + 20z_2^2 + 20z_3^2 + 20z_1z_2 + 20z_1z_3 + 40z_2z_3 + 42z_1 - 15z_2 - 6z_3 = 0\,.$$

Aufgabe H 55. *Häufungspunkte*

Bestimmen Sie jeweils die Häufungspunkte, den Limes inferior und den Limes superior der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(a) $a_n = \min\{100, n\}(-1)^n$ **(b)** $a_n = \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) - \frac{1}{n}$ **(c)** $a_n = n^{((-1)^n)}$

(d) $a_n = \mathrm{Re}(\mathrm{i}^n) + 2\,\mathrm{Im}(\mathrm{i}^n)$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir bestimmen Grenzwerte für die Teilfolgen $(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(a_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$:

$$\begin{aligned} a_{2k} &= \min\{100,2k\}(-1)^{2k} &&= \min\{100,2k\} &&\xrightarrow[k\to+\infty]{} 100 \\ a_{2k+1} &= \min\{100,2k+1\}(-1)^{2k+1} &&= -\min\{100,2k+1\} &&\xrightarrow[k\to+\infty]{} -100 \end{aligned}$$

Damit sind -100 und 100 die (einzigen) Häufungspunkte. Es gilt $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n = -100$ und $\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n = 100$.

(b) Wir finden Teilfolgen so, dass der Kosinus-Term in jeder Teilfolge konstant bleibt:

$$\begin{aligned} a_{6k} &= \cos(2k\pi) - \tfrac{1}{6k} &&= 1 - \tfrac{1}{6k} &&\xrightarrow[k\to+\infty]{} 1 \\ a_{6k+1} &= \cos\left(2k\pi + \tfrac{1}{3}\pi\right) - \tfrac{1}{6k+1} &&= \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{6k+1} &&\xrightarrow[k\to+\infty]{} \tfrac{1}{2} \\ a_{6k+2} &= \cos\left(2k\pi + \tfrac{2}{3}\pi\right) - \tfrac{1}{6k+2} &&= -\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{6k+2} &&\xrightarrow[k\to+\infty]{} -\tfrac{1}{2} \\ a_{6k+3} &= \cos(2k\pi + \pi) - \tfrac{1}{6k+3} &&= -1 - \tfrac{1}{6k+3} &&\xrightarrow[k\to+\infty]{} -1 \\ a_{6k+4} &= \cos\left(2k\pi + \tfrac{4}{3}\pi\right) - \tfrac{1}{6k+4} &&= -\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{6k+4} &&\xrightarrow[k\to+\infty]{} -\tfrac{1}{2} \\ a_{6k+5} &= \cos\left(2k\pi + \tfrac{5}{3}\pi\right) - \tfrac{1}{6k+5} &&= \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{6k+5} &&\xrightarrow[k\to+\infty]{} \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

Jedes Folgenglied von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist durch ein Glied einer dieser Teilfolgen abgedeckt. Die Häufungspunkte sind genau die Grenzwerte dieser Teilfolgen, also -1, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ und 1. Es gilt $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n = -1$ und $\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

(c) Wir bestimmen den Grenzwert für die Teilfolgen $(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(a_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$:

$$\begin{aligned} a_{2k} &= (2k)^{((-1)^{(2k)})} &&= (2k)^1 &&\xrightarrow[k\to+\infty]{} +\infty \\ a_{2k+1} &= (2k+1)^{((-1)^{(2k+1)})} &&= (2k+1)^{-1} &&\xrightarrow[k\to+\infty]{} 0 \end{aligned}$$

Damit sind die Häufungspunkte 0 und $+\infty$. Es gilt $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ und $\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

(d) Wir bestimmen vier Teilfolgen, entsprechend den vier Häufungspunkten von $(\mathrm{i}^n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\begin{aligned} a_{4k} &= \mathrm{Re}(\mathrm{i}^{4k}) + 2\,\mathrm{Im}(\mathrm{i}^{4k}) &&= \mathrm{Re}(1) + 2\,\mathrm{Im}(1) &&= 1 \\ a_{4k+1} &= \mathrm{Re}(\mathrm{i}^{4k+1}) + 2\,\mathrm{Im}(\mathrm{i}^{4k+1}) &&= \mathrm{Re}(\mathrm{i}) + 2\,\mathrm{Im}(\mathrm{i}) &&= 2 \\ a_{4k+2} &= \mathrm{Re}(\mathrm{i}^{4k+2}) + 2\,\mathrm{Im}(\mathrm{i}^{4k+2}) &&= \mathrm{Re}(-1) + 2\,\mathrm{Im}(-1) &&= -1 \\ a_{4k+3} &= \mathrm{Re}(\mathrm{i}^{4k+3}) + 2\,\mathrm{Im}(\mathrm{i}^{4k+3}) &&= \mathrm{Re}(-\mathrm{i}) + 2\,\mathrm{Im}(-\mathrm{i}) &&= -2 \end{aligned}$$

Damit ist jedes Folgenglied von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch ein Glied einer Teilfolge abgedeckt. Die Häufungspunkte sind -2, -1, 1 und 2. Es gilt $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n = -2$ und $\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n = 2$.