Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 1. *Binomialkoeffizienten, Summen und binomischer Lehrsatz*

(a) Zeigen Sie $n\binom{n-1}{k-1} = k\binom{n}{k}$ für $n, k \in \mathbb{N}$ mit $n \geqq k$.

Lösungshinweise hierzu: Mit der Definition des Binomialkoeffizienten erhalten wir unmittelbar

$$\begin{aligned} n\binom{n-1}{k-1} &= \frac{n \cdot (n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} \\ &= \frac{k \cdot n!}{k \cdot (k-1)!(n-k)!} = k\frac{n!}{k!(n-k)!} = k\binom{n}{k}. \end{aligned}$$

(b) Berechnen Sie $\sum_{k=0}^{n}(k+1)\binom{n}{k}$ für $n \in \mathbb{N}$. Sie dürfen dabei die bisherigen Resultate aus der Vorlesung sowie den Präsenz- und Hausübungen verwenden.

Lösungshinweise hierzu: Wir zeigen, dass $\sum_{k=0}^{n}(k+1)\binom{n}{k} = 2^{n-1}(n+2)$ gilt. Nach Zerlegung der Summe wenden wir Aufgabe **P3(b)** an und erhalten

$$\sum_{k=0}^{n}(k+1)\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} + 2^n.$$

Nach 1.3.4 im Skript ist $\binom{n}{0} = 1$ und somit folgt mit Aufgabe **H1(a)** schließlich

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = 0\binom{n}{0} + \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = 0 + n \cdot \sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1} = n \cdot \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k},$$

wobei im letzten Schritt der Summationsindex verschoben wurde. Erneute Anwendung von **P3(b)** liefert $\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k} = 2^{n-1}$ und somit insgesamt

$$\sum_{k=0}^{n}(k+1)\binom{n}{k} = n2^{n-1} + 2^n = 2^{n-1}(n+2).$$

(c) Berechnen Sie $\sum_{j=4}^{n}(6j^2 - 2j)$. Dabei dürfen bereits behandelte Summenformeln aus dem Skript verwendet werden.

Lösungshinweise hierzu: Wir verwenden die Beispiele 1.2.2 und 1.2.4 aus dem Skript, achten aber auf den geänderten Indexbereich der Summen:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=4}^{n}(6j^2-2j) &= 6\left(\sum_{j=1}^{n} j^2 - \sum_{j=1}^{3} j^2\right) - 2\left(\sum_{j=1}^{n} j^2 - \sum_{j=1}^{3} j\right) \\
&= 6\left(\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - (1^2+2^2+3^2)\right) \\
&\quad - 2\left(\frac{n(n+1)}{2} - (1+2+3)\right) \\
&= n(n+1)(2n+1) - 84 - n(n+1) + 12 \\
&= 2n^2(n+1) - 72 \\
&= 2n^3 + 2n - 72.
\end{aligned}$$

(d) Berechnen Sie alle reellen Lösungen der Gleichung

$$x^5 - 10x^4 + 70x^3 - 40x^2 = 30x^3 + 40x^2 - 80x + 64.$$

Lösungshinweise hierzu: Die zu untersuchende Gleichung lässt sich umschreiben in

$$x^5 - 10x^4 + 40x^3 - 80x^2 + 80x - 32 = 32.$$

Diese Gleichung ist äquivalent zu $(x-2)^5 = 2^5$. Ziehen der fünften Wurzel führt auf $x-2=2$, beziehungsweise auf die einzige reelle Lösung $x=4$.

Aufgabe H 2. *Vollständige Induktion mit Teilbarkeit*

Zeigen Sie die folgenden Behauptungen mittels Induktion. Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$, dass

(a) die Zahl $7^n - 1$ ohne Rest durch 6 teilbar ist; das heißt, es gibt ein $k \in \mathbb{N}_0$ so, dass $7^n - 1 = 6k$.

Lösungshinweise hierzu: Wir führen einen Induktionsbeweis über $n \in \mathbb{N}$:

IA Wir zeigen die Aussage für $n = 1$:

$7^1 - 1 = 6$ ist offensichtlich durch 6 teilbar.

IH Nun nehmen wir an, dass die Aussage für ein $n \in \mathbb{N}$ wahr ist:

Es existiert also ein $k \in \mathbb{N}_0$ mit $7^n - 1 = 6k$.

IS Wir zeigen die Aussage für $n+1$ unter Annahme der Induktionshypothese für n:

$$7^{n+1} - 1 = 7 \cdot 7^n - 7 + 6 = 7 \cdot \underbrace{(7^n - 1)}_{=6k \text{ nach IH}} + 6 = 6 \cdot (7k+1),$$

was durch 6 teilbar ist. Die Behauptung folgt damit für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) die Zahl $10^n + 3 \cdot 4^{n+2} + 5$ ohne Rest durch 9 teilbar ist; das heißt, es gibt ein $k \in \mathbb{N}_0$ so, dass $10^n + 3 \cdot 4^{n+2} + 5 = 9k$.

Lösungshinweise hierzu: Wir führen einen Induktionsbeweis über $n \in \mathbb{N}$:

IA Zunächst verifizieren wir die Aussage für $n = 1$:

$$10^1 + 3 \cdot 4^{1+2} + 5 = 207 = 23 \cdot 9 \text{ ist durch 9 teilbar.}$$

IH Sei die Aussage für ein $n \in \mathbb{N}$ wahr:

$$\text{Es existiert ein } k \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } 10^n + 3 \cdot 4^{n+2} + 5 = 9k.$$

IS Wir zeigen die Aussage für $n+1$ unter Annahme der Induktionshypothese für n:

$$\begin{aligned} 10^{n+1} + 3 \cdot 4^{n+3} + 5 &= 10 \cdot 10^n + 12 \cdot 4^{n+2} + 5 \\ &= \underbrace{(10^n + 3 \cdot 4^{n+2} + 5)}_{=9k \text{ nach IH}} + 9 \cdot 10^n + 9 \cdot 4^{n+2} \\ &= 9 \cdot (k + 10^n + 4^{n+2}), \end{aligned}$$

was durch 9 teilbar ist. Die Behauptung folgt damit für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe H 3. *Vollständige Induktion mit Produkt*

Analog zur Summenschreibweise, führen wir das Produktsymbol ein: $\prod_{j=1}^{m} A_j$ bedeutet, dass man den Term A_j für alle j von 1 bis m auswertet und die entstandenen Zahlen zusammenmultipliziert. Zeigen Sie die folgenden Aussagen mittels vollständiger Induktion.

(a) Es gilt $\prod_{k=1}^{n} k^k \leqq n^{\frac{n(n+1)}{2}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Lösungshinweise hierzu: Wir beweisen die Aussage durch Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$:

IA Zunächst weisen wir die Behauptung für $n = 1$ nach:

$$\prod_{k=1}^{1} k^k = 1 \leqq 1 = 1^{\frac{1 \cdot (1+1)}{2}}.$$

IH Nun nehmen wir an, dass die Aussage für ein $n \in \mathbb{N}$ wahr ist, d.h. es gelte

$$\prod_{k=1}^{n} k^k \leqq n^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

IS Wir zeigen die Aussage für $n+1$ unter Annahme der Induktionshypothese für n.

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{n+1} k^k &= \left(\prod_{k=1}^{n} k^k \right) (n+1)^{n+1} \\ &\overset{\text{IH}}{\leqq} n^{\frac{n(n+1)}{2}} (n+1)^{n+1} < (n+1)^{\frac{n(n+1)}{2}} (n+1)^{n+1} \\ &= (n+1)^{\frac{n^2+3n+2}{2}} = (n+1)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}, \end{aligned}$$

womit die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$ gezeigt ist.

(b) Es gilt $\prod_{k=2}^{n}\left(\frac{k+1}{k-1}\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqq 2$.

Lösungshinweise hierzu: Wir führen einen Induktionsbeweis über $n \geqq 2$:

IA Wir zeigen die Aussage für $n = 2$:

$$\prod_{k=2}^{2}\left(\frac{k+1}{k-1}\right)^2 = \left(\frac{2+1}{2-1}\right)^2 = 9 = 1^3 + 2^3 = \sum_{k=1}^{2} k^3.$$

IH Nun nehmen wir an, dass die Aussage für ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqq 2$ wahr ist, d.h. es gelte

$$\prod_{k=2}^{n}\left(\frac{k+1}{k-1}\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} k^3.$$

IS Wir zeigen die Aussage für $n+1$ unter Annahme der Induktionshypothese für n:

$$\begin{aligned}
\prod_{k=2}^{n+1}\left(\frac{k+1}{k-1}\right)^2 &= \left(\frac{(n+1)+1}{(n+1)-1}\right)^2 \prod_{k=2}^{n}\left(\frac{k+1}{k-1}\right)^2 \\
&= \left(1 + \frac{4(n+1)}{n^2}\right) \sum_{k=1}^{n} k^3 \quad \text{unter Verwendung von } \textbf{IH} \\
&= \sum_{k=1}^{n} k^3 + \left(\frac{4(n+1)}{n^2}\right)\left(\frac{n^2(n+1)^2}{4}\right) \quad \text{unter Verwendung von } \textbf{P3(a)} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} k^3,
\end{aligned}$$

womit die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqq 2$ bewiesen ist.

Online-Aufgabe.

Sie finden Ihre Online-Aufgabe auf folgender Webseite.

http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test430/

Bitte geben Sie dort zunächst Ihre Matrikelnummer ein.

Die Lösungen sind als ganze Zahlen oder als Dezimalzahlen mit einem Dezimal**punkt** einzugeben. Sonstige Zeichen, wie zum Beispiel Klammern oder Operatoren wie $*$ und $/$, dürfen **nicht** benutzt werden.

Anschließend müssen Sie das per Email an Ihre studentische Adresse (<st******@stud.uni-stuttgart.de>) erhaltene **Passwort** für die Onlineübungen eintragen.

Innerhalb des Bearbeitungszeitraums können Sie Ihre Eingaben beliebig oft wiederholen, wobei die **letzten** Eingaben gewertet werden. Der Bearbeitungszeitraum endet mittwochs, nach der Abgabe der schriftlichen Übungen in den Übungsgruppen, um 24:00 Uhr. Sie erhalten für die Bearbeitung der Online-Aufgabe 0, 1, oder 2 Punkte.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 4. *Abbildungen*

Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität.

(a) $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}\colon n \mapsto \binom{n+1}{n}$

Lösungshinweise hierzu: Es gilt $\binom{n+1}{n} = \frac{(n+1)!}{1\,n!} = n+1$. Damit ist $f(n) = n+1$.
f ist injektiv. Aus $n \neq m$ folgt $f(n) = n+1 \neq m+1 = f(m)$.
f ist nicht surjektiv. Es existiert kein $n \in \mathbb{N}$ mit $f(n) = n+1 = 1$.
f ist nicht bijektiv, da nicht surjektiv.

(b) $g\colon \mathbb{R} \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{R}^+\colon x \mapsto \frac{x^2}{|x|}$

Lösungshinweise hierzu: Für $x > 0$ gilt

$$g(x) = \frac{x^2}{x} = x.$$

Für $x < 0$ gilt

$$g(x) = \frac{x^2}{-x} = -x.$$

g ist nicht injektiv, da $f(-1) = 1 = f(1)$.
g ist surjektiv, da für alle $y \in \mathbb{R}^+$ auch $y \neq 0$ ist und $g(y) = y$ gilt.
g ist nicht bijektiv, da nicht injektiv.

(c) $h\colon [1,2] \to [0,10]\colon x \mapsto (x^2-1)^2$

Lösungshinweise hierzu: Für $1 \leqq x_1 < x_2 \leqq 2$ gilt $0 \leqq (x_1^2 - 1) < (x_2^2 - 1)$ und damit wegen der Monotonie des Quadrierens 1.5.7

$$h(x_1) = (x_1^2-1)^2 < (x_2^2-1)^2 = h(x_2).$$

Also ist h injektiv.
h ist nicht surjektiv. Wegen $h(2) = 9 < 10$ und obiger Überlegung, gibt es kein $x \in [1,2]$ mit $h(x) = 10$.
g ist nicht bijektiv, da nicht surjektiv.

(d) $s\colon \mathbb{C} \smallsetminus \{\mathrm{i}\} \to \mathbb{C}\colon z \mapsto \frac{z}{z-\mathrm{i}}$

Lösungshinweise hierzu: s ist injektiv. Seien $z, z' \in \mathbb{C} \smallsetminus \{\mathrm{i}\}$. Es gilt

$$\begin{array}{rrcl} & \dfrac{z}{z-\mathrm{i}} & = & \dfrac{z'}{z'-\mathrm{i}} \\ \Leftrightarrow & z(z'-\mathrm{i}) & = & (z-\mathrm{i})z' \\ \Leftrightarrow & zz' - \mathrm{i}z & = & zz' - z'\mathrm{i} \\ \Leftrightarrow & z & = & z'\,. \end{array}$$

Damit folgt aus $z \neq z'$, dass $s(z) \neq s(z')$.
s ist nicht surjektiv. Angenommen $z' = s(z) \in \mathbb{C}$ für ein $z \in \mathbb{C} \setminus \{\mathrm{i}\}$. Es folgt

$$\begin{array}{rrcl} & z' &=& \dfrac{z}{z-\mathrm{i}} \\ \Leftrightarrow & z'(z-\mathrm{i}) &=& z \\ \Leftrightarrow & (z'-1)z - \mathrm{i}z' &=& 0. \end{array}$$

Für $z' = 1$ hat diese Gleichung keine Lösung. Es existiert also kein $z \in \mathbb{C} \setminus \{\mathrm{i}\}$ mit $s(z) = 1$.
s ist nicht bijektiv, da nicht surjektiv.

Aufgabe H 5. *Ungleichungen, Beträge*

(a) Bestimmen Sie jeweils die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, die die Ungleichung erfüllen.

(i) $x - 7 > x^4(x-7)$

Lösungshinweise hierzu:
1. Fall: $x < 7$.
Man kann in diesem Fall auf beiden Seiten durch den Faktor $x - 7$ teilen. Da dieser Faktor negativ ist, dreht sich dabei das Ungleichungszeichen um:

$$\begin{array}{ll} & x - 7 > x^4(x-7) \\ \Leftrightarrow & 1 < x^4 \\ \Leftrightarrow & 1 < x^2 \quad \text{(Monotonie des Quadrierens 1.5.7)} \\ \Leftrightarrow & 1 < |x| \end{array}$$

Wegen $x < 7$ gilt dies für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x < -1 \ \vee \ 1 < x < 7$.
Somit ist $\mathbb{L}_1 = \big\{x \in \mathbb{R} \,\big|\, x < -1 \ \vee \ 1 < x < 7\big\}$ Teilmenge der Lösungsmenge.
2. Fall: $x = 7$.

$$x - 7 > x^4(x-7) \quad \Rightarrow \quad 0 > 0$$

Dies ist ein Widerspruch, womit $\mathbb{L}_2 = \emptyset$ (leere Menge).
3. Fall: $x > 7$.
Wir teilen durch den positiven Faktor $x - 7$, wodurch das Ungleichungszeichen erhalten bleibt:

$$\begin{array}{ll} & x - 7 > x^4(x-7) \\ \Leftrightarrow & 1 > x^4 \\ \Leftrightarrow & 1 > x^2 \quad \text{(Monotonie des Quadrierens 1.5.7)} \\ \Leftrightarrow & 1 > |x| \end{array}$$

Dies ist für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $-1 < x < 1$ erfüllt, womit sich wegen $x > 7$ ein Widerspruch ergibt. Also folgt $\mathbb{L}_3 = \emptyset$. Die Lösungsmenge ist daher insgesamt gegeben durch $\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 \cup \mathbb{L}_3 = \mathbb{L}_1 = \big\{x \in \mathbb{R} \,\big|\, x < -1 \ \vee \ 1 < x < 7\big\}$.

(ii) $2\,|x^2 - 2| < x\,|x + \sqrt{2}|$

Lösungshinweise hierzu: Wegen $(x^2 - 2) = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$ erhalten wir mit den Rechenregeln für Beträge 1.5.9

$$2\,|x - \sqrt{2}||x + \sqrt{2}| < x\,|x + \sqrt{2}|.$$

1. Fall: $x = -\sqrt{2}$.
Wir erhalten durch Einsetzen den Widerspruch $0 < 0$.
2. Fall: $x \neq -\sqrt{2}$.
Ist $x \neq -\sqrt{2}$, so gilt $|x+\sqrt{2}| \neq 0$ nach den Rechenregeln für Beträge 1.5.9. Nach Definition des Betrages 1.5.8 gilt stets $|x+\sqrt{2}| \geqq 0$. Insgesamt gilt somit für den Faktor $|x + \sqrt{2}| > 0$. Teilen durch diesen Faktor erhält das Ungleichungszeichen und liefert

$$2\,|x - \sqrt{2}| < x.$$

Wir betrachten zwei weitere Fälle zur Auflösung des Betrages.
2.1. Fall: $x \geqq \sqrt{2}$.

$$\begin{aligned} & 2(x - \sqrt{2}) < x \\ \Leftrightarrow \quad & x < 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

Also ist $\mathbb{L}_1 = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \sqrt{2} \leqq x < 2\sqrt{2}\right\}$ ein Teil der Lösungsmenge.
2.2. Fall: $x < \sqrt{2}$.

$$\begin{aligned} & 2(\sqrt{2} - x) < x \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{2}{3}\sqrt{2} < x \end{aligned}$$

Dies ist erfüllt für alle Elemente der Menge $\mathbb{L}_2 = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \tfrac{2}{3}\sqrt{2} < x < \sqrt{2}\right\}$ und somit ist unsere gesamte Lösungsmenge $\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \tfrac{2}{3}\sqrt{2} < x < 2\sqrt{2}\right\}$.

(b) Seien $x, y \in \mathbb{R}^+$ und bezeichne $\min\{x, y\}$ das Minimum der Zahlen x und y. Zeigen Sie die folgende Ungleichungskette:

$$\min\{x, y\} \leqq \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} \leqq \sqrt{xy}.$$

Lösungshinweise hierzu: Wir zeigen zunächst $\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} \leqq \sqrt{xy}$. Da $x, y \in \mathbb{R}^+$, ist nach den Eigenschaften der Ordnungsrelationen 1.5.6 auch $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \in \mathbb{R}^+$, womit der Bruch auf der linken Seite ein wohldefinierter Ausdruck ist. Da $xy \in \mathbb{R}^+$, ist auch $\sqrt{xy}$ auf der rechten Seite wohldefiniert und die Ungleichung lässt sich äquivalent umschreiben zu

$$\frac{2xy}{x+y} \leqq \sqrt{xy} \quad \overset{x+y>0}{\Longleftrightarrow} \quad 2\sqrt{xy} \leqq x+y \quad \Longleftrightarrow \quad 0 \leqq (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2.$$

Da $0 \leqq (\sqrt{x}-\sqrt{y})^2$ eine wahre Aussage darstellt, haben wir die Ungleichung bewiesen.

Beweisen wir nun $\min\{x, y\} \leqq \frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$. Wie zuvor schreiben wir den Bruch auf der rechten Seite um und erhalten

$$\min\{x, y\} \leqq \frac{2xy}{x+y} \quad \overset{x+y>0}{\Longleftrightarrow} \quad \min\{x, y\}(x+y) \leqq 2xy.$$

Wir machen eine Fallunterscheidung.
1. Fall: $x = \min\{x, y\}$.
Dann ist $x \leqq y$. Multiplikation mit $x \in \mathbb{R}^+$ liefert $x^2 \leqq xy$ und wir erhalten schließlich

$$\min\{x, y\}(x+y) = x(x+y) = x^2 + xy \leqq xy + xy = 2xy.$$

2. Fall: $y = \min\{x, y\}$.
Dann ist $y \leqq x$. Wir argumentieren analog zum 1. Fall. Wegen $y \in \mathbb{R}^+$ folgt $y^2 \leqq xy$ und somit

$$\min\{x, y\}(x+y) = y(x+y) = xy + y^2 \leqq xy + xy = 2xy,$$

womit die Aussage bewiesen ist.

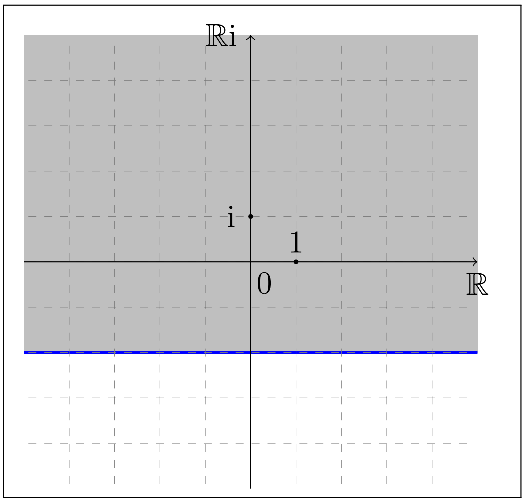
Aufgabe H 6. *Komplexe Zahlenebene*
Skizzieren Sie die folgenden Mengen in der komplexen Zahlenebene.

(a) $A := \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \operatorname{Im}(\overline{z} + 1 - \mathrm{i}) \leqq 1 \right\}$

Lösungshinweise hierzu: Es gilt

$$\begin{aligned} A &= \left\{ a + b\mathrm{i} \in \mathbb{C} \;\middle|\; \operatorname{Im}(\overline{a + b\mathrm{i}} + 1 - \mathrm{i}) \leqq 1 \right\} \\ &= \left\{ a + b\mathrm{i} \in \mathbb{C} \;\middle|\; \operatorname{Im}(a - b\mathrm{i} + 1 - \mathrm{i}) \leqq 1 \right\} \\ &= \left\{ a + b\mathrm{i} \in \mathbb{C} \;\middle|\; \operatorname{Im}(a + 1 + (-1 - b)\mathrm{i}) \leqq 1 \right\} \\ &= \left\{ a + b\mathrm{i} \in \mathbb{C} \;\middle|\; -1 - b \leqq 1 \right\} \\ &= \left\{ a + b\mathrm{i} \in \mathbb{C} \;\middle|\; b \geqq -2 \right\}. \end{aligned}$$

Die Menge ergibt sich als die Fläche oberhalb der Geraden, wobei die Gerade selbst zu A gehört.



(b) $B := \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \dfrac{z}{1+\mathrm{i}} \in \mathbb{R} \right\}$

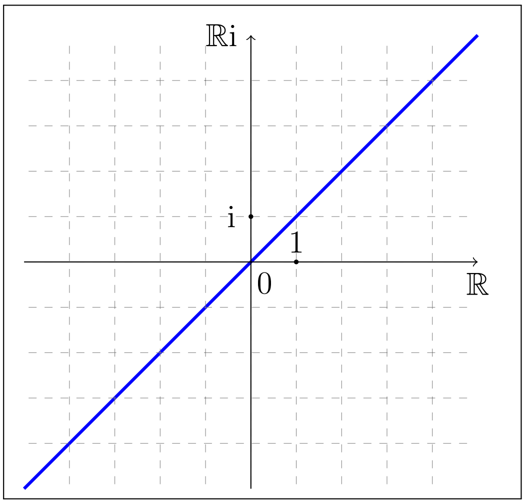
Lösungshinweise hierzu: Es ist

$$\frac{z}{1+\mathrm{i}} = \frac{z(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})} = \frac{1}{2} z(1-\mathrm{i}).$$

Damit gilt für $z = a + b\mathrm{i}$

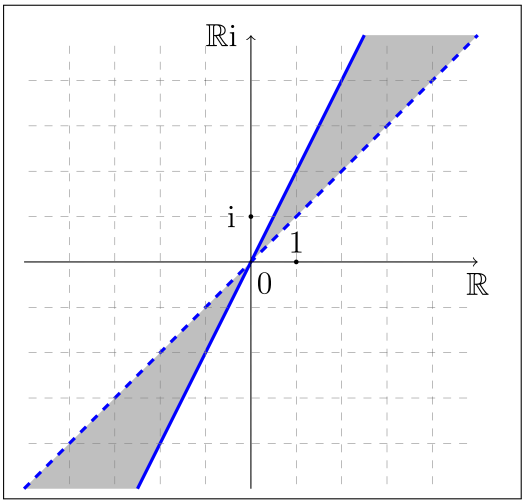
$$\begin{aligned} && \frac{z}{1+\mathrm{i}} &\in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow && \frac{1}{2}(a+b\mathrm{i})(1-\mathrm{i}) &\in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow && \frac{1}{2}(a+b+(b-a)\mathrm{i}) &\in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow && \mathrm{Im}\left(\frac{1}{2}(a+b+(b-a)\mathrm{i})\right) &= 0 \\ \Leftrightarrow && a &= b. \end{aligned}$$

Also ist $B = \left\{ a + b\mathrm{i} \in \mathbb{C} \,\middle|\, a = b \right\}$.



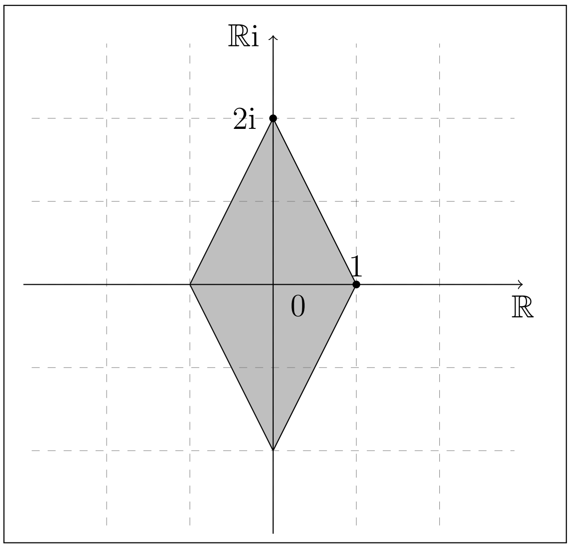
(c) $C := \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \operatorname{Re}(z) \neq 0 \ \wedge\ 1 < \dfrac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)} \leqq 2 \right\}$

Lösungshinweise hierzu: Es ist $C = \left\{ a + b\mathrm{i} \in \mathbb{C} \,\middle|\, a \neq 0 \ \wedge\ 1 < \frac{b}{a} \leqq 2 \right\}$. Es sind zwei Fälle zu betrachten, da wegen $\frac{b}{a} > 0$ entweder a und b beide positiv, oder beide negativ sein müssen.
Falls $a > 0$ und $b > 0$, so muss $a < b \leqq 2a$ gelten.
Falls $a < 0$ und $b < 0$, so muss $2a \leqq b < a$ gelten.
Damit ergibt sich folgende Fläche, wobei die gestrichelte Gerade und der Punkt 0 nicht zu C gehören.



(d) $D := \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, 2|\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)| < 2 \right\}$

Lösungshinweise hierzu: Es ist $D = \left\{ a + b\mathrm{i} \in \mathbb{C} \,\middle|\, 2|a| + |b| < 2 \right\}$. Es sind vier Fälle zu unterscheiden.
Fall $a > 0,\ b > 0$: $2a + b < 2 \Leftrightarrow b < 2(1 - a)$.
Fall $a > 0,\ b < 0$: $2a - b < 2 \Leftrightarrow b > 2(a - 1)$.
Fall $a < 0,\ b > 0$: $-2a + b < 2 \Leftrightarrow b < 2(1 + a)$.
Fall $a < 0,\ b < 0$: $-2a - b < 2 \Leftrightarrow b > 2(-1 - a)$.
Damit wird die Menge nach oben durch die Geraden $b = 2(1 - a)$ und $b = 2(1 + a)$ begrenzt, sowie nach unten durch die Geraden $b = 2(a-1)$ und $b = 2(-1-a)$. Dabei ist der Rand der Fläche kein Teil der Menge.



Online-Aufgabe.

Sie finden ab Donnerstag Ihre Online-Aufgabe auf folgender Webseite.

http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/

Bitte geben Sie dort zunächst Ihre Matrikelnummer ein.

Die Lösungen sind als ganze Zahlen oder als Dezimalzahlen mit einem Dezimal**punkt** einzugeben. Sonstige Zeichen, wie zum Beispiel Klammern oder Operatoren wie $*$ und $/$, dürfen **nicht** benutzt werden.

Anschließend müssen Sie das per Email erhaltene **Passwort** für die Onlineübungen eintragen.

Innerhalb des Bearbeitungszeitraums können Sie Ihre Eingaben beliebig oft wiederholen, wobei die **letzten** Eingaben gewertet werden. Der Bearbeitungszeitraum endet mittwochs, nach der Abgabe der schriftlichen Übungen in den Übungsgruppen, um 24:00 Uhr. Sie erhalten für die Bearbeitung der Online-Aufgabe 0, 1, oder 2 Punkte.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 7. *Komplexe Lösungen von Gleichungen*

Geben Sie jeweils alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der folgenden Gleichungen an.

(a) $z^5 = 7$ **(b)** $z^{12} - z = 0$

(c) $4z^2 - 8z + 5 = 0$ **(d)** $z^2 + \mathrm{i}z + 6 = 5z + 2\mathrm{i}$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Die Lösungen dieser Gleichung lauten $z = \sqrt[5]{7} \cdot (\cos(\frac{2n\pi}{5}) + \mathrm{i}\sin(\frac{2n\pi}{5}))$ für $n = 0, 1, 2, 3, 4$.

(b) Diese Gleichung lässt sich schreiben als $z(z^{11} - 1) = 0$. Eine Lösung der Gleichung ist folglich $z = 0$ und für alle anderen Lösungen gilt $z^{11} = 1$. Also sind die weiteren Lösungen gegeben durch $z = \cos(\frac{2n\pi}{11}) + \mathrm{i}\sin(\frac{2n\pi}{11})$ für $n = 0, 1, 2, ..., 10$.

(c) Mittels quadratischer Ergänzung schreibt man die linke Seite der Gleichung als

$$(2z - 2)^2 + 1.$$

Also ist die Gleichung äquivalent zu $(2z - 2)^2 = -1$ und ihre Lösungen erfüllen $2z - 2 = \pm\mathrm{i}$. Somit sind sie gegeben durch $z = 1 \pm \frac{\mathrm{i}}{2}$.

(d) $z^2 + \mathrm{i}z + 6 = 5z + 2\mathrm{i} \quad \Leftrightarrow \quad z^2 - (5 - \mathrm{i})z + 6 - 2\mathrm{i} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (z - \frac{5-\mathrm{i}}{2})^2 = -\frac{1}{2}\mathrm{i}$. Also gilt für die Lösungen der Gleichung $z - \frac{5-\mathrm{i}}{2} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos(\frac{3}{4}\pi) + \mathrm{i}\sin(\frac{3}{4}\pi))$. Da $\cos(\frac{3}{4}\pi) + \mathrm{i}\sin(\frac{3}{4}\pi) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{i} - 1)$, sind die Lösungen der Gleichung gegeben durch $z = 2$ und $z = 3 - \mathrm{i}$.

Aufgabe H 8. *Linearfaktorzerlegung von Polynomen*

(a) Zerlegen Sie die folgenden Polynome in Linearfaktoren.

$$p_1(X) = X^4 - 3X^3 - 33X^2 + 35X$$
$$p_2(X) = X^3 + (1 - \mathrm{i})X^2 + (2 - \mathrm{i})X + 2$$
$$p_3(X) = X^4 + X^2 - 2$$

Lösungshinweise hierzu: Man errät leicht, dass 0 und 1 Nullstellen von p_1 sind. Man schreibt $p_1(X) = X(X^3 - 3X^2 - 33X + 35)$ und führt eine Polynomdivision des Terms im Klammern durch $X - 1$ durch. Dann erhält man $p_1(X) = X(X-1)(X^2 - 2X - 35)$. Das verbleibende quadratische Polynom hat die Nullstellen 7 und -5 und es gilt $p_1(X) = X(X - 1)(X - 7)(X + 5)$.

Man sieht leicht, dass -1 eine Nullstelle von p_2 ist. Führt man eine Polynomdivision von p_2 durch $X + 1$ durch, findet man, dass sich p_2 schreiben lässt als $(X + 1)(X^2 - \mathrm{i}X + 2)$. Das verbleibende quadratische Polynom hat die Nullstellen $2\mathrm{i}$ und $-\mathrm{i}$. Also gilt $p_2(X) = (X + 1)(X - 2\mathrm{i})(X + \mathrm{i})$.

Substituieren wir X^2 durch Y in p_3, erhalten wir das quadratische Polynom Y^2+Y-2. Es hat die Nullstellen 1 und -2 und kann daher geschrieben werden als $(Y-1)(Y+2)$. Also gilt $p_3(X) = (X^2-1)(X^2+2)$. Zerlegt man schließlich die beiden quadratischen Faktoren in Linearfaktoren, erhält man $p_3(X) = (X+1)(X-1)(X+\mathrm{i}\sqrt{2})(X-\mathrm{i}\sqrt{2})$. Als alternativen Lösungsweg kann man auch die Nullstellen 1 und -1 von p_3 erraten und Polynomdivision durch $X+1$ und $X-1$ durchführen.

(b) Geben Sie ein Polynom p vom Grad 3 an, sodass $p(2) = p(-3) = p(\frac{1}{2}) = 0$ und $p(0) = 1$ gilt.

Lösungshinweise hierzu: Als Ansatz wählen wir $p(X) = a(X-2)(X+3)(X-\frac{1}{2})$ mit einem noch zu bestimmenden $a \in \mathbb{R}$. Dann gilt $p(2) = p(-3) = p(\frac{1}{2}) = 0$ und $p(0) = 3a$. Mit $a = \frac{1}{3}$ gilt also auch $p(0) = 1$. Damit haben wir p bestimmt als

$$p(X) = \tfrac{1}{3}(X-2)(X+3)(X-\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{3}X^3 + \tfrac{1}{6}X^2 - \tfrac{13}{6}X + 1.$$

Aufgabe H 9. *Untervektorräume*

Gegeben seien die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\-2\end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix}2\\1\\1\\-2\end{pmatrix}$$

in $\mathbb{R}^4$. Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^4$ sind Untervektorräume?

(a) $V_1 := \{\alpha v_1 + \beta v_3 \in \mathbb{R}^4 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

(b) $V_2 := \{v_1 + \alpha v_2 \in \mathbb{R}^4 \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$

(c) $V_3 := \{v \in \mathbb{R}^4 \mid \langle v \mid v_2\rangle = 0\}$

(d) $V_4 := V_1 \cap V_3$

(e) $V_5 := \{v \in \mathbb{R}^4 \mid \langle v \mid v_2\rangle = 0 \wedge \langle v \mid v_3\rangle = 0\}$

(f) $V_6 := \{v \in \mathbb{R}^4 \mid \langle v \mid v_1\rangle = 1\}$

(g) $V_7 := \{v \in \mathbb{R}^4 \mid \langle v \mid v_2\rangle = 0 \vee \langle v \mid v_3\rangle = 0\}$

(h) $V_8 := \{v \in V_2 \mid |v| = 1\}$

Lösungshinweise hierzu:

(a) V_1 ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^4$. Seien $u_1, u_2 \in V_1$ mit $u_1 = \alpha_1 v_1 + \beta_1 v_2$ und $u_2 = \alpha_2 v_1 + \beta_2 v_2$, dann ist auch $u_1 + u_2 = (\alpha_1+\alpha_2)v_1 + (\beta_1+\beta_2)v_2$ ein Element von V_1. Ebenso gilt $\lambda u_1 = (\lambda\alpha_1)v_1 + (\lambda\beta_1)v_2 \in V_1$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Wählt man $\alpha = \beta = 0$, so erhält man auch $\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}^T \in V_1$.

(b) V_2 ist kein Untervektorraum von $\mathbb{R}^4$, denn es gibt kein $\alpha \in \mathbb{R}$, sodass

$$v_1 + \alpha v_2 = \begin{pmatrix}1+\alpha\\1\\\alpha\\-2\alpha\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

(c) V_3 ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^4$. In der Tat, seien $w_1, w_2 \in V_3$, d.h. $\langle w_1 \mid v_2\rangle = \langle w_2 \mid v_2\rangle = 0$, dann gilt auch $w_1 + w_2 \in V_3$, denn $\langle w_1 + w_2 \mid v_2\rangle = \langle w_1 \mid v_2\rangle + \langle w_2 \mid v_2\rangle = 0$, und $\lambda w_1 \in V_3$ für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$, denn $\langle \lambda w_1 \mid v_2\rangle = \lambda \langle w_1 \mid v_2\rangle = 0$. Außerdem ist $\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}^T \in V_3$.

(d) Da V_1 und V_3 Untervektorräume sind, ist auch $V_1 \cap V_3$ ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^4$. Das sieht man wie folgt. Seien $w_1, w_2 \in V_1 \cap V_3$, dann ist $w_1, w_2 \in V_1$ und $w_1, w_2 \in V_3$. Da V_1 und V_3 Untervektorräume sind, ist $w_1 + w_2 \in V_1$ und $w_1 + w_2 \in V_3$, sowie $\lambda w_1 \in V_1$ und $\lambda w_2 \in V_3$ für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$. Damit gilt $w_1 + w_2 \in V_1 \cap V_3$ und $\lambda w_1 \in V_1 \cap V_3$ für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$. Natürlich ist $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T \in V_1 \cap V_3$.

(e) V_5 ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^4$. Hier könnte man wie folgt argumentieren. Sei $\tilde{V} := \{v \in \mathbb{R}^4 \mid \langle v \mid v_3 \rangle = 0\}$. Nach den gleichen Argumenten wie unter (c) ist $\tilde{V}$, ebenso wie V_3, ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^4$. Nach den Argumenten von (d) ist dann auch $V_3 \cap \tilde{V}$ ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^4$. Schließlich überzeugt man sich davon, dass $V_5 = V_3 \cap \tilde{V}$.

(f) V_6 ist kein Untervektorraum von $\mathbb{R}^4$. Da

$$\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \neq 1,$$

folgt $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T \notin V_6$.

(g) V_7 ist kein Untervektorraum von $\mathbb{R}^4$. Wähle

$$u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt $u, v \in V_7$, denn $\langle u \mid v_2 \rangle = 0$ und $\langle w \mid v_3 \rangle = 0$. Allerdings gilt $u + w \notin V_7$, denn $\langle u + w \mid v_2 \rangle = \langle w \mid v_2 \rangle = -1 \neq 0$ und $\langle u + w \mid v_3 \rangle = \langle u \mid v_3 \rangle = 1 \neq 0$.

(h) V_8 ist kein Untervektorraum von $\mathbb{R}^4$, denn für $v = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$ gilt $|v| = 0$ und somit $v \notin V_8$.

Online-Aufgabe.

Sie finden ab Donnerstag Ihre Online-Aufgabe auf folgender Webseite.

http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test430/

Bitte geben Sie dort zunächst Ihre Matrikelnummer ein.

Die Lösungen sind als ganze Zahlen oder als Dezimalzahlen mit einem Dezimal**punkt** einzugeben. Sonstige Zeichen, wie zum Beispiel Klammern oder Operatoren wie $*$ und $/$, dürfen **nicht** benutzt werden.

Anschließend müssen Sie das per Email erhaltene **Passwort** für die Onlineübungen eintragen.

Innerhalb des Bearbeitungszeitraums können Sie Ihre Eingaben beliebig oft wiederholen, wobei die **letzten** Eingaben gewertet werden. Der Bearbeitungszeitraum endet mittwochs, nach der Abgabe der schriftlichen Übungen in den Übungsgruppen, um 24:00 Uhr. Sie erhalten für die Bearbeitung der Online-Aufgabe 0, 1, oder 2 Punkte.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 10. *Lineare Unabhängigkeit und Basis*

Gegeben seien für $\alpha \in \mathbb{R}$ die folgenden Vektoren in $\mathbb{R}^5$.

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \ v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \ v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ -2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \ v_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 2 \\ -4 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie $w \in \mathbb{R}^5$ so, dass v_1, v_2, v_3, v_4, w eine Basis von $\mathbb{R}^5$ ist.

Lösungshinweise hierzu: Da alle Vektoren v_1, v_2, v_3 und v_4 als ersten Eintrag eine 0 besitzen, wählen wir z.B. $w := (1,0,0,0,0)$ in $\mathbb{R}^5$ damit v_1, v_2, v_3, v_4, w ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^5$ sein kann. Nach 2.4.8. hat $\mathbb{R}^5$ die Dimension 5, also reicht es zu zeigen, dass v_1, v_2, v_3, v_4, w linear unabhängig sind (2.8.17.) damit die Vektoren eine Basis von $\mathbb{R}^5$ bilden.
Dazu prüfen wir, ob es reelle Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_5 \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \lambda_4 v_4 + \lambda_5 w = 0$ und mindestens ein $\lambda_i \neq 0$ ist. Wir stellen also das folgende lineare Gleichungssystem auf und lösen es.

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} 0\lambda_1 & + & 0\lambda_2 & + & 0\lambda_3 & + & 0\lambda_4 & + & 1\lambda_5 & = & 0 \quad (\mathrm{I}) \\ 0\lambda_1 & + & 0\lambda_2 & + & 3\lambda_3 & + & (-6)\lambda_4 & + & 0\lambda_5 & = & 0 \quad (\mathrm{II}) \\ 1\lambda_1 & + & 0\lambda_2 & + & 0\lambda_3 & + & (-2)\lambda_4 & + & 0\lambda_5 & = & 0 \quad (\mathrm{III}) \\ (-2)\lambda_1 & + & 1\lambda_2 & + & 0\lambda_3 & + & 4\lambda_4 & + & 0\lambda_5 & = & 0 \quad (\mathrm{IV}) \\ 1\lambda_1 & + & (-2)\lambda_2 & + & 4\lambda_3 & + & (-2)\lambda_4 & + & 0\lambda_5 & = & 0 \quad (\mathrm{V}) \end{array}$$

Aus Gleichung (I) folgt $\lambda_5 = 0$.
Aus Gleichung (III) folgt $\lambda_1 = 2\lambda_4$.
Einsetzen in Gleichung (IV) gibt $-4\lambda_4 + \lambda_2 + 4\lambda_4 = 0 \Leftrightarrow \lambda_2 = 0$.
Beides in (V) einsetzen ergibt $2\lambda_4 - 2 \cdot 0 + 4\lambda_3 - 2\lambda_4 = 0 \Leftrightarrow \lambda_3 = 0$.
Einsetzen in (II) ergibt $\lambda_4 = 0$ und dann mit (III) auch $\lambda_1 = 0$.
Damit muss $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0$ gelten und v_1, v_2, v_3, v_4, w sind linear unabhängig.

(b) Bestimmen Sie zwei verschiedene Basen von $\mathrm{L}(v_2 + v_3, 2v_1 + v_4)$.

Lösungshinweise hierzu: Seien $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1(v_2 + v_3) + \lambda_2(2v_1 + v_4) = 0$. Dann gilt insbesondere: $\lambda_1 = 2\lambda_2$ sowie $\lambda_1 = 0$. Das heißt $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Also sind $v_2 + v_3$, $2v_1 + v_4$ linear unabhängig. Da sie nach Definition auch ein Erzeugendensystem von $\mathrm{L}(v_2 + v_3, 2v_1 + v_4)$ sind, ist also $b_1 := v_2 + v_3$, $b_2 := 2v_1 + v_4$ eine Basis von $\mathrm{L}(v_2 + v_3, 2v_1 + v_4)$.
Eine andere Basis b'_1, b'_2 für $\mathrm{L}(v_2 + v_3, 2v_1 + v_4) = \mathrm{L}(b_1, b_2)$ erhält man beispielsweise auf folgende Weise:

(i) Indem man mindestens einen der Basisvektoren um einen Skalarfaktor aus $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ändert, etwa $b_1' := -b_1 = -v_2 - v_3$, $b_2' := 3b_2 = 6v_1 + 3v_4$.

(ii) Indem man zu einem der Basisvektoren b_j eine Linearkombination der anderen Basisvektoren hinzuaddiert, etwa $b_1' := b_1 + 3b_2 = 6v_1 + v_2 + v_3 + 3v_4$, $b_2' := b_2 = 2v_1 + v_4$.

(iii) Indem wir die Menge $\mathrm{L}(v_2 + v_3, 2v_1 + v_4)$ genauer beschreiben um neue Erzeugendensysteme zu finden.

$$\begin{aligned}
\mathrm{L}(v_2 + v_3, 2v_1 + v_4) &= \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5 \;\middle|\; \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ;\ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5 \;\middle|\; \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3\lambda - 6\mu \\ 0 \\ \lambda \\ 2\lambda \end{pmatrix} ;\ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5 \;\middle|\; a = 0, c = 0, e = 2d \right\}.
\end{aligned}$$

Eine weitere Basis ist also z.B. $b_1' := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b_2' := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, da diese Vektoren linear unabhängig sind und nach obiger Umformung ein Erzeugendensystem bilden.

(c) Bestimmen Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$ so, dass v_1, v_3, v_5 linear unabhängig sind.

Lösungshinweise hierzu: Wie in Teil (a) wählen wir $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_3 + \lambda_3 v_5 = 0$ und lösen das dazugehörige lineare Gleichungssytem.

$$\begin{array}{rcrcrcll}
0\lambda_1 & + & 3\lambda_2 & + & 6\lambda_3 & = & 0 & \text{(I)} \\
1\lambda_1 & + & 0\lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = & 0 & \text{(II)} \\
(-2)\lambda_1 & + & 0\lambda_2 & + & (-4)\lambda_3 & = & 0 & \text{(III)} \\
1\lambda_1 & + & 4\lambda_2 & + & \alpha\lambda_3 & = & 0 & \text{(IV)}
\end{array}$$

Aus Gleichung (I) folgt $\lambda_2 = -2\lambda_3$.
Aus Gleichung (II) (oder (III)) folgt $\lambda_1 = -2\lambda_3$. Zusammen also $\lambda_1 = \lambda_2 = -2\lambda_3$.
Einsetzen in (IV) liefert $(-2 - 8 + \alpha)\lambda_3 = 0$.
Damit v_1, v_3, v_5 linear unabhängig sind, muss also $-2 - 8 + \alpha \neq 0$ sein, d.h. $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{10\}$.

(d) Bestimmen Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$ so, dass v_2, v_4, v_5 linear abhängig sind.

Lösungshinweise hierzu: Wie in Teil (a) und (c) wählen wir $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1 v_2 + \lambda_2 v_4 + \lambda_3 v_5 = 0$ und lösen das dazugehörige lineare Gleichungssytem.

$$\begin{array}{rcrcrcll} 0\lambda_1 & + & (-6)\lambda_2 & + & 6\lambda_3 & = & 0 & \text{(I)} \\ 0\lambda_1 & + & (-2)\lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = & 0 & \text{(II)} \\ 1\lambda_1 & + & 4\lambda_2 & + & (-4)\lambda_3 & = & 0 & \text{(III)} \\ (-2)\lambda_1 & + & (-2)\lambda_2 & + & \alpha\lambda_3 & = & 0 & \text{(IV)} \end{array}$$

Aus Gleichung (I) (oder (II)) folgt $\lambda_2 = \lambda_3$.
Einsetzen in (III) liefert $\lambda_1 + 4\lambda_3 - 4\lambda_3 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 0$.
Zusammen mit (IV) erhalten wir $(-2+\alpha)\lambda_3 = 0$.
Damit v_2, v_4, v_5 linear abhängig sind, muss also $-2+\alpha = 0$ sein, d.h. $\alpha = 2$.

Aufgabe H 11. *Skalarprodukt*

Sei $\mathrm{Pol}_1 \mathbb{R} := \left\{ \sum_{j=0}^{1} a_j X^j \,\middle|\, a_j \in \mathbb{R} \right\}$ der Vektorraum aller reellen Polynome vom Grad höchstens 1. Welche der Eigenschaften für die Definition eines Skalarprodukts (siehe **2.6.2**) erfüllen die folgenden Abbildungen $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle_j$ für $j = 1, \ldots, 4$? Geben Sie für nicht erfüllte Eigenschaften jeweils ein Gegenbeispiel an.

(a) $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle_1 : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$: $\langle v \,|\, w \rangle_1 = \sum_{j=1}^{4} |v_j w_j|$.

(b) Sei $u = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ so gewählt, dass $u_j > 0$ für alle j gilt.
$\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$: $\langle v \,|\, w \rangle_2 = \sum_{j=1}^{n} u_j v_j w_j$.

(c) $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle_3 :$ $\mathrm{Pol}_1 \mathbb{R} \times \mathrm{Pol}_1 \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: $\langle r_0 + r_1 X \,|\, t_0 + t_1 X \rangle_3 = r_1 t_1 - r_1 t_0 + r_0 t_1 + r_0 t_0$.

(d) $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle_4 :$ $\mathrm{Pol}_1 \mathbb{R} \times \mathrm{Pol}_1 \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: $\langle r_0 + r_1 X \,|\, t_0 + t_1 X \rangle_4 = (r_1 t_1)^2 - (r_0 t_0)^2$.

Lösungshinweise hierzu: Ein Skalarprodukt $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum V muss die folgenden Eigenschaften für alle $x, y, z \in V$ und alle $s \in \mathbb{R}$ erfüllen:

E1. $\langle x \,|\, y \rangle = \langle y \,|\, x \rangle$ E2. $\langle x \,|\, x \rangle \geqq 0$ und $\langle x \,|\, x \rangle = 0 \iff x = 0$
E3. $\langle x \,|\, y + z \rangle = \langle x \,|\, y \rangle + \langle x \,|\, z \rangle$ E4. $s \langle x \,|\, y \rangle = \langle sx \,|\, y \rangle = \langle x \,|\, sy \rangle$

Wir überprüfen die Eigenschaften E1 - E4 im Folgenden für die Abbildungen $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle_j$.
Um E2 zu testen, verwenden wir dabei, dass die Summe von Quadraten genau dann Null ergibt, wenn jeder Summand Null ist. Formal ausgedrückt für $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ lautet dies:

$$\sum_{j=1}^{n} x_j^2 = 0 \iff x_j^2 = 0 \quad \text{für alle } j \iff x_j = 0 \quad \text{für alle } j. \tag{1}$$

(a) Für alle $v, w \in \mathbb{R}^n$ gelten E1 und E2.
E1 gilt, da $\langle v \,|\, w \rangle_1 = \sum_{j=1}^{4} |v_j w_j| = \sum_{j=1}^{4} |w_j v_j| = \langle w \,|\, v \rangle_1$.
E2 gilt. Aus $|v_j^2| = v_j^2 \geqq 0$ für alle $j = 1, \ldots, 4$ folgt $\langle v \,|\, v \rangle_1 = \sum_{j=1}^{4} v_j^2 \geqq 0$.
Da $\sum_{j=1}^{4} v_j^2$ eine Summe von Quadraten ist, folgt weiter

$$\langle v \,|\, v \rangle_1 = \sum_{j=1}^{4} v_j^2 = 0 \stackrel{(1)}{\iff} v_j = 0 \quad \text{für alle } j \iff v = 0.$$

E3 und E4 gelten nicht. Wir belegen dies mit einem Gegenbeispiel. Dafür wählen wir

$$v = y = (1, 0, 0, 0), \quad w = (-1, 0, 0, 0) \quad \text{in } \mathbb{R}^4 \text{ und} \quad s = -1.$$

Es gilt $\langle v \,|\, w + y \rangle_1 = 0 \neq \langle v \,|\, w \rangle_1 + \langle v \,|\, y \rangle_1 = |-1| + |1| = 2$ und $s \langle v \,|\, w \rangle_1 = -1 \neq 1 = \langle sv \,|\, w \rangle_1 = \langle v \,|\, sw \rangle_1$.

(b) Für alle $v, w, y \in \mathbb{R}^n$ und alle $s \in \mathbb{R}$ gelten E1 - E4. Insbesondere ist damit $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle_2$ ein Skalarprodukt.

E1 gilt, da $\langle v \,|\, w \rangle_2 = \sum_{j=1}^n u_j v_j w_j = \sum_{j=1}^n u_j w_j v_j = \langle w \,|\, v \rangle_2$.

E2 gilt. Aus $u_j > 0$ folgt $u_j v_j^2 \geqq 0$ für alle j und daher $\langle v \,|\, v \rangle_2 = \sum_{j=1}^n u_j v_j^2 \geqq 0$. Wir schreiben $\sum_{j=1}^n u_j v_j^2 = \sum_{j=1}^n (\sqrt{u_j} v_j)^2$ als Summe von Quadraten. Es folgt

$$\langle v \,|\, v \rangle_2 = \sum_{j=1}^n (\sqrt{u_j} v_j)^2 = 0 \quad \overset{(1)}{\iff} \quad \sqrt{u_j} v_j = 0 \quad \text{für alle } j \quad \overset{\sqrt{u_j} > 0}{\iff} \quad v = 0.$$

E3 gilt, da $\langle v \,|\, w + y \rangle_2 = \sum_{j=1}^n u_j v_j (w_j + y_j) = \sum_{j=1}^n u_j v_j w_j + \sum_{j=1}^n u_j v_j y_j = \langle v \,|\, w \rangle_2 + \langle v \,|\, y \rangle_2$

E4 gilt, da $s\left(\sum_{j=1}^n u_j v_j w_j\right) = \sum_{j=1}^n u_j (s v_j) w_j = \sum_{j=1}^n u_j v_j (s w_j)$ und somit $s \langle v \,|\, w \rangle_2 = \langle sv \,|\, w \rangle_2 = \langle v \,|\, sw \rangle_2$.

(c) Für alle $r_0 + r_1 X, t_0 + t_1 X \in \operatorname{Pol}_1 \mathbb{R}$ und alle $s \in \mathbb{R}$ gelten die Eigenschaften E2 - E4.

E1 gilt nicht. Mit $a(X) = X = 0 + 1 \cdot X$ und $b(X) = 1 = 1 + 0 \cdot X$ folgt $\langle a(X) \,|\, b(X) \rangle_3 = -1 \neq 1 = \langle b(X) \,|\, a(X) \rangle_3$.

E2 gilt, da $\langle r_0 + r_1 X \,|\, r_0 + r_1 X \rangle_3 = r_1^2 + r_0^2 \geqq 0$. Weiter ist

$$\langle r_0 + r_1 X \,|\, r_0 + r_1 X \rangle_3 = r_1^2 + r_0^2 = 0 \quad \overset{(1)}{\iff} \quad r_0 = r_1 = 0 \quad \iff \quad r_0 + r_1 X = 0.$$

E3 gilt, da

$$\begin{aligned}
&\langle r_0 + r_1 X \,|\, (t_0 + t_1 X) + (u_0 + u_1 X) \rangle_3 \\
&\qquad = r_1(t_1 + u_1) - r_1(t_0 + u_0) + r_0(t_1 + u_1) + r_0(t_0 + u_0) \\
&\qquad = (r_1 t_1 - r_1 t_0 + r_0 t_1 + r_0 t_0) + (r_1 u_1 - r_1 u_0 + r_0 u_1 + r_0 u_0) \\
&\qquad = \langle r_0 + r_1 X \,|\, t_0 + t_1 X \rangle_3 + \langle r_0 + r_1 X \,|\, u_0 + u_1 X \rangle_3 .
\end{aligned}$$

E4 gilt. Aus den Gleichungen

$$\begin{aligned}
s(r_1 t_1 - r_1 t_0 + r_0 t_1 + r_0 t_0) &= (s r_1) t_1 - (s r_1) t_0 + (s r_0) t_1 + (s r_0) t_0 \\
&= r_1 (s t_1) - r_1 (s t_0) + r_0 (s t_1) + r_0 (s t_0)
\end{aligned}$$

folgt $s \langle r_0 + r_1 X \,|\, t_0 + t_1 X \rangle_3 = \langle s(r_0 + r_1 X) \,|\, t_0 + t_1 X \rangle_3 = \langle r_0 + r_1 X \,|\, s(t_0 + t_1 X) \rangle_3$.

(d) Für alle $r_0 + r_1 X, t_0 + t_1 X \in \operatorname{Pol}_1 \mathbb{R}$ gilt nur E1.

E1 gilt, da

$$\langle r_0 + r_1X \mid t_0 + t_1X\rangle_4 = (r_1t_1)^2 - (r_0t_0)^2 = (t_1r_1)^2 - (t_0r_0)^2 = \langle t_0 + t_1X \mid r_0 + r_1X\rangle_4 \,.$$

E2 gilt nicht. Für $a(X) = 1 = 1 + 0 \cdot X$ ist $\langle a(X) \mid a(X)\rangle = -1 < 0$. Zwar impliziert $r_0+r_1X = 0$ stets $\langle r_0 + r_1X \mid r_0 + r_1X\rangle_4 = 0$, aber für $b(X) = 1+X = 1+1\cdot X \neq 0$ ist $\langle b(X) \mid b(X)\rangle = 1 - 1 = 0$.

E3 und E4 gelten nicht. Als Gegenbeispiel betrachten wir

$$a(X) = b(X) = X = 0 + 1 \cdot X, \quad c(X) = -X = 0 + (-1) \cdot X \quad \text{und} \quad s = -1.$$

Es gilt $\langle a(X) \mid b(X) + c(X)\rangle_4 = 0 \neq \langle a(X) \mid b(X)\rangle_4 + \langle a(X) \mid c(X)\rangle_4 = 1 + 1 = 2$ und $s\,\langle a(X) \mid b(X)\rangle_4 = -1 \neq 1 = \langle sa(X) \mid b(X)\rangle_4 = \langle a(X) \mid sb(X)\rangle_4$.

Aufgabe H 12. *Funktionenräume*

Gegeben seien die folgenden Funktionen aus dem Vektorraum $\mathcal{C}^0([0, 2\pi])$ (siehe **2.6.3**):

$f_1 \colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R} \colon x \mapsto 1$ $\qquad$ $f_2 \colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R} \colon x \mapsto \left(\frac{x}{\pi} - 1\right)^2$

$f_3 \colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R} \colon x \mapsto \sin(3x)$ $\qquad$ $f_4 \colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R} \colon x \mapsto \cos(4x)$

(a) Zeigen Sie, dass die Funktionen f_1, f_2, f_3 und f_4 linear unabhängig sind.

Lösungshinweise hierzu: Wir betrachten eine Linearkombination der Funktionen. Es soll für alle $x \in \mathbb{R}$ gelten, dass

$$\begin{aligned} 0 &\overset{!}{=} \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) + \lambda_3 f_3(x) + \lambda_4 f_4(x) \\ &= \lambda_1 + \lambda_2 \left(\frac{x}{\pi} - 1\right)^2 + \lambda_3 \sin(3x) + \lambda_4 \cos(4x). \end{aligned} \tag{2}$$

Wir setzen nun verschiedene Werte für x ein, um die Koeffizienten λ_i zu bestimmen.

$$\text{Sei } x = 0 \text{, dann gilt} \qquad 0 = \lambda_1 + \lambda_2 + 0 + \lambda_4. \tag{3}$$

$$\text{Sei } x = \pi \text{, dann gilt} \qquad 0 = \lambda_1 + 0 + 0 + \lambda_4. \tag{4}$$

Aus Gleichung (4) folgt $\lambda_4 = -\lambda_1$. Einsetzen in Gleichung (2) zeigt $\lambda_2 = 0$. Somit vereinfacht sich (2) zu

$$0 = \lambda_1 + \lambda_3 \sin(3x) - \lambda_1 \cos(4x). \tag{5}$$

Auswerten von Gleichung (5) an der Stelle $x = \frac{\pi}{2}$ ergibt

$$0 = \lambda_1 - \lambda_3 - \lambda_1 = -\lambda_3 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_3 = 0.$$

Damit reduziert sich (5) zu

$$0 = \lambda_1 - \lambda_1 \cos(4x) = \lambda_1(1 - \cos(4x)). \tag{6}$$

Auswerten von (6) an der Stelle $x = \frac{\pi}{8}$ liefert $0 = \lambda_1$ womit $\lambda_4 = -\lambda_1 = 0$ folgt. Somit sind die Funktionen linear unabhängig.

(b) Zeigen Sie für alle $x \in \mathbb{R}$ die Identität $\sin(3x) = 3\sin(x) - 4\sin(x)^3$. Sie dürfen dabei die Additionstheoreme aus der Vorlesung für $\cos$ und $\sin$ (siehe **1.8.3**) benutzen.

Lösungshinweise hierzu: Für $s, t \in \mathbb{R}$ gelten die Additionstheoreme (siehe **1.8.3**):

$$\begin{aligned} \cos(s+t) &= \cos(s)\cos(t) - \sin(s)\sin(t), \\ \sin(s+t) &= \sin(s)\cos(t) + \cos(s)\sin(t). \end{aligned} \tag{7}$$

Indem wir $s = x$ und $t = x$ setzen, ergibt sich daraus

$$\cos(2x) = \cos(x)\cos(x) - \sin(x)\sin(x) = \cos(x)^2 - \sin(x)^2 \tag{8}$$

$$\sin(2x) = \sin(x)\cos(x) + \cos(x)\sin(x) = 2\sin(x)\cos(x) \tag{9}$$

Damit berechnen wir

$$\begin{aligned} \sin(3x) &\overset{(7)}{=} \sin(2x)\cos(x) + \cos(2x)\sin(x) \\ &\overset{(8),(9)}{=} 2\sin(x)\cos(x)^2 + \cos(x)^2\sin(x) - \sin(x)^3 = 3\sin(x)\cos(x)^2 - \sin(x)^3 \\ &\overset{(*)}{=} 3\sin(x)\big(1 - \sin(x)^2\big) - \sin(x)^3 = 3\sin(x) - 4\sin(x)^3, \end{aligned}$$

wobei im Umformungsschritt $(*)$ verwendet wurde, dass $\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1$.

(c) Sei $g\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}\colon g(x) = 8\sin(x)^3 + \cos(\frac{\pi}{4})\cos(4x) - 6\sin(x) + \frac{3}{\pi^2}x(x-2\pi) - 11$. Gilt $g \in \mathrm{L}\,(f_1, f_2, f_3, f_4)$?

Lösungshinweise hierzu: Wegen $\frac{3}{\pi^2}x(x-2\pi) = 3\big(\frac{x^2}{\pi^2} - 2\frac{x}{\pi} + 1\big) - 3 = 3\big(\frac{x}{\pi} - 1\big)^2 - 3$, erhalten wir nach Umsortieren

$$\begin{aligned} g(x) &= \cos(\tfrac{\pi}{4})\cos(4x) - 2\big(3\sin(x) - 4\sin(x)^3\big) + 3\big(\tfrac{x}{\pi} - 1\big)^2 - 14 \\ &= \cos(\tfrac{\pi}{4})f_4(x) - 2f_3(x) + 3f_2(x) - 14f_1(x). \end{aligned}$$

Somit ist die Funktion g als Linearkombination der Funktionen f_1, f_2, f_3 und f_4 darstellbar und es folgt $g \in \mathrm{L}\,(f_1, f_2, f_3, f_4)$.

(d) Sei $h\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}\colon h(x) = (\sin(x) - 1)^3$. Gilt $h \in \mathrm{L}\,(f_1, f_3)$?

Lösungshinweise hierzu: Um $h \in \mathrm{L}\,(f_1, f_3)$ zu überprüfen, müssen wir untersuchen, ob h als Linearkombination von f_1 und f_3 darstellbar ist. Angenommen solch eine Linearkombination existiert. Genauer bedeutet dies $\lambda_1, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ existieren so, dass

$$h(x) = \lambda_1 f_1(x) + \lambda_3 f_3(x).$$

Wir werten diese Gleichung an verschieden Stellen aus:

Sei $x = 0$, dann gilt $-1 = \lambda_1 + 0$.
Sei $x = \frac{\pi}{2}$, dann gilt $0 = \lambda_1 - \lambda_3$.
Sei $x = \frac{3\pi}{2}$, dann gilt $-8 = \lambda_1 + \lambda_3$.

Addition der letzten beiden Gleichungen liefert $-8 = 2\lambda_1$ und somit $\lambda_1 = -4$. Da nach der ersten Gleichung $\lambda_1 = -1$, erhalten wir einen Widerspruch. Somit kann h nicht als Linearkombination von f_1 und f_3 dargestellt werden und es folgt $h \notin \mathrm{L}\,(f_1, f_3)$.

Online-Aufgabe.

Sie finden ab Donnerstag Ihre Online-Aufgabe auf folgender Webseite.

http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 13. *Matrixmultiplikation*

Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} 2 & \mathrm{i} \\ 0 & 3 \\ 4 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie damit die Produkte BC, CB und ADB.

Lösungshinweise hierzu: Es ergibt sich:

$$B \cdot C = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \mathrm{i} \end{pmatrix}, \qquad A \cdot D \cdot B = \begin{pmatrix} 8 & 3+6\mathrm{i} \\ 12 & 9\mathrm{i} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Berechnen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ die Potenzen A^n, B^n und C^n.

Lösungshinweise hierzu: Bei der Matrix A handelt es sich um eine sogenannte nilpotente Matrix. Das heißt, es existiert ein $m \in \mathbb{N}$ so, dass $A^n = \mathbf{0}$ für alle $n \geqq m$ ist. Es ergibt sich

$$A^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ für alle } n \geqq 3.$$

Für die Matrix B berechnet man

$$B^1 = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2\mathrm{i} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3\mathrm{i} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^4 = \begin{pmatrix} 1 & 4\mathrm{i} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

was den Verdacht nahelegt, dass für $n \in \mathbb{N}$

$$B^n = \begin{pmatrix} 1 & n\mathrm{i} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gilt. Diese Vermutung muss noch induktiv bewiesen werden:

IA Für $n = 1$ stimmt der vermutete Ausdruck offensichtlich mit B überein.

IH Wir nehmen nun an, dass der vermutete Ausdruck für ein $n \in \mathbb{N}$ stimmt.

IS Wir zeigen die Gültigkeit des Ausdrucks für $n+1$ unter Verwendung der Induktionshypothese: Es gilt nämlich

$$B^{n+1} = B^n \cdot B \overset{\mathrm{IH}}{=} \begin{pmatrix} 1 & n\mathrm{i} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & (n+1)\mathrm{i} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

womit die Behauptung bewiesen ist.

Für die Matrix C ergibt sich

$$C^1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; C^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \; C^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \; C^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; C^5 = C^1.$$

Das heißt, die Matrix verhält sich beim Potenzieren zyklisch. Es ergibt sich allgemein

$$C^n = \begin{cases} C, & \text{falls } n = 4k+1, \\ -E_2, & \text{falls } n = 4k+2, \\ -C, & \text{falls } n = 4k+3, \\ E_2, & \text{falls } n = 4k+4, \end{cases}$$

wobei $k \in \mathbb{N}_0$ und E_2 die Einheitsmatrix des $\mathbb{R}^{n \times n}$ ist.

Aufgabe H 14. *Skalarprodukt und dyadisches Produkt*

(a) Gegeben seien für $j \in \{1,2,3,4\}$ die Vektoren v_j durch

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T,$$
$$v_3 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T, \qquad v_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}^T.$$

Berechnen Sie alle Vektoren des $\mathbb{R}^5$, welche auf allen v_j senkrecht stehen.

Lösungshinweise hierzu: Der gesuchte Vektor $x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{pmatrix}^T \in \mathbb{R}^5$ soll auf allen Vektoren v_1, v_2, v_3 und v_4 senkrecht stehen. Das heißt, es muss $\langle v_j \,|\, x \rangle = 0$ sein für alle $j \in \{1,2,3,4\}$. Dies führt auf das folgende lineare Gleichungssystem mit vier Gleichungen und fünf Unbekannten:

$$\begin{array}{ccccccccccl} 2x_1 & & & & & & & & & = & 0 \quad (\mathrm{I}) \\ x_1 & & & + & (-3)x_3 & & & & & = & 0 \quad (\mathrm{II}) \\ & & (-2)x_2 & & & + & x_4 & & & = & 0 \quad (\mathrm{III}) \\ & & & & (-1)x_3 & & & + & 3x_5 & = & 0 \quad (\mathrm{IV}) \end{array}$$

Aus Gleichung (I) folgt sofort $x_1 = 0$. In Gleichung (II) eingesetzt ergibt sich $x_3 = 0$ und dies in Gleichung (IV) ergibt auch $x_5 = 0$. In Gleichung (III) führen wir den Parameter $t \in \mathbb{R}$ ein durch $x_2 = t$. Dies in Gleichung (III) eingesetzt und nach x_4 aufgelöst ergibt $x_4 = 2t$. Somit steht jeder der Vektoren, welcher durch $x_t = \begin{pmatrix} 0 & t & 0 & 2t & 0 \end{pmatrix}^T$, $t \in \mathbb{R}$, beschrieben wird, senkrecht auf v_1, v_2, v_3 und v_4.

(b) Gegeben seien im $\mathbb{R}^n$ die Vektoren

$$v = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \end{pmatrix}^T, \qquad w = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 & \dots & n^2 \end{pmatrix}^T.$$

Berechnen Sie den Skalar $v^T \cdot w$ und alle Komponenten der Matrix $v \cdot w^T$.

Lösungshinweise hierzu: Die k-te Komponente von v ist $v_k = k$, jene von w ist $w_k = k^2$. Somit ergibt sich (für das Skalarprodukt von v und w)

$$v^T \cdot w = \sum_{k=1}^{n} v_k \cdot w_k = \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4},$$

wobei wir die Summenformel aus **Aufgabe P3** verwendet haben.

Bei $v \cdot w^T$ handelt es sich um das sogenannte dyadische Produkt von v mit w. Hierbei ergibt sich die Matrix

$$v \cdot w^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 & ... & n^2 \\ 2 & 8 & 18 & 32 & ... & 2n^2 \\ 3 & 12 & 27 & 48 & ... & 3n^2 \\ 4 & 16 & 36 & 64 & ... & 4n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & 4n & 9n & 16n & ... & n^3 \end{pmatrix},$$

beziehungsweise komponentenweise

$$\left(v \cdot w^T\right)_{jk} = v_j \cdot w_k = j \cdot k^2.$$

Aufgabe H 15. *Schnitt von Ebenen*

Sei $t \in \mathbb{R}$. Seien ferner im $\mathbb{R}^3$ die Ebenen E und F_t gegeben durch

$$E\colon x_1 + x_2 = 2, \qquad F_t\colon tx_1 + (1+t)x_2 - tx_3 = 1.$$

(a) Zeigen Sie, dass sich E und alle F_t in einem Punkt schneiden.

Lösungshinweise hierzu: Zunächst untersuchen wir die gegenseitige Lage der Ebenen E, F_0 und F_{-1} (F_0 und F_{-1} wegen der guten Rechenbarkeit). Dies führt auf folgendes lineares Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcrcrcll} x_1 & + & x_2 & & & = & 2 & \text{(I)} \\ & & x_2 & & & = & 1 & \text{(II)} \\ -x_1 & & & + & x_3 & = & 1 & \text{(III)} \end{array}$$

Aus (II) erhalten wir $x_2 = 1$. In (I) eingesetzt folgt $x_1 = 1$ und diesen Wert in (III) eingesetzt liefert $x_3 = 2$. Als Schnittpunkt der drei Ebenen E, F_0 und F_{-1} folgt also $(1, 1, 2)$. Setzt man diesen Punkt für beliebiges $t \in \mathbb{R}$ in die Koordinatengleichung von F_t ein, folgt

$$t \cdot 1 + (1+t) \cdot 1 - t \cdot 2 = t + 1 + t - 2t = 1 \stackrel{!}{=} 1,$$

der Punkt liegt also auch auf allen anderen Ebenen F_t.

(b) Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung von E und die Hesse-Normalform von F_t.

Lösungshinweise hierzu: Für die Parameterdarstellung von E parametrisieren wir $x_2 = s$ und $x_3 = t$. Somit folgt aus der Koordinatengleichung von E, dass $x_1 = 2 - s$ und somit

$$E: \; x = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Ein Normalenvektor von F_t ist gegeben durch $(t, 1+t, -t)^T$. Dieser muss normiert werden! Seine Länge beträgt

$$\sqrt{t^2 + (1+t)^2 + (-t)^2} = \sqrt{1 + 2t + 3t^2}.$$

Damit lautet die Hessesche Normalform

$$F_t: \; \left\langle \frac{1}{\sqrt{1+2t+3t^2}} \begin{pmatrix} t \\ 1+t \\ -t \end{pmatrix} \middle| \, x \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{1+2t+3t^2}}.$$

(c) Berechnen Sie die Schnittgerade von E und F_0 und jene von E und F_{-1}.

Lösungshinweise hierzu: Für die Schnittgerade von E und F_0 ist das Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & + & x_2 & = & 2 \quad (\mathrm{I}) \\ & & x_2 & = & 1 \quad (\mathrm{II}) \end{array}$$

zu lösen. Wir parametrisieren $x_3 = r$, aus (II) erhalten wir $x_2 = 1$ und damit aus (I) $x_1 = 1$. Somit lautet die Schnittgerade, die wir s_0 nennen

$$s_0: \; x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad r \in \mathbb{R}.$$

Für die Schnittgerade von E und F_{-1} lösen wir folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & + & x_2 & & & = 2 \quad (\mathrm{I}) \\ -x_1 & & & + & x_3 & = 1 \quad (\mathrm{II}) \end{array}$$

Zunächst parametrisieren wir $x_1 = t$ und erhalten damit aus (II) $x_3 = 1 + t$ und aus (I) $x_2 = 2 - t$. Wir bekommen also die Schnittgerade

$$s_{-1}: \; x = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Bemerkung: Der Schnittpunkt von s_0 und s_{-1} muss natürlich mit dem gemeinsamen Schnittpunkt aller Ebenen aus **(a)**, also $(1,1,2)$ übereinstimmen. In der Tat erhalten wir diesen Punkt auf beiden Geraden, nämlich für $r = 2$ und $t = 1$. Dies war hier aber nicht gefragt.

(d) Berechnen Sie den Cosinus des Winkels zwischen diesen beiden Schnittgeraden.

Lösungshinweise hierzu: Der Cosinus des Schnittwinkels α ergibt sich aus den beiden Richtungsvektoren:

$$\cos\alpha = \frac{\left\langle \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} \right\rangle}{\left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right|} = \frac{0\cdot 1 + 0\cdot(-1) + 1\cdot 1}{\sqrt{0^2+0^2+1^2}\cdot\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Dem entspricht ein Schnittwinkel von ungefähr $\alpha = 54,74^\circ$ im Gradmaß beziehungsweise $\alpha = 0,9553$ im Bogenmaß (nicht gefragt!).

Online-Aufgabe.

Sie finden ab Donnerstag Ihre Online-Aufgabe auf folgender Webseite.

http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test430/

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 16. *Lineare Gleichungssysteme*

Wir betrachten das folgende lineare Gleichungssystem.

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcrcl}
 & - & x_2 & + & 11x_3 & + & 5x_4 & - & 2x_5 & - & 2x_6 & - & 3x_7 & = & -3 \\
-2x_1 & + & x_2 & - & 4x_3 & + & 2x_4 & + & 5x_5 & + & 2x_6 & + & 3x_7 & = & 1 \\
-5x_1 & + & 2x_2 & - & 5x_3 & + & 8x_4 & + & 12x_5 & + & 4x_6 & + & 6x_7 & = & 1 \\
6x_1 & - & x_2 & - & 10x_3 & & & - & 15x_5 & - & 2x_6 & - & 3x_7 & = & 3 \\
-2x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & + & x_4 & & & + & 4x_6 & + & 6x_7 & = & 4 \\
10x_1 & - & 6x_2 & + & 31x_3 & - & 9x_4 & + & 3x_5 & - & 12x_6 & - & 18x_7 & = & -8
\end{array}$$

(a) Stellen Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix $[A\|b]$ auf und formen Sie diese in die in Satz 3.7.2 angegebene Form um.

Lösungshinweise hierzu: Die erweiterte Koeffizientenmatrix ist

$$\left[\begin{array}{rrrrrrr||r}
0 & -1 & 11 & 5 & -2 & -2 & -3 & -3 \\
-2 & 1 & -4 & 2 & 5 & 2 & 3 & 1 \\
-5 & 2 & -5 & 8 & 12 & 4 & 6 & 1 \\
6 & -1 & -10 & 0 & -15 & -2 & -3 & 3 \\
-2 & 2 & -3 & 1 & 0 & 4 & 6 & 4 \\
10 & -6 & 31 & -9 & 3 & -12 & -18 & -8
\end{array}\right].$$

Wir verwenden den Gauß-Algorithmus 3.7.3:

$$\begin{array}{r}
Z_1 \leftrightarrow Z_2\colon \\ \\ \\ \\ \\ \\
\end{array}
\left[\begin{array}{rrrrrrr||r}
-2 & 1 & -4 & 2 & 5 & 2 & 3 & 1 \\
0 & -1 & 11 & 5 & -2 & -2 & -3 & -3 \\
-5 & 2 & -5 & 8 & 12 & 4 & 6 & 1 \\
6 & -1 & -10 & 0 & -15 & -2 & -3 & 3 \\
-2 & 2 & -3 & 1 & 0 & 4 & 6 & 4 \\
10 & -6 & 31 & -9 & 3 & -12 & -18 & -8
\end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r}
-\frac{1}{2}Z_1\colon \\ \\ Z_3 - \frac{5}{2}Z_1\colon \\ Z_4 + 3Z_1\colon \\ Z_5 - Z_1\colon \\ Z_6 + 5Z_1\colon
\end{array}
\left[\begin{array}{rrrrrrr||r}
1 & -\frac{1}{2} & 2 & -1 & -\frac{5}{2} & -1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\
0 & -1 & 11 & 5 & -2 & -2 & -3 & -3 \\
0 & -\frac{1}{2} & 5 & 3 & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\
0 & 2 & -22 & 6 & 0 & 4 & 6 & 6 \\
0 & 1 & 1 & -1 & -5 & 2 & 3 & 3 \\
0 & -1 & 11 & 1 & 28 & -2 & -3 & -3
\end{array}\right]$$

$$
\begin{array}{r}
\\
-Z_1\colon \\
Z_3-\frac{1}{2}Z_2\colon \\
Z_4+2Z_2\colon \\
Z_5+Z_2\colon \\
Z_6-Z_2\colon
\end{array}
\left[\begin{array}{rrrrrrr||r}
1 & -\frac{1}{2} & 2 & -1 & -\frac{5}{2} & -1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\
0 & 1 & -11 & -5 & 2 & 2 & 3 & 3 \\
0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 16 & -4 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 12 & 4 & -7 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -4 & 30 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]
$$

$$
\begin{array}{r}
\\
\\
-2Z_1\colon \\
\\
Z_5+24Z_3\colon \\
\\
\end{array}
\left[\begin{array}{rrrrrrr||r}
1 & -\frac{1}{2} & 2 & -1 & -\frac{5}{2} & -1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\
0 & 1 & -11 & -5 & 2 & 2 & 3 & 3 \\
0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 16 & -4 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 16 & 5 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -4 & 30 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]
$$

$$
\begin{array}{r}
\\
\\
\\
\frac{1}{16}Z_4\colon \\
Z_5-Z_4\colon \\
Z_6+\frac{1}{4}Z_4\colon
\end{array}
\left[\begin{array}{rrrrrrr||r}
1 & -\frac{1}{2} & 2 & -1 & -\frac{5}{2} & -1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\
0 & 1 & -11 & -5 & 2 & 2 & 3 & 3 \\
0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 29 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]
$$

$$
\begin{array}{r}
Z_1+\frac{5}{18}Z_5\colon \\
Z_2-\frac{2}{9}Z_5\colon \\
Z_3+\frac{1}{9}Z_5\colon \\
Z_4+\frac{1}{36}Z_5\colon \\
\frac{1}{9}Z_5\colon \\
Z_6-\frac{29}{9}Z_5\colon
\end{array}
\left[\begin{array}{rrrrrrr||r}
1 & -\frac{1}{2} & 2 & -1 & 0 & -1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\
0 & 1 & -11 & -5 & 0 & 2 & 3 & 3 \\
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]
$$

$$
\begin{array}{r}
Z_1+Z_4\colon \\
Z_2+5Z_4\colon \\
Z_3+Z_4\colon \\
\\
\\
\\
\end{array}
\left[\begin{array}{rrrrrrr||r}
1 & -\frac{1}{2} & 2 & 0 & 0 & -1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\
0 & 1 & -11 & 0 & 0 & 2 & 3 & 3 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]
$$

$$
\begin{array}{r}
Z_1-2Z_3\colon \\
Z_2+11Z_3\colon \\
\\
\\
\\
\\
\end{array}
\left[\begin{array}{rrrrrrr||r}
1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & -1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 3 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]
$$

$$Z_1 + \tfrac{1}{2}Z_2\colon \left[\begin{array}{ccccccc||c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

(b) Bestimmen Sie den Lösungsraum des linearen Gleichungssystems.

Lösungshinweise hierzu: Nach Satz 3.7.6 ist mit Teil (a)

$$h_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad h_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Basis des Lösungsraums des homogenen Systems. Weiterhin ist

$$v_{sp} := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems. Damit hat der Lösungsraum des inhomogenen Systems die folgende Parameterdarstellung.

$$v_{\mathrm{sp}} + \lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2\,; \qquad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

(c) Ersetzen Sie in der letzten Gleichung die rechte Seite (also den Wert -8) durch 0. Entscheiden Sie, ob das lineare Gleichungssystem dann weiterhin eine Lösung besitzt.

Lösungshinweise hierzu: Führen wir die Umformungsschritte wie in Teil (a) durch, so erhalten wir im letzten Schritt

$$\left[\begin{array}{ccccccc||c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{array}\right]$$

da die letzte Zeile nie zu anderen Zeilen addiert wurde. Damit besitzt das Gleichungssystem nicht mehr eine Lösung. Die Lösungsmenge ist also die leere Menge.

Aufgabe H 17. *Lineares Gleichungssystem*

Sei $t \in \mathbb{R}$ ein Parameter. Sei $A_t := \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & t & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ sowie $b_t := \begin{pmatrix} -2 \\ t+1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie eine Basis von $\left\{ x \in \mathbb{R}^5 \,\middle|\, A_t x = 0 \right\}$ in Abhängigkeit von t.

(b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\left\{ x \in \mathbb{R}^5 \,\middle|\, A_t x = b_t \right\}$ in Abhängigkeit von t.

Lösungshinweise hierzu:

- Die erweiterte Koeffizientenmatrix ist

$$\left[\begin{array}{rrrrr||r} 1 & 4 & -2 & 4 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & t & -2 & -1 & t+1 \\ 1 & 2 & -2 & 2 & 1 & -2 \end{array}\right].$$

- Wir verwenden den Gauß-Algorithmus 3.7.3:

$$\begin{array}{r} Z_1 - 2\,Z_3: \\ Z_2 + Z_3: \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{rrrrr||r} -1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & t-2 & 0 & 0 & t-1 \\ 1 & 2 & -2 & 2 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} -\,Z_1: \\ \\ Z_1 + Z_3: \end{array} \left[\begin{array}{rrrrr||r} 1 & 0 & -2 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & t-2 & 0 & 0 & t-1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \\ Z_2 \leftrightarrow Z_3: \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{rrrrr||r} 1 & 0 & -2 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & t-2 & 0 & 0 & t-1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \\ \frac{1}{2}\,Z_2: \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{rrrrr||r} 1 & 0 & -2 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t-2 & 0 & 0 & t-1 \end{array}\right]$$

- Wenn $t = 2$, dann ist die erweiterte Koeffizientenmatrix

$$\left[\begin{array}{rrrrr||r} 1 & 0 & -2 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]. \tag{10}$$

- Wenn $t \neq 2$, dann ist die erweiterte Koeffizientenmatrix

$$\begin{array}{r} \\ \\ \frac{1}{(t-2)}\,Z_3: \end{array} \left[\begin{array}{rrrrr||r} 1 & 0 & -2 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{t-1}{t-2} \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} Z_1 + 2\,Z_3: \\ \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{rrrrr||r} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & \frac{2}{t-2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{t-1}{t-2} \end{array}\right]. \tag{11}$$

(a) Wenn $t = 2$, dann ist die Koeffizientenmatrix des homogenen Gleichungssystems

$$\left[\begin{array}{ccccc||c} 1 & 0 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

und eine Basis der Lösungsmenge $\left\{x \in \mathbb{R}^5 \,\middle|\, A_2 x = 0\right\}$ ist nach Satz 3.7.6

$$B\colon \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wenn $t \neq 2$, dann ist die Koeffizientenmatrix des homogenen Gleichungssystems

$$\left[\begin{array}{ccccc||c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

und eine Basis der Lösungsmenge $\left\{x \in \mathbb{R}^5 \,\middle|\, A_t x = 0\right\}$ ist

$$C\colon \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Wenn $t = 2$, dann ist die Koeffizientenmatrix des inhomogenen Gleichungssystems durch (10) gegeben. Wir erhalten aus der dritten Zeile den Widerspruch $0 = 1$. Damit ist die Lösungsmenge die leere Menge.
Wenn $t \neq 2$, dann ist die Koeffizientenmatrix des inhomogenen Gleichungssystems durch (11) gegeben. Eine spezielle Lösung ist damit $\left(\frac{2}{t-2},\ 0,\ \frac{t-1}{t-2},\ 0,\ 0\right)^\intercal$ und die Lösungsmenge $\left\{x \in \mathbb{R}^5 \,\middle|\, A_t x = b_t\right\}$ ist somit

$$\left\{ \begin{pmatrix} \frac{2}{t-2} \\ 0 \\ \frac{t-1}{t-2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Aufgabe H 18. *Lineare Abbildungen*

(a) Zeigen Sie, dass $\delta\colon \operatorname{Pol}_2 \mathbb{R} \to \operatorname{Pol}_2 \mathbb{R}\colon a_2x^2 + a_1x + a_0 \mapsto 2a_2x + a_1$ eine lineare Abbildung ist (dass also das Ableiten eine lineare Abbildung liefert, siehe **P 13**).

Lösungshinweise hierzu: Seien $a_2x^2 + a_1x + a_0,\ b_2x^2 + b_1x + b_0 \in \operatorname{Pol}_2 \mathbb{R}$, sowie $\lambda \in \mathbb{R}$. Wir zeigen die Eigenschaften aus Definition 3.8.1.

1.
$$\begin{aligned}
&\delta\big((a_2x^2 + a_1x + a_0) + (b_2x^2 + b_1x + b_0)\big)\\
&= \delta\big((a_2 + b_2)x^2 + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)\big)\\
&= 2(a_2 + b_2)x + (a_1 + b_1)\\
&= 2a_2x + a_1 + 2b_2x + b_1\\
&= \delta\big(a_2x^2 + a_1x + a_0\big) + \delta\big(b_2x^2 + b_1x + b_0\big)
\end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned}
&\delta\big(\lambda(a_2x^2 + a_1x + a_0)\big)\\
&= \delta\big(\lambda a_2x^2 + \lambda a_1x + \lambda a_0\big)\\
&= 2\lambda a_2x + \lambda a_1\\
&= \lambda(2a_2x + a_1)\\
&= \lambda\delta\big(a_2x^2 + a_1x + a_0\big)
\end{aligned}$$

(b) Zeigen Sie, dass $T\colon \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}\colon (a_{ij})_{1\leqq i,j\leqq n} \mapsto \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii}$ eine lineare Abbildung ist.

Lösungshinweise hierzu: Seien $(a_{ij})_{1\leqq i,j\leqq n},\ (b_{ij})_{1\leqq i,j\leqq n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, sowie $\lambda \in \mathbb{R}$. Wir zeigen die Eigenschaften aus Definition 3.8.1.

1.
$$\begin{aligned}
&T\big((a_{ij})_{1\leqq i,j\leqq n} + (b_{ij})_{1\leqq i,j\leqq n}\big) = T\big((a_{ij} + b_{ij})_{1\leqq i,j\leqq n}\big)\\
&= \sum_{i=1}^{n}(a_{ii} + b_{ii}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \sum_{i=1}^{n} b_{ii}\\
&= T\big((a_{ij})_{1\leqq i,j\leqq n}\big) + T\big((b_{ij})_{1\leqq i,j\leqq n}\big)
\end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned}
&T\big(\lambda(a_{ij})_{1\leqq i,j\leqq n}\big) = T\big((\lambda a_{ij})_{1\leqq i,j\leqq n}\big)\\
&= \sum_{i=1}^{n}(\lambda a_{ii}) = \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ii}\right)\\
&= \lambda\, T\big((a_{ij})_{1\leqq i,j\leqq n}\big)
\end{aligned}$$

(c) Welche der Eigenschaften für die Definition einer linearen Abbildung (siehe **3.8.1**) erfüllen die folgenden Abbildungen? Geben Sie für nicht erfüllte Eigenschaften jeweils ein Gegenbeispiel an.

$$f_1\colon\ \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}\colon \quad \begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix} \mapsto ad - bc$$

$$f_2\colon\ \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}\colon \quad A \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

Lösungshinweise hierzu: Wir betrachten zuerst die Abbildung f_1. Gegenbeispiel zu Eigenschaft **1.**:

$$f_1\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)=f_1\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right)=1-0=1$$
$$f_1\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\right)+f_1\left(\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)=(0-0)+(0-0)=0\neq 1$$

Gegenbeispiel zu Eigenschaft **2.**:

$$f_1\left(2\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right)=f_1\left(\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}\right)=4-0=4$$
$$2\,f_1\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right)=2(1-0)=2\neq 4$$

Nun betrachten wir die Abbildung f_2. Wir zeigen, dass f_2 beide Eigenschaften einer linearen Abbildung erfüllt. Seien dazu $A,\ B\in\mathbb{R}^{2\times 2}$, sowie $\lambda\in\mathbb{R}$.

1.
$$\begin{aligned}f_2(A+B)&=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}(A+B)\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\\&=\left(\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\right)+\left(\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}B\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\right)\\&=f_2(A)+f_2(B)\end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned}f_2(\lambda A)&=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\lambda A\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\\&=\lambda\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\\&=\lambda\,f_2(A)\end{aligned}$$

(d) Bestimmen Sie eine lineare Abbildung $g\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ mit den folgenden Eigenschaften:

$$g((1,0,-1)^\intercal)=(-1,0,1)^\intercal,\ g((0,2,0)^\intercal)=(0,4,0)^\intercal.$$

Lösungshinweise hierzu: Die gegebenen Eigenschaften für g werden z.B. erfüllt, wenn bei Anwendung von g auf einen Vektor $(a,b,c)^\intercal\in\mathbb{R}^3$ der erste und dritte Eintrag mit (-1) multipliziert und der zweite mit 2 multipliziert wird.
So eine Abbildung ist durch

$$g\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3\colon\ (a,b,c)^\intercal\mapsto(-a,2b,-c)^\intercal$$

gegeben. Eine Rechnung zeigt, dass diese Abbildung linear ist.
Alternativ können wir g als Multiplikation mit einer Matrix angeben.

$$g\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3\colon\ \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$$

Diese Abbildung ist nach 3.8.4. linear.
Die gegebenen Eigenschaften für g werden aber auch durch die folgende lineare Abbildung erfüllt, die den ersten und dritten Eintrag des Vektors vertauscht.

$$g_2\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon\ (a,b,c)^\intercal \mapsto (c,2b,a)^\intercal$$

Auch diese Abbildung können wir alternativ als Multiplikation mit einer Matrix angeben.

$$g_2\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon\quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Online-Aufgabe.

Sie finden ab Donnerstag Ihre Online-Aufgabe auf folgender Webseite.

http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 19. *Differentialoperator in Matrixdarstellung*

Wir betrachten die lineare Abbildung $T : \mathrm{Pol}_3 \mathbb{R} \to \mathrm{Pol}_3 \mathbb{R}$, die gegeben ist durch $f \mapsto f + f'$. Die Polynome $b_1(X) = X^3$, $b_2(X) = X^2$, $b_3(X) = X$ und $b_4(X) = 1$ bilden eine Basis B von $\mathrm{Pol}_3 \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrizen von T und T^3 bezüglich der Basis B.

Lösungshinweise hierzu: Die Bilder der Basisvektoren von B unter der linearen Abbildung T sind

$$\begin{aligned}
(Tb_1)(X) &= b_1(X) + b_1'(X) = X^3 + 3X^2,\\
(Tb_2)(X) &= b_2(X) + b_2'(X) = X^2 + 2X,\\
(Tb_3)(X) &= b_3(X) + b_3'(X) = X + 1,\\
(Tb_4)(X) &= b_4(X) + b_4'(X) = 1.
\end{aligned}$$

Also sind die Koordinatentupel von Tb_1, Tb_2, Tb_3 und Tb_4 bezüglich der Basis B gegeben durch

$$_B(Tb_1) = \begin{pmatrix}1\\3\\0\\0\end{pmatrix}, \quad _B(Tb_2) = \begin{pmatrix}0\\1\\2\\0\end{pmatrix}, \quad _B(Tb_3) = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \quad _B(Tb_4) = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

und die Abbildungsmatrizen von T und T^3 bezüglich B lauten

$$\begin{aligned}
{}_BT_B &= \begin{pmatrix}1&0&0&0\\3&1&0&0\\0&2&1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix},\\
{}_BT^3{}_B = ({}_BT_B)^3 &= \begin{pmatrix}1&0&0&0\\3&1&0&0\\0&2&1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix}1&0&0&0\\9&1&0&0\\18&6&1&0\\6&6&3&1\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

(b) Berechnen Sie die inverse Abbildung von T. Geben Sie $T^{-1}f$ an, wobei $f \in \mathrm{Pol}_3 \mathbb{R}$ gegeben ist durch $f(X) = X^3 - 6X$.

Lösungshinweise hierzu: Durch Invertieren der unter (a) berechneten Abbildungsmatrix ${}_BT_B$ erhalten wir ${}_BT^{-1}{}_B$. Die Inverse bestimmt man zum Beispiel wie folgt.

$$
\begin{array}{r}
\\ \\ \\ \\
Z_2 - 3Z_1\colon \\ \\ \\ \\
Z_3 - 2Z_1\colon \\ \\ \\ \\
Z_4 - Z_3\colon
\end{array}
\begin{array}{c}
\left[\begin{array}{cccc||cccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right] \\
\left[\begin{array}{cccc||cccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right] \\
\left[\begin{array}{cccc||cccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 6 & -2 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right] \\
\left[\begin{array}{cccc||cccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 6 & -2 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -6 & 2 & -1 & 1
\end{array}\right]
\end{array}
$$

Also gilt

$$
{}_BT^{-1}{}_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & -2 & 1 & 0 \\ -6 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.
$$

Die Abbildung T^{-1} ist durch die Abbildungsmatrix ${}_BT^{-1}{}_B$ eindeutig bestimmt, d.h. man kann damit $T^{-1}p \in \mathrm{Pol}_3\,\mathbb{R}$ für jedes $p \in \mathrm{Pol}_3\,\mathbb{R}$ ausrechnen. Insbesondere kann man ablesen, dass

$$
\begin{aligned}
(T^{-1}b_1)(X) &= X^3 - 3X^2 + 6X - 6, \\
(T^{-1}b_2)(X) &= X^2 - 2X + 2, \\
(T^{-1}b_3)(X) &= X - 1, \\
(T^{-1}b_4)(X) &= 1.
\end{aligned}
$$

Außerdem erhält man

$$
{}_B(T^{-1}f) = {}_BT^{-1}{}_B \cdot {}_Bf = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & -2 & 1 & 0 \\ -6 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

und damit ist $T^{-1}f \in \mathrm{Pol}_3\,\mathbb{R}$ gegeben durch $(T^{-1}f)(X) = X^3 - 3X^2$.

Aufgabe H 20. *Basistransformation*

Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{9}{2} & -6 & -10 & 9 & 8 \\ -3 & -3 & -3 & 5 & 3 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -7 & 2 & 3 \\ -5 & -5 & -9 & 9 & 7 \end{pmatrix}$$

beschreibe eine lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ bezüglich der jeweiligen Standardbasen, d.h. $\varphi(x) = Ax$ für alle $x \in \mathbb{R}^5$. Gegeben seien außerdem die Basen

$$B : \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

von $\mathbb{R}^5$ bzw. $\mathbb{R}^4$. Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix ${}_C\varphi_B$ und geben Sie dann Kern und Bild von φ jeweils in Standardkoordinaten an.

Lösungshinweise hierzu: Bezeichnet man die Standardbasis in $\mathbb{R}^5$ mit E und die Standardbasis im $\mathbb{R}^4$ mit F, so ist die Abbildungsmatrix ${}_C\varphi_B$ ist gegeben durch

$${}_C\varphi_B = {}_C\operatorname{id}_F \cdot {}_F\varphi_E \cdot {}_E\operatorname{id}_B = {}_C\operatorname{id}_F \cdot A \cdot {}_E\operatorname{id}_B,$$

wobei wir die Basiswechselmatrizen

$${}_E\operatorname{id}_B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad {}_F\operatorname{id}_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

direkt angeben können. Um ${}_C\varphi_B$ nach obiger Formel berechnen zu können, müssen wir die

Matrix ${}_F\,\mathrm{id}_C$ invertieren. Dies geschieht etwa mit folgender Rechnung.

$$\left[\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \\ Z_1 - Z_2\colon \\ \\ Z_1 - Z_4\colon \end{array} \left[\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} Z_1 - Z_2\colon \\ \\ Z_2 - Z_3\colon \\ Z_2 - Z_4\colon \end{array} \left[\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} 2Z_1 + Z_3\colon \\ 2Z_2 - 3Z_3\colon \\ \\ 2Z_4 - Z_3\colon \end{array} \left[\begin{array}{rrrr|rrrr} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & -1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \\ Z_2 - 2Z_4 \\ Z_4 + Z_3 \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{rrrr|rrrr} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Also erhalten wir

$${}_C\,\mathrm{id}_F = ({}_F\,\mathrm{id}_C)^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

und damit

$$\begin{aligned} {}_C\varphi_B &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{9}{2} & -6 & -10 & 9 & 8 \\ -3 & -3 & -3 & 5 & 3 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -7 & 2 & 3 \\ -5 & -5 & -9 & 9 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Daran lässt sich ablesen, dass der Kern der linearen Abbildung φ die lineare Hülle des fünften Vektors der Basis B ist, d.h. $\mathrm{Kern}(\varphi) = \mathrm{L}\big(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}^T\big)$, und dass $\mathrm{Bild}(\varphi) = \mathbb{R}^4$.

Aufgabe H 21. *Rechts- und Linksinverse*

Gegeben seien die Matrizen

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie für jede der gegebenen Matrizen eine Rechts- bzw. eine Linksinverse, falls diese existieren.

Lösungshinweise hierzu: Offensichtlich ist der Rang der Matrix K gleich 4. Nach Lemma 3.10.6 hat K dann eine Rechtsinverse und keine Linksinverse. Jede Rechtsinverse ist von der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{pmatrix},$$

wobei $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ beliebig gewählt werden können.

Die Matrix L hat Rang 2. Nach Lemma 3.10.6 hat L damit eine Linksinverse und keine Rechtsinverse. Sei $\tilde{L}$ eine Linksinverse von L, d.h. $\tilde{L} \cdot L = E_2$. Dann folgt nach Transponieren dieser Gleichung $L^T \cdot \tilde{L}^T = E_2$. Um $\tilde{L}$ zu bestimmen, lösen wir die Gleichungen

$$L^T x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad L^T x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dann sind x_1 und x_2 die Spalten von $\tilde{L}^T$, also sind x_1^T und x_2^T die Zeilen von $\tilde{L}$.

$$\begin{array}{r} \\ \\ Z_1 + Z_2\colon \\ \\ \frac{1}{2} Z_2 \end{array} \begin{array}{c} \left[\begin{array}{rrr||rr} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \\ \left[\begin{array}{rrr||rr} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \\ \left[\begin{array}{rrr||rr} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right] \end{array}$$

Wir erhalten also die Lösungen

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1-\alpha \\ \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2} \\ \alpha \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} -\beta \\ \frac{1}{2} - \frac{\beta}{2} \\ \beta \end{pmatrix},$$

wobei $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ frei gewählt werden können. Damit ist jede Linksinverse von L von der Form

$$\tilde{L} = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2} & \alpha \\ -\beta & \frac{1}{2} - \frac{\beta}{2} & \beta \end{pmatrix}.$$

Die Matrix M hat Rang 2. Dann hat nach Lemma 3.10.6 M eine Rechtsinverse und keine Linksinverse. Um die Rechtsinverse zu bestimmen, lösen wir

$$Mx_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Mx_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

für $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^3$. Dann sind x_1 und x_2 die Spalten der Rechtsinverse von M.

$$\begin{array}{r} \\ \\ Z_1 - Z_2\colon \\ \\ 2Z_1 - Z_2 \\ \\ \frac{1}{2}Z_1 \\ -\frac{1}{2}Z_2 \end{array}
\begin{array}{c}
\left[\begin{array}{rrr|rr} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \\
\left[\begin{array}{rrr|rr} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right] \\
\left[\begin{array}{rrr|rr} 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right] \\
\left[\begin{array}{rrr|rr} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]
\end{array}$$

Wir erhalten also die Lösungen

$$x_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2} \\ -\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2} \\ \alpha \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{\beta}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{\beta}{2} \\ \beta \end{pmatrix},$$

wobei $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ beliebeig gewählt werden können. Damit ist jede Rechtsinverse von M von der Form

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2} & \frac{1}{2} - \frac{\beta}{2} \\ -\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2} & \frac{1}{2} - \frac{\beta}{2} \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}.$$

Die quadratische Matrix N hat Rang 2, Daher besitzt N nach Lemma 3.10.6 Rechts- und Linksinverse, welche nach Lemma 3.10.4 übereinstimmen. N ist also invertierbar. Rechts- und Linksinverse sind gegeben durch

$$N^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Online-Aufgabe.

Sie finden ab Donnerstag Ihre Online-Aufgabe auf folgender Webseite.

http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test430/

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 22. *Unterschiedliche Wege zur Determinantenberechnung*

Gegeben sei die Matrix
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie ihre Determinante

(a) unter Berücksichtigung der Blockstruktur.

Lösungshinweise hierzu: Wir bezeichnen die Matrix als A; sie ist in Blockdreiecksgestalt. Ihre Determinante kann somit folgendermaßen berechnet werden:

$$\begin{aligned}\det(A) &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (1+2)\cdot 2 \cdot (-3+0+2+6-0-0) \\ &= 3 \cdot 2 \cdot 5 = 30.\end{aligned}$$

Zur Berechnung der Determinante der (3×3)–Determinante haben wir die Regel von Sarrus verwendet.

(b) unter Verwendung elementarer Zeilenumformungen (Gauß -Algorithmus).

Lösungshinweise hierzu: Wir wollen die Matrix mithilfe des Gauß -Algorithmus auf Dreiecksgestalt bringen. Dazu addieren wir die erste und die zweite Zeile, wir addieren das doppelte der vierten Zeile zur fünften und wir addieren das (-2)-fache der vierten Zeile zur sechsten. Dabei ändert sich die Determinante nicht und wir haben

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 7 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Nun multiplizieren wir die sechste Zeile mit (-3) und addieren die fünfte und sechste Zeile. Da wir am Ende das (-3)-fache stehen lassen, verändert sich auch die Determinante um diesen Faktor:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 7 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 7 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}.$$

Man erhält somit

$$\det(A) = -\frac{1}{3}\,(1\cdot 3\cdot 2\cdot(-1)\cdot 3\cdot 5) = -\frac{1}{3}\cdot(-90) = 30.$$

(c) indem Sie diese und alle benötigten Unterdeterminanten nach der jeweils dritten Zeile entwickeln.
Berechnen Sie Determinanten von (3×3) – Matrizen mit der Regel von Sarrus; Determinanten, die offensichtlich verschwinden, müssen nicht weiter entwickelt werden.

Lösungshinweise hierzu: Nun verwenden wir mehrfach den Laplaceschen Entwicklungssatz:

$$\det(A) = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 2\\ -1 & 1 & 4 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0\\ 0 & 0 & -2 & 1 & 1\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 2\\ -1 & 1 & -2 & 4 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & -1\\ -1 & 1 & -2 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1\end{vmatrix}$$

$$= 2\left\{(-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2\\ -1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1\\ -1 & 1 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 3\\ 0 & 0 & -2 & 1\end{vmatrix}\right\}$$

$$+\left\{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2\\ -1 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3\\ -1 & 1 & -2 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 & -2\end{vmatrix}\right\} + \left\{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -1\\ -1 & 1 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{vmatrix}\right\}.$$

In der dritten Determinante befindet sich eine Nullzeile, deren Wert ist also null. In der vierten und fünften Determinante erkennt man, dass jeweils die dritte und vierte Zeile Vielfache voneinander sind. Diese Determinanten verschwinden also ebenfalls. Die verbleibenden zwei Determinanten werden weiter entwickelt, so dass

$$\det(A) = -2\cdot 3\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2\\ -1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix} + 2\cdot 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix} - 2\cdot 3\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3\\ -1 & 1 & 4\\ 0 & 0 & -2\end{vmatrix}.$$

Unter dreifacher Anwendung der Regel von Sarrus erhalten wir schließlich

$$\det(A) = -6(1+2) + 4(1+2) - 6(-2-4) = -18 + 12 + 36 = 30.$$

Aufgabe H 23. *Volumenberechnung*

Gegeben seien die Matrix A und die Vektoren v_1, v_2 und v_3 durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3\\ -2 & 1 & -1\\ 3 & 0 & -2\end{pmatrix},\quad v_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},\quad v_2 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\quad v_3 = \begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie das Volumen des von v_1, v_2 und v_3 aufgespannten Spats.

Lösungshinweise hierzu: Des gesuchte Volumen ist der Betrag des Spatproduktes der drei Vektoren. Dieses ist

$$\langle v_1 \mid v_2 \times v_3 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = -1 - 4 = -5,$$

das Volumen des Spats also 5.

(b) Berechnen Sie das Volumen des von Av_1, Av_2 und Av_3 aufgespannten Spats.

Lösungshinweise hierzu: Zunächst berechnet man die Bildvektoren unter der Matrix:

$$Av_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad Av_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

$$Av_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Das orientierte Volumen dieses Spats ist

$$\langle Av_1 \mid (Av_2) \times (Av_3) \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 16 \\ -18 \\ 15 \end{pmatrix} \right\rangle = 80 + 45 = 125,$$

was dann auch dem eigentlichen Volumen entspricht.

(c) Berechnen Sie die Determinante von A.

Lösungshinweise hierzu: Mit der Regel von Sarrus erhält man

$$\det(A) = -2 - 6 + 0 - 9 - 0 - 8 = -25.$$

(d) Wie hängen die in **(a)** und **(b)** berechneten Volumina mit der Determinante zusammen?

Lösungshinweise hierzu: Die Determinante gibt den Faktor an, um den sich das Volumen des aufgespannten Spats bei Abblidung mit der Matrix ändert. Sei hier V_1 das orientierte Volumen aus Aufgabenteil **a)** und V_2 jenes aus Aufgabenteil **b)**. Man sieht

$$V_2 = \det(A) \cdot V_1 \qquad \text{bzw.} \qquad 125 = (-25) \cdot (-5).$$

Aufgabe H 24. *Eigenschaften von Determinanten*

Es seien die folgenden Matrizen gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 9 & -6 \\ 4 & -1 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie $\det(A)$ und $\det(B)$.

Lösungshinweise hierzu: Wir entwickeln die Determinanten von A und B jeweils nach der ersten Zeile und berechnen die resultierenden (3×3)–Matrizen mit der Regel von Sarrus:

$$\begin{aligned}
\det(A) &= (-1)^{1+1} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} + (-1)^{2+1} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} + 0 + 0 \\
&= 2(-10 + 0 + 0 + 10 - 0 - 6) + (0 + 0 + 0 + 10 - 0 - 0) \\
&= -2, \\
\det(B) &= (-1)^{1+1} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} + (-1)^{2+1} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} + 0 + 0 \\
&= 2(0 - 3 + 0 - 0 - 0 - 0) + (0 - 3 + 0 - 0 - 0 + 12) \\
&= 3.
\end{aligned}$$

(b) Bestimmen Sie $\det(A^2B^3)$ und $\det(C^3(A-B))$.

Lösungshinweise hierzu: Aus der Multiplikativität der Determinante folgt sofort

$$\det(A^2B^3) = \det(A)^2 \det(B)^3 = (-2)^2 \cdot 3^3 = 108.$$

Für die andere Determinante berechnet man zunächst

$$A - B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

woraus man aufgrund der Nullzeilen schnell einsieht, dass $\det(A - B) = 0$. Somit ist wiederum aufgrund der Multiplikativität

$$\det(C^3(A - B)) = \det(C)^3 \cdot \det(A - B) = 0$$

und $\det(C)$ braucht gar nicht berechnet zu werden.

Online-Aufgabe.

Sie finden ab Donnerstag Ihre Online-Aufgabe auf folgender Webseite.

http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 25. *Drehung und Spiegelung*

(a) Sei $\beta\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine affine Abbildung, die sich aus einer Drehung um die x_1-Achse und einer nachfolgenden Translation in Richtung der x_2-Achse zusammensetzt und die $\beta((1,0,1)^\intercal) = (1,-1,\frac{1}{2})^\intercal$ erfüllt. Welche Möglichkeiten gibt es für den linearen Anteil und den Translationsanteil?

Lösungshinweise hierzu: Die affine Abbildung β können wir als $\beta\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \colon v \mapsto Av + b$ darstellen, wobei $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und $b \in \mathbb{R}^3$ noch zu bestimmen sind. Der lineare Anteil A ist eine Drehung um die x_1-Achse $\mathbb{R}(1,0,0)^\intercal$. Somit muss $A(1,0,0)^\intercal = (1,0,0)^\intercal$ gelten, womit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \star & \star \\ 0 & \star & \star \\ 0 & \star & \star \end{pmatrix}$$

folgt; die Matrixeinträge $\star$ sind im Folgenden noch zu bestimmen. Als Drehung ist A orthogonal. Also gilt $A^\intercal A = E_3$, woraus

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \star & \star \\ 0 & \star & \star \end{pmatrix}$$

folgt. Da A eine Drehung ist, muss der noch unbestimmte untere rechte Block orthogonal sein mit Determinante 1. Mit 4.6.11 folgt daher

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & -s \\ 0 & s & c \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad c^2 + s^2 = 1, \tag{12}$$

wobei $c, s \in \mathbb{R}$ noch zu bestimmen sind. Der Translationsanteil b der Abbildung β wirkt nur in die x_2-Richtung. Wir machen daher für b den Ansatz $b = (0,t,0)^\intercal$, $t \in \mathbb{R}$, und erhalten insgesamt

$$\beta\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon \quad v \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & -s \\ 0 & s & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aus der Bedingung $\beta((1,0,1)^\intercal) = (1,-1,\frac{1}{2})^\intercal$ erhalten wir

$$c = \frac{1}{2} \qquad \text{und} \qquad -s + t = -1 \iff t = s - 1. \tag{13}$$

Mit (12) folgt damit $s = \pm\sqrt{1-c^2} = \pm\sqrt{1-\frac{1}{4}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. Insgesamt erhalten wir also mit (13) zwei Möglichkeiten für die Wahl von (s,t):

$$(s_1,t_1) = (\tfrac{\sqrt{3}}{2}, \tfrac{\sqrt{3}}{2} - 1) \qquad \text{und} \qquad (s_2,t_2) = (-\tfrac{\sqrt{3}}{2}, -\tfrac{\sqrt{3}}{2} - 1).$$

Dies führt auf die folgenden Möglichkeiten für β:

$$\beta_1\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon \quad v \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\beta_2\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon \quad v \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Sei $\gamma\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die Spiegelung an der Ebene $U := \mathrm{L}\big((1,3,2)^\intercal, (-1,0,1)^\intercal\big)$ und sei F die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie ${}_F\gamma_F$ und $\det({}_F\gamma_F)$.

Lösungshinweise hierzu: Es seien $b_1 := (\,1\;\;3\;\;2\,)^\intercal$, $b_2 := (\,-1\;\;0\;\;1\,)^\intercal$ und $b_3 := b_1 \times b_2 = (\,3\;\;-3\;\;3\,)^\intercal$. Folglich haben wir $U = \mathrm{L}\,(b_1, b_2)$ und $\langle b_1 \,|\, b_3\rangle = \langle b_2 \,|\, b_3\rangle = 0$. Es ist $B : b_1, b_2, b_3$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$, und bezüglich dieser Basis lässt sich die Spiegelung sehr leicht beschreiben. Wir berechnen ${}_F\gamma_F$ mit Hilfe von ${}_B\gamma_B$. Nach der Definition der Spiegelung γ und der Basis B erhalten wir

$$\gamma(b_1) = b_1,\; \gamma(b_2) = b_2,\; \gamma(b_3) = -b_3,$$

also

$${}_B\gamma_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Da F die Standardbasis ist, haben wir

$${}_F\mathrm{id}_B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

und damit

$${}_B\mathrm{id}_F = \left({}_F\mathrm{id}_B\right)^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -5 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zusammen genommen erhalten wir

$${}_F\gamma_F = {}_F\mathrm{id}_B \cdot {}_B\gamma_B \cdot {}_B\mathrm{id}_F = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 3 & 6 & -6 \\ 6 & 3 & 6 \\ -6 & 6 & 3 \end{pmatrix},$$

und

$$\begin{aligned} \det({}_F\gamma_F) &= \det({}_F\mathrm{id}_B \cdot {}_B\gamma_B \cdot {}_B\mathrm{id}_F) = \det({}_F\mathrm{id}_B)\det({}_B\gamma_B)\det({}_B\mathrm{id}_F) \\ &= \det({}_F\mathrm{id}_B)\det({}_B\gamma_B)\det(({}_F\mathrm{id}_B)^{-1}) = \det({}_B\gamma_B) = -1. \end{aligned}$$

Das Ergebniss $\det({}_F\gamma_F) = -1$ bestätigt, dass es sich um eine Spiegelung handelt. Alternativ kann man für die Berechnung von $\det({}_F\gamma_F) = -1$ auch so argumentieren: Sofort sieht man $\det({}_B\gamma_B) = -1$. Da sich die Determinante beim Übergang zu einer konjugierten Matrix nicht ändert, folgt $\det({}_F\gamma_F) = -1$.

Aufgabe H 26. *Koordinatentransformation*

Seien das affine Koordinatensystem $\mathbb{F} := \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$

und die Koordinatentransformation ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{G}} : v \mapsto \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 \\ -\sqrt{3} & 0 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ gegeben.

Seien O, P und Q Punkte mit ${}_{\mathbb{E}}O := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, ${}_{\mathbb{E}}P := \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, ${}_{\mathbb{F}}Q := \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$ und ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$.

Lösungshinweise hierzu: Zuerst schreiben wir

$$F = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Nach 4.7.6. sind die Koordinaten ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$ und ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$ dann wie folgt gegeben.

$${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}(v) = Fv + R \qquad {}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}(v) = F^{-1}(v - R)$$

Wir berechnen daher F^{-1}:

$$\left[\begin{array}{rrr||rrr} 1 & -2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \\ Z_2 + Z_1 : \\ Z_3 - Z_1 : \end{array} \left[\begin{array}{rrr||rrr} 1 & -2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} Z_1 - 2Z_2 : \\ \\ Z_3 + 2Z_2 : \end{array} \left[\begin{array}{rrr||rrr} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \\ Z_2 - Z_3 : \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{rrr||rrr} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \\ (-1)Z_2 : \\ \frac{1}{2}Z_3 : \end{array} \left[\begin{array}{rrr||rrr} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

Damit erhalten wir

$$
{}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}(v) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

$$
{}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}(v) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\left(v - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} v + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.
$$

(b) Bestimmen Sie ${}_{\mathbb{F}}O$, ${}_{\mathbb{F}}P$ und ${}_{\mathbb{E}}Q$.

Lösungshinweise hierzu:

$$
{}_{\mathbb{F}}O = {}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}({}_{\mathbb{E}}O) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}
$$

$$
{}_{\mathbb{F}}P = {}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}({}_{\mathbb{E}}P) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}
$$

$$
{}_{\mathbb{E}}Q = {}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}({}_{\mathbb{F}}Q) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

(c) Bestimmen Sie das affine Koordinatensystem $\mathbb{G}$. Ist $\mathbb{G}$ ein kartesisches Koordinatensystem?

Lösungshinweise hierzu: Nach 4.7.6. können wir das Koordinatensystem $\mathbb{G}$ aus der Koordinatentransformation ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{G}}$ ablesen.

$$
\mathbb{G} = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}\right)
$$

Um zu entscheiden, ob $\mathbb{G}$ ein kartesisches Koordinatensystem ist, überprüfen wir, ob

$$
B : \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}
$$

eine Orthonormalbasis ist. Jedoch ist z.B.

$$
\left\langle \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \middle| \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{36}(3+3) = \frac{1}{6} \neq 1.
$$

Also ist $\mathbb{G}$ kein kartesisches Koordinatensystem.

(d) Bestimmen Sie ${}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{F}}$ und ${}_{\mathbb{G}}Q$.

Lösungshinweise hierzu: Zuerst schreiben wir

$$G = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 \\ -\sqrt{3} & 0 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \qquad S = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nach 4.7.8. gilt ${}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{F}}(v) = G^{-1}Fv + G^{-1}(R-S)$. Da die Spalten von G orthogonal sind, ist das Inverse von G gegeben durch $G^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{3} & \sqrt{3} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & \sqrt{3} \end{pmatrix}$.

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} {}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{F}}(v) &= G^{-1}Fv + G^{-1}(R-S) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{3} & \sqrt{3} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & \sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{3} & \sqrt{3} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & \sqrt{3} \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} & -\sqrt{3} & 4\sqrt{3} \\ 1 & -2 & 4 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 3\sqrt{3} \\ 3 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} {}_{\mathbb{G}}Q &= {}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{F}}({}_{\mathbb{F}}Q) \\ &= \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} & -\sqrt{3} & 4\sqrt{3} \\ 1 & -2 & 4 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3\sqrt{3} \\ 3 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3\sqrt{3} \\ -2 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3\sqrt{3} \\ 3 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Aufgabe H 27. *Drehung und Spiegelung*

Die vom Parameter $s \in \mathbb{R}$ abhängige Matrix

$$A_s = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5s & \sqrt{2} & 5s \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ -5s & \sqrt{2} & -5s \end{pmatrix}$$

definiert eine lineare Abbildung $\varphi_s\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon x \mapsto A_s\,x$.

(a) Bestimmen Sie alle $s \in \mathbb{R}$, für die φ_s eine orthogonale Abbildung ist.

Lösungshinweise hierzu: Nach Definition 4.5.2 ist φ_s eine orthogonale Abbildung, wenn die Matrix, die φ_s bezüglich der Standardbasis beschreibt, orthogonal ist. Diese Matrix ist gerade gegeben durch A_s. Wir müssen also prüfen für welche $s \in \mathbb{R}$ die Gleichung $A_s^\mathsf{T} A_s = E_3$ erfüllt ist. Wir erhalten

$$A_s^\mathsf{T} A_s = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 5s & \sqrt{2} & -5s \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 5s & -\sqrt{2} & -5s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5s & \sqrt{2} & 5s \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ -5s & \sqrt{2} & -5s \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 50s^2+2 & 0 & 50s^2-2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 50s^2-2 & 0 & 50s^2+2 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix auf der rechten Seite entspricht E_3 genau dann, wenn $\frac{50s^2+2}{4} = 1 \iff s^2 = \frac{1}{25}$ und $\frac{50s^2-2}{4} = 0 \iff s^2 = \frac{1}{25}$. Also ist φ_s eine orthogonale Abbildung für alle $s \in \{-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\}$.

Als Vorbereitung auf die nachfolgenden Aufgabenteile berechnen wir noch die Determinante. Für A_s gilt nach der Regel von Sarrus:

$$\det(A_s) = \frac{1}{2^3}\left(0 + 10s + 10s + 0 + 10s + 10s\right) = 5s. \tag{14}$$

(b) Wählen Sie s so, dass φ_s eigentlich orthogonal ist. Dann beschreibt φ_s eine Drehung. Berechnen Sie die Drehachse und den Cosinus des Drehwinkels.

Lösungshinweise hierzu: Um $\det(A_s) = 1$ zu erfüllen, ist $s = \frac{1}{5}$ wegen (14) die einzige Möglichkeit. Nach **(a)** ist somit $A_{\frac{1}{5}}$ eigentlich orthogonal und $\varphi_{\frac{1}{5}}$ beschreibt eine Drehung. Bezeichne den Drehwinkel mit α. Dann gilt nach 4.6.20 $\mathrm{Sp}(A_{\frac{1}{5}}) = 2\cos(\alpha) + 1$ und somit ist der Cosinus des Drehwinkels

$$\cos(\alpha) = \frac{\mathrm{Sp}(A_{\frac{1}{5}}) - 1}{2} = \frac{0-1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Die Drehachse ist die Lösungsmenge der Fixpunktgleichung

$$A_{\frac{1}{5}} x = x \quad \Leftrightarrow \quad \left(A_{\frac{1}{5}} - E_3\right) x = 0.$$

Dies ist ein homogenes LGS mit Lösungsmenge

$$\mathcal{L} = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right); \tag{15}$$

somit ist die gesuchte Drehachse gerade $\mathbb{R}\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Wir rechnen dies explizit nach. Das homogene LGS liest sich als

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{3}{2} & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{r} 2Z_1: \\ 2Z_2: \\ 2Z_3: \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & \sqrt{2} & 1 & 0 \\ \sqrt{2} & -2 & -\sqrt{2} & 0 \\ -1 & \sqrt{2} & -3 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{array}{r} \\ \sqrt{2}Z_1+Z_2: \\ Z_3-Z_1: \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{r} -Z_1: \\ \\ -\frac{1}{4}Z_3: \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\sqrt{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{array}{r} \\ Z_1+Z_3: \\ Z_2 \leftrightarrow Z_3: \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array} \Rightarrow S_2 \leftrightarrow S_3: \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_3 & x_2 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

Dabei haben wir im letzten Schritt die zweite und dritte Spalte vertauscht. Die Spalten sind dabei gekennzeichnet wie in Beispiel 3.7.8 und wir erhalten den Lösungsraum $\mathrm{L}\left((\sqrt{2},0,1)^{\mathsf{T}}\right)$. Zurücktauschen der zweiten und dritten Spalte ergibt die gesuchte Lösungsmenge (15).

(c) Wählen Sie nun s so, dass φ_s uneigentlich orthogonal ist. Finden Sie eine Spiegelung σ und eine Drehung δ so, dass $\varphi_s = \delta \circ \sigma$ ist.

Lösungshinweise hierzu: Um $\det(A_s) = -1$ zu erfüllen, ist $s = -\frac{1}{5}$ wegen (14) die einzige Möglichkeit. Nach **(a)** ist $A_{-\frac{1}{5}}$ uneigentlich orthogonal und $\varphi_{-\frac{1}{5}}$ beschreibt eine Drehspiegelung. Nach 4.6.16 lässt diese sich aus einer Drehung und einer Spiegelung zusammensetzen, wobei die Spiegelebene sich nach 4.6.17 frei wählen lässt (durch den Ursprung). Wähle also z.B.

$$\sigma_1\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon\ x \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x$$

die Spiegelung an der x_2-x_3–Ebene. Gesucht wird nun eine Drehung

$$\delta_1\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon\ x \mapsto D_1 x,$$

dargestellt durch die Matrix D_1, mit $\varphi_{-\frac{1}{5}} = \delta_1 \circ \sigma_1$. Letztere Gleichung impliziert nach 3.8.12 für die beschreibenden Matrizen

$$\begin{aligned} A_{-\frac{1}{5}} &= D_1 \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \qquad D_1 &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{2} & -1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & -1 \\ -\sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ -1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

In der Tat gilt $D_1^{\intercal} D_1 = E_3$ und $\det(D_1) = 1$; δ_1 beschreibt also eine Drehung.
Wegen der Wahlmöglichkeit für die Spiegelebene nach 4.6.17, hätten wir genauso gut die Spieglung σ_2 mit Spiegelbene $E = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1 = x_2\}$ (durch den Ursprung) wählen können. Diese lässt sich explizit beschreiben als

$$\sigma_2 \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \colon \ x \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x.$$

Wie zuvor suchen wir dann eine Drehung $\delta_2 \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \colon \ x \mapsto D_2 x$ mit Drehmatrix D_2 so, dass $\varphi_{-\frac{1}{5}} = \delta_2 \circ \sigma_2$. Die analoge Vorgehensweise liefert

$$D_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{2} & -1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

In der Tat gilt $D_2^{\intercal} D_2 = E_3$ und $\det(D_2) = 1$; δ_2 beschreibt also eine Drehung.

Online-Aufgabe.

Sie finden ab Donnerstag Ihre Online-Aufgabe auf folgender Webseite.

http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test430/

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 28. *Eigenwerte und Eigenvektoren*

Gegeben seien die folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & e^2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & i\pi \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ ohne Verwendung des charakteristischen Polynoms.

Lösungshinweise hierzu: Nach Bemerkung 5.2.3 entspricht die Spur der Summe der Eigenwerte und die Determinante dem Produkt der Eigenwerte der Matrix. Es ist

$$\mathrm{Sp}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = 2 - 1 = 1, \qquad \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = 2 \cdot (-1) - 3 \cdot 1 = -5.$$

Seien λ_2 und λ_3 die Eigenwerte der Matrix. Dann muss also gelten, dass

$$\lambda_2 + \lambda_3 = 1, \qquad \lambda_2 \cdot \lambda_3 = -5.$$

Somit gilt $\lambda_3 = 1 - \lambda_2$; dies in die zweite Gleichung eingesetzt führt auf die quadratische Gleichung

$$\lambda_2^2 - \lambda_2 - 5 = 0$$

mit den Lösungen $\lambda_{2,\pm} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{21}$. Aus $\lambda_3 = 1 - \lambda_2$ folgt dann $\lambda_{3,\pm} = \frac{1}{2} \mp \frac{1}{2}\sqrt{21}$, also dieselben Lösungen nur mit jeweils anderem Vorzeichen vor dem Term mit der Wurzel. Wir legen fest:

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{21}, \qquad \lambda_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{21}.$$

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A.

Lösungshinweise hierzu: Zu berechnen sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_4)$. Aufgrund der Blockdiagonalgestalt von A folgt

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_4) &= (1-\lambda) \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & -1-\lambda \end{pmatrix} (2-\lambda) \\ &= (1-\lambda)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{21} - \lambda\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{21} - \lambda\right)(2-\lambda), \end{aligned}$$

wobei wir die aus **(a)** folgende Faktorisierung der 2×2-Determinante verwendet haben. Dieser Faktorisierung lassen sich die Nullstellen direkt entnehmen, es folgt

$$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{21}, \qquad \lambda_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{21}, \qquad \lambda_4 = 2.$$

(c) Berechnen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume von B.

Lösungshinweise hierzu: Aufgrund der Blockdiagonalgestalt und da der dritte Diagonalblock $\left(\begin{smallmatrix}-1 & 0\\ 2 & 3\end{smallmatrix}\right)$ Dreiecksgestalt besitzt, erkennt man die Eigenwerte λ_i sofort:

$$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = 2, \qquad \lambda_3 = -1, \qquad \lambda_4 = 3.$$

Zu diesen werden nun noch die zugehörigen Eigenräume $V(\lambda_i)$ gesucht. Dazu sind die folgenden linearen Gleichungssysteme zu lösen; die Variablen werden jeweils mit x_1, x_2, x_3 und x_4 bezeichnet:

- $V(1)$:

$$\left[\begin{array}{cccc||c} 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

  Aus Zeile 3 erkennt man $x_3 = 0$, dies in die Zeilen 2 und 4 eingesetzt führt auf $x_2 = 0$ und $x_4 = 0$. Zeile 1 ist dann automatisch erfüllt, so dass $x_1 \in \mathbb{R}$ beliebig sein kann, also $x_1 = t$ mit $t \in \mathbb{R}$. Wir wählen $t = 1$ und erhalten $V(1) = L\left((1, 0, 0, 0)^\intercal\right)$.

- $V(2)$:

$$\left[\begin{array}{cccc||c} -1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

  Aus den Zeilen 2 und 3 folgt sofort $x_3 = 0$, dies in Zeile 4 eingesetzt führt auf $x_4 = 0$. Mit $x_3 = x_4 = 0$ in Zeile 1 folgt dann $x_1 = 0$, sodass das System für alle reellen x_2 automatisch erfüllt ist. Daher setzen wir $x_2 = t$ mit $t \in \mathbb{R}$. Wir wählen $t = 1$ und es ist $V(2) = L\left((0, 1, 0, 0)^\intercal\right)$.

- $V(-1)$:

$$\left[\begin{array}{cccc||c} 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 0 \end{array}\right]$$

  Zeile 3 ist automatisch erfüllt. In Zeile 4 setzen wir $x_4 = t$ für $t \in \mathbb{R}$ und erhalten dann aus dieser Gleichung $x_3 = -2t$. In Zeile 2 eingesetzt folgt dann $3x_2 - 2t = 0$, also $x_2 = \frac{2}{3}t$. Aus Zeile 1 erhalten wir dann die Gleichung $2x_1 - 2t + 2t = 0$, also $x_1 = 0$. Es ist also $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, \frac{2}{3}t, -2t, t)$, $t \in \mathbb{R}$. Wir wählen $t = 3$ und erhalten $V(-1) = L\left((0, 2, -6, 3)^\intercal\right)$.

- $V(3)$:

$$\left[\begin{array}{cccc||c} -2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

  Aus den Zeilen 3 und 4 folgt $x_3 = 0$ und aus Zeile 2 dann $x_2 = 0$. In Zeile 1 setzen wir $x_1 = t$ und erhalten $x_4 = t$. Es ist also $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (t, 0, 0, t)$, $t \in \mathbb{R}$. Wir wählen $t = 1$ und erhalten $V(3) = L\left((1, 0, 0, 1)^\intercal\right)$.

Aufgabe H 29. *Algebraische und geometrische Vielfachheit*
Sei $(s,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ein Parameterpaar. Wir betrachten die parameterabhängige Matrix

$$A_{s,t} = \begin{pmatrix} t+2 & 2 & 8-t^2 \\ 0 & s+3 & 0 \\ -1 & -2 & t-2 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von $A_{s,t}$ in Abhängigkeit des Paares (s,t).

Lösungshinweise hierzu: Zur Bestimmung der Eigenwerte berechnen wir die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\chi_{A_{s,t}}(\lambda)$ in Abhängigkeit von (s,t). Es gilt:

$$\begin{aligned}
\chi_{A_{s,t}}(\lambda) &= \det(A_{s,t} - \lambda E_3) \\
&= \det \begin{pmatrix} t+2-\lambda & 2 & 8-t^2 \\ 0 & s+3-\lambda & 0 \\ -1 & -2 & t-2-\lambda \end{pmatrix} \\
&= (-1)^{2+2}(s+3-\lambda) \det \begin{pmatrix} t+2-\lambda & 8-t^2 \\ -1 & t-2-\lambda \end{pmatrix} \qquad \text{(Entw. nach 2. Zeile)} \\
&= (s+3-\lambda)[(t+2-\lambda)(t-2-\lambda) - (-1)(8-t^2)] \\
&= (s+3-\lambda)[t^2 - 4 - 2t\lambda + \lambda^2 + 8 - t^2] \\
&= (s+3-\lambda)[\lambda^2 - 2t\lambda + 4]
\end{aligned}$$

Die Nullstellen von $\lambda^2 - 2t\lambda + 4$ sind gerade $\lambda_{2,3} = t \pm \sqrt{t^2-4}$. Also sind die Eigenwerte

$$\lambda_1 = s+3, \qquad \lambda_2 = t + \sqrt{t^2-4} \qquad \text{sowie} \qquad \lambda_3 = t - \sqrt{t^2-4}. \tag{16}$$

(b) Bestimmen Sie für das Paar $(s,t) = (2,2)$ die geometrische Vielfachheit für jeden Eigenwert von $A_{2,2}$.

Lösungshinweise hierzu: Für $(s,t) = (2,2)$ ergibt sich

$$A_{2,2} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \lambda_1 = 5, \qquad \lambda_2 = \lambda_3 = 2.$$

Wir haben also in diesem Fall nur zwei verschiedene Eigenwerte vorliegen. Wie in Beispiel 5.1.16 demonstriert, berechnen wir für diese die geometrische Vielfachheit d_{λ_1} bzw. d_{λ_2} mittels einer Rangbetrachtung. Für $i = 1,2$ sei der zu λ_i gehörenden Eigenräume dabei $V(\lambda_i)$. Zunächst erhalten wir für $\lambda_1 = 5$

$$\text{Rg}(A_{2,2} - 5E_3) = \text{Rg} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -5 \end{pmatrix} = \text{Rg} \begin{array}{r} \\ \\ Z_3 - Z_1: \end{array} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -9 \end{pmatrix} = 2$$

und somit ist $d_{\lambda_1} = \dim V(\lambda_1) = 3 - 2 = 1$. Für $\lambda_2 = 2$ erhalten wir

$$\text{Rg}(A_{2,2} - 2E_3) = \text{Rg} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix} = \text{Rg} \begin{array}{r} \\ \\ Z_3 + \frac{1}{2}Z_1: \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \text{Rg} \begin{array}{r} \\ \\ Z_3 + \frac{1}{3}Z_2: \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

und somit ist $d_{\lambda_2} = \dim V(\lambda_2) = 3 - 2 = 1$.

(c) Bestimmen Sie mit Hilfe von **P 31(d)** alle Paare (s,t) so, dass $A_{s,t}$ invertierbar ist.

Lösungshinweise hierzu: Für die Invertierbarkeit von $A_{s,t}$ müssen wir nach **P 31(d)** sicherstellen, dass alle Eigenwerte λ_i in (16) von Null verschieden sind.
Es ist $\lambda_1 \neq 0 \iff s \neq -3$. Wir zeigen nun, dass stets $\lambda_2 \neq 0$ und $\lambda_3 \neq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt. Angenommen es gibt ein $t \in \mathbb{R}$ mit $t \pm \sqrt{t^2-4} = 0 \iff t = \mp\sqrt{t^2-4}$.
Dann erhalten wir den Widerspruch $t^2 = (\mp\sqrt{t^2-4})^2 = t^2 - 4 \Longrightarrow 0 = -4$.
Also ist $A_{s,t}$ invertierbar für alle Paare $(s,t) \in \{(s,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \,\big|\, s \neq -3\}$.

(d) Sei nun $s = t$. Bestimmen Sie alle $t \in \mathbb{R}$ so, dass ein Eigenwert von $A_{t,t}$ mindestens die algebraische Vielfachheit 2 besitzt. Gibt es auch $t \in \mathbb{R}$ so, dass ein Eigenwert von $A_{t,t}$ die algebraische Vielfachheit 3 besitzt?

Lösungshinweise hierzu: Für $s = t$ erhalten wir aus (16) die Eigenwerte

$$\lambda_1 = t+3, \qquad \lambda_2 = t + \sqrt{t^2-4} \qquad \text{sowie} \qquad \lambda_3 = t - \sqrt{t^2-4}.$$

Damit ein Eigenwert von $A_{t,t}$ mindestens die algebraische Vielfachheit 2 besitzt, muss eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms mindestens die Vielfachheit 2 haben. Anders ausgedrückt bedeutet dies, wir müssen überprüfen, ob

$$\lambda_1 = \lambda_2 \qquad \vee \qquad \lambda_1 = \lambda_3 \qquad \vee \qquad \lambda_2 = \lambda_3.$$

Mit der Monotonie des Quadrierens 1.5.7 folgt, dass $\lambda_1 = \lambda_2$ genau dann, wenn

$$t+3 = t + \sqrt{t^2-4} \quad\iff\quad 3 = \sqrt{t^2-4} \quad\overset{1.5.7}{\iff}\quad 9 = t^2 - 4 \quad\iff\quad t^2 = 13.$$

Also ist $\lambda_1 = \lambda_2$ genau dann, wenn $t = \pm\sqrt{13}$.
Wir zeigen jetzt, dass $\lambda_1 \neq \lambda_3$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt. Angenommen es gibt ein $t \in \mathbb{R}$ so, dass $\lambda_1 = \lambda_3$. Dann ist $t + 3 = t - \sqrt{t^2-4}$ und somit folgt der Widerspruch $3 = -\sqrt{t^2-4} < 0$.
Weiter folgt, dass $\lambda_2 = \lambda_3$ genau dann, wenn

$$t + \sqrt{t^2-4} = t - \sqrt{t^2-4} \quad\iff\quad 2\sqrt{t^2-4} = 0 \quad\iff\quad t^2 = 4.$$

Also ist $\lambda_2 = \lambda_3$ genau dann, wenn $t = \pm 2$ (Für $t = 2$ haben wir dies schon in **(b)** beobachtet). Insgesamt betrachtet hat ein Eigenwert von $A_{t,t}$ also mindestens die algebraische Vielfachheit 2 genau dann wenn $t \in \{\pm 2, \pm\sqrt{13}\}$.
Damit ein Eigenwert mindestens die algebraische Vielfachheit 3 besitzt, muss das charakteristische Polynom eine Nullstelle haben, welche mindestens die Vielfachheit 3 hat. Hier ist dies nur möglich, wenn $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ erfüllt ist. Wie zuvor gezeigt, gilt aber stets $\lambda_1 \neq \lambda_3$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Also kann es einen Eigenwert mit algebraischer Vielfachheit 3 nicht geben.

Aufgabe H 30. *Transformation einer affinen Abbildung*

Betrachten Sie (bezüglich des Standardkoordinatensystems) die affine Abbildung $\alpha\colon v \mapsto Av + b$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} -2 \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Eigenwerte sowie die zugehörigen Eigenräume von A.

Lösungshinweise hierzu: Wir suchen die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\chi_A(\lambda) = \left(\frac{1}{2} - \lambda\right)\left(-\frac{1}{2} - \lambda\right) - \frac{3}{4} = -\left(\frac{1}{4} - \lambda^2\right) - \frac{3}{4} = \lambda^2 - 1.$$

Die Eigenwerte sind also $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 1$. Für den Eigenraum zu $\lambda_1 = -1$ ist folgendes homogenes, lineares Gleichungssystem zu lösen:

$$\left[\begin{array}{cc||c} \frac{3}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right] \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{r} \sqrt{3}\cdot Z_1: \\ 3\cdot Z_2: \end{array} \left[\begin{array}{cc||c} \frac{3}{2}\sqrt{3} & \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{3}{2}\sqrt{3} & \frac{3}{2} & 0 \end{array}\right].$$

Die beiden Zeilen sind also äquivalent; wir bezeichnen die Variablen mit x_1 und x_2. Wir setzen $x_1 = t$ mit $t \in \mathbb{R}$. Damit muss noch die Gleichung $\frac{3}{2}x_2 = -\frac{3}{2}\sqrt{3}\,t$ erfüllt werden. Dies ist der Fall, wenn $x_2 = -\sqrt{3}\,t$. Für $t = -1$ erhalten wir den Eigenvektor $f_1 = (-1, \sqrt{3})^\intercal$ beziehungsweise den Eigenraum $V(-1) = L((-1, \sqrt{3})^\intercal)$.
Für den Eigenraum zu $\lambda_2 = 1$ ist das folgende System zu lösen:

$$\left[\begin{array}{cc||c} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{3}{2} & 0 \end{array}\right] \quad \Longrightarrow \quad (-\sqrt{3})\cdot Z_1: \left[\begin{array}{cc||c} \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{3}{2} & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{3}{2} & 0 \end{array}\right].$$

Die beiden Zeilen sind also auch äquivalent; wir bezeichnen die Variablen wieder mit x_1 und x_2. Wir setzen $x_2 = t$ mit $t \in \mathbb{R}$. Damit muss noch die Gleichung $\frac{1}{2}\sqrt{3}\,x_1 = \frac{3}{2}t$ erfüllt werden. Dies ist der Fall, wenn $x_1 = \sqrt{3}\,t$. Für $t = 1$ erhalten wir den Eigenvektor $f_2 = (\sqrt{3}, 1)^\intercal$ beziehungsweise den Eigenraum $V(1) = L((\sqrt{3}, 1)^\intercal)$.

(b) Bestimmen Sie die Beschreibung ${}_{\mathbb{F}}\alpha_{\mathbb{F}}$ von α bezüglich des Koordinatensystems $\mathbb{F} = (P; f_1, f_2)$ mit dem Ursprung $P = (-1, \sqrt{3})^\intercal$ und den Basisvektoren $f_1 = (-1, \sqrt{3})^\intercal$ und $f_2 = (\sqrt{3}, 1)^\intercal$.

Lösungshinweise hierzu: Zunächst halten wir fest, dass es sich bei f_1 und f_2 um Eigenvektoren von A handelt (siehe Aufgabenteil **(a)**). Die Beschreibung ${}_{\mathbb{F}}\alpha_{\mathbb{F}}$ berechnen wir mittels Satz 4.7.12 aus dem Skript: Das heißt, bezüglich $\mathbb{F}$ ist die Abbildung gegeben durch

$${}_{\mathbb{F}}v \mapsto A'\,{}_{\mathbb{F}}v + b',$$

wobei $A' = F^{-1}AF$ und $b' = F^{-1}(AP - P + b)$ mit $F = (f_1, f_2)$. Es ist zuerst die Matrix F zu invertieren. Es ist

$$F = \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad F^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}F.$$

Für den Linearteil der Abbildung erhält man damit

$$A' = F^{-1}AF = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und für den Translationsanteil

$$\begin{aligned} b' &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix} \right\} \\ &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix} \right\} = 0. \end{aligned}$$

Es ist also ${}_{\mathbb{F}}\alpha_{\mathbb{F}}$ gegeben durch

$${}_{\mathbb{F}}v \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} {}_{\mathbb{F}}v.$$

Online-Aufgabe.

Sie finden ab Donnerstag Ihre Online-Aufgabe auf folgender Webseite.

http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 31. *Orthogonales Diagonalisieren*

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & -1 & 5 \\ 3 & -1 & 11 & -1 \\ 3 & 5 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

(a) Die Matrix A hat die Eigenwerte 0 und 12. Bestimmen Sie die geometrischen Vielfachheiten d_0 und d_{12}.

Lösungshinweise hierzu: Da $d_\mu = \dim V(\mu)$, bestimmen wir die Dimension der Eigenräume zu den Eigenwerten 0 und 12, d.h. wir bestimmen die Lösungen der Gleichungssysteme $Av = 0$ und $(A - 12E_n)v = 0$

- $\underline{Av = 0}$:

$$\left[\begin{array}{rrrr||r} 3 & 3 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & -1 & 5 & 0 \\ 3 & -1 & 11 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & -1 & 5 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{array}{r} \\ Z_1 - Z_2 : \\ Z_1 - Z_3 : \\ Z_1 - Z_4 : \end{array} \left[\begin{array}{rrrr||r} 3 & 3 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & -8 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{array}{r} 2Z_1 + 3Z_2 \\ \\ 2Z_2 + Z_3 : \\ Z_2 - Z_4 : \end{array} \left[\begin{array}{rrrr||r} 6 & 0 & 18 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{array}{r} \frac{1}{6}Z_1 : \\ -\frac{1}{2}Z_2 : \\ \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{rrrr||r} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Also gilt

$$V(0) = L\left(\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

und damit $d_0 = 2$.

- $\underline{(A - 12E_n)v = 0}$:

$$
\begin{array}{rl}
 & \left[\begin{array}{rrrr|r} -9 & 3 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & -7 & -1 & 5 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & -1 & -7 & 0 \end{array}\right] \\
\Rightarrow \begin{array}{r} \\ Z_1+3Z_2: \\ Z_1+3Z_3: \\ Z_1+3Z_4: \end{array} & \left[\begin{array}{rrrr|r} -9 & 3 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -18 & 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 & -18 & 0 \end{array}\right] \\
\Rightarrow \begin{array}{r} 6Z_1+Z_2: \\ \\ \\ Z_2+Z_4: \end{array} & \left[\begin{array}{rrrr|r} -54 & 0 & 18 & 36 & 0 \\ 0 & -18 & 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \\
\Rightarrow \begin{array}{r} -\frac{1}{54}Z_1: \\ -\frac{1}{18}Z_2: \\ \\ \\ \end{array} & \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]
\end{array}
$$

Also gilt

$$V(12) = L\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

und damit $d_{12} = 2$.

(b) Geben Sie eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^4$ an, die aus Eigenvektoren von A besteht.

Lösungshinweise hierzu: Da die Vektoren in $V(0)$ senkrecht auf den Vektoren in $V(12)$ stehen, genügt es, eine Orthonormalbasis zu $V(0)$ und eine Orthonormalbasis zu $V(12)$ zu konstruieren. Die Vereinigung der Basisvektoren bildet dann eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^4$, die aus Eigenvektoren von A besteht.

- Wir bestimmen eine Orthonormalbasis von $V(0)$. Die unter (a) berechneten Basisvektoren von $V(0)$ lauten

$$b_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad b_2 := \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Durchführung des Schmidtschen Orthonormierungsverfahrens:

$$f_1 := \frac{b_1}{|b_1|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f_2^* := b_2 - \langle f_1 \,|\, b_2 \rangle\, f_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f_2 := \frac{f_2^*}{|f_2^*|} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dann bildet f_1, f_2 eine Orthonormalbasis von $V(0)$.

- Wir bestimmen eine Orthonormalbasis von $V(12)$. Die unter (a) berechneten Basisvektoren von $V(12)$ lauten

$$b_3 := \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad b_4 := \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Durchführung des Schmidtschen Orthonormierungsverfahrens:

$$f_3 := \frac{b_3}{|b_3|} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f_4^* := b_4 - \langle f_3 \,|\, b_4 \rangle\, f_3 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ 1 \\ -\frac{1}{5} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f_4 := \frac{f_4^*}{|f_4^*|} = \sqrt{\frac{5}{12}} \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ 1 \\ -\frac{1}{5} \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{3}{5}} \\ \sqrt{\frac{5}{3}} \\ -\sqrt{\frac{1}{15}} \\ \sqrt{\frac{5}{3}} \end{pmatrix}$$

Dann bildet f_3, f_4 eine Orthonormalbasis von $V(12)$.

Eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^4$ aus Eigenvektoren von A wird gebildet aus f_1, f_2, f_3 und f_4.

(c) Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix S so, dass $S^\mathsf{T} A\, S$ eine Diagonalmatrix ist.

Lösungshinweise hierzu: Sei E die Standardbasis von $\mathbb{R}^4$ und B die unter (b) berechnete Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von A bestehend aus f_1, f_2, f_3 und f_4. Sei $\alpha : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ die lineare Abbildung $x \mapsto Ax$. Dann ist ${}_E\alpha_E = A$ und

$$ {}_B\alpha_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}. $$

Die Matrix

$$ S := {}_E\operatorname{id}_B = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}} \\ 0 & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{3}{\sqrt{10}} & -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{15}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}} \end{pmatrix} $$

ist eine orthogonale Matrix, d.h. $S^\intercal = S^{-1} = {}_B\operatorname{id}_E$, und

$$ S^\intercal AS = {}_B\operatorname{id}_E \cdot {}_E\alpha_E \cdot {}_E\operatorname{id}_B = {}_B\alpha_B $$

ist wie gefordert eine Diagonalmatrix.

(d) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von A.

Lösungshinweise hierzu: Für die algebraischen Vielfachheiten e_0 und e_{12} gilt $e_0 \geqq d_0 = 2$ und $e_{12} \geqq d_{12} = 2$ nach Lemma 5.3.4. Da außerdem $e_0 + e_{12} \leqq 4$ gelten muss, folgt $e_0 = e_{12} = 2$ und das charakteristische Polynom von A ist

$$ \chi_A(\lambda) = \lambda^2(\lambda - 12)^2 = \lambda^4 - 24\lambda^3 + 144\lambda^2. $$

Aufgabe H 32. *Symmetrische Matrizen*

Sei A die reelle, symmetrische Matrix mit den Eigenwerten 1 und -2 und den Eigenräumen

$$ V(1) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \qquad V(-2) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right). $$

(a) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von A.

Lösungshinweise hierzu: Zunächst normieren wir den Eigenvektor $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}^{\mathsf{T}}$ zum Eigenwert 1 und setzen

$$f_1 := \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Außerdem führen wir das Schmidtsche Orthonormierungsverfahren mit den Basisvektoren des Eigenraums $V(-2)$

$$b_2 := \begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}, \quad b_3 := \begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}, \quad b_4 := \begin{pmatrix}1\\0\\1\\-2\end{pmatrix}$$

durch.

$$f_2 := \frac{b_2}{|b_2|} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

$$f_3^* := b_3 - \langle f_2 \,|\, b_3\rangle\, f_2 = \begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\-\frac{3}{2}\\\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$f_3 := \frac{f_3^*}{|f_3|} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\-\frac{3}{2}\\\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$f_4^* := b_4 - \langle f_2 \,|\, b_4\rangle\, f_2 - \langle f_3 \,|\, b_4\rangle\, f_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\-2\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix} - \frac{3}{5}\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\-\frac{3}{2}\\\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}-\frac{2}{5}\\\frac{2}{5}\\\frac{6}{5}\\-\frac{6}{5}\end{pmatrix}$$

$$f_4 := \frac{f_4^*}{|f_4^*|} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\\frac{3}{2}\\-\frac{3}{2}\end{pmatrix}$$

Da alle Eigenvektoren zum Eigenwert -2 auf den Eigenvektoren zum Eigenwert 1 senkrecht stehen, bilden f_1, f_2, f_3 und f_4 ein Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^4$ aus Eigenvektoren von A.

(b) Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix S so, dass $S^\intercal A S$ eine Diagonalmatrix ist, und geben Sie diese Diagonalmatrix an. (Sie brauchen A selbst dazu nicht zu kennen!)

Lösungshinweise hierzu: Wir bezeichnen die Standardbasis von $\mathbb{R}^4$ mit E und die in (a) berechnete Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von A mit B. Sei außerdem $\alpha : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ die lineare Abbildung $x \mapsto Ax$. Dann ist $A = {}_E\alpha_E$ und

$$ {}_B\alpha_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. $$

Sei

$$ S := {}_E\mathrm{id}_B = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{3}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 1 & 1 & -\frac{3}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 1 & -1 & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{3}{\sqrt{5}} \\ 1 & -1 & -\frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{3}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}. $$

Dann ist S eine orthogonale Matrix, d.h. es gilt ${}_B\mathrm{id}_E = S^\intercal$, da B und E Orthonormalbasen sind. Da die Diagonalmatrix ${}_B\alpha_B$ geschrieben werden kann als

$$ {}_B\alpha_B = {}_B\mathrm{id}_E \cdot {}_E\alpha_E \cdot {}_E\mathrm{id}_B = S^\intercal \cdot A \cdot S, \tag{17} $$

erfüllt S die gewünschte Eigenschaft.

(c) Bestimmen Sie A.

Lösungshinweise hierzu: Aus (17) folgt, dass

$$ \begin{aligned} A &= S \cdot {}_B\alpha_B \cdot S^\intercal \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{3}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 1 & 1 & -\frac{3}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 1 & -1 & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{3}{\sqrt{5}} \\ 1 & -1 & -\frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{3}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ \frac{3}{\sqrt{5}} & -\frac{3}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{3}{\sqrt{5}} & -\frac{3}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -5 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & -5 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & -5 \end{pmatrix}. \end{aligned} $$

(d) Berechnen Sie die Inverse von A, ohne den Gauß-Algorithmus anzuwenden.

Lösungshinweise hierzu: Es gilt

$$ A^{-1} = (S \cdot {}_B\alpha_B \cdot S^\intercal)^{-1} = S \cdot {}_B\alpha_B{}^{-1} \cdot S^\intercal $$

und mit

$$ {}_B\alpha_B{}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} $$

erhalten wir

$$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{3}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 1 & 1 & -\frac{3}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 1 & -1 & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{3}{\sqrt{5}} \\ 1 & -1 & -\frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{3}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ \frac{3}{\sqrt{5}} & -\frac{3}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{3}{\sqrt{5}} & -\frac{3}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & -1 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe H 33. *Quadrik in* $\mathbb{R}^3$

Betrachten Sie die Quadrik $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid 3x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 - 2\sqrt{3}\,x_1x_3 - 2x_1 - 2\sqrt{3}\,x_3 = 0\}$.

(a) Schreiben Sie die Gleichung der Quadrik in Matrixdarstellung, geben Sie die erweiterte Matrix an und bestimmen Sie den Typ der Quadrik.

Lösungshinweise hierzu: Die Gleichung der Quadrik in Matrixdarstellung lautet $x^\intercal Ax + 2a^\intercal x + c = 0$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -\sqrt{3} \\ 0 & -2 & 0 \\ -\sqrt{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}, \qquad c = 0.$$

Da die erste Zeile der Matrix A das $-\sqrt{3}$-fache ihrer dritten Zeile ist, sieht man leicht, dass $\mathrm{Rg}(A) = 2$. Die erweiterte Matrix lautet

$$A_{\mathsf{erw}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -\sqrt{3} \\ -1 & 3 & 0 & -\sqrt{3} \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ -\sqrt{3} & -\sqrt{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dann ist $\mathrm{Rg}(A_{\mathsf{erw}}) = 4$, was man z.B. an der nicht-verschwindenden Determinante überprüfen kann, die sich leicht mit Laplace-Entwicklung und Regel von Sarrus berechnen lässt.

$$\det(A_{\mathsf{erw}}) = -2 \cdot \det\begin{pmatrix} 0 & -1 & -\sqrt{3} \\ -1 & 3 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} = -2 \cdot (-3 - 3 - 9 - 1) = 32 \neq 0$$

Also gilt $\mathrm{Rg}(A_{\mathsf{erw}}) = \mathrm{Rg}(A) + 2$, d.h. es liegt eine parabolische Quadrik vor.

(b) Beschreiben Sie die Quadrik durch eine Gleichung in Matrixdarstellung in Abhängigkeit von y, wobei $x = Fy$ mit

$$F = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Lösungshinweise hierzu: Wir setzen $x = Fy$ in die Gleichung $x^\intercal Ax + 2a^\intercal x + c = 0$ ein und erhalten die Gleichung $y^\intercal \widetilde{A}y + 2\widetilde{a}^\intercal x + c = 0$ mit

$$\widetilde{A} = F^\intercal AF = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \widetilde{a} = F^\intercal a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Also ist die Quadrik beschriben durch die Gleichung

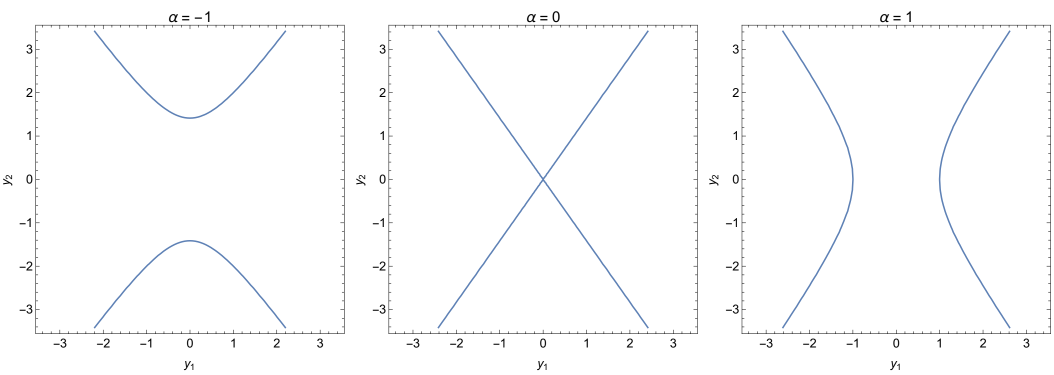
$$4y_1^2 - 2y_2^2 - 4y_3 = 0$$

(c) Welche Kurven können sich durch den Schnitt der Quadrik mit der Ebene $E_\alpha := \{y \in \mathbb{R}^3 \mid y_3 = \alpha\}$ in Abhängigkeit vom Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ ergeben?

Lösungshinweise hierzu: Im Schnitt der Quadrik mit der Ebene E_α liegen alle Punkte $y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \alpha \end{pmatrix}^\intercal$, die die Gleichung

$$4y_1^2 - 2y_2^2 - 4\alpha = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2y_1^2 - y_2^2 = 2\alpha$$

erfüllen. Für $\alpha = 0$ erhält man ein Paar sich schneidender Geraden (vgl. Beispiel 6.2.13). Für $\alpha \neq 0$ erhält man Hyperbeln, die je nach Vorzeichen von α in verschiedene Richtungen geöffnet sind (vgl. Beispiel 6.2.11).



Online-Aufgabe.

Sie finden ab Donnerstag Ihre Online-Aufgabe auf folgender Webseite.

http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test430/

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 34. *Modell: Der Doppelkegel*
Wir betrachten das Modell des Doppelkegels Q aus den Übungen, sowie die gelbe Ebene E.
Sie finden das Modell auch unter:
www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/HM-Stroppel-Material/3D-Modelle/02/.

Der Doppelkegel wird in Standardkoordinaten beschrieben durch $Q : x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$.
Die gelbe Ebene wird in Standardkoordinaten beschrieben durch $E : x_1 + 2x_3 = 3$.
Sei das Koordinatensystem $\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}; \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$ gegeben.

(a) Bestimmen Sie die Koordinatentransformation ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$.

Lösungshinweise hierzu: Zuerst schreiben wir

$$F = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{5} & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Nach 4.7.6. ist dann die Koordinatentransformation durch

$${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}(v) = Fv + P$$

gegeben.

(b) Geben Sie eine Gleichung an, die E bezüglich $\mathbb{F}$ beschreibt.

Lösungshinweise hierzu: Wir schreiben $y = {}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}(x)$. Mit Teil (a) bedeutet das

$$x = {}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}(y) = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2y_1 + y_3 - \sqrt{5} \\ \sqrt{5}y_2 \\ y_1 + 2y_3 + 2\sqrt{5} \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Setzen wir dies in die Gleichung $x_1 + 2x_3 = 3$ von E in Standardkoordinaten ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} & & x_1 + 2x_3 &= 3 \\ &\Leftrightarrow & -\frac{2}{\sqrt{5}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{5}}y_3 - 1 + 2\frac{1}{\sqrt{5}}y_1 + 2\frac{2}{\sqrt{5}}y_3 + 4 &= 3 \\ &\Leftrightarrow & \sqrt{5}y_3 + 3 &= 3 \\ &\Leftrightarrow & y_3 &= 0 \end{aligned}$$

Also wird E bezüglich $\mathbb{F}$ beschrieben durch die Gleichung $y_3 = 0$.

(c) Geben Sie eine Gleichung an, die Q bezüglich $\mathbb{F}$ beschreibt.

Lösungshinweise hierzu: Wir berechnen mit Hilfe von (18) analog zu Teil (b)

$$\begin{aligned}x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 &= \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{5}}y_3 - 1\right)^2 + y_2^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{5}}y_1 + \frac{2}{\sqrt{5}}y_3 + 2\right)^2 \\ &= \frac{4}{5}y_1^2 + \frac{1}{5}y_3^2 + 1 - \frac{4}{5}y_1y_3 + \frac{4}{\sqrt{5}}y_1 - \frac{2}{5}y_3 \\ &\quad + y_2^2 \\ &\quad - \frac{1}{5}y_1^2 - \frac{4}{5}y_3^2 - 4 - \frac{4}{5}y_1y_3 - \frac{4}{\sqrt{5}}y_1 - \frac{8}{\sqrt{5}}y_3 \\ &= \frac{3}{5}y_1^2 + y_2^2 - \frac{3}{5}y_3^2 - \frac{8}{5}y_1y_3 - \frac{10}{\sqrt{5}}y_3 - 3.\end{aligned}$$

Damit wird Q bezüglich $\mathbb{F}$ beschrieben durch die Gleichung

$$\frac{3}{5}y_1^2 + y_2^2 - \frac{3}{5}y_3^2 - \frac{8}{5}y_1y_3 - \frac{10}{\sqrt{5}}y_3 - 3 = 0.$$

(d) Nach Aufgabe **P 38(a)** ist die Schnittlinie von $E \cap Q$ in der gelben Ebene eine Ellipse. Bestimmen Sie die Längen der Halbachsen dieser Ellipse (in Koordinaten bezüglich $\mathbb{F}$).

Lösungshinweise hierzu: Wir erhalten eine Beschreibung der Schnittlinie von $E \cap Q$ bezüglich $\mathbb{F}$, indem wir die Gleichung $y_3 = 0$ von E in die Gleichung von Q aus (c) einsetzen. Wir erhalten

$$\frac{3}{5}y_1^2 + y_2^2 - 3 = 0.$$

Nach Division durch (-3) können wir die Halbachsenlängen in Koordinaten bezüglich $\mathbb{F}$ nach 6.3.6. aus der Gleichung ablesen.

$$-\frac{1}{5}y_1^2 - \frac{1}{3}y_2^2 + 1 = 0$$

Die Halbachsen haben also die Längen $\sqrt{5}$ und $\sqrt{3}$.

Aufgabe H 35. *Räumliche Quadrik*

Gegeben sei die Quadrik $Q = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x^\intercal A\, x + 2\, a^\intercal x = 0\}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -\sqrt{3} \\ 0 & -2 & 0 \\ -\sqrt{3} & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad a = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie eine diagonale Matrix D, sowie eine orthogonale Matrix F so, dass $D = F^\intercal A\, F$.

Lösungshinweise hierzu: Da A eine symmetrische Matrix ist, gibt es eine orthogonale Matrix F so, dass $D = F^\intercal A\, F$ eine Diagonalmatrix ist, mit den Eigenwerten von A als Einträgen.
Zuerst bestimmen wir das charakteristische Polynom der Matrix A.

$$\begin{aligned}\chi_A(\lambda) &= \begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & -\sqrt{3} \\ 0 & -2-\lambda & 0 \\ -\sqrt{3} & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (-2-\lambda)\begin{pmatrix} 3-\lambda & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1-\lambda \end{pmatrix} \\ &= -(2+\lambda)\left((3-\lambda)(1-\lambda)-3\right) = -(\lambda-4)(\lambda+2)\lambda\end{aligned}$$

Die Eigenwerte von A sind damit gegeben durch $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = -2$ und $\lambda_3 = 0$. Damit können wir D setzen als

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Um die Eigenvektoren zu den Eigenwerten und damit F zu bestimmen, lösen wir die folgenden Gleichungssysteme.

- $(A - 4E_3)v = 0$:

$$\begin{array}{r} \\ \\ \\ (-1)Z_1 \\ -\frac{1}{6}Z_2 \\ Z_3 - \sqrt{3}Z_1 \end{array} \begin{array}{c} \left[\begin{array}{rrr|r} -1 & 0 & -\sqrt{3} & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 0 \\ -\sqrt{3} & 0 & -3 & 0 \end{array}\right] \\ \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

  Also gilt

$$V(4) = L\left(\begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

- $(A + 2E_3)v = 0$:

$$\begin{array}{r} \\ \\ \\ \\ \\ Z_3 + \frac{\sqrt{3}}{5}Z_1 \\ \frac{1}{5}(Z_1 + \sqrt{3}\frac{5}{12}Z_3) \\ \\ \frac{5}{12}Z_3 \end{array} \begin{array}{c} \left[\begin{array}{rrr|r} 5 & 0 & -\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{3} & 0 & 3 & 0 \end{array}\right] \\ \left[\begin{array}{rrr|r} 5 & 0 & -\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{12}{5} & 0 \end{array}\right] \\ \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

Also gilt

$$V(-2) = L\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right).$$

- $Av = 0$:

$$\left[\begin{array}{ccc||c} 3 & 0 & -\sqrt{3} & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ -\sqrt{3} & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \frac{1}{3}Z_1 \\ -\frac{1}{2}Z_2 \\ Z_3 + \frac{\sqrt{3}}{3}Z_1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc||c} 1 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Also gilt

$$V(0) = L\left(\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\0\\1\end{pmatrix}\right).$$

Da Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten orthogonal zueinander stehen, müssen wir die Eigenvektoren nur noch normieren, um eine Orthonormalbasis zu erhalten.

$$f_1 = \frac{1}{2}v_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\0\\-1\end{pmatrix} \qquad f_2 = v_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \qquad f_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}v_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\\sqrt{3}\end{pmatrix}$$

Setzen wir nun

$$F = (f_1, f_2, f_3) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{3} & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ -1 & 0 & \sqrt{3}\end{pmatrix},$$

so gilt nach 5.4.2. dass $D = F^{\mathsf{T}} A\, F$.

(b) Bestimmen Sie eine euklidische Normalform von Q, sowie ein kartesisches Koordinatensystem $\mathbb{F}$, bezüglich dessen Q diese Normalform annimmt.

Lösungshinweise hierzu: Mit

$$F^{\mathsf{T}} a = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{3} & 0 & -1\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & \sqrt{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\0\\-\sqrt{3}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\-2\end{pmatrix}$$

erhalten wir die folgende Beschreibung von Q, die wir bereits in Aufgabe **H 33,(b)** gesehen haben.

$$4y_1^2 - 2y_2^2 - 4y_3 = 0$$

Bezüglich des Koordinatensystems

$$\mathbb{F} = (0; f_1, f_2, f_3) = \left(\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}; \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\\sqrt{3}\end{pmatrix}\right)$$

ist die euklidische Normalform von Q damit gegeben durch

$$-2y_1^2 + y_2^2 + 2y_3 = 0.$$

Aufgabe H 36. *Quadrik mit Parameter*

Betrachten Sie die von einem Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ abhängige Quadrik

$$Q_\alpha := \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 2(x_1 + x_2)^2 - 6x_1x_2 - \sqrt{2}(x_1 + 7x_2) + (\alpha - 2)(2x_3 + 1) + 16 = 0 \right\}.$$

(a) Schreiben Sie die Gleichung der Quadrik Q_α in Matrixform.

Lösungshinweise hierzu: Durch Umsortieren folgt

$$Q_\alpha := \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 - \sqrt{2}\, x_1 - 7\sqrt{2}\, x_2 + 2(\alpha - 2)x_3 + (\alpha + 14) = 0 \right\}.$$

Für die Matrixform der Gleichung der Quadrik erhalten wir damit $x^\intercal A x + 2a_\alpha^\intercal x + c_\alpha = 0$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad a_\alpha = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ -7\sqrt{2} \\ 2(\alpha - 2) \end{pmatrix}, \qquad c_\alpha = \alpha + 14.$$

(b) Bestimmen Sie eine euklidische Normalform von Q_α in Abhängigkeit von α.

(c) Geben Sie den Typ und die Gestalt von dieser Quadrik in Abhängigkeit von α an.

Lösungshinweise hierzu: Wir berechnen zuerst die Eigenwerte von A. Da A Blockdiagonalgestalt besitzt erhalten wir für das charakteristische Polynom

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_3) &= \det \begin{pmatrix} 2 - \lambda & -1 \\ -1 & 2 - \lambda \end{pmatrix} (-\lambda) \\ &= -[(2 - \lambda)^2 - (-1)^2]\lambda = [\lambda^2 - 4\lambda + 3]\lambda = -(\lambda - 3)(\lambda - 1)\lambda. \end{aligned}$$

Daraus ergeben sich die Eigenwerte

$$\lambda_1 = 3, \qquad \lambda_2 = 1, \qquad \lambda_3 = 0.$$

Zugehörige normierte Eigenvektoren sind

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Somit erhalten wir die Transformationsmatrix

$$F = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Mit $F^\intercal a_\alpha = \left(\begin{smallmatrix} -3 \\ -4 \\ \alpha-2 \end{smallmatrix}\right)$ ergibt sich die transformierte Gleichung

$$3y_1^2 + y_2^2 - 6y_1 - 8y_2 + 2(\alpha-2)y_3 + (\alpha+14) = 0.$$

Mit quadratischer Ergänzung folgt daraus

$$3(y_1-1)^2 + (y_2-4)^2 + 2(\alpha-2)y_3 + (\alpha-5) = 0.$$

Wir setzen daher $z_1 := y_1 - 1$, $z_2 := y_2 - 4$, $z_3 := y_3$ und erhalten schließlich die Gleichung

$$3z_1^2 + z_2^2 + 2(\alpha-2)z_3 + (\alpha-5) = 0.$$

Nun können wir die euklidische Normalform, die Gestalt und den Typ der Quadrik genauer spezifizieren. Wir untersuchen dafür, ob der lineare Anteil $2(\alpha-2)z_3$ übrig bleibt oder nicht:

- Falls $\alpha = 2$ ist, so verschwindet der lineare Anteil mit der Variable z_3 und wir erhalten $3z_1^2 + z_2^2 - 3 = 0$. Die euklidische Normalform ist somit

  $$-z_1^2 - \frac{1}{3}z_2^2 + 1 = 0.$$

  In $\mathbb{R}^3$ betrachtet, beschreibt diese Gleichung einen elliptischen Zylinder und der Typ der Quadrik Q_2 ist eine Mittelpunktsquadrik.
- Für $\alpha \neq 2$ verschwindet der lineare Anteil mit z_3 nicht. Wir verschieben daher (gegen die Konstante) indem wir $z_3 =: w_3 - \frac{\alpha-5}{2(\alpha-2)}$ (und $z_j =: w_j$ für $j \neq 3$) setzen, und erhalten $3w_1^2 + w_2^2 + 2(\alpha-2)w_3 = 0$. Somit ist die euklidische Normalform schließlich

  $$\frac{3}{\alpha-2}w_1^2 + \frac{1}{\alpha-2}w_2^2 + 2w_3^2 = 0.$$

  Für $\alpha < 2$ und für $\alpha > 2$ tragen die Koeffizienten der zwei quadratischen Terme dasselbe Vorzeichen. Also ist die Gestalt der Quadrik Q_α für $\alpha \neq 2$ stets ein elliptisches Paraboloid und der zugehörige Typ ist eine parabolische Quadrik.

Online-Aufgabe.

Sie finden ab Donnerstag Ihre Online-Aufgabe auf folgender Webseite.

http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 37. *Modell: Einschaliges Hyperboloid*

Die Quadrik Q in $\mathbb{R}^3$ sei in Standardkoordinaten gegeben durch

$$Q : x_1^2+4x_2^2+x_3^2-2x_1x_2+8x_1x_3-2x_2x_3+(3\sqrt{2}-\sqrt{6})x_1-2\sqrt{6}x_2-(3\sqrt{2}+\sqrt{6})x_3-6=0.$$

Ein Modell von Q hatten Sie in den Übungen in den Händen. Sie finden dies auch unter: www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/HM-Stroppel-Material/3D-Modelle/03/.

Sei das kartesische Koordinatensystem

$$\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

gegeben. Dieses wird im Modell farbig dargestellt.

(a) Geben Sie eine Gleichung von Q in Koordinaten y_1, y_2, y_3 bezüglich $\mathbb{F}$ an.

Lösungshinweise hierzu: Zuerst schreiben wir die Gleichung von Q in die Form

$$x^{\mathsf{T}} A\, x + a^{\mathsf{T}} x + c = 0 \tag{19}$$

um mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -1 & 4 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad a = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3\sqrt{2}-\sqrt{6} \\ -2\sqrt{6} \\ -3\sqrt{3}-\sqrt{6} \end{pmatrix} \qquad c = -6.$$

Nach 4.7.6. ist ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}(y) = Fy + 0$ gegeben durch

$$F = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Für eine Gleichung von Q bezüglich $\mathbb{F}$ setzen wir also $x = Fy$ in (19) ein und erhalten

$$y^{\mathsf{T}} (F^{\mathsf{T}} A\, F) y + (F^{\mathsf{T}} a)^{\mathsf{T}} y + c = 0.$$

mit

$$F^{\mathsf{T}} A\, F = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \qquad F^{\mathsf{T}} a = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Damit wird Q bezüglich $\mathbb{F}$ durch die folgende Gleichung beschrieben.

$$3y_1^2 + 6y_2^2 - 3y_3^2 - 6y_1 + 6y_3 - 6 = 0 \tag{20}$$

(b) Bestimmen Sie eine euklidische Normalform von Q, sowie ein Koordinatensystem $\mathbb{G}$, bezüglich dem Q diese Normalform annimmt.

Lösungshinweise hierzu: In Teil (a) haben wir bereits den ersten Schritt der Hauptachsentransformation durchgeführt. Als zweiten Schritt verschieben wir den Ursprung des Koordinatensystems, um den linearen Teil zum Verschwinden zu bringen.

Durch quadratische Ergänzung können wir Gleichung (20) wie folgt umschreiben.

$$3\left((y_1-1)^2-1\right)+6y_2^2-3\left((y_3-1)^2-1\right)-6=0$$

Wir setzen nun $z := y - {}_{\mathbb{F}}P$ mit

$${}_{\mathbb{F}}P = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad P := {}_{\mathbb{E}}P = F\,{}_{\mathbb{F}}P = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1+\sqrt{3}\\2\\1-\sqrt{3}\end{pmatrix}$$

Bezüglich des Koordiatensystems

$$\mathbb{G} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1+\sqrt{3}\\2\\1-\sqrt{3}\end{pmatrix}; \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right)$$

wird Q damit beschrieben durch die folgende Gleichung.

$$3z_1^2+6z_2^2-3z_3^2-6=0$$

Division durch (-6) liefert uns die zugehörige euklidische Normalform.

$$-\frac{1}{2}z_1^2-z_2^2+\frac{1}{2}z_3^2+1=0$$

(c) Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ ein Parameter. Die Ebene E_α sei bezüglich des Koordinatensystems $\mathbb{G}$ beschrieben durch die Gleichung $z_1 = \alpha$. Bestimmen Sie die Gestalt von $Q \cap E_\alpha$ in Abhängigkeit von α.

Lösungshinweise hierzu: Einsetzen von $z_1 = \alpha$ in die Gleichung von Q aus Teil (b) liefert die folgende Beschreibung von $Q \cap E_\alpha$.

$$-z_2^2+\frac{1}{2}z_3^2+(1-\frac{\alpha^2}{2})=0$$

Falls $(1-\frac{\alpha^2}{2})=0$, d.h. $\alpha \in \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$, so erhalten wir die Gleichung $-z_2^2+\frac{1}{2}z_3^2=0$ für den Schnitt und damit ein schneidendes Geradenpaar.

Falls $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$, so erhalten wir die Gleichung $-\frac{2}{2-\alpha^2}z_2^2+\frac{1}{2-\alpha^2}z_3^2+1=0$. Damit tragen die Koeffizienten der zwei quadratischen Terme verschiedene Vorzeichen. Also ist die Gestalt von $Q \cap E_\alpha$ in diesem Fall eine Hyperbel.

(d) Bestimmen Sie eine Gleichung für E_{-1} in Standardkoordinaten x_1, x_2, x_3.

Lösungshinweise hierzu: Nach 4.7.6. ist ${}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{E}}$ gegeben durch ${}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{E}}(x) = F^{\intercal}x - F^{\intercal}P$. Damit erhalten wir

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = {}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{E}}(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} \\ 2 \\ 1-\sqrt{3} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}}(x_1 + 2x_2 + x_3) \\ \frac{1}{\sqrt{3}}(x_1 - x_2 + x_3) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_3) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Also ist

$$\begin{aligned} z_1 = -1 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{6}}(x_1 + 2x_2 + x_3) - 1 = -1 \\ &\Leftrightarrow \quad x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{aligned}$$

Die Gleichung für E_{-1} in Standardkoordinaten ist also $x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$.

Aufgabe H 38. *Rekursive Folge, Definition Grenzwert, Monotonie*

Sei die Folge $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{2n}{n+3}$ gegeben.

(a) Finden Sie zwei verschiedene rekursive Darstellungen der Folge.

Lösungshinweise hierzu: Aus $a_n = \frac{2n}{n+3}$ berechnen wir die ersten Folgenglieder $a_1 = \frac{1}{2}$ und $a_2 = \frac{4}{5}$, welche uns als Startwerte für die Rekursionsvorschriften dienen. Wir berechnen zunächst $a_n - \gamma a_{n-1}$ für $\gamma \in \mathbb{R}$:

$$a_n - \gamma a_{n-1} = \frac{2n}{n+3} - \gamma\frac{2(n-1)}{(n-1)+3} = \frac{2n(n+2)(1-\gamma) + 6\gamma}{(n+3)(n+2)}.$$

Setzen wir $\gamma = 1$, so erhalten wir für die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Rekursionsvorschrift

$$a_n := a_{n-1} + \frac{6}{(n+3)(n+2)}, \ n \geqq 2 \quad \text{mit} \quad a_1 := \frac{1}{2}.$$

Setzen wir $\gamma = \frac{5}{4}$, so erhalten wir hingegen die Rekursionsvorschrift

$$a_n := \frac{5}{4}a_{n-1} - \frac{(n+5)(n-3)}{2(n+3)(n+2)}, \ n \geqq 2 \quad \text{mit} \quad a_1 := \frac{1}{2}.$$

Alternativ ist es möglich den Quotienten $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{(n+2)n}{(n+3)(n-1)}$ für $n \geqq 2$ zu berechnen. Eine weitere Rekursionsdarstellung für $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist somit gegeben surch

$$a_n := \frac{(n+2)n}{(n+3)(n-1)}\, a_{n-1}, \ n \geqq 2 \quad \text{mit} \quad a_1 := \frac{1}{2}.$$

Zudem ist es auch möglich mehrere Folgenglieder zu betrachten. Zum Beispiel folgt aus

$$a_n - a_{n-1} - a_{n-2} = -2\frac{n^3+3n^2-7n-15}{(n+3)(n+2)(n+1)} = 6\left(-\frac{1}{n+3}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+1}\right) - 2$$

die Rekursionsdarstellung

$$a_n := a_{n-1}+a_{n-2}+6\left(-\frac{1}{n+3}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+1}\right)-2,\ n \geqq 3 \quad \text{mit} \quad a_1 := \frac{1}{2},\ a_2 := \frac{4}{5}.$$

(b) Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Finden Sie dazu ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ so, dass $|a_n - 2| < \varepsilon$ ist für $n > n_\varepsilon$.

Lösungshinweise hierzu: Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann soll für $n > n_\varepsilon$ gelten, dass $|a_n - 2| < \varepsilon$ ist. Für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$2n < 2n+6 = 2(n+3) \iff \frac{2n}{n+3} < 2 \iff \frac{2n}{n+3} - 2 < 0. \tag{21}$$

Damit erhalten wir

$$|a_n - 2| < \varepsilon \iff \left|\frac{2n}{n+3} - 2\right| < \varepsilon \overset{(21)}{\iff} -\frac{2n}{n+3} + 2 < \varepsilon \overset{\substack{n+3>0,\\ \varepsilon>0}}{\iff} \frac{6}{\varepsilon} - 3 < n.$$

Somit ist für ein gegebenes $\varepsilon > 0$ die Bedingung $|a_n - 2| < \varepsilon$ für alle $n > n_\varepsilon := \frac{6}{\varepsilon} - 3$ erfüllt.

(c) Bestimmen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ und begründen Sie Ihre Antwort mittels **(b)**.

Lösungshinweise hierzu: In Aufgabenteil **(b)** wurde gezeigt, dass für alle $\varepsilon > 0$ ein $n_\varepsilon := \frac{6}{\varepsilon} - 3$ so existiert, dass für alle $n > n_\varepsilon$ die Bedingung

$$|2 - a_n| = |a_n - 2| < \varepsilon.$$

erfüllt ist. Mit **Definition 1.4.1** folgt dann sofort, dass $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$ gilt.

(d) Für welche $q \in \mathbb{R}$ ist $(a_n + \frac{q}{n+3})_{n\in\mathbb{N}}$ streng monoton steigend?

Lösungshinweise hierzu: Es sei $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge gegeben durch $b_n := a_n + \frac{q}{n+3}$ mit beliebigem, aber festem $q \in \mathbb{R}$. Es soll nun $q \in \mathbb{R}$ so bestimmt werden, dass $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ streng monoton steigend ist. Dazu muss gemäß **Definition 1.2.2** die Ungleichung $b_{n+1} > b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
b_{n+1} > b_n &\iff a_{n+1} + \frac{q}{n+4} > a_n + \frac{q}{n+3} \\
&\iff \frac{2(n+1)}{n+4} + \frac{q}{n+4} > \frac{2n}{n+3} + \frac{q}{n+3} \\
&\iff \frac{(2n+q)+2}{n+4} - \frac{2n+q}{n+3} > 0 \\
&\iff \frac{-(2n+q)+2(n+3)}{(n+4)(n+3)} > 0 \\
&\iff \frac{6-q}{(n+4)(n+3)} > 0.
\end{aligned}$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $n+4>0$ und $n+3>0$ und somit $(n+4)(n+3)>0$. Damit ist der Bruch auf der linken Seite in der letzten Ungleichung positiv für alle $n \in \mathbb{N}$ genau dann, wenn $6-q>0 \iff 6>q$. Also ist $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ streng mononton steigend für alle $q \in \mathbb{R}$, welche $6>q$ erfüllen.

Aufgabe H 39. *Konvergenz und Häufungspunkte*

Untersuchen Sie jeweils die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert. Bestimmen Sie zudem jeweils alle Häufungspunkte, sowie den Limes superior und den Limes inferior der Folgen.

(a) $a_n = \dfrac{4n^3-1}{10n^2+5\sqrt{n}}$

(b) $a_n = (-1)^n \sqrt[n]{\dfrac{2n}{5^{n^2}}} + \dfrac{\sin(n)}{n}$

(c) $a_n = \operatorname{Im}\left(2^{-n}\left(-1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^n\right)$

(d) $a_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{3^k+(-1)^k}{7^k}$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$a_n = \frac{4n^3-1}{10n^2+5\sqrt{n}} = \frac{(2n\sqrt{n}-1)(2n\sqrt{n}+1)}{5\sqrt{n}(2n\sqrt{n}+1)} = \frac{2n\sqrt{n}-1}{5\sqrt{n}} = \frac{1}{5}\left(2n-\frac{1}{\sqrt{n}}\right) > \frac{1}{5}n,$$

wobei die letzte Ungleichung aus

$$2n\sqrt{n}-1 > 2n\sqrt{n}-n\sqrt{n} = n\sqrt{n} \quad \Longrightarrow \quad 2n-\frac{1}{\sqrt{n}} > n$$

folgt. Die Folge $(\frac{1}{5}n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist bestimmt divergent gegen $+\infty$. Da nun $a_n > \frac{1}{5}n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, ist auch $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bestimmt divergent gegen $+\infty$ (also $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$) und es gilt $\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n = \varliminf\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

(b) Wir können die Folgenglieder schreiben als

$$a_n = (-1)^n \sqrt[n]{\frac{2n}{5^{n^2}}} + \frac{\sin(n)}{n} = \left(-\frac{1}{5}\right)^n \sqrt[n]{2}\,\sqrt[n]{n} + \frac{\sin(n)}{n} = b_n + c_n$$

mit $b_n := \left(-\frac{1}{5}\right)^n \sqrt[n]{2}\,\sqrt[n]{n}$ und $c_n := \frac{\sin(n)}{n}$. Wir untersuchen nun separat die Folgen $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz.
Da $\left|-\frac{1}{5}\right| < 1$, folgt mit Beispiel 1.5.8.1, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{5}\right)^n = 0$. Mit Beispiel 1.5.7 erhalten wir zudem $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = 1$ und aus Beispiel 1.5.10 schließlich $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Mit den Grenzwertsätzen 1.5.3 folgt somit insgesamt $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.
Betrachten wir nun $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Wir erhalten wegen $-1 \leqq \sin(n) \leqq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ die Abschätzung

$$-\frac{1}{n} \leqq \frac{\sin(n)}{n} \leqq \frac{1}{n}.$$

Da $\lim\limits_{n\to\infty} -\frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, folgt mit dem Sandwichsatz 1.5.6, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin(n)}{n} = 0$.
Mit den Grenzwertsätzen 1.5.3 folgt damit schließlich

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n + \lim_{n\to\infty} c_n = 0 + 0 = 0.$$

Somit ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und es folgt mit Satz 1.6.10 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = 0$.

(c) Wegen $2^{-n}\left(-1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^n = \left(-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n = \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right)$ können die Folgenglieder geschrieben werden als $a_n = \operatorname{Im}\left(\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right)\right) = \sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right)$.
Wir finden Teilfolgen so, dass der Sinus-Term in jeder Teilfolge konstant bleibt:

$$\begin{aligned} a_{3k} &= \sin(2\pi k) = 0, & a_{3k+1} &= \sin\left(2\pi k + \tfrac{2\pi}{3}\right) = \tfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ a_{3k+2} &= \sin\left(2\pi k + \tfrac{4\pi}{3}\right) = -\tfrac{\sqrt{3}}{2}, & a_{3k+3} &= \sin(2\pi(k+1)) = 0. \end{aligned}$$

Jedes Folgenglied von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist durch ein Glied einer der konstanten Teilfolgen $(a_{3k})_{k\in\mathbb{N}}$, $(a_{3k+1})_{k\in\mathbb{N}}$, $(a_{3k+2})_{k\in\mathbb{N}}$, $(a_{3k+3})_{k\in\mathbb{N}}$ abgedeckt. Die Häufungspunkte sind genau die Grenzwerte dieser Teilfolgen, also 0, $\frac{\sqrt{3}}{2}$ und $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.
Es gilt somit $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ und $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Da die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mehr als einen Häufungspunkt besitzt, ist sie nach Satz 1.6.10 divergent.

(d) Wir schreiben die Folgenglieder als

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{3^k + (-1)^k}{7^k} = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{3}{7}\right)^k + \sum_{k=0}^{n} \left(-\frac{1}{7}\right)^k.$$

Da $\left|\frac{3}{7}\right| < 1$ und $\left|-\frac{1}{7}\right| < 1$, folgt mit dem Beispiel der geometrischen Reihe 1.8.4

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{3}{7}\right)^k &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3}{7}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{3}{7}} = \frac{7}{4}, \\ \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \left(-\frac{1}{7}\right)^k &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{7}\right)^k = \frac{1}{1+\frac{1}{7}} = \frac{7}{8}. \end{aligned}$$

Mit den Grenzwertsätzen 1.5.3 für Folgen erhalten wir insgesamt

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{3^k + (-1)^k}{7^k} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{3}{7}\right)^k + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \left(-\frac{1}{7}\right)^k = \frac{7}{4} + \frac{7}{8} = \frac{21}{8}.$$

Mit Satz 1.6.10 folgt damit $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = \frac{21}{8}$.

Online-Aufgabe.
Zu diesem Übungsblatt gibt es keine Online-Aufgabe.